$\boxed{1}$

解答　(1)　(2，5)　　(2)　(−1，17)　　(3)　$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$　　(4)　(2，2)

解説

(1)　$\left(\frac{1\cdot(-2)+4\cdot3}{4+1},\ \frac{1\cdot(-3)+4\cdot7}{4+1}\right)$　　よって　(2，5)

(2)　$\left(\frac{-3\cdot3+2\cdot5}{2-3},\ \frac{-3\cdot7+2\cdot2}{2-3}\right)$　　よって　(−1，17)

(3)　$\left(\frac{5-2}{2},\ \frac{2-3}{2}\right)$　　よって　$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

(4)　$\left(\frac{-2+3+5}{3},\ \frac{-3+7+2}{3}\right)$　　よって　(2，2)

$\boxed{2}$

解答　(1)　$5\sqrt{5}$　　(2)　$\mathrm{P}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{\{6-(-4)\}^2+(7-2)^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

(2)　P(0，y) とおくと，AP＝BP すなわち $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ から

$$(0-3)^2+\{y-(-4)\}^2=(0-8)^2+(y-6)^2$$

ゆえに　$9+(y+4)^2=64+(y-6)^2$　　整理して　$4y=15$

これを解いて　$y=\frac{15}{4}$

よって　$\mathrm{P}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

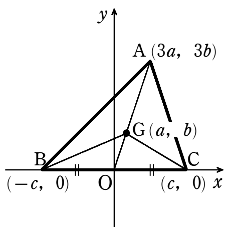
$\boxed{3}$

解答　略

解説

直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとると，線分 BC の中点は原点 O になる。

A$(3a,\ 3b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ とすると，G は重心であるから，G$(a,\ b)$ と表すことができる。



このとき

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$

$=\{(-c-3a)^2+(-3b)^2\}+\{c-(-c)\}^2+\{(3a-c)^2+(3b)^2\}$

$=3(6a^2+6b^2+2c^2)$　……①

$\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2$

$=\{(3a-a)^2+(3b-b)^2\}+\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+\{(c-a)^2+(-b)^2\}$

$=6a^2+6b^2+2c^2$　　……②

①，② から　　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=3(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$y=-2x-2$　　(2)　$y=3x-7$

(3)　平行 $3x+2y+5=0$，垂直 $2x-3y-14=0$

解説

(1)　$y-(-4)=-2(x-1)$　　　よって　$y=-2x-2$

(2)　$y-(-4)=\frac{2-(-4)}{3-1}(x-1)$　　　よって　$y=3x-7$

(3)　直線 $3x+2y+1=0$ の傾きは　$-\frac{3}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

$y-(-4)=-\frac{3}{2}(x-1)$　　すなわち　　$3x+2y+5=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$-\frac{3}{2}\times m=-1$　　　ゆえに　　$m=\frac{2}{3}$

よって，垂直な直線の方程式は

$y-(-4)=\frac{2}{3}(x-1)$　　すなわち　　$2x-3y-14=0$

別解　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に平行な直線，垂直な直線が，それぞれ

平行　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$　　垂直　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

と表されることを利用する。

[1]　平行な直線の方程式は

$3(x-1)+2(y+4)=0$　　すなわち　　$3x+2y+5=0$

[2]　垂直な直線の方程式は

$2(x-1)-3(y+4)=0$　　すなわち　　$2x-3y-14=0$

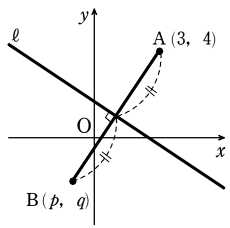
$\boxed{5}$

解答　(−1，−2)

解説

点 B の座標を $(p,\ q)$ とする。

ℓ の傾きは $-\frac{2}{3}$ であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから　　$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{q-4}{p-3}=-1$



よって　　$3p-2q=1$　……①

また，線分 AB の中点 $\left(\frac{p+3}{2},\ \frac{q+4}{2}\right)$ は ℓ 上にあるから　　$2\cdot\frac{p+3}{2}+3\cdot\frac{q+4}{2}-5=0$

よって　　$2p+3q=-8$　……②

①，② を連立して解くと　　$p=-1$，$q=-2$

したがって，点 B の座標は　　(−1，−2)

$\boxed{6}$

解答　(1，2)

解説

直線の方程式を k について整理すると

$(x+2y-5)k+(2x-3y+4)=0$

この等式が k の値に関係なく成り立つための必要十分条件は

$x+2y-5=0$　かつ　$2x-3y+4=0$

連立方程式 $x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$ を解くと　　$x=1$，$y=2$

よって，求める定点の座標は　　(1，2)

$\boxed{7}$

解答　$4x-27y+43=0$

解説

k を定数として，方程式

$k(8x+7y-19)+(3x-5y+6)=0$　……①

を考えると，① は 2 直線 $8x+7y-19=0$，$3x-5y+6=0$ の交点を通る直線を表す。

直線 ① が点 (−4，1) を通るとき

$k\{8\cdot(-4)+7\cdot1-19\}+3\cdot(-4)-5\cdot1+6=0$　　よって　　$k=-\frac{1}{4}$

この k の値を ① に代入して整理すると　　$4x-27y+43=0$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$\sqrt{5}$　　(2)　$\frac{4\sqrt{10}}{5}$

解説

(1)　$\frac{|1-2\cdot2+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(2)　$y=3x+1$ から　　$3x-y+1=0$

よって，求める距離は　　$\frac{|3\cdot(-2)-3+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

1

解答　(1)　(3, 3)　　(2)　(−8, −11)　　(3)　(2, −1)　　(4)　(−1, −3)

解説

(1)　点 P の座標は，$\left(\dfrac{2\cdot6+3\cdot1}{3+2},\ \dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot7}{3+2}\right)$ から　　(3, 3)

(2)　点 Q の座標は，$\left(\dfrac{-2\cdot1+3\cdot(-2)}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot7+3\cdot1}{3-2}\right)$ から　　(−8, −11)

(3)　点 R の座標は，$\left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{1-3}{2}\right)$ から　　(2, −1)

(4)　(1)～(3) の結果により，△PQR の重心 G の座標は

$$\left(\frac{3-8+2}{3},\ \frac{3-11-1}{3}\right) \text{ から}\quad (-1,\ -3)$$

2

解答　(1)　$AB=4\sqrt{5}$　　(2)　$P\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$

解説

(1)　$AB=\sqrt{(-1-3)^2+\{3-(-5)\}^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

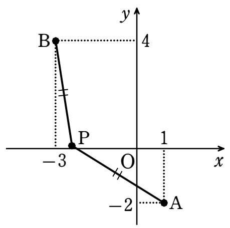
(2)　P$(x,\ 0)$ とすると，AP＝BP　すなわち　$AP^2=BP^2$

から　　$(x-1)^2+\{0-(-2)\}^2=\{x-(-3)\}^2+(0-4)^2$

ゆえに　$x^2-2x+1+4=x^2+6x+9+16$

これを解いて　　$x=-\dfrac{5}{2}$

よって　　$P\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$



3

解答　略

解説

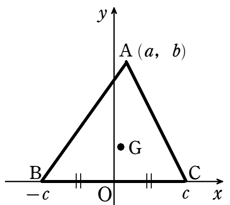
直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとると，3 頂点は

A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$

と表すことができる。

このとき

$$AB^2+AC^2=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$



また，△ABC の重心 G の座標は

$$\left(\frac{a+(-c)+c}{3},\ \frac{b+0+0}{3}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$$

よって　　$BG^2+CG^2+4AG^2=\left\{\left(\dfrac{a}{3}+c\right)^2+\left(\dfrac{b}{3}-0\right)^2\right\}+\left\{\left(\dfrac{a}{3}-c\right)^2+\left(\dfrac{b}{3}-0\right)^2\right\}$

$$+4\left\{\left(\frac{a}{3}-a\right)^2+\left(\frac{b}{3}-b\right)^2\right\}$$

$$=\left(\frac{a^2}{9}+\frac{2}{3}ca+c^2+\frac{b^2}{9}\right)+\left(\frac{a^2}{9}-\frac{2}{3}ca+c^2+\frac{b^2}{9}\right)$$
$$+4\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{9}b^2\right)$$

$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

したがって　　$AB^2+AC^2=BG^2+CG^2+4AG^2$

4

解答　(1)　$y=-2x+2$　　(2)　$y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3}{5}$

(3)　$\ell：3x-4y+17=0$，$\ell'：4x+3y+6=0$

解説

(1)　$y-(-4)=-2(x-3)$　　すなわち　　$y=-2x+2$

(2)　$y-3=\dfrac{-3-3}{6-(-4)}\{x-(-4)\}$　　すなわち　　$y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3}{5}$

(3)　直線 $3x-4y-6=0$ の傾きは $\dfrac{3}{4}$ である。

よって，直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{4}$ であり，その方程式は

$$y-2=\frac{3}{4}\{x-(-3)\}\quad \text{すなわち}\quad 3x-4y+17=0$$

次に，直線 ℓ' の傾きを m とすると，$\dfrac{3}{4}m=-1$ から　　$m=-\dfrac{4}{3}$

よって，直線 ℓ' の方程式は

$$y-2=-\frac{4}{3}\{x-(-3)\}\quad \text{すなわち}\quad 4x+3y+6=0$$

5

解答　(1)　(5, −3)　　(2)　$\left(\dfrac{3}{13},\ \dfrac{37}{13}\right)$

解説

求める点の座標を B$(p,\ q)$ とする。

(1)　直線 $y=x$ を ℓ とする。

直線 ℓ の傾きは 1 であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから

$$1\cdot\frac{q-5}{p+3}=-1\quad \text{ゆえに}\quad p+q-2=0\ \cdots\cdots①$$

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p-3}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{q+5}{2}=\frac{p-3}{2}\quad \text{ゆえに}\quad p-q-8=0\ \cdots\cdots②$$

