高３物理総合S～夏期講習会第２回～　＜解答＞◆荷電粒子②◆

＜予習用問題＞

【１】〔Ⅰ〕問１　加速後の電子の速さをv_1とすると，エネルギー保存則より

$$eV = \frac{1}{2}m{v_1}^2 \quad \therefore v_1 = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

〔Ⅱ〕

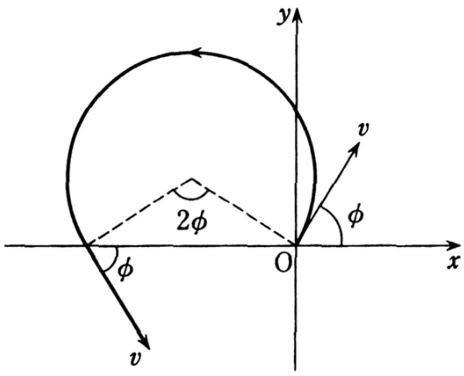
問2　電子は磁場から大きさevBのローレンツ力を受け，xy平面内を反時計回りに等速円運動をする。この半径をrとすると，等速円運動の中心方向の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r} = evB \quad \therefore r = \frac{mv}{eB}$$

求める時刻は半円の軌道の長さπrだけ電子が等速円運動したときの時刻なので，この時刻をtとすると　$t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{eB}$

また，求めるx座標をxとすると　$x = -2r = -\frac{2mv}{eB}$

問3　電子をx軸に対して角度Φ[rad]で入射した場合，電子は中心角$2\pi - 2\Phi = 2(\pi - \Phi)$[rad]だけ$xy$平面内を反時計回りに等速円運動し，$x$軸に対して角度$\Phi$[rad]の向きに，磁場のある領域から飛び出して，その後，速さvで等速直線運動をする。したがって，電子の軌跡は右図のようになる。また，求める時刻は円運動の軌道の長さ$2(\pi - \Phi)r$だけ電子が等速円運動したときの時刻なので，この時刻をt'とすると



$$t' = \frac{2(\pi - \Phi)r}{v} = \frac{2(\pi - \Phi)m}{eB} \quad \left(\because 問2より，r = \frac{mv}{eB}\right)$$

また，求めるx座標をx'とすると，図示した電子の軌跡より　$x' = -2r\sin\Phi = -\frac{2mv\sin\Phi}{eB}$

〔Ⅲ〕

問４　磁場の向きと平行な方向に運動するので，電子は磁場からローレンツ力を受けず，z軸上を正の向きに等速直線運動する。

問5　z軸の方向から電子の運動をみた場合，電子は磁場から大きさ

$$e \times v_0\sin\theta \times B = ev_0\sin\theta$$

のローレンツ力を受け，等速円運動する。この半径をr_0とすると，等速円運動の中心方向の運動方程式は

$$m\frac{(v_0\sin\theta)^2}{r_0} = ev_0B\sin\theta \quad \therefore r_0 = \frac{mv_0\sin\theta}{eB}$$

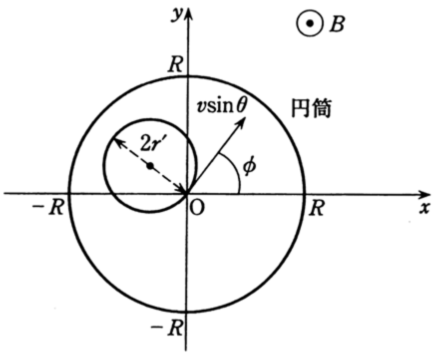
等速円運動の周期をTとすると　$T = \frac{2\pi r_0}{v_0\sin\theta} = \frac{2\pi m}{eB}$

