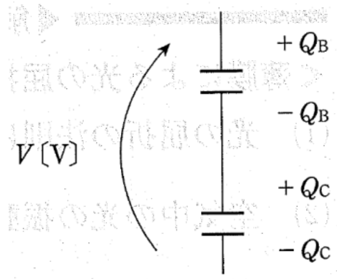
高３物理総合Ｓ～夏期講習会第５回～＜解答＞◆コンデンサーと直流回路◆

＜予習用問題＞

【１】（１）$I_1 = \dfrac{V}{R_1}$ ，$I_2 = 0$　　（２）$C_A = \dfrac{\varepsilon_0 l^2}{d_A}$

（３）コンデンサーA に加わる電圧は V であるから $Q_A = C_A V$

コンデンサーB，C の電気容量をそれぞれ C_B ，C_C とすると



$$C_B = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d_B} = \frac{d_A}{d_B}C_A = 2C_A \quad , \quad C_C = \frac{d_A}{d_C}C_A = 3C_A$$

最初，コンデンサーに電荷は蓄えられていなかったので，

右図より，$-Q_B + Q_C = 0$　　$\therefore Q_C = Q_B$

よって $V = \dfrac{Q_B}{C_B} + \dfrac{Q_C}{C_C} = Q_B\left(\dfrac{1}{2C_A} + \dfrac{1}{3C_A}\right) = \dfrac{5Q_B}{6C_A}$

$\therefore Q_B = Q_C = \dfrac{6}{5}C_A V = 1.2C_A V$

（４）コンデンサーA，B，C が持つ静電エネルギーをそれぞれ U_A ，U_B ，U_C とすると

$$U_A = 0.5C_A V^2 \ ,\ U_B = \frac{Q_B{}^2}{2C_B} = \frac{(1.2C_A V)^2}{2\times 2C_A} = 0.36C_A V^2 \ ,\ U_C = \frac{Q_C{}^2}{2C_C} = \frac{(1.2C_A V)^2}{2\times 3C_A} = 0.24C_A V^2$$

$\therefore U = U_A + U_B + U_C = 1.1C_A V^2$

（５）直列接続されたコンデンサーB，C は，電圧 V の加えられた１つの

コンデンサーに，電荷 Q_B が蓄えられていると考えればよいので

$W = Q_A V + Q_B V = 2.2C_A V^2$

（６）平行板コンデンサーの容量は，極板が重なった部分の面積に比例するので

$$\frac{C'}{C} = \frac{l(l-x)}{l^2} = 1 - \frac{x}{l} \qquad \therefore C' = \left(1 - \frac{x}{l}\right)C$$

（７）極板の面積 $l\,(l-x)$の部分は真空，面積 lx の部分は誘電体が挿入されているので

$$C'' = \left(1 - \frac{x}{l}\right)C + \frac{\varepsilon_r x}{l}C = \left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{l}x\right)C$$

【２】（１）点Ｐ：Ｖ　点Ｒ：Ｖ

（２）図１のように３つのコンデンサーをC_1，C_2，C_3とし，それぞれの電気容量を

Cとする。

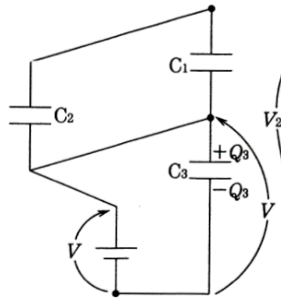


図　１

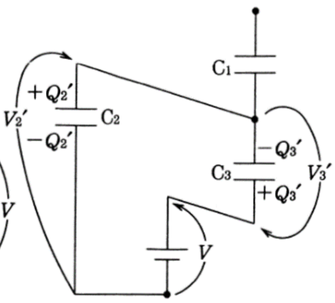


図　２

図1（問1）の状態で，$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$に蓄えられている電荷はともに0であり，$\mathrm{C_3}$に
蓄えられている電荷は$Q_3 = CV$である。

図2の状態では，$\mathrm{C_1}$の上側極板に蓄えられている電荷は変化せず0のままであるから，
$\mathrm{C_1}$にかかる電圧は0である。$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{C_3}$にかかる電圧をそれぞれV_2'，V_3'，蓄えられている
電荷をそれぞれQ_2'，Q_3'とする。