方程式 ①，② を連立させて解くと　　$p=5$，$q=-3$

したがって，求める点の座標は　　(5, −3)

(2)　直線 $3x-2y+12=0$ を ℓ とする。

直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{2}$ であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{q-5}{p+3}=-1\quad \text{ゆえに}\quad 2p+3q-9=0\ \cdots\cdots③$$

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p-3}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$$3\cdot\frac{p-3}{2}-2\cdot\frac{q+5}{2}+12=0\quad \text{ゆえに}\quad 3p-2q+5=0\ \cdots\cdots④$$

方程式 ③，④ を連立させて解くと　　$p=\dfrac{3}{13}$，$q=\dfrac{37}{13}$

したがって，求める点の座標は　　$\left(\dfrac{3}{13},\ \dfrac{37}{13}\right)$

6

解答　(2, −3)

解説

$(k+3)x-(2k-1)y-8k-3=0$ …… ① とする。

① を k について整理すると

$$k(x-2y-8)+3x+y-3=0$$

この等式が k の値に関係なく成り立つための条件は

$$x-2y-8=0,\ 3x+y-3=0$$

この連立方程式を解いて　　$x=2$，$y=-3$

よって，求める定点 A の座標は　　(2, −3)

別解　k の値に関係なく ① が成り立つから，$k=-3$，$\dfrac{1}{2}$ のときも成り立つ。

$k=-3$ のとき　　$0\cdot x-\{2\cdot(-3)-1\}y-8\cdot(-3)-3=0$

整理して　　$7y+21=0$　　　　よって　　$y=-3$

$k=\dfrac{1}{2}$ のとき　　$\left(\dfrac{1}{2}+3\right)x-0\cdot y-8\cdot\dfrac{1}{2}-3=0$

整理して　　$\dfrac{7}{2}x-7=0$　　　　よって　　$x=2$

逆に，$x=2$，$y=-3$ を ① の左辺に代入すると

$$(k+3)\cdot2-(2k-1)\cdot(-3)-8k-3=0$$

となり，① は k の値に関係なく成り立つ。

したがって　　$x=2$，$y=-3$

よって，求める定点 A の座標は　　(2, −3)

7

解答　(1)　$x+3y-23=0$　　(2)　$2x+5y-33=0$

解説

(解 1)　k を定数として，方程式

$$k(x+2y-10)+(2x+3y-7)=0\ \cdots\cdots①$$

を考えると，① は直線を表し，その直線は 2 直線 $x+2y-10=0$，$2x+3y-7=0$ の交点を通る。

(1)　直線 ① が点 (5, 6) を通るとき　　$k(5+2\cdot6-10)+(2\cdot5+3\cdot6-7)=0$

よって　　$k=-3$

この値を ① に代入して整理すると　　$x+3y-23=0$

(2)　① を変形すると　　$(k+2)x+(2k+3)y-10k-7=0$ …… ②

よって，直線 ② が直線 $2x+5y=0$ に平行であるための必要十分条件は

$(k+2)\cdot5-(2k+3)\cdot2=0$　　　これを解いて　　$k=-4$

この値を ② に代入して整理すると　　$2x+5y-33=0$

(解 2)　連立方程式 $\begin{cases}x+2y-10=0\\2x+3y-7=0\end{cases}$ を解くと　　$x=-16$，$y=13$

よって，2 直線の交点の座標は　　(−16, 13)

(1)　求める直線は，2 点 (−16, 13)，(5, 6) を通るから，その方程式は

$$y-13=\frac{6-13}{5-(-16)}\{x-(-16)\}\quad \text{すなわち}\quad x+3y-23=0$$

(2)　直線 $2x+5y=0$ の傾きは　$-\dfrac{2}{5}$

よって，求める直線は，傾きが $-\dfrac{2}{5}$ で，点 $(-16,\ 13)$ を通るから，その方程式は

$$y-13=-\frac{2}{5}\{x-(-16)\} \qquad \text{すなわち} \qquad 2x+5y-33=0$$

8

解答　(1) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　(2) $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

解説

(1)　$y=-3x+4$ から　$3x+y-4=0$　　　よって　$\dfrac{|3\cdot2-3-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(2)　$\dfrac{|2\cdot(-3)-3\cdot2+6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

1

解答　$(6,\ -1)$

解説

頂点Ｃの座標を $(x,\ y)$ とする。

△ABC の重心が $G(3,\ 2)$ であるから

$$\frac{-1+4+x}{3}=3,\ \frac{2+5+y}{3}=2 \qquad \text{よって} \qquad x=6,\ y=-1$$

ゆえに，頂点Ｃの座標は　$(6,\ -1)$

2

解答　$\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形

解説

$$AB=\sqrt{(-2-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{25}=5$$
$$BC=\sqrt{(5+2)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$
$$CA=\sqrt{(1-5)^2+(2+1)^2}=\sqrt{25}=5$$

よって　　$AB=CA$

また，$AB^2+CA^2=BC^2$ であるから　　$\angle A=90^\circ$

したがって，△ABC は $\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

3

解答　(1)　$(9,\ 0)$　　(2)　$\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$　　(3)　$\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$，$\left(0,\ \dfrac{14}{3}\right)$，$(0,\ 2)$，$(0,\ 3)$

解説

(1)　点Ｐの座標を $(x,\ 0)$ とする。

$AP=BP$ であるから　　$AP^2=BP^2$

よって　　$(x-1)^2+(0-1)^2=(x-2)^2+(0-4)^2$

ゆえに　　$x^2-2x+2=x^2-4x+20$　　　　これを解いて　　$x=9$

よって，点Ｐの座標は　　$(9,\ 0)$

(2)　点Ｐの座標を $(x,\ -3x-1)$ とする。

$AP=BP$ であるから　　$AP^2=BP^2$

よって　　$(x-1)^2+(-3x-2)^2=(x-2)^2+(-3x-5)^2$

ゆえに　　$10x^2+10x+5=10x^2+26x+29$　　　　これを解いて　　$x=-\dfrac{3}{2}$

このとき　　$-3x-1=-3\left(-\dfrac{3}{2}\right)-1=\dfrac{7}{2}$

よって，点Ｐの座標は　　$\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

(3)　点Ｐの座標を $(0,\ y)$ とする。

$$AP^2=(0-1)^2+(y-1)^2=y^2-2y+2$$
$$BP^2=(0-2)^2+(y-4)^2=y^2-8y+20$$
$$AB^2=(2-1)^2+(4-1)^2=10$$

[1]　$\angle A=90^\circ$ のとき　三平方の定理より，$AP^2+AB^2=BP^2$ であるから

$$y^2-2y+2+10=y^2-8y+20$$

これを解いて　　$y=\dfrac{4}{3}$

[2]　$\angle B=90^\circ$ のとき　　$BP^2+AB^2=AP^2$

よって　　$y^2-8y+20+10=y^2-2y+2$　　　　これを解いて　　$y=\dfrac{14}{3}$

[3]　$\angle P=90^\circ$ のとき　　$AP^2+BP^2=AB^2$

よって　　$y^2-2y+2+y^2-8y+20=10$

ゆえに　　$2(y^2-5y+6)=0$　　　　これを解いて　　$y=2,\ 3$

したがって，点Ｐの座標は　　$\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$，$\left(0,\ \dfrac{14}{3}\right)$，$(0,\ 2)$，$(0,\ 3)$

4

解答　(1)　$y=-3x-2$　　(2)　$x=5$　　(3)　$y=-7$　　(4)　$y=-\dfrac{7}{10}x-\dfrac{29}{10}$

(5)　$y=3$　　(6)　$3x-8y=-6$

解説

(1)　$y-4=-3\{x-(-2)\}$　　すなわち　$y=-3x-2$

(2)　y 軸に平行な直線は，x 軸に垂直である。

通る点の x 座標が5であるから　　$x=5$

(3)　y 軸に垂直な直線の傾きは0であるから

$y-(-7)=0\cdot(x-8)$　　すなわち　$y=-7$

(4)　$y-(-5)=\dfrac{2-(-5)}{-7-3}(x-3)$　　すなわち　$y=-\dfrac{7}{10}x-\dfrac{29}{10}$

(5)　通る２点の y 座標がともに３であるから　　$y=3$

(6)　x 切片が -2，y 切片が $\dfrac{3}{4}$ であるから　　$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{\frac{3}{4}}=1$

よって　　$-\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{3}y=1$　　すなわち　$3x-8y=-6$