問6　z軸方向には速さ$v_0\cos\theta$で等速直線運動するので

$$L = v_0\cos\theta \times T = \frac{2\pi m v_0 \cos\theta}{eB}$$

問7　$z = 3L$の位置に電子検出器が置かれているので，入射する電子の速さがv_0のとき，電子はz軸の方向からみて等速円運動を3周して検出される。電子の速さをv_0から連続的に大きくしていくと，次に検出されるのは，電子がz軸の方向からみて等速円運動を2周するときである。このとき，電子は等速円運動により1周する間に，z軸方向に距離$\frac{3}{2}L$進むので、電子の速さは$\frac{3}{2}v_0$になっている。したがって，$\frac{3}{2}$倍。

〔Ⅳ〕問8　右図は，z軸の方向からみた電子の等速円運動の軌跡である。



これより，電子が円筒の壁に吸収されないための条件は，等速円運動の半径を　r'とすると$r' < R$

また，問5の結果より　$r' = \dfrac{mv\sin\theta}{eB}$

したがって　　$\frac{2mv\sin\theta}{eB} < R$　　$\therefore v < \frac{eBR}{2m\sin\theta}$

問9　電子が電子検出器で検出されるためには，円筒の壁に吸収されないことが第1条件である。したがって，問8より$2r' < R$

$$\frac{2mv\sin\theta}{eB} < \frac{4\sqrt{2}mv}{3eB} \qquad \sin\theta < \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \therefore \cos\theta > \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ①$$

次に，電子がz軸の方向からみて等速円運動を1周する間に，z軸方向に進む距離をL'とすると，問6の結果より　　$L' = \frac{2\pi m v_0\cos\theta}{eB}$

なので，電子が電子検出器で検出されるための第2条件は

$z = \pi R = nL'$（$n = 1$，2，3，$\cdots$）

である。したがって　　$\frac{4\sqrt{2}\pi mv}{3eB} = \frac{2\pi m v_0\cos\theta}{eB} \cdot n$　　$\cdots\cdots$②

①，②をともに満たすとき，電子は検出される。これらを満たすnの値は

$n = 1$，2なので，求める$\cos\theta$の値は　　$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\frac{\sqrt{2}}{3}$

【２】ア：半径を r とすると，円運動の運動方程式より $m\dfrac{u^2}{r} = quB$　$\therefore r = \dfrac{mu}{qB}$ [m]

イ：$\cos\theta = \dfrac{r-d}{r} = 1 - \dfrac{qBd}{mu}$　　ウ：$t = \dfrac{r\theta}{u} = \dfrac{m}{qB}\theta$ [s]

エ：$mu\sin\theta - (-mu\sin\theta) = 2mu\sin\theta$　[N・s]

オ: 1 秒間あたりの衝突回数は, $\dfrac{1}{2t} = \dfrac{qB}{2m\theta}$ なので, 求める力は$\dfrac{qB}{2m\theta} \times 2mu\sin\theta = quB\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ [N]

カ：$quB\dfrac{\sin\theta}{\theta} \fallingdotseq quB$ [N]

キ：荷電粒子が，$\dfrac{1}{n}$ [s]間隔で入射するから，粒子間の

間隔は$\dfrac{1}{n} \times u$ [m]となる。よって，L [m]の間にある粒子数は$\dfrac{L}{\frac{u}{n}} = \dfrac{nL}{u}$

ク：極板面積 S，極間隔 $2d$ の平行板コンデンサーを考える。このとき，

電気容量 C は $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2d}$ [F]　極板の電気量 Q は $Q = \sigma S$ [C]

電位差 v は $v = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{\sigma S}{\frac{\varepsilon_0 S}{2d}} = \dfrac{2d\sigma}{\varepsilon_0}$ [V]　よって電界 $E = \dfrac{v}{2d} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ [V/m]

ケ：電界による力 qE と磁界による力 quB がつりあうから，求める面密度をσ' [C/m^2]と

すると $qE = quB \iff \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0} = uB \quad \therefore \sigma' = \varepsilon_0 uB$ [C/m^2]

コ：$V = E \times 2d = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0} \times 2d = 2uBd$ [V]