電気量保存則により　$+Q_3 = +Q_2' - Q_3'$　……①

電圧の関係より　$V_2' + V_3' = V$　……②

それぞれのコンデンサーについて　$Q_2' = CV_2'$，$Q_3' = \mathrm{C}V_3'$　……③

①～③より　$V_2' = V$，$V_3' = 0$

したがって，点Pの電位V_PはV_2'に等しいから，　$V_P = V$　……（答）

点Rの電位V_Rは，$\mathrm{C_1}$にかかる電圧が0であり，点Pの電位V_Pに等しいから

$V_R = V$　……（答）

（3）図2（問2）では$Q_2' = CV$，$Q_3' = 0$であるから，図1から図2への変化で$\mathrm{C_3}$に
あった電荷CVが，すべて$\mathrm{C_2}$に移動したことになる。この電荷を運ぶ仕事は電圧Vの電池が
行ったから，電池がした仕事W_Eは

$W_E = CV \times V = CV^2$

電荷が移動したことによる，コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの
変化$\varDelta U$は，変化後の$\mathrm{C_2}$の静電エネルギーと，変化前の$\mathrm{C_3}$の静電エネルギーの差であるから

$$\varDelta U = \frac{1}{2}CV^2 - \frac{1}{2}CV^2 = 0$$

したがって，電池がした仕事W_Eは，全てジュール熱Qとして失われることになり，
すなわち，回路全体から発生するジュール熱Qは

$Q = W_E = CV^2$……（答

（4）図3の状態で，$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{C_3}$にかかる
電圧をそれぞれV_1''，V_2''，V_3''，
蓄えられている電荷をそれぞれ
Q_1''，Q_2''，Q_3'' とする。

電気量保存則より

$+Q_2' = +Q_1'' - Q_2''$　……④

電圧の関係より，$\mathrm{C_1}$と$\mathrm{C_2}$にかかる電圧の和は
0，$\mathrm{C_3}$にかかる電圧はVとなるから

$V_1'' + V_2'' = 0$, $V_3'' = V$　……⑤

それぞれのコンデンサーのついて

$Q_1'' = CV_1''$，$Q_2'' = CV_2''$　……⑥

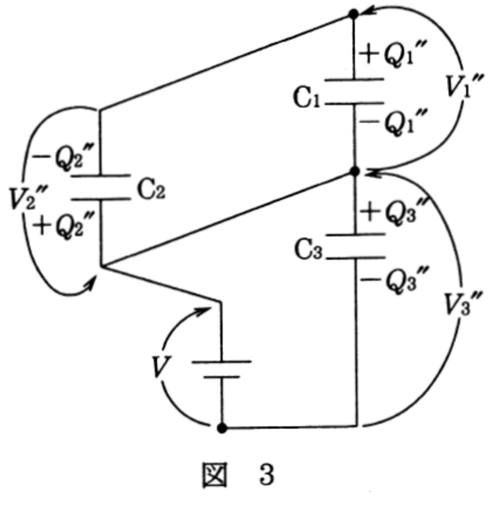


図　3

④～⑥より　$V_1'' = \frac{1}{2}V$,　$V_2'' = -\frac{1}{2}V$

$$\left.\begin{array}{l} \text{したがって，点Pの電位}V_P\text{は}V_3''\text{に等しいから}\quad V_P = V \\ \text{点Rの電位}V_R\text{は}\quad V_R = V_3'' + V_1'' = V + \frac{1}{2}V = \frac{3}{2}V \end{array}\right\}\cdots\cdots\text{（答）}$$

＜演習問題＞

【１】

＜解答＞

(1)　(ア)　$\dfrac{7}{4}C$　　(イ)　$\dfrac{7}{4}CE$　　(ウ)　$\dfrac{7}{8}CE^2$　(2)　(エ)　$\dfrac{7}{4}CE$　　(オ)　$\dfrac{7}{8}CE^2$

(3)　$4E$ [V]　　(4)　$\dfrac{4}{3}E$ [V]　　(5)　(カ)　$\dfrac{L+3a}{L}CE^2$　　(キ)　CE^2　　(ク)　$\dfrac{3}{8}E$

(ケ)　①　　(コ)　$\dfrac{L+3a}{L}E$　　(サ)　$\dfrac{L+a}{L}CE$　　(シ)　$\dfrac{2(L+a)}{L}CE$　　(ス)　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}L$

＜解説＞

(1)(ア)　真空の誘電率を ε_0[F/m]とすると　$C=\varepsilon_0\dfrac{L\times 1}{d}=\dfrac{\varepsilon_0 L}{d}$ [F]

導体を $x=\dfrac{L}{4}$ [m]まで挿入したとき，コンデンサー1 は図 a のような状態と考えてよい。右側の部分は，もとと比べて極板面積が$\dfrac{3}{4}$倍になっているので，電気容量は$\dfrac{3}{4}C$ [F]となる。