5

解答　(1)　$a=-5$　　(2)　$a=-1,\ 5$

解説

(1)　（解１）　直線 AB の方程式は

$$y-4=\frac{7-4}{3-1}(x-1) \qquad \text{すなわち} \qquad 3x-2y+5=0$$

点 $C(-5,\ a)$ がこの直線上にあるから　　$3\cdot(-5)-2\cdot a+5=0$

これを解いて　　$a=-5$

（解２）　直線 AB と直線 AC の傾きが等しいから　　$\dfrac{7-4}{3-1}=\dfrac{a-4}{-5-1}$

これを解いて　　$a=-5$

(2)　（解１）　直線 AB の方程式は　　$y-(-1)=\dfrac{-a-(-1)}{7-3}(x-3)$

すなわち　　$(a-1)x+4y-3a+7=0$

点 $C(a,\ -3)$ がこの直線上にあるから　　$(a-1)\cdot a+4\cdot(-3)-3a+7=0$

よって　　$a^2-4a-5=0$　　　　ゆえに　　$(a+1)(a-5)=0$

したがって　　$a=-1,\ 5$

（解２）　直線 AB と直線 AC の傾きが等しいから

$$\frac{-a-(-1)}{7-3}=\frac{-3-(-1)}{a-3} \qquad （ただし\ a\neq3）$$

分母を払って　　$(-a+1)(a-3)=-8$　　　　整理して　　$a^2-4a-5=0$

これを解いて　　$a=-1,\ 5$　（$a\neq3$ を満たす）

$a=3$ のとき，直線 AC の方程式は $x=3$ となり，点Ｂはこの直線上にないから不適。

したがって　　$a=-1,\ 5$

6

解答　(1)　$a=-1,\ 2$　　(2)　$a=\dfrac{2}{3}$

解説

$ax+2y=1$ ……①，　$x+(a-1)y=3$ ……②　とする。

直線①の傾きは　$-\dfrac{a}{2}$

直線②の傾きは，$a\fallingdotseq 1$ のとき　$-\dfrac{1}{a-1}$

(1)　[1]　$a \neq 1$ のとき

2 直線①，②が平行であるための必要十分条件は　$-\dfrac{a}{2}=-\dfrac{1}{a-1}$

分母を払って　$a(a-1)=2$　　よって　$a^2-a-2=0$

ゆえに　$(a+1)(a-2)=0$

したがって　$a=-1,\ 2$　　これは $a \neq 1$ を満たす。

[2]　$a=1$ のとき

①は $x+2y=1$，②は $x=3$ となるが，この 2 直線は平行でない。

以上から　$a=-1,\ 2$

(2)　[1]　$a \neq 1$ のとき

2 直線①，②が垂直であるための必要十分条件は　$-\dfrac{a}{2}\times\left(-\dfrac{1}{a-1}\right)=-1$

分母を払って　$a=-2(a-1)$

これを解いて　$a=\dfrac{2}{3}$　　これは $a \neq 1$ を満たす。

[2]　$a=1$ のとき　2 直線は垂直でない。

以上から　$a=\dfrac{2}{3}$

別解　2 直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ について，

平行 $\Leftrightarrow$ $ab'-ba'=0$　　垂直 $\Leftrightarrow$ $aa'+bb'=0$

であることを利用する。

(1)　2 直線①，②が平行であるための必要十分条件は　$a(a-1)-2\cdot1=0$

よって　$a^2-a-2=0$　　これを解いて　$a=-1,\ 2$

(2)　2 直線①，②が垂直であるための必要十分条件は　$a\cdot1+2\cdot(a-1)=0$

これを解いて　$a=\dfrac{2}{3}$

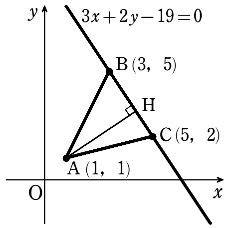
7

解答　(1)　$3x+2y-19=0$　　(2)　$\sqrt{13}$　　(3)　$\dfrac{14}{\sqrt{13}}$　　(4)　7

解説

(1)　直線 BC の方程式は

$$y-5=\frac{2-5}{5-3}(x-3)\quad \text{すなわち}\quad 3x+2y-19=0$$



(2)　$BC=\sqrt{(5-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

(3)　点 A と直線 BC の距離，すなわち，点 A から BC に下ろした垂線 AH の長さは

$$AH=\frac{|3\cdot1+2\cdot1-19|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{14}{\sqrt{13}}$$

(4)　(2)，(3) から

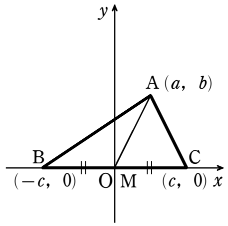
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{14}{\sqrt{13}}=7$$

1

解答　略

解説

直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとると，中点 M は原点 O になり，A $(a,\ b)$，B $(-c,\ 0)$，C $(c,\ 0)$ と表すことができる。



このとき　AB^2+AC^2

$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$

$=\{(c+a)^2+b^2\}+\{(c-a)^2+b^2\}$

$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$　……①

また　$AM^2+BM^2=\{(-a)^2+(-b)^2\}+c^2$

$=a^2+b^2+c^2$　……②

①，②から　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

2

解答　$a=2$

解説

$x+y=6$ ……①，　$2x-y=a+1$ ……②，　$x-ay=1-2a$ ……③　とする。

①+②から　$3x=a+7$　　よって　$x=\dfrac{a+7}{3}$

これを①に代入して y の値を求めると　$y=\dfrac{-a+11}{3}$

ゆえに，2 直線①，②の交点の座標は　$\left(\dfrac{a+7}{3},\ \dfrac{-a+11}{3}\right)$

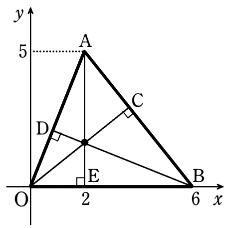
この点が直線③上にもあるとき　$\dfrac{a+7}{3}-a\cdot\dfrac{-a+11}{3}=1-2a$

整理すると　$a^2-4a+4=0$　　よって　$(a-2)^2=0$　　ゆえに　$a=2$

3

解答　略

解説



直線 AB の傾きは　$\dfrac{0-5}{6-2}=-\dfrac{5}{4}$

よって，頂点 O から対辺 AB に下ろした垂線 OC の方程式は　$y=\dfrac{4}{5}x$　……①

また，直線 OA の傾きは　$\dfrac{5}{2}$

よって，頂点 B から対辺 OA に下ろした垂線 BD の方程式は

$$y-0=-\frac{2}{5}(x-6)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{2}{5}x+\frac{12}{5}\quad \cdots\cdots ②$$

頂点 A から対辺 OB に下ろした垂線 AE の方程式は　$x=2$　……③

①に $x=2$ を代入すると　$y=\dfrac{4}{5}\cdot2=\dfrac{8}{5}$

②に $x=2$ を代入すると　$y=-\dfrac{2}{5}\cdot2+\dfrac{12}{5}=\dfrac{8}{5}$

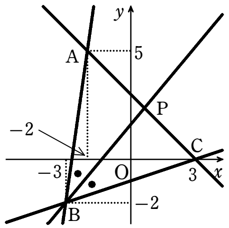
ゆえに，3 直線①，②，③は 1 点 $\left(2,\ \dfrac{8}{5}\right)$ で交わる。

したがって，△OABの各頂点から対辺に下ろした３つの垂線は１点で交わる。

4

解答　$(23-10\sqrt{5},\ 10\sqrt{5}-20)$

解説



$AB=\sqrt{\{-3-(-2)\}^2+(-2-5)^2}=5\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{\{3-(-3)\}^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{10}$

直線BPは∠ABCの二等分線であるから

$AP:PC=AB:BC=5\sqrt{2}:2\sqrt{10}=5:2\sqrt{5}$

よって，点Pは線分ACを $5:2\sqrt{5}$ に内分する点であるから，点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{2\sqrt{5}\cdot(-2)+5\cdot3}{5+2\sqrt{5}}=\frac{15-4\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(15-4\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}=\frac{115-50\sqrt{5}}{5}$$

$$=23-10\sqrt{5}$$

$$y=\frac{2\sqrt{5}\cdot5+5\cdot0}{5+2\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}=\frac{50\sqrt{5}-100}{5}=10\sqrt{5}-20$$

よって，点Pの座標は　$(23-10\sqrt{5},\ 10\sqrt{5}-20)$

1

解答　(1)　$(x-3)^2+(y+4)^2=25$　(2)　$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

(3)　$(x-3)^2+(y-5)^2=5$　(4)　$x^2+y^2-2x-6y-15=0$

解説

(1)　中心と原点の距離は　$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

これが半径に等しいから，求める円の方程式は　$(x-3)^2+(y+4)^2=25$

(2)　中心と x 軸の距離２が半径に等しいから，求める円の方程式は

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

(3)　２点 $(1,\ 4)$，$(5,\ 6)$ を結ぶ線分の中点が円の中心となる。

その座標は　$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{4+6}{2}\right)$　すなわち　$(3,\ 5)$

半径は，中心 $(3,\ 5)$ と点 $(1,\ 4)$ の距離であるから　$\sqrt{(1-3)^2+(4-5)^2}=\sqrt{5}$

よって，求める円の方程式は　$(x-3)^2+(y-5)^2=5$

(4)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(4,\ -1)$ を通るから　$4^2+(-1)^2+4l-m+n=0$

整理すると　$4l-m+n+17=0$　……①

点 $(6,\ 3)$ を通るから　$6^2+3^2+6l+3m+n=0$

整理すると　$6l+3m+n+45=0$　……②

点 $(-3,\ 0)$ を通るから　$(-3)^2+0^2-3l+0\cdot m+n=0$

整理すると　$-3l+n+9=0$　……③

③から　$n=3l-9$　……④

④を①に代入して整理すると　$7l-m+8=0$

よって　$m=7l+8$　……⑤

④，⑤を②に代入して整理すると

$30l+60=0$　ゆえに　$l=-2$

このとき，⑤から　$m=-6$　④から　$n=-15$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x-6y-15=0$

