高3共通テスト数学　春期第3講確認テスト　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$

実数 x，y，z が $2x+5y-4z=9$，$x+3y-3z=5$ を満たすとき

(1)　x と y を z で表せ。

(2)　$x^2+y^2+z^2$ が最小となる x，y，z を求めよ。

(3)　$x^2+y^2+z^2$ が最小となる整数 x，y，z を求めよ。

$\boxed{2}$

2 次方程式 $x^2-(a-2)x+\dfrac{a}{2}+5=0$ が $1 \leqq x \leqq 5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$y=\sin^2\theta+\cos\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

1

(1)　$2x+5y-4z=9$ …… ①，　$x+3y-3z=5$ …… ②　とする。

①×3−②×5 から　　$x+3z=2$　　　よって　　$x=-3z+2$

①−②×2 から　　$-y+2z=-1$　　　よって　　$y=2z+1$

(2)　(1) から　　$x^2+y^2+z^2=(-3z+2)^2+(2z+1)^2+z^2$

$$=14z^2-8z+5=14\left(z^2-\frac{4}{7}z\right)+5$$

$$=14\left(z-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{27}{7}\quad \cdots\cdots ③$$

したがって，$x^2+y^2+z^2$ は $z=\frac{2}{7}$ で最小値 $\frac{27}{7}$ をとる。

$z=\frac{2}{7}$ のとき　　$x=-3\cdot\frac{2}{7}+2=\frac{8}{7}$，$y=2\cdot\frac{2}{7}+1=\frac{11}{7}$

よって，求める x，y，z は　　$x=\frac{8}{7}$，$y=\frac{11}{7}$，$z=\frac{2}{7}$

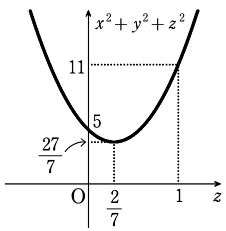
(3)　x，y，z が整数のとき，$x^2+y^2+z^2$ は整数である。また，(1) から，z が整数のとき，x，y も整数である。

z が整数のとき，③ から，$x^2+y^2+z^2$ は $z=0$ で最小値 5 をとる。

$z=0$ のとき　　$x=2$，$y=1$

よって，求める整数 x，y，z は

$x=2$，$y=1$，$z=0$

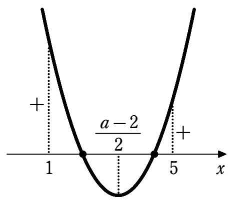


2

$f(x)=x^2-(a-2)x+\frac{a}{2}+5$ とする。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=\frac{a-2}{2}$

方程式 $f(x)=0$ が $1\leqq x\leqq 5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつのは，次の 4 つが同時に成り立つときである。



$$\begin{cases} D=(a-2)^2-4\cdot1\cdot\left(\frac{a}{2}+5\right)>0 & \cdots\cdots ① \\ \text{軸について}\quad 1<\frac{a-2}{2}<5 & \cdots\cdots ② \\ f(1)=-\frac{a}{2}+8\geqq 0 & \cdots\cdots ③ \\ f(5)=-\frac{9}{2}a+40\geqq 0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

① から　　$a^2-6a-16>0$　　　よって　　$(a+2)(a-8)>0$

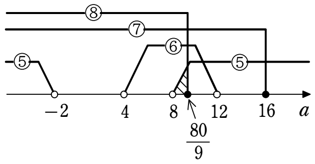
ゆえに　　$a<-2$，$8<a$　…… ⑤

② から　　$2<a-2<10$

よって　　$4<a<12$　…… ⑥

③ から　　$a\leqq 16$　…… ⑦

④ から　　$a\leqq\frac{80}{9}$　…… ⑧



⑤，⑥，⑦，⑧ の共通範囲を求めて

$8<a\leqq\frac{80}{9}$

3

$$y=(1-\cos^2\theta)+\cos\theta=-\cos^2\theta+\cos\theta+1$$

$\cos\theta=x$ とおくと　　$y=-x^2+x+1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

また，$0°\leqq\theta\leqq180°$ から　　$-1\leqq x\leqq 1$

よって，y は　$x=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{5}{4}$，

$x=-1$ で最小値 -1　をとる。

$x=\frac{1}{2}$ すなわち $\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき　$\theta=60°$

$x=-1$ すなわち $\cos\theta=-1$ のとき　$\theta=180°$

したがって　　$\theta=60°$ で最大値 $\frac{5}{4}$

$\theta=180°$ で最小値 -1