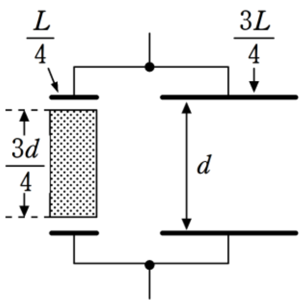


図 a

左側の部分は，挿入した導体の厚さ$\dfrac{3}{4}d$ [m]で電位差がないので，結局，極板間隔が$\dfrac{d}{4}$ [m]になったのと同様である。極板面積がもとの$\dfrac{1}{4}$倍，極板間隔も$\dfrac{1}{4}$倍で，結局，電気容量は C [F]となる。以上 2 つが並列接続されているので，合成容量は　$\dfrac{3}{4}C+C=\boldsymbol{\dfrac{7}{4}C}$ [F]

(イ)　これに電圧 E [V]がかかっているので，電気量は　$\boldsymbol{\dfrac{7}{4}CE}$ [C]

(ウ)　静電エネルギーは　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7}{4}CE^2=\boldsymbol{\dfrac{7}{8}CE^2}$ [J]

(2)(エ)　コンデンサー2 は，コンデンサー1 と比べて極板間隔が$\dfrac{1}{2}$倍なので，電気容量は 2 倍の $2C$ [F]である。

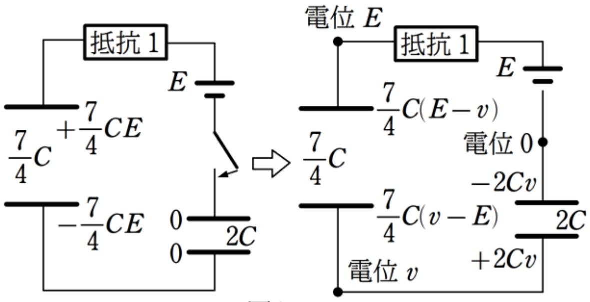


図 b

　スイッチ 1 を端子 B につなぎかえて十分に長い時間が経過したとき，回路の各点の電位が図 b のようになったと考えて電気量の保存を用いると　$-\dfrac{7}{4}CE=\dfrac{7}{4}C(v-E)+2Cv$

展開して　$-\frac{7}{4}CE=-\frac{7}{4}CE+\frac{7}{4}Cv+2Cv$

よって $v=0$ である。つまり，スイッチ 1 をつなぎかえてもコンデンサー1 にかかる電圧は

変化しないことになるので，電気量は　$\boldsymbol{\frac{7}{4}CE}$ [C]

(オ)　静電エネルギーは　$\boldsymbol{\frac{7}{8}CE^2}$ [J]

(3)　コンデンサー1 に導体が完全に挿入された状態のとき，極板間隔がもとの$\frac{1}{4}$倍の場合に相等し，電気容量は 4 倍の $4C$ [F]である。スイッチ 2 を閉じてコンデンサー1 を完全に充電したときの電気量は $4CE$ [C]となる。この状態からスイッチ 2 を開き，続いて導体を引き抜くと，電気量は $4CE$ [C]のまま，電気容量が C [F]になるので，極板間の

電位差は　$\frac{4CE}{C}=\boldsymbol{4E}$ [V]

(4)　コンデンサー1 の極板間の電位差が V_1 [V]になるとすると，図 c のような変化が起きる。

電気量の保存より　$4CE=CV_1+2CV_1$

よって　$V_1=\boldsymbol{\frac{4}{3}E}$ [V]

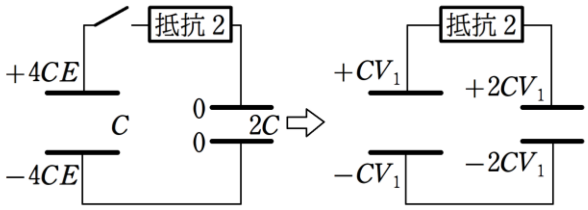


図 c

(5)(カ)　図 4 の状態のコンデンサー1 の電気容量は，(1)と同様に，極板間隔$\frac{d}{4}$ [m]，極板面積 $a\times 1$ [m^2]のコンデンサーと極板間隔 d [m]，極板面積$(L-a)\times 1$[m^2]のコンデンサーの並列接続とみなされるから

$$\varepsilon_0\frac{a\times 1}{\frac{d}{4}}+\varepsilon_0\frac{(L-a)\times 1}{d}=\frac{\varepsilon_0}{d}(4a+L-a)=\frac{\varepsilon_0}{d}\times\frac{L+3a}{L}=\frac{L+3a}{L}C\ \text{[F]}$$