2

解答　(1)　中心 $(-3,\ 4)$，半径４の円　(2)　$p<-2,\ 2<p$

解説

(1)　$(x^2+6x+9)+(y^2-8y+16)=9+16-9$

ゆえに　$(x+3)^2+(y-4)^2=16$

よって，中心 $(-3,\ 4)$，半径４の円を表す。

(2)　$(x^2+2px+p^2)+\left\{y^2+3py+\left(\frac{3}{2}p\right)^2\right\}=p^2+\left(\frac{3}{2}p\right)^2-13$

ゆえに　$(x+p)^2+\left(y+\frac{3}{2}p\right)^2=\frac{13}{4}p^2-13$

この方程式が円を表すための条件は　$\frac{13}{4}p^2-13>0$

よって　$p^2-4>0$　したがって　$p<-2,\ 2<p$

3

解答　(1)　異なる２点で交わる；$(0,\ -1)$，$(1,\ 0)$　(2)　接する，$(-2,\ 0)$

解説

(1)　$\begin{cases}x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ①\\ x-y=1 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

②から　$y=x-1$　……③

これを①に代入して　$x^2+(x-1)^2=1$

整理すると　$x^2-x=0$　これを解いて　$x=0,\ 1$

③から　$x=0$ のとき $y=-1$，$x=1$ のとき $y=0$

よって，円①と直線②は異なる２点 $(0,\ -1)$，$(1,\ 0)$ で交わる。

(2)　$\begin{cases}x^2+y^2+2x-4y=0 & \cdots\cdots ①\\ x+2y+2=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

②から　$x=-2y-2$　……③

これを①に代入して　$(-2y-2)^2+y^2+2(-2y-2)-4y=0$

整理すると　$y^2=0$　したがって　$y=0$

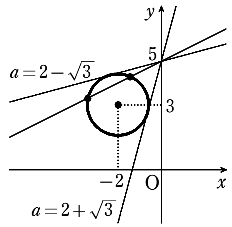
③から　$y=0$ のとき $x=-2$

よって，円①と直線②は点 $(-2,\ 0)$ で接する。

4

解答　$2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

解説



[解法１]　$y=ax+5$ を円の方程式に代入して

$(x+2)^2+(ax+2)^2=2$

整理すると　$(a^2+1)x^2+4(a+1)x+6=0$

判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=\{2(a+1)\}^2-6(a^2+1)$

$=-2a^2+8a-2=-2(a^2-4a+1)$

円と直線が異なる２点で交わるための条件は　$D>0$

ゆえに　$a^2-4a+1<0$

よって　$2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

[解法２]　円の半径は $\sqrt{2}$ である。円の中心 $(-2,\ 3)$ と直線 $y=ax+5$ の距離を d とすると，円と直線が異なる２点で交わるための条件は　$d<\sqrt{2}$

$d=\frac{|a\cdot(-2)-3+5|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}$ であるから　$\frac{|-2a+2|}{\sqrt{a^2+1}}<\sqrt{2}$

両辺に正の数 $\sqrt{a^2+1}$ を掛けて　$|-2a+2|<\sqrt{2(a^2+1)}$

両辺は負でないから平方して　$(-2a+2)^2<2(a^2+1)$

整理して　$a^2-4a+1<0$

よって　$2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

5

解答　(1)　$x-\sqrt{3}\,y=4$　(2)　$x+7y=10,\ \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$；$x-y=2,\ (1,\ -1)$

解説

(1)　点 $(1,\ -\sqrt{3})$ は，円 $x^2+y^2=4$ 上の点であるから，その点における接線の方程式は

$1\cdot x+(-\sqrt{3})y=4$　すなわち　$x-\sqrt{3}\,y=4$

(2)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると

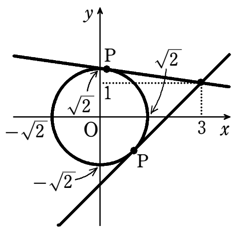
$$x_1{}^2+y_1{}^2=2 \quad \cdots\cdots ①$$

また，点Pにおけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=2$$

この直線が点 $(3,\ 1)$ を通るから

$$3x_1+y_1=2 \quad \cdots\cdots ②$$



①，② から y_1 を消去して整理すると

$$5x_1{}^2-6x_1+1=0$$

よって　$(5x_1-1)(x_1-1)=0$　　ゆえに　$x_1=\dfrac{1}{5},\ 1$

② に代入して　$x_1=\dfrac{1}{5}$ のとき　$y_1=\dfrac{7}{5}$,　$x_1=1$ のとき　$y_1=-1$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$x+7y=10,\ \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right);\ x-y=2,\ (1,\ -1)$$

別解 1　点 $(3,\ 1)$ を通る接線は，x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は，傾きを m とすると次のようにおける。

$$y-1=m(x-3)\quad すなわち\quad y=mx-(3m-1)\quad \cdots\cdots ③$$

③ を円の方程式に代入して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2m(3m-1)x+\{(3m-1)^2-2\}=0 \quad \cdots\cdots ④$$

$m^2+1 \neq 0$ であるから，2 次方程式 ④ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-m(3m-1)\}^2-(m^2+1)\{(3m-1)^2-2\}$$

$$=\{m^2-(m^2+1)\}(3m-1)^2+2(m^2+1)$$

$$=-7m^2+6m+1=-(7m+1)(m-1)$$

円と直線 ③ が接するための条件は　$D=0$

よって　$-(7m+1)(m-1)=0$　　ゆえに　$m=-\dfrac{1}{7},\ 1$

$m=-\dfrac{1}{7}$ のとき，④ の重解は　$x=\dfrac{m(3m-1)}{m^2+1}=\dfrac{1}{5}$

$m=1$　のとき，④ の重解は　$x=1$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$y=-\frac{1}{7}x+\frac{10}{7},\ \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right);\ y=x-2,\ (1,\ -1)$$

別解 2　(別解 1 と 3 行目まで同じ)

③ から　$mx-y-3m+1=0$　……⑤

円の中心 $(0,\ 0)$ と接線の距離が円の半径 $\sqrt{2}$ に等しいから

$$\frac{|m\cdot 0-0-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

両辺に $\sqrt{m^2+1}$ を掛けて　$|-3m+1|=\sqrt{2(m^2+1)}$

両辺を 2 乗して整理すると　$7m^2-6m-1=0$

よって　$(7m+1)(m-1)=0$　　ゆえに　$m=-\dfrac{1}{7},\ 1$

$m=-\dfrac{1}{7}$ のとき，⑤ は　$x+7y-10=0$　……⑥

直線 OP は $y=7x$ と表されるから，⑥ と連立させて解くと，接点の座標は

$$\left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$$

$m=1$ のとき，⑤ は　$x-y-2=0$　……⑦

直線 OP は $y=-x$ と表されるから，⑦ と連立させて解くと，接点の座標は

$$(1,\ -1)$$

6

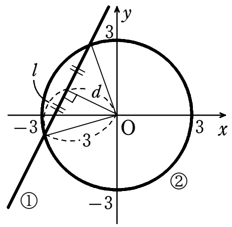
解答　4

解説

$2x-y+5=0$ ……①，$x^2+y^2=9$ ……②　とする。

円 ② の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ① の距離 d は

$$d=\frac{|5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$



円 ② の半径は 3 であるから，弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2=3^2-d^2=9-5=4$$

$l>0$ であるから　$l=2$

よって，弦の長さは　$2l=4$

別解　① から　$y=2x+5$

これを ② に代入すると　$x^2+(2x+5)^2=9$

よって　$5x^2+20x+16=0$　……③

直線 ① と円 ② の交点の座標を $(\alpha,\ 2\alpha+5)$，$(\beta,\ 2\beta+5)$ とすると，α，β は 2 次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{20}{5}=-4,\quad \alpha\beta=\frac{16}{5}$$

求める弦の長さを L とすると

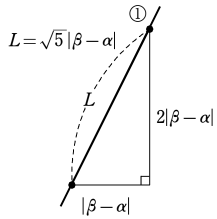
$$L^2=(\beta-\alpha)^2+\{(2\beta+5)-(2\alpha+5)\}^2=5(\beta-\alpha)^2$$

$$=5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=5\left\{(-4)^2-4\cdot\frac{16}{5}\right\}=16$$

$L>0$ であるから　$L=4$

参考　① の傾きが 2 であるから，右の図のようになる。

このことから，$L=\sqrt{5}|\beta-\alpha|$ を導いてもよい。



7

解答　(1)　略　　(2)　$x+2y-3=0$　　(3)　中心 $\left(\dfrac{5}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{205}}{8}$

解説

(1)　円 $x^2+y^2-5=0$ の中心は $(0,\ 0)$，半径は $\sqrt{5}$

円 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ について，方程式を変形すると

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

ゆえに，中心は $(1,\ 2)$，半径は 2

よって，中心間の距離は　$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\sqrt{5}-2<\sqrt{5}<2+\sqrt{5}$ であるから，2 つの円は異なる 2 点で交わる。

