$\boxed{1}$

次の 2 つの命題を考える。

命題 A「正の整数 a，b，c について，$abc \geqq k$ であるならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 10 以上である。」

命題 B「正の整数 a，b，c について，$abc \leqq k$ であるならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 10 以下である。」

命題 A，B がともに真となるような正の整数 k のうちで最大のものと最小のものを求めよ。

$\boxed{2}$

関数 $f(x)=x^2-2ax\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とする。

(1)　$y=M(a)$ のグラフをかけ。

(2)　$y=m(a)$ のグラフをかけ。

$\boxed{3}$

a は定数とする。方程式 $ax^2+(3a+1)x+2(a+1)=0$ の実数解の個数を調べよ。

解答

1

命題 A の対偶は　「a，b，c のすべてが 10 より小さいならば　$abc<k$」

$9\times9\times9=729$ であるから，命題 A の対偶が真となるような k の値の範囲は

$$729<k \quad \cdots\cdots ①$$

命題 B の対偶は　「a，b，c のすべてが 10 より大きいならば　$abc>k$」

$11\times11\times11=1331$ であるから，命題 B の対偶が真となるような k の値の範囲は

$$1331>k \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から，命題 A，B がともに真となるような k の値の範囲は

$$729<k<1331$$

これを満たす正の整数 k のうち，最大のものは 1330，　最小のものは 730

2

関数の式を変形すると　　$f(x)=(x-a)^2-a^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$

(1)　[1]　$a<0$ のとき

$f(x)$ は $x=1$ で最大となるから　　　$M(a)=f(1)=-2a+1$

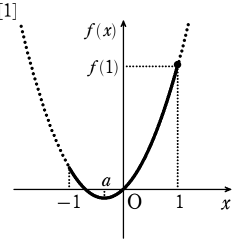
[2]　$a=0$ のとき　　$f(x)=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$

$f(x)$ は $x=-1$，1 で最大値 1 をとるから　　$M(0)=1$

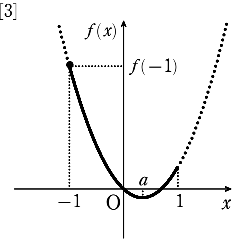
[3]　$a>0$ のとき

$f(x)$ は $x=-1$ で最大となるから　　$M(a)=f(-1)=2a+1$

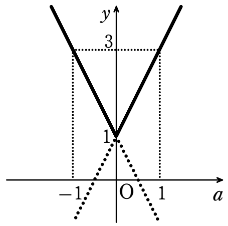
[1]



[3]



したがって，$y=M(a)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。



(2)　[1]　$a<-1$ のとき

$f(x)$ は $x=-1$ で最小となるから　　$m(a)=f(-1)=2a+1$

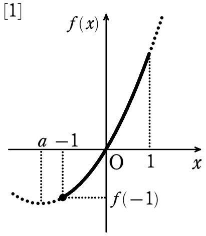
[2]　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき

$f(x)$ は $x=a$ で最小となるから　　　$m(a)=f(a)=-a^2$

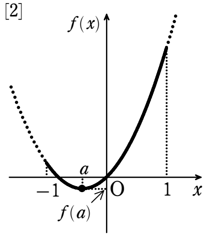
[3]　$1<a$ のとき

$f(x)$ は $x=1$ で最小となるから　　　$m(a)=f(1)=-2a+1$

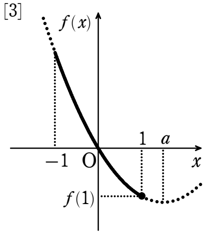
[1]



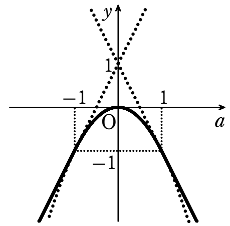
[2]



[3]



したがって，$y=m(a)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。



3

与えられた方程式を ① とする。

[1]　$a\fallingdotseq 0$ のとき

① は 2 次方程式であり，その判別式を D とすると

$$D=(3a+1)^2-4\cdot a\cdot 2(a+1)=a^2-2a+1=(a-1)^2$$

この符号を調べると

$a\fallingdotseq 1$ のとき　$D>0$　　　このとき，実数解の個数は　2 個

$a=1$ のとき　$D=0$　　　このとき，実数解の個数は　1 個

[2]　$a=0$ のとき

① は $x+2=0$ となるから，実数解の個数は　1 個

[1]，[2] により，① の実数解の個数は

$a<0$，$0<a<1$，$1<a$ のとき 2 個，　$a=0$，1 のとき 1 個