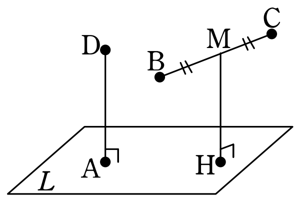
$\boxed{4}$

(1) M$\left(2,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$，$\overrightarrow{AD}=(1,\ 1,\ 1)$ である。

点 H の座標を $(x,\ y,\ z)$ とおくと

$$\overrightarrow{MH}=\left(x-2,\ y-\frac{5}{2},\ z-\frac{5}{2}\right)$$



$\overrightarrow{AD}/\!/\overrightarrow{MH}$ であるから，k を実数として $\overrightarrow{MH}=k\overrightarrow{AD}$ と表される。

よって $\left(x-2,\ y-\frac{5}{2},\ z-\frac{5}{2}\right)=k(1,\ 1,\ 1)$

ゆえに $x=k+2,\ y=k+\frac{5}{2},\ z=k+\frac{5}{2}$ ……①

また，$\overrightarrow{AH}=(x,\ y,\ z-1)$，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ から $x\cdot1+y\cdot1+(z-1)\cdot1=0$

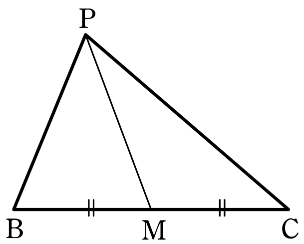
すなわち $x+y+z-1=0$

① を代入して $k+2+k+\frac{5}{2}+k+\frac{5}{2}-1=0$ よって $k=-2$

① から，H の座標は $\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

(2) △PBC において，中線定理により

$$PB^2+PC^2=2(PM^2+BM^2)$$



BM^2 は一定の値をとるから，PM^2 が最小のとき PB^2+PC^2 も最小となる。

PM^2 が最小となるのは，点 P が点 H に一致するときである。

(1) から $\overrightarrow{HM}=(2,\ 2,\ 2)$，$\overrightarrow{BM}=\left(-1,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

よって，PB^2+PC^2 の最小値は

$$2(HM^2+BM^2)=2\left(12+\frac{11}{2}\right)=35$$