(2)　k を定数として，次の方程式を考える。

$$k(x^2+y^2-5)+x^2+y^2-2x-4y+1=0 \quad \cdots\cdots [\mathrm{A}]$$

[A] は，与えられた 2 つの円の交点を通る図形を表す。

$k=-1$ のとき，[A] は　$-2x-4y+6=0$　すなわち　$x+2y-3=0$

これは直線を表すから，求める直線の方程式である。

(3)　[A] が点 $(1,\ 3)$ を通るとして，[A] に $x=1$，$y=3$ を代入すると　$5k-3=0$

ゆえに　$k=\dfrac{3}{5}$

[A] に代入して整理すると　$x^2+y^2-\dfrac{5}{4}x-\dfrac{5}{2}y-\dfrac{5}{4}=0$

すなわち　$\left(x-\dfrac{5}{8}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{205}{64}$

したがって　中心 $\left(\dfrac{5}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{205}}{8}$

1

解答 (1) $(x+2)^2+(y-1)^2=25$　(2) $(x+1)^2+y^2=29$　(3) $(x-3)^2+(y-4)^2=16$

(4) $x^2+y^2-2x-2y-23=0$

解説

(1) 半径 r は中心 $(-2,\ 1)$ と点 $(1,\ -3)$ の距離で

$$r^2=(1+2)^2+(-3-1)^2=25$$

よって，求める円の方程式は

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25$$

(2) 中心は，2点 $(4,\ -2)$，$(-6,\ 2)$ を結ぶ線分の中点である。

その座標は

$$\left(\frac{4-6}{2},\ \frac{-2+2}{2}\right)\quad すなわち\quad (-1,\ 0)$$

半径 r は中心 $(-1,\ 0)$ と点 $(4,\ -2)$ の距離で

$$r^2=(4+1)^2+(-2-0)^2=29$$

よって，求める円の方程式は

$$(x+1)^2+y^2=29$$

(3) x 軸に接するとき，中心 $(3,\ 4)$ と x 軸の距離 4 が半径に等しい。

よって，求める円の方程式は

$$(x-3)^2+(y-4)^2=16$$

(4) 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(-3,\ 4)$ を通るから

$$(-3)^2+4^2-3l+4m+n=0$$

よって　$3l-4m-n=25$　……①

点 $(4,\ 5)$ を通るから

$$4^2+5^2+4l+5m+n=0$$

よって　$4l+5m+n=-41$　……②

点 $(1,\ -4)$ を通るから

$$1^2+(-4)^2+l-4m+n=0$$

よって　$l-4m+n=-17$　……③

①，②，③ を解いて　$l=-2,\ m=-2,\ n=-23$

したがって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

2

解答 (1) 中心 $(5,\ -6)$，半径 8　(2) $k<-\sqrt{6}$，$\sqrt{6}<k$

解説

(1) 円の方程式を変形すると

$$(x^2-10x+5^2)+(y^2+12y+6^2)=3+5^2+6^2$$

すなわち　$(x-5)^2+(y+6)^2=8^2$

よって　中心 $(5,\ -6)$，半径 8

(2) 方程式を変形すると

$$(x^2+2kx+k^2)+\{y^2-4ky+(2k)^2\}=-4k^2-6+k^2+(2k)^2$$

すなわち　$(x+k)^2+(y-2k)^2=k^2-6$

これが円を表すための必要十分条件は　$k^2-6>0$

これを解いて　$k<-\sqrt{6}$，$\sqrt{6}<k$

3

解答 (1) 異なる2点 $(-1,\ 2)$，$(2,\ -1)$ で交わる　(2) 共有点をもたない

(3) 点 $(2,\ -1)$ で接する

解説

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots① \\ y=-x+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

② を ① に代入して　$x^2+(-x+1)^2=5$

よって　$x^2-x-2=0$　これを解いて　$x=-1,\ 2$

② から　$x=-1$ のとき　$y=2$，　$x=2$ のとき　$y=-1$

ゆえに，円 ① と直線 ② は異なる 2 点 $(-1,\ 2)$，$(2,\ -1)$ で交わる。

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=4 & \cdots\cdots① \\ 2x+y=5 & \cdots\cdots② \end{cases}$

② から　$y=-2x+5$

これを ① に代入して　$x^2+(-2x+5)^2=4$　よって　$5x^2-20x+21=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-10)^2-5\cdot21=-5<0$

ゆえに，円 ① と直線 ② は共有点をもたない。

(3) $\begin{cases} x^2+y^2-2x-1=0 & \cdots\cdots① \\ y=x-3 & \cdots\cdots② \end{cases}$

② を ① に代入して　$x^2+(x-3)^2-2x-1=0$　よって　$x^2-4x+4=0$

すなわち　$(x-2)^2=0$　ゆえに　$x=2$ (重解)

② から　$x=2$ のとき　$y=-1$

よって，円 ① と直線 ② は点 $(2,\ -1)$ で接する。

4

解答 $3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}$

解説

円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ の中心は $(-2,\ 1)$，半径は $\sqrt{5}$

$y=x+m$ から　$x-y+m=0$

円の中心 $(-2,\ 1)$ と直線の距離を d とすると

$$d=\frac{|-2-1+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|m-3|}{\sqrt{2}}$$

円と直線が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は

$$d<\sqrt{5}\quad すなわち\quad \frac{|m-3|}{\sqrt{2}}<\sqrt{5}$$

よって　$|m-3|<\sqrt{10}$　ゆえに　$-\sqrt{10}<m-3<\sqrt{10}$

したがって　$3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}$

別解 $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=5 & \cdots\cdots① \\ y=x+m & \cdots\cdots② \end{cases}$

② を ① に代入して　$(x+2)^2+(x+m-1)^2=5$

よって　$2x^2+2(m+1)x+m^2-2m=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-2(m^2-2m)=-m^2+6m+1$$

円 ① と直線 ② が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は

$$D>0\quad すなわち\quad -m^2+6m+1>0$$

よって　$m^2-6m-1<0$　これを解いて　$3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}$

5

解答 (1) $3x-\sqrt{7}\,y=16$

(2) $-3x+y=10$，$(-3,\ 1)$；$x+3y=10$，$(1,\ 3)$

解説

(1) $3\cdot x+(-\sqrt{7})\cdot y=16$　すなわち　$3x-\sqrt{7}\,y=16$

(2) 接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする。

点 P は円 $x^2+y^2=10$ 上にあるから

$${x_1}^2+{y_1}^2=10\quad\cdots\cdots①$$

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=10\quad\cdots\cdots②$$

この直線が点 $(-2,\ 4)$ を通るから　$-2x_1+4y_1=10$

よって　$x_1=2y_1-5$　……③

③ を ① に代入して

$(2y_1-5)^2+{y_1}^2=10$　ゆえに　${y_1}^2-4y_1+3=0$

これを解いて　$y_1=1,\ 3$

[1] $y_1=1$ のとき，③ から　$x_1=-3$

よって，接点の座標は　$(-3,\ 1)$

接線の方程式は，② から

$-3\cdot x+1\cdot y=10$　すなわち　$-3x+y=10$

[2] $y_1=3$ のとき，③ から　$x_1=1$

よって，接点の座標は　$(1,\ 3)$

接線の方程式は，② から

$1\cdot x+3\cdot y=10$　すなわち　$x+3y=10$

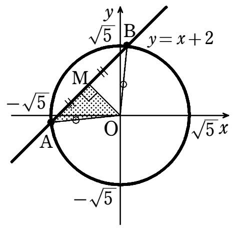
6

解答 $2\sqrt{3}$

解説

円と直線の交点をA，Bとし，線分 AB の中点を M とする。

線分 OM の長さは，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $y=x+2$ の距離に等しいから



$$\mathrm{OM}=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$\mathrm{OA}=\sqrt{5}$ であるから

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OM}^2}$$
$$=2\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$$

別解 $y=x+2$，$x^2+y^2=5$ から y を消去して　$x^2+(x+2)^2=5$

整理すると　$2x^2+4x-1=0$　……①

円と直線の交点の座標を $(\alpha,\ \alpha+2)$，$(\beta,\ \beta+2)$ とすると，α，β は 2 次方程式 ① の解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

求める線分の長さを l とすると

$$l^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+2)-(\alpha+2)\}^2=2(\beta-\alpha)^2$$

$$=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=2\left\{(-2)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

したがって，求める線分の長さは　$l=2\sqrt{3}$

7

解答　(1)　略　(2)　$x^2+y^2-6x-y=0$　(3)　$2x+y-5=0$

解説

(1)　$x^2+y^2-4x-5=0$ を変形すると　$(x-2)^2+y^2=3^2$

この円の中心は点 $(2,\ 0)$，半径は 3

$x^2+y^2+2y-15=0$ を変形すると　$x^2+(y+1)^2=4^2$

この円の中心は点 $(0,\ -1)$，半径は 4

よって，２円の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(0-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$$

$4-3<d<4+3$ であるから，2 円は 2 点で交わる。

(2)　k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-4x-5)+(x^2+y^2+2y-15)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考えると，① の表す図形は 2 円の 2 つの交点を通る。

図形 ① が原点を通るとき　$-5k-15=0$　　よって　$k=-3$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2-6x-y=0$

これが求める円の方程式である。

(3)　図形 ① が直線であるとき，x^2，y^2 の項の係数が 0 になるから　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　$2x+y-5=0$

