高3共通テスト数学　春期第5講確認テスト　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$

(1)　半径 1 の円に内接する正 n 角形の面積を n で表せ。

(2)　半径 1 の円に外接する正 n 角形の面積を n で表せ。

$\boxed{2}$

3 辺の長さが $2x+1$，x^2-1，x^2+x+1 である三角形について

(1)　$2x+1$，x^2-1，x^2+x+1 が三角形の 3 辺となるための x の条件を求めよ。

(2)　最大辺に対する角の大きさを求めよ。

$\boxed{3}$

△ABC において，$\dfrac{\sin A}{6}=\dfrac{\sin B}{5}=\dfrac{\sin C}{4}$ が成り立っている。

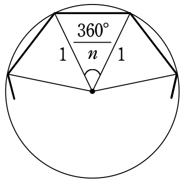
(1)　$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径が 1 であるとき，AB の長さ，△ABC の面積，△ABC の外接円の半径を求めよ。

解説

$\boxed{1}$

(1)　図のように，正 n 角形の各頂点と円の中心を結ぶと n 個の合同な二等辺三角形ができる。



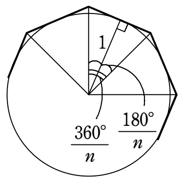
その 1 つの面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\frac{360°}{n}=\frac{1}{2}\sin\frac{360°}{n}$$

よって，内接する正 n 角形の面積は

$$n\times\frac{1}{2}\sin\frac{360°}{n}=\frac{n}{2}\sin\frac{360°}{n}$$

(2)　正 n 角形の各頂点と円の中心を結ぶと n 個の合同な二等辺三角形ができる。その 1 つは，頂角が $\frac{360°}{n}$，高さが 1 であるから，その面積は



$$2\times\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\tan\frac{180°}{n}=\tan\frac{180°}{n}$$

よって，外接する正 n 角形の面積は

$$n\times\tan\frac{180°}{n}=n\tan\frac{180°}{n}$$

$\boxed{2}$

(1)　$2x+1$，x^2-1，x^2+x+1 が三角形の 3 辺となるのは，次の 3 つの不等式が同時に成り立つときである。

$$\begin{cases} 2x+1<(x^2-1)+(x^2+x+1) & \cdots\cdots ① \\ x^2-1<(x^2+x+1)+(2x+1) & \cdots\cdots ② \\ x^2+x+1<(2x+1)+(x^2-1) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

① から　$2x^2-x-1>0$　　すなわち　$(2x+1)(x-1)>0$

よって　$x<-\frac{1}{2}$，$1<x$　……④

② から　$x>-1$　……⑤

③ から　$x>1$　……⑥

④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて　$x>1$

(2)　$x>1$ のとき　$(x^2+x+1)-(2x+1)=x^2-x=x(x-1)>0$

$(x^2+x+1)-(x^2-1)=x+2>0$

よって，長さが x^2+x+1 の辺が最大辺である。

したがって，求める角の大きさを θ とすると，余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{(2x+1)^2+(x^2-1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(2x+1)(x^2-1)}\\&=\frac{-2x^3-x^2+2x+1}{2(2x+1)(x^2-1)}=\frac{-(2x+1)x^2+2x+1}{2(2x+1)(x^2-1)}\\&=-\frac{(2x+1)(x^2-1)}{2(2x+1)(x^2-1)}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0°<\theta<180°$ であるから　$\theta=120°$

$\boxed{3}$

(1)　正弦定理により　$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

また，与えられた等式より，$\sin A:\sin B:\sin C=6:5:4$ であるから

$$a:b:c=6:5:4$$

したがって，$a=6k$，$b=5k$，$c=4k$　……①　($k>0$) とおける。

余弦定理により　$\cos A=\frac{(5k)^2+(4k)^2-(6k)^2}{2\cdot 5k\cdot 4k}=\frac{5k^2}{2\cdot 5\cdot 4k^2}=\frac{1}{8}$

よって　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

(2)　△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5k\cdot 4k\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}k^2 \quad\cdots\cdots ②$$

また，内接円の半径が 1 であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(a+b+c)=\frac{1}{2}(6k+5k+4k)=\frac{15}{2}k \quad\cdots\cdots ③$$

②，③ から　$\frac{15\sqrt{7}}{4}k^2=\frac{15}{2}k$　　よって　$\sqrt{7}k^2=2k$

$k>0$ であるから　$k=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$　……④

④ を ① に代入して　$c=4\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$　　すなわち　$\mathrm{AB}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

④ を ③ に代入して　$S=\frac{15}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{15\sqrt{7}}{7}$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により　$\frac{a}{\sin A}=2R$

$a=6k=6\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{12\sqrt{7}}{7}$ であるから

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\frac{12\sqrt{7}}{7}}{2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{16}{7}$$