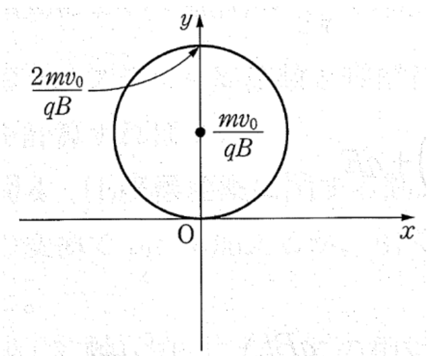
サ：求める粒子数は，$I = qn$ とコの結果を用いて$\dfrac{nL}{u} = \dfrac{\frac{I}{q} \times L}{\frac{V}{2Bd}} = \dfrac{2IBLd}{qV}$

＜演習問題＞

【１】(a)

問 1　粒子 A には，磁場と速度に垂直な方向にローレンツ力がかかる。力の方向が進行方向に対して垂直なので等速運動となり，ローレンツ力の大きさも一定となる。よって，粒子 A はローレンツ力を向心力とする等速円運動を xy 平面内でする。

問 2



問 3　円軌道の半径を r とすると，向心力$\dfrac{mv_0^2}{r}$ はローレンツ力 qv_0B に等しいので，

$$\frac{mv_0^2}{r} = qv_0B \qquad \therefore r = \frac{mv_0}{qB}$$

円軌道の中心は y 軸上にあるので，中心の座標は(0，r ，0)となり $\left(0, \dfrac{mv_0}{qB}, 0\right)$

円運動の角速度を ω とすると $\omega = \dfrac{v_0}{r} = \dfrac{qB}{m}$ であるから，問 2 のグラフより

$$x = -r\sin\omega t = -\frac{mv_0}{qB}\sin\frac{qBt}{m} \quad , \quad y = r - r\cos\omega t = \frac{mv_0}{qB}\left(1-\cos\frac{qBt}{m}\right)$$

(b)　問 4（1）$x = X + v_1 t$　，$y = Y$　　（2）$v_x = w_x + v_1$　，$v_y = w_y$

（3）C，D 両観測者に対して，速度の y 成分は同じであるから，加速度の y 成分も同じである。また，v_1 は一定であるから，速度の x 成分の変化は同じで，加速度の x 成分も同じであることがわかる。したがって，両観測者に対して粒子 A の加速度は同じである。

問 5　問 4 の（3）により，粒子 A の加速度は両観測者から見て同じであるから，粒子 A に働く力も同じである。粒子 A が電場から受ける力の x 成分は 0，y 成分は qE であるから，磁場から受ける力との合力の x 成分 F_x ，y 成分 F_y は

$$F_x = qBv_y = qBw_y \quad , \quad F_y = -qBv_x + qE = -qB\left(w_x + \frac{E}{B}\right) + qE = -qBw_x$$

問 6　問 3 の結果より $X = -\dfrac{m(v_0+v_1)}{qB}\sin\dfrac{qBt}{m}$ ，$Y = \dfrac{m(v_0+v_1)}{qB}\left(1-\cos\dfrac{qBt}{m}\right)$ であるから，

問 4 の（1）により，$x = -\dfrac{m(v_0+v_1)}{qB}\sin\dfrac{qBt}{m} + \dfrac{E}{B}t$ ，$y = \dfrac{m(v_0+v_1)}{qB}\left(1-\cos\dfrac{qBt}{m}\right)$

問 7　荷電粒子は，電場に垂直な x 方向に $\dfrac{E}{B}$ の速度で移動する中心のまわりに等速円運動をする（ドリフトという）。A の軌道は円が直線上をすべらずに転がるとき，円外の一点が描く軌跡で，トロコイドと呼ばれる。電場の働きで，粒子 A は磁場による円運動をしながら z 方向に移動していくと考えたくなるのであるが，そのようにはならない。ドリフト $\dfrac{E}{B}$ が粒子 A の質量，電荷に無関係ということにも注目すべきである。