1

解答　$m<-\frac{3}{4}$ のとき 2 個，$m=-\frac{3}{4}$ のとき 1 個，$m>-\frac{3}{4}$ のとき 0 個

解説

[解法 1]　$y=mx+1$ を $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ に代入して

$$x^2+(mx+1)^2-2x+2(mx+1)+1=0$$

整理して　$(m^2+1)x^2+2(2m-1)x+4=0$

$m^2+1\neq 0$ であるから，この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2m-1)^2-4(m^2+1)=-4m-3$$

よって，求める共有点の個数は

$D>0$ すなわち $m<-\frac{3}{4}$ のとき　2 個，

$D=0$ すなわち $m=-\frac{3}{4}$ のとき　1 個，

$D<0$ すなわち $m>-\frac{3}{4}$ のとき　0 個

[解法 2]　$y=mx+1$ ……①，$x^2+y^2-2x+2y+1=0$ ……② とする。

② を変形すると　$(x-1)^2+(y+1)^2=1$

よって，円 ② の中心は $(1,\ -1)$，半径は 1 である。

また，① から　$mx-y+1=0$

円 ② の中心と直線 ① の距離 d は

$$d=\frac{|m\cdot 1-(-1)+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$$

[1]　直線 ① と円 ② が異なる 2 つの共有点をもつための条件は

$d<1$　すなわち　$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}<1$

ゆえに　$|m+2|<\sqrt{m^2+1}$

両辺は負でないから，2 乗して　$(m+2)^2<m^2+1$

よって　$4m<-3$　　ゆえに　$m<-\frac{3}{4}$

[2]　直線 ① と円 ② が 1 点で接するための条件は

$d=1$　すなわち　$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

同様にして　$m=-\frac{3}{4}$

[3]　直線 ① と円 ② が共有点をもたないための条件は

$d>1$　すなわち　$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}>1$

同様にして　$m>-\frac{3}{4}$

よって，求める共有点の個数は

$m<-\frac{3}{4}$ のとき　2 個，　$m=-\frac{3}{4}$ のとき　1 個，　$m>-\frac{3}{4}$ のとき　0 個

2

解答　(前半)　$m\leqq-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}\leqq m$

(後半)　$m=\sqrt{3}$ のとき，接点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$m=-\sqrt{3}$ のとき，接点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

解説

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ y=mx+2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② を ① に代入して　$x^2+(mx+2)^2=1$

整理すると　$(m^2+1)x^2+4mx+3=0$　……③

判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+1)\cdot 3=m^2-3$

円 ① と直線 ② が共有点をもつのは，$D\geqq 0$ のときである。

よって，$m^2-3\geqq 0$ より　$m\leqq-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}\leqq m$

また，円 ① と直線 ② が接するのは，$D=0$ のときである。

よって，$m^2-3=0$ より　$m=\pm\sqrt{3}$

③ の重解は　$x=-\frac{4m}{2(m^2+1)}=-\frac{2m}{m^2+1}$

このとき，② から　$y=m\cdot\left(-\frac{2m}{m^2+1}\right)+2=\frac{2}{m^2+1}$

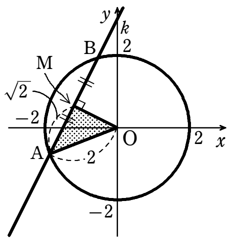
したがって，接点の座標は

$m=\sqrt{3}$ のとき $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$m=-\sqrt{3}$ のとき $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

3

解答　$k=\pm\sqrt{10}$

解説



円の中心を O，弦を AB，その中点を M とすると，

△OAM において

$$\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2=\mathrm{OA}^2$$

すなわち　$\left\{\frac{|2\cdot 0-0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right\}^2+(\sqrt{2})^2=2^2$

よって　$k=\pm\sqrt{10}$

別解　円と直線の方程式から y を消去して整理すると

$$5x^2+4kx+k^2-4=0 \quad \cdots\cdots ①$$

① の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{4k}{5},\quad \alpha\beta=\frac{k^2-4}{5}$$

また，円と直線の交点の座標は，$(\alpha,\ 2\alpha+k)$，$(\beta,\ 2\beta+k)$ と表されるから，条件より

$(\beta-\alpha)^2+\{(2\beta+k)-(2\alpha+k)\}^2=(2\sqrt{2})^2$　すなわち　$5(\beta-\alpha)^2=8$

ここで　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(-\frac{4k}{5}\right)^2-4\cdot\frac{k^2-4}{5}=\frac{-4k^2+80}{25}$

$5\cdot\frac{-4k^2+80}{25}=8$ を解いて　$k=\pm\sqrt{10}$

4

解答　与えられた 2 円を順に ①，② とする。

(1)　円 ① は円 ② の内部にある　(2)　2 つの円 ①，② は 2 点で交わる

(3)　円 ② は円 ① に内接する

解説

(1) ～ (3) において，与えられた 2 円を順に ①，② とする。

また，2 円①，②の中心間の距離を d，円①の半径を r_1，円②の半径を r_2 とする。

(1)　円①の中心は　　点 $(0,\ 0)$

　　円②の中心は　　点 $(1,\ 2)$

　よって　　$d=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

　また，$r_1=3$，$r_2=6$ であるから

　　$r_2-r_1=3$　　ゆえに　　$d<r_2-r_1$

　したがって，円①は円②の内部にある。

(2)　円①の中心は　　点 $(3,\ 0)$

　円②の方程式を変形すると

$$(x-1)^2+(y+2)^2=1$$

　ゆえに，円②の中心は　　点 $(1,\ -2)$

　よって　　$d=\sqrt{(1-3)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{2}$

　また，$r_1=2$，$r_2=1$ であるから

　　$r_1-r_2=1$，$r_1+r_2=3$　　ゆえに　　$r_1-r_2<d<r_1+r_2$

　したがって，2 つの円①，②は 2 点で交わる。

(3)　円①の方程式を変形すると

$$(x+1)^2+(y-4)^2=90$$

　円②の方程式を変形すると

$$(x+2)^2+(y-1)^2=40$$

　ゆえに，円①の中心は　　点 $(-1,\ 4)$

　　　　　円②の中心は　　点 $(-2,\ 1)$

　よって　　$d=\sqrt{(-2+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$

　また，$r_1=3\sqrt{10}$，$r_2=2\sqrt{10}$ であるから

　　$r_1-r_2=\sqrt{10}$　　ゆえに　　$d=r_1-r_2$

　したがって，円②は円①に内接する。

5

解答　$r=3,\ 7$

解説

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$　……①

$(x-3)^2+(y+1)^2=r^2$　……②　とする。

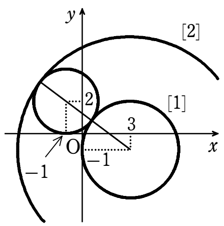
円①の中心は点 $(-1,\ 2)$，半径は 2

円②の中心は点 $(3,\ -1)$，半径は r

2 円の中心間の距離は

$$\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{25}=5$$

2 円が接するのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。



[1]　2 円が外接するとき

　　$5=2+r$　　　よって　　$r=3$

[2]　円①が円②に内接するとき

　　$5=r-2$　　　よって　　$r=7$

したがって　　$r=3,\ 7$

注意　円②の中心は，円①の外部にあるから，円②が円①に内接することはない。

6

解答　(1)　$x^2+y^2-5x+5y-20=0$　　(2)　$x-y+3=0$　　(3)　$(-1,\ 2)$，$(-2,\ 1)$

解説

k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2+4x-4y+7)=0\quad \cdots\cdots ①$$

を考えると，①の表す図形は 2 円の 2 つの交点を通る。

(1)　図形①が点 $(4,\ 3)$ を通るとき　　$k(16+9-5)+(16+9+16-12+7)=0$

　よって　　$20k+36=0$　　　ゆえに　　$k=-\dfrac{9}{5}$

　これを①に代入して整理すると　　$x^2+y^2-5x+5y-20=0$

(2)　図形①が直線であるとき，x^2，y^2 の項の係数が 0 になるから　　$k=-1$

　これを①に代入して整理すると　　$x-y+3=0$

(3)　2 円の交点は，円 $x^2+y^2=5$ ……②と (2) で求めた直線 $x-y+3=0$ ……③との交点である。

　③から　　$y=x+3$　……④

　④を②に代入して　　$x^2+(x+3)^2=5$

　よって　　$x^2+3x+2=0$　　　これを解いて　　$x=-1,\ -2$

　④から　　$x=-1$ のとき　$y=2$，　$x=-2$ のとき　$y=1$

　したがって，求める交点の座標は　　$(-1,\ 2)$，$(-2,\ 1)$

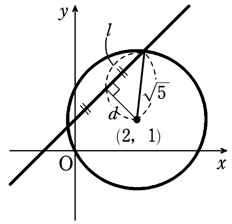
1

解答　(1)　$2\sqrt{3}$　　(2)　$a=-\dfrac{1}{3}$

解説

(1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5\quad \cdots\cdots ①$$



　$a=-1$ のとき，直線の方程式は

$$x-y+1=0\quad \cdots\cdots ②$$

　円①の中心 $(2,\ 1)$ と直線②の距離 d は

$$d=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

　円①の半径は $\sqrt{5}$ であるから，弦 AB の長さを $2l$

　とすると　　$l^2=(\sqrt{5})^2-d^2=5-2=3$

　$l>0$ であるから　　$l=\sqrt{3}$　　　よって　　$\mathrm{AB}=2l=2\sqrt{3}$

別解　②から　　$y=x+1$

　これを $x^2+y^2-4x-2y=0$ に代入して　　$x^2+(x+1)^2-4x-2(x+1)=0$

　よって　　$2x^2-4x-1=0$　……③

　円と直線の交点 A，B の座標を $(\alpha,\ \alpha+1)$，$(\beta,\ \beta+1)$ とすると，α，β は 2 次方程式③の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

