中3数学総合S　4月度第2講演習問題

$\boxed{1}$

2点A(1，0)，B(6，0)からの距離の比が2：3である点Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{2}$

次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(1)　点Qが直線 $y=x+3$ 上を動くとき，点A(4，1)とQを結ぶ線分AQを1：2に内分する点P

(2)　点Qが円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上を動くとき，点A(3，0)とQを結ぶ線分AQの中点P

$\boxed{3}$

2点O(0，0)，A(1，0)と円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点Qとでできる△OAQの重心Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{4}$

t の値が変化するとき，放物線 $y=x^2+2(t+1)x+2t^2$ の頂点Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{5}$

放物線 $y=x^2-3x$ と直線 $y=m(x-4)$ は異なる2点A，Bで交わっている。

(1)　定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　m の値が変化するとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{6}$

次の直線の方程式を，軌跡の考えを用いて求めよ。

(1)　2直線 $x-2y-2=0$，$4x-2y+1=0$ のなす角の二等分線

(2)　直線 $2x-y+4=0$ に関して，直線 $x+y-3=0$ と対称な直線

$\boxed{7}$

t の値が変化するとき，次の2直線の交点Pの軌跡を求めよ。

$$y=t(x+2),\quad ty=2-x$$

$\boxed{1}$

(解説)

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

P の満たす条件は　　$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:3$

すなわち　　$3\mathrm{AP}=2\mathrm{BP}$　　　よって　　$9\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$

ゆえに　　$9\{(x-1)^2+y^2\}=4\{(x-6)^2+y^2\}$

整理すると　　$x^2+y^2+6x-27=0$　　　すなわち　　$(x+3)^2+y^2=6^2$　…… ①

よって，点 P は円 ① 上にある。

逆に，円 ① 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，中心が点 $(-3,\ 0)$，半径が 6 の円である。

$\boxed{2}$

(解説)

点 P の座標を $(x,\ y)$，点 Q の座標を $(s,\ t)$ とする。

(1)　Q は直線 $y=x+3$ 上にあるから　　$t=s+3$　…… ①

P は線分 AQ を 1 : 2 に内分するから

$$x=\frac{2\cdot4+1\cdot s}{1+2}=\frac{8+s}{3},\quad y=\frac{2\cdot1+1\cdot t}{1+2}=\frac{2+t}{3}$$

よって　　$s=3x-8,\ t=3y-2$

これを ① に代入して　　$3y-2=(3x-8)+3$

ゆえに　　$x-y-1=0$　…… ②

よって，点 P は直線 ② 上にある。

逆に，直線 ② 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　直線 $x-y-1=0$

(2)　Q は円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上にあるから　　$s^2+(t-2)^2=1$　…… ①

P は線分 AQ の中点であるから　　$x=\dfrac{3+s}{2},\ y=\dfrac{t}{2}$

よって　　$s=2x-3,\ t=2y$

これを ① に代入して　　$(2x-3)^2+(2y-2)^2=1$

ゆえに　　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$　…… ②

よって，点 P は円 ② 上にある。

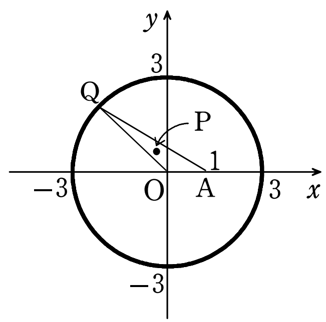
逆に，円 ② 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，中心が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円である。

$\boxed{3}$

(解説)

点 P の座標を $(x,\ y)$，点 Q の座標を $(s,\ t)$ とする。



Q が x 軸上にあるとき，図形 OAQ は三角形にならないから　　$t\neq0$　…… ①

Q は円 $x^2+y^2=9$ 上にあるから

$s^2+t^2=9$　…… ②

P は △OAQ の重心であるから

$$x=\frac{0+1+s}{3},\quad y=\frac{0+0+t}{3}$$

よって　　$s=3x-1,\ t=3y$

これを ①，② に代入して　　$(3x-1)^2+(3y)^2=9,\ 3y\neq0$

すなわち　　$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=1,\ y\neq0$　…… ③

ゆえに，点 P は図形 ③ 上にある。

逆に，図形 ③ 上の任意の点は，条件を満たす。

$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=1$ で，$y=0$ とすると　　$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2=1$

これを解くと　　$x=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}$

よって，求める軌跡は，中心が点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$，半径が 1 の円である。

ただし，2 点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$ を除く。

$\boxed{4}$

(解説)

放物線の方程式を変形すると

$$y=(x+t+1)^2-(t+1)^2+2t^2$$
$$=(x+t+1)^2+t^2-2t-1$$

よって，頂点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=-t-1 \ \cdots\cdots ①,\quad y=t^2-2t-1 \ \cdots\cdots ②$$

① から　$t=-x-1$

これを ② に代入して　$y=(-x-1)^2-2(-x-1)-1$

よって　$y=x^2+4x+2 \ \cdots\cdots ③$

ゆえに，点Pは放物線 ③ 上にある。

逆に，放物線 ③ 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点Pの軌跡は　放物線 $y=x^2+4x+2$