よって，スイッチ 2 を閉じてコンデンサー1 を完全に充電したときに蓄えられる

電気量が$\frac{L+3a}{L}CE$ [C]であり，直流電源はこの電気量を電圧 E [V]だけ高いところに

運んだことになるので，直流電源のする仕事は　$\frac{L+3a}{L}CE\cdot E=\boldsymbol{\frac{L+3a}{L}CE^2}$ [J]

(キ)　さらに，スイッチ 3 も閉じて十分に時間がたつと，コンデンサー1 にかかる電圧は E [V]のままなので電気量も変化なく，コンデンサー2 にあらたに $2CE$ [C]の電気量が蓄えられることになる。スイッチ 3 を閉じる前後で，電源のする仕事は

$$2CE\cdot E=2CE^2\ \text{[J]}$$

であり，コンデンサーの静電エネルギーの総和の変化は，コンデンサー2 の静電

エネルギー　$\frac{1}{2}\times 2CE^2=CE^2$ [J]　に等しい。これらの差が発生するジュール熱であるから

$$2CE^2-CE^2=\boldsymbol{CE^2}\ \text{[J]}$$

(ク)(ケ)　点 P の電位を考える。導体と下の極板，導体と上の極板の間隔は等しく，導体

の上下の電場の強さも等しいので，導体の電位は下の極板$\dfrac{E}{2}$ [V]だけ高い。したがって，

点 P の電位は下の極板より$\dfrac{E}{2}$ [V]高い。次に点Qの電位を考える。上下の極板の間隔が

d [m]で電位差が E [V]，一様な電場なので，電場にそって下の極板から$\dfrac{d}{8}$ [m]離れた点 Q の電位は，下の極板より$\dfrac{E}{8}$ [V]高い。

よって，図 d のように点 P のほうが点 Q よりも電位が$\boldsymbol{\dfrac{3}{8}E}$ [V]高い。

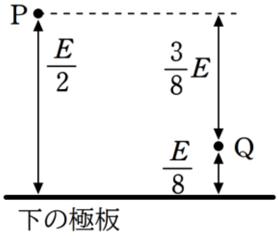


図 d

(ケ)　…①

(コ)　次に, スイッチ2, 3を開いたので, コンデンサー1, 2の電気量がそれぞれ$\dfrac{L+3a}{L}CE$ [C], $2CE$ [C]に保たれる。ここで，コンデンサー1 から導体を完全に引き抜くと，電気容量が

C [F]になるので，極板間の電位差は　$\dfrac{\frac{L+3a}{L}CE^2}{C}=\boldsymbol{\dfrac{L+3a}{L}E}$ [V]

(サ)　この後，スイッチ 3 を閉じて十分に長い時間が経過したときのコンデンサー1，2 の極板の電位差が V_2 [V]になったとすると，図 e のような変化が起こる。

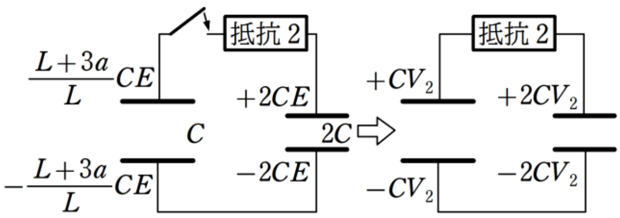


図 e

電気量の保存より

$$\frac{L+3a}{L}CE+2CE=CV_2+2CV_2$$

よって　$\dfrac{3L+3a}{L}CE=3CV_2$

ゆえに　$V_2=\dfrac{L+a}{L}E$ [V]

となり，コンデンサー1 に蓄えられている電気量は　$CV_2=\boldsymbol{\dfrac{L+a}{L}CE}$ [C]

(シ)　コンデンサー2 に蓄えられている電気量は　$2CV_2=\boldsymbol{\dfrac{2(L+a)}{L}CE}$ [C]

(ス)　図 e の変化における静電エネルギーの変化は

$$\frac{1}{2}CV_2{}^2+\frac{1}{2}\times 2CV_2{}^2-\frac{(\frac{L+3a}{L}CE)^2}{2C}-\frac{(2CE)^2}{2\times 2C}=\frac{3}{2}C(\frac{L+a}{L}E)^2-\frac{C}{2}(\frac{L+3a}{L}E)^2-CE^2$$

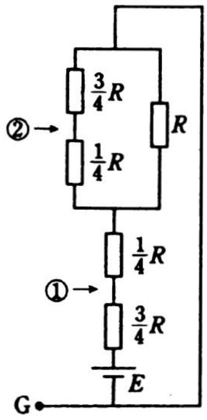
$$=CE^2\{\frac{3}{2}(\frac{L+a}{L})^2-\frac{1}{2}(\frac{L+3a}{L})^2-1\}\ \text{[J]}$$