　よって　　$\mathrm{AB}^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+1)-(\alpha+1)\}^2=2(\beta-\alpha)^2=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

$$=2\left\{2^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

　$\mathrm{AB}>0$ であるから　　$\mathrm{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(2)　弦 AB の長さが最大になるのは，弦 AB が円の直径になるときである。

　このとき，直線 $ax+y+a=0$ は円の中心 $(2,\ 1)$ を通るから

$$2\cdot a+1+a=0\qquad よって\qquad a=-\frac{1}{3}$$

2

解答　$x^2+y^2-3x+3y-8=0$，6，$\dfrac{25}{2}\pi$

解説

$x+3y-7=0$ ……①，$x-3y-1=0$ ……②，$x-y+1=0$ ……③とする。

　　2 直線①，②の交点の座標は　　$(4,\ 1)$

　　2 直線②，③の交点の座標は　　$(-2,\ -1)$

　　2 直線①，③の交点の座標は　　$(1,\ 2)$

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とすると，この円が

点 $(4,\ 1)$ を通るから　　　$4l+m+n+17=0$　……④

点 $(-2,\ -1)$ を通るから　　$-2l-m+n+5=0$ ……⑤

点 $(1,\ 2)$ を通るから　　　$l+2m+n+5=0$　……⑥

(④−⑤)÷2 から　　$3l+m+6=0$　……⑦

(⑥−⑤)÷3 から　　$l+m=0$　　……⑧

⑦−⑧ から　　$2l+6=0$　　　よって　　$l=-3$

これを⑧に代入して　　$m=-l=3$

これらを⑤に代入して　　$n=2l+m-5=-8$

したがって，求める外接円の方程式は　$x^2+y^2-3x+3y-8=0$

直線 ③ 上の２点 $(-2,\ -1)$，$(1,\ 2)$ 間の距離は

$$\sqrt{\{1-(-2)\}^2+\{2-(-1)\}^2}=3\sqrt{2}$$

また，点 $(4,\ 1)$ と直線 ③ の距離は

$$\frac{|4-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

よって，求める三角形の面積は　$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=6$

また，外接円の方程式を変形すると

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

ゆえに，この円の半径を r とすると　$r^2=\frac{25}{2}$

よって，外接円の面積は　$\pi r^2=\frac{25}{2}\pi$

$\boxed{3}$

解答　$2x+y=2$

解説

$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$ とおく。

２点 P，Q における円の接線の方程式はそれぞれ　$x_1x+y_1y=4$，$x_2x+y_2y=4$

この２直線はともに点 $(4,\ 2)$ を通るから　$4x_1+2y_1=4$，$4x_2+2y_2=4$

すなわち　$2x_1+y_1=2$，$2x_2+y_2=2$

これは，直線 $2x+y=2$ が２点 P，Q を通ること，すなわち，２点 P，Q を通る直線の方程式が $2x+y=2$ であることを示している。

よって，求める直線の方程式は　$2x+y=2$

第３講　例題

$\boxed{1}$

解答　(1)　直線 $2x-y-6=0$　　(2)　点 $(5,\ 0)$ を中心とする半径４の円

解説

(1)　$P(x,\ y)$ とする。

$AP=BP$ から　$AP^2=BP^2$

ゆえに　$(x-2)^2+(y-3)^2=(x-6)^2+(y-1)^2$

整理して　$2x-y-6=0$　…… ①

よって，点 P は直線 ① 上にある。

逆に，直線 ① 上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　直線 $2x-y-6=0$

(2)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

P　に関する条件は　$AP:BP=2:1$

これより　$AP=2BP$

すなわち　$AP^2=4BP^2$

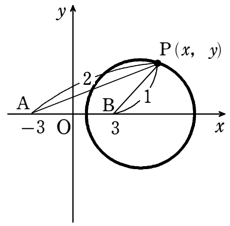
$AP^2=\{x-(-3)\}^2+y^2=(x+3)^2+y^2$，

$BP^2=(x-3)^2+y^2$ を代入すると

$$(x+3)^2+y^2=4\{(x-3)^2+y^2\}$$

整理すると　$x^2-10x+y^2+9=0$

すなわち　$(x-5)^2+y^2=4^2$



よって，点 P は円 $(x-5)^2+y^2=4^2$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点 $P(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　点 $(5,\ 0)$ を中心とする半径４の円

$\boxed{2}$

解答　中心 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，半径２の円

解説

点 Q の座標を $(s,\ t)$ とし，線分 AQ を $2:1$ に内分する点を $P(x,\ y)$ とする。

Q は円 $x^2+y^2=9$ 上の点であるから　$s^2+t^2=9$　…… ①

P は線分 AQ を $2:1$ に内分する点であるから

$$x=\frac{1\cdot 1+2s}{2+1}=\frac{1+2s}{3},\quad y=\frac{1\cdot 2+2t}{2+1}=\frac{2+2t}{3}$$

よって　$s=\frac{3x-1}{2}$，$t=\frac{3y-2}{2}$

これを ① に代入すると　$\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{3y-2}{2}\right)^2=9$

ゆえに　$\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{9}{4}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=9$

よって　$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=4$　…… ②

したがって，点 P は円 ② 上にある。

逆に，円 ② 上の任意の点は，条件を満たす。

以上から，求める軌跡は　中心 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，半径２の円

$\boxed{3}$

解答　放物線 $y=-(x-2)^2+1$

解説

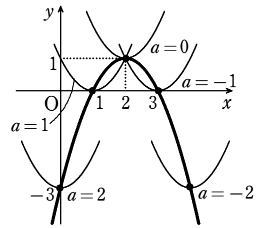
放物線の方程式を変形すると

$$y=\{x+(a-2)\}^2-a^2+1$$

放物線の頂点を $P(x,\ y)$ とすると

$x=-a+2$　…… ①

$y=-a^2+1$　…… ②



① から　$a=-x+2$

これを ② に代入して

$y=-(-x+2)^2+1$

したがって，求める軌跡は

放物線　$y=-(x-2)^2+1$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$m<0,\ 4<m$　　(2)　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0,\ 2<x$ の部分

解説

(1)　$y=x^2$ …… ①，　$y=m(x-1)$ …… ②　とする。

①，② から y を消去して整理すると　$x^2-mx+m=0$　…… ③

この２次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-m)^2-4m=m(m-4)$$

放物線 ① と直線 ② が異なる２点 P，Q で交わるための必要十分条件は

$D>0$　すなわち　$m(m-4)>0$

よって　$m<0,\ 4<m$　…… ④

(2)　P，Q の x 座標を，それぞれ α，β $(\alpha\neq\beta)$ とする。

α，β は ③ の異なる２つの実数解であるから，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=m$

線分 PQ の中点 M の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2}$　…… ⑤

$Y=m(X-1)$　…… ⑥

⑤ から　$m=2X$　…… ⑦

これを ⑥ に代入して　$Y=2X(X-1)$　　よって　$Y=2X^2-2X$

また，④，⑦ から　$2X<0,\ 4<2X$　　ゆえに　$X<0,\ 2<X$

よって，点 M は放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0,\ 2<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 M の軌跡は　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0,\ 2<x$ の部分

$\boxed{5}$

解答　原点を中心とし，半径が５の円　ただし，点 $(-5,\ 0)$ を除く

解説

２直線の方程式を変形して

$y=m(x+5)$　…… ①　　$-my=x-5$　…… ②

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)$ は ①，② を満たす。

[1]　$y\neq 0$ のとき，② から　$m=-\frac{x-5}{y}$

これを ① に代入して　$y=-\frac{x-5}{y}(x+5)$

よって　$x^2+y^2=25$　…… ③

③ において $y=0$ とすると　$x=\pm 5$

ゆえに，$y\neq 0$ のとき，点 P は，円 ③ から２点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を除いた図形上にある。

[2]　$y=0$ のとき，② から　　$x=5$

$x=5$，$y=0$ を ① に代入すると　　$m=0$

よって，点 $(5,\ 0)$ は，$m=0$ のときの２直線の交点である。

[1], [2] から，点Ｐは，原点を中心とし，半径が５の円から点 $(-5,\ 0)$ を除いた図形上にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点Ｐの軌跡は

原点を中心とし，半径が５の円　ただし，点 $(-5,\ 0)$ を除く

参考　① から第１の直線は定点 $(-5,\ 0)$ を通り，② から第２の直線は定点 $(5,\ 0)$ を通る。また，この２直線は垂直であるから，点Ｐは２点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を直径の両端とする円周上にあることがわかる。ただし，① は直線 $x=-5$，② は直線 $y=0$ を表さないから，点 $(-5,\ 0)$ を除く。

$\boxed{1}$

解答　(1)　直線 $2x-4y+9=0$　　(2)　中心 $(4,\ 0)$，半径４の円

解説

(1)　点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ であるから　　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

すなわち　　$(x-3)^2+y^2=x^2+(y-6)^2$　　整理すると　　$2x-4y+9=0$

よって，点Ｐは直線 $2x-4y+9=0$ 上にある。

逆に，この直線上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　直線 $2x-4y+9=0$

(2)　点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。

Ｐの満たす条件は　　$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$

ゆえに　　$\mathrm{AP}=2\mathrm{BP}$　すなわち　$\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$