5

(解説)

(1)　$y=x^2-3x \ \cdots\cdots ①,\quad y=m(x-4) \ \cdots\cdots ②$　とする。

①，② から y を消去して整理すると　$x^2-(m+3)x+4m=0 \ \cdots\cdots ③$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(m+3)^2-4\cdot 1\cdot 4m=m^2-10m+9=(m-1)(m-9)$$

放物線 ① と直線 ② が異なる2点A，Bで交わるための必要十分条件は

$$D>0 \quad すなわち \quad (m-1)(m-9)>0$$

よって　$m<1,\ 9<m \ \cdots\cdots ④$

(2)　A，Bの x 座標を，それぞれ $\alpha,\ \beta\ (\alpha \fallingdotseq \beta)$ とする。

$\alpha,\ \beta$ は ③ の異なる2つの実数解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=m+3$$

線分ABの中点Pの座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+3}{2} \ \cdots\cdots ⑤ \qquad Y=m(X-4) \ \cdots\cdots ⑥$$

⑤ から　$m=2X-3 \ \cdots\cdots ⑦$

これを ⑥ に代入して　$Y=(2X-3)(X-4)$

よって　$Y=2X^2-11X+12$

また，④，⑦ から　$2X-3<1,\ 9<2X-3$　　ゆえに　$X<2,\ 6<X$

よって，点Pは放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2,\ 6<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点Pの軌跡は　放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2,\ 6<x$ の部分

6

(解説)

(1)　2直線のなす角の二等分線上の点を $P(x,\ y)$ とする。

点Pは2直線 $x-2y-2=0,\ 4x-2y+1=0$ から等距離にあるから

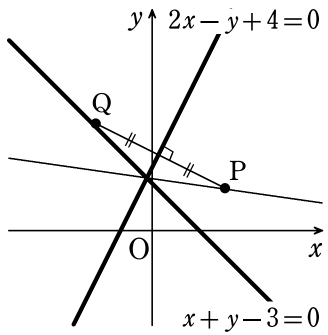
$$\frac{|x-2y-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|4x-2y+1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

よって　$2|x-2y-2|=|4x-2y+1|$

すなわち　$2(x-2y-2)=\pm(4x-2y+1)$

したがって，求める直線の方程式は　$2x+2y+5=0,\ 2x-2y-1=0$

(2)　直線 $2x-y+4=0$ に関して，直線 $x+y-3=0$ 上を動く点 $Q(s,\ t)$ と対称な点を $P(x,\ y)$ $[x \fallingdotseq s]$ とする。



直線PQが直線 $2x-y+4=0$ に垂直であるから，その傾きについて

$$2\cdot\frac{y-t}{x-s}=-1$$

よって　$s+2t=x+2y \ \cdots\cdots ①$

また，線分PQの中点 $\left(\frac{x+s}{2},\ \frac{y+t}{2}\right)$ が直線 $2x-y+4=0$ 上にあるから

$$2\cdot\frac{x+s}{2}-\frac{y+t}{2}+4=0$$

よって　$2s-t=-2x+y-8 \ \cdots\cdots ②$

①，② から　$s=\dfrac{-3x+4y-16}{5} \ \cdots\cdots ③,\quad t=\dfrac{4x+3y+8}{5} \ \cdots\cdots ④$

また，点Qは直線 $x+y-3=0$ 上にあるから　$s+t-3=0 \ \cdots\cdots ⑤$

③，④ を ⑤ に代入して　$\dfrac{-3x+4y-16}{5}+\dfrac{4x+3y+8}{5}-3=0$

したがって，点Pの軌跡の方程式は　$x+7y-23=0$

これが求める直線の方程式である。

$\boxed{7}$

(解説)

$y=t(x+2)$ ……①，　$ty=2-x$ ……②

点Pの座標を$(x,\ y)$とすると，$(x,\ y)$は①，②を満たす。

[1]　$y \neq 0$のとき，②から　$t=\dfrac{2-x}{y}$

これを①に代入して　$y=\dfrac{2-x}{y}(x+2)$

よって　$x^2+y^2=4$ ……③

③で$y=0$とすると　$x=\pm 2$

ゆえに，$y \neq 0$のとき，点P$(x,\ y)$は円③から2点$(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$を除いた図形上にある。

[2]　$y=0$のとき，②から　$x=2$

$x=2$，$y=0$を①に代入すると　$t=0$

よって，点$(2,\ 0)$は，$t=0$のときの2直線の交点である。

[1]，[2]から，点Pは円③から点$(-2,\ 0)$を除いた図形上にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点Pの軌跡は，原点を中心とし，半径が2の円である。ただし，点$(-2,\ 0)$を除く。

参考　直線①は定点$(-2,\ 0)$を通り，直線②は定点$(2,\ 0)$を通る。また，2直線①，②は垂直に交わる（傾きに着目）から，点Pは2点$(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$を直径の両端とする円周上にあることがわかる。ただし，①は直線$x=-2$，②は直線$y=0$を表さないから，点$(-2,\ 0)$を除く。