抵抗 2 で発生したジュール熱が(キ)に等しいとき，静電エネルギーの変化は$-CE^2$ [J]で

$\dfrac{3}{2}(\dfrac{L+a}{L})^2-\dfrac{1}{2}(\dfrac{L+3a}{L})^2-1=-1$　だから　　$3(L+a)^2-(L+3a)^2=0$

L，a とも正なので　$\sqrt{3}(L+a)=L+3a$　よって　$(\sqrt{3}-1)L=(3-\sqrt{3})a$　から　$a=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}L}$ [m]

【2】（1）回路全体の抵抗は$\frac{3}{2}R$なので，①を流れる電流は$\frac{2E}{3R}$，



②を流れる電流は$\frac{E}{3R}$である。（1）では，起電力をE_1として

①の電位を求めればよい。

$V_1 = E_1 - \frac{3}{4}R \cdot \frac{2E_1}{3R} = \frac{1}{2}E_1$

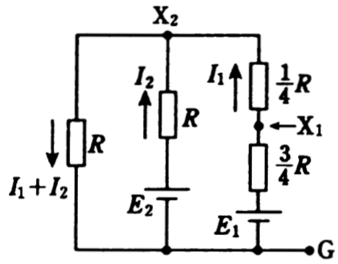
（2）同様にして $V_2 = \frac{3}{4}R \cdot \frac{E_2}{3R} = \frac{1}{4}E_2$

（3）右の図のように電流を定めると，X_2G 間の電位差は，

$E_1 - RI_1 = E_2 - RI_2 = R(I_1 + I_2)$　…※

と表される。これより，

$I = I_1 = \frac{1}{3R}(2E_1 - E_2)$



（4）X_1G 間の電位差は，

$V_4 = E_1 - \frac{3}{4}RI = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{4}E_2$

（5）X_3より右にある抵抗の合成抵抗はRになるので，全体の回路は最初の図と同じ。

よってS_3とX_3をつなぐ抵抗を流れる電流は$\frac{2E}{3R}$である。電流は，X_3で左右に等しく

分かれ，X_2で右と下に等しく分かれるので，X_1を流れる電流は$\frac{E}{6R}$であり，

X_1G 間の電位差は，$V_5 = \frac{3}{4}R \cdot \frac{E}{6R} = \frac{1}{8}E$

（6）スイッチS_1のみを左側に閉じた場合，スイッチS_2だけを左側に閉じた場合の

X_1G 間の電位差は，それぞれ（1）（2）の結果に等しく，$\frac{1}{2}E$，$\frac{1}{4}E$である。

したがって，重ね合わせにより，3 つのスイッチを左側に閉じた場合のX_1G 間の

電位差は $V_6 = \frac{1}{2}E + \frac{1}{4}E + \frac{1}{8}E = \frac{7}{8}E$

（7）S_NとX_Nをつなぐ抵抗を流れる電流は$\frac{2E}{3R}$であるから，X_NG 間の電位差は，

$V_7 = E - R \cdot \frac{2E}{3R} = \frac{1}{3}E$

（8）電流は，X_N，X_{N-1}，…，X_2での枝分かれによって，毎回半分になるから，

X_1を流れる電流は$\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \cdot \frac{2E}{3R}$となり，$X_1$G 間の電位差は，

$V_8 = \frac{3}{4}R \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \cdot \frac{2E}{3R} = \left(\frac{1}{2}\right)^{N}E$

（9）スイッチ S_k だけが左側に閉じている場合の X_1G 間の電位差は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^k E$

$E = 8$[V]の場合にスイッチ S_1〜S_6 を左側に閉じたことの電位差への寄与は，
それぞれ 4[V]，2[V]，1[V]，0.5[V]，0.25[V]，0.125[V]であり，
$3.25 = 2 + 1 + 0.25$ であるから，左側に閉じるスイッチは，S_2 と S_3 と S_5

※DA 変換機について（$N = 6$，$E = 8$，$V = 3.25$，$x = (011010)_2$ ）
スイッチ S_k が左側に閉じている状態を $b_k = 1$ とし，右側に閉じている状態を $b_k = 0$ として，N 個のスイッチ S_1〜S_N の状態を 2 進法 $x = (b_1 b_2 b_3 \cdots b_N)_2$ で表すとき，X_1G 間の電位差は，$V = \left(\dfrac{1}{2}\right)^N Ex$ と表される。つまり，スイッチの状態で表されるデジタル量が電位差というアナログ量に変換されることになる。