したがって　　$(x+4)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$

整理すると　　$x^2-8x+y^2=0$

すなわち　　$(x-4)^2+y^2=4^2$

ゆえに，点Ｐは円 $(x-4)^2+y^2=4^2$ 上にある。

逆に，この円上の任意の点Ｐは，与えられた条件を満たす。

よって，点Ｐの軌跡は　　中心 $(4,\ 0)$，半径４の円

$\boxed{2}$

解答　(1)　直線 $x-2y=-2$　　(2)　放物線 $y=3x^2-8x+4$

(3)　中心が点 $(2,\ 1)$，半径が $\dfrac{1}{3}$ の円

解説

点Ｐの座標を $(x,\ y)$，点Ｑの座標を $(s,\ t)$ とする。

(1)　点Ｑは直線 $x-2y=1$ 上にあるから

$s-2t=1$　……①

点Ｐは線分ＡＱの中点であるから

$x=\dfrac{1+s}{2}$，$y=\dfrac{3+t}{2}$　　ゆえに　　$s=2x-1$，$t=2y-3$

これを ① に代入して　　$(2x-1)-2(2y-3)=1$　　すなわち　　$x-2y=-2$

よって，点Ｐは，直線 $x-2y=-2$ 上にある。

逆に，この直線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点Ｐの軌跡は　　直線 $x-2y=-2$

(2)　点Ｑは放物線 $y=x^2$ 上にあるから

$t=s^2$　……①

点Ｐは線分ＡＱを $1:2$ に内分するから

$x=\dfrac{2\cdot2+1\cdot s}{1+2}$，$y=\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot t}{1+2}$　　ゆえに　　$s=3x-4$，$t=3y+4$

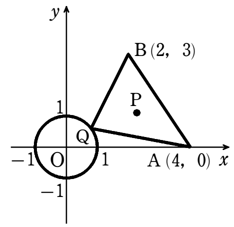
これを ① に代入して　　$3y+4=(3x-4)^2$　　すなわち　　$y=3x^2-8x+4$

よって，点Ｐは，放物線 $y=3x^2-8x+4$ 上にある。

逆に，この放物線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点Ｐの軌跡は　　放物線 $y=3x^2-8x+4$

(3)　点Ｑは直線ＡＢ上にないから，図形ＡＢＱは常に三角形になる。



点Ｑは円 $x^2+y^2=1$ 上にあるから

$s^2+t^2=1$　……①

点Ｐは三角形ＡＢＱの重心であるから

$x=\dfrac{4+2+s}{3}$，$y=\dfrac{0+3+t}{3}$

ゆえに　　$s=3x-6$，$t=3y-3$

これを ① に代入して

$(3x-6)^2+(3y-3)^2=1$　　すなわち　　$(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{9}$

よって，点Ｐは，円 $(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{9}$ 上にある。

逆に，この円上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点Ｐの軌跡は，中心が点 $(2,\ 1)$，半径が $\dfrac{1}{3}$ の円である。

$\boxed{3}$

解答　放物線 $y=\dfrac{4}{9}x^2$

解説

方程式を変形して　　$\left(x+\dfrac{3}{2}a\right)^2+(y-a^2)^2=\dfrac{1}{4}a^2+1$

$\dfrac{1}{4}a^2+1>0$ であるから，a がすべての実数値をとって変化するとき，与えられた方程式は円を表す。

円の中心の座標を $(x,\ y)$ とすると　　$x=-\dfrac{3}{2}a$，$y=a^2$

$a=-\dfrac{2}{3}x$ であるから，$y=a^2$ に代入して　　$y=\left(-\dfrac{2}{3}x\right)^2=\dfrac{4}{9}x^2$

したがって，求める軌跡は　　放物線 $y=\dfrac{4}{9}x^2$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$m<1$，$9<m$　　(2)　放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2$，$6<x$ の部分

解説

(1)　$y=x^2-3x$ ……①，　$y=m(x-4)$ ……②　とする。

①，② から y を消去して整理すると　　$x^2-(m+3)x+4m=0$　……③

この２次方程式の判別式を D とすると

$D=(m+3)^2-4\cdot1\cdot4m=m^2-10m+9=(m-1)(m-9)$

放物線 ① と直線 ② が異なる２点Ａ，Ｂで交わるための必要十分条件は

$D>0$　すなわち　$(m-1)(m-9)>0$

よって　　$m<1$，$9<m$　……④

(2)　Ａ，Ｂの x 座標を，それぞれ α，β $(\alpha\neq\beta)$ とする。

α，β は ③ の異なる２つの実数解であるから，解と係数の関係により

$\alpha+\beta=m+3$

線分ＡＢの中点Ｐの座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{m+3}{2}$　……⑤　　$Y=m(X-4)$　……⑥

⑤ から　　$m=2X-3$　……⑦

これを ⑥ に代入して　　$Y=(2X-3)(X-4)$

よって　　$Y=2X^2-11X+12$

また，④，⑦ から　　$2X-3<1$，$9<2X-3$　　ゆえに　　$X<2$，$6<X$

よって，点 P は放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2$，$6<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は　放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2$，$6<x$ の部分

$\boxed{5}$

$\boxed{解答}$　中心が原点，半径が 2 の円。ただし，点 $(-2,\ 0)$ を除く

解説

$y=t(x+2)$ ……①，　$ty=2-x$ ……②

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)$ は ①，② を満たす。

[1]　$y\fallingdotseq 0$ のとき，② から　　$t=\dfrac{2-x}{y}$

これを ① に代入して　　$y=\dfrac{2-x}{y}(x+2)$

よって　　$x^2+y^2=4$　……③

③ で $y=0$ とすると　　$x=\pm 2$

ゆえに，$y\fallingdotseq 0$ のとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は円 ③ から 2 点 $(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を除いた図形上にある。

[2]　$y=0$ のとき，② から　　$x=2$

$x=2$，$y=0$ を ① に代入すると　　$t=0$

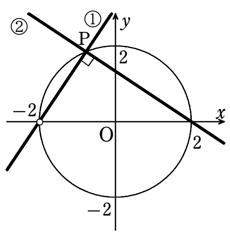
よって，点 $(2,\ 0)$ は，$t=0$ のときの 2 直線の交点である。

[1]，[2] から，点 P は円 ③ から点 $(-2,\ 0)$ を除いた図形上にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は，原点を中心とし，半径が 2 の円である。ただし，点 $(-2,\ 0)$ を除く。

$\boxed{参考}$　直線 ① は定点 $(-2,\ 0)$ を通り，直線 ② は定点 $(2,\ 0)$ を通る。また，2 直線 ①，② は垂直に交わる（傾きに着目）から，点 P は 2 点 $(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を直径の両端とする円周上にあることがわかる。ただし，① は直線 $x=-2$，② は直線 $y=0$ を表さないから，点 $(-2,\ 0)$ を除く。



$\boxed{1}$

$\boxed{解答}$　(1)　円 $(x-1)^2+y^2=6$　　(2)　直線 $x+y-2=0$

解説

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=30$ から　$(x+2)^2+y^2+(x-4)^2+y^2=30$

整理すると　　$x^2-2x+y^2=5$

よって　　$(x-1)^2+y^2=6$

ゆえに，点 P の軌跡は　　円 $(x-1)^2+y^2=6$

(2)　$2\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ から　　$2(x^2+y^2)=(x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2$

整理すると　　$x+y-2=0$

よって，点 P の軌跡は　　直線 $x+y-2=0$

$\boxed{2}$

$\boxed{解答}$　中心が点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$，半径が 1 の円。ただし，2 点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$ を除く。

解説

点 P の座標を $(x,\ y)$，点 Q の座標を $(s,\ t)$ とする。

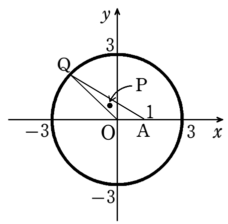
Q が x 軸上にあるとき，図形 OAQ は三角形にならないから　　$t\fallingdotseq 0$　……①

Q は円 $x^2+y^2=9$ 上にあるから

$s^2+t^2=9$　……②

P は △OAQ の重心であるから

$x=\dfrac{0+1+s}{3}$，$y=\dfrac{0+0+t}{3}$



よって　　$s=3x-1$，$t=3y$

これを ①，② に代入して　　$(3x-1)^2+(3y)^2=9$，$3y\fallingdotseq 0$

すなわち　　$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=1$，$y\fallingdotseq 0$　……③

ゆえに，点 P は図形 ③ 上にある。

逆に，図形 ③ 上の任意の点は，条件を満たす。

$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=1$ で，$y=0$ とすると　　$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2=1$

これを解くと　　$x=-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{4}{3}$

よって，求める軌跡は，中心が点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$，半径が 1 の円である。

ただし，2 点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$ を除く。

$\boxed{3}$

$\boxed{解答}$　(1)　$0<k<2$　　(2)　直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ $(0<x<4)$

解説

(1)　方程式を変形して

$(x-2k)^2+\{y+(3k-1)\}^2=-k^2+2k$

これが円を表すための条件は　　$-k^2+2k>0$

よって　　$k(k-2)<0$　　　したがって　　$0<k<2$

(2)　円の中心の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=2k$，$y=-3k+1$ $(0<k<2)$

k を消去すると　　$y=-\dfrac{3}{2}x+1$

また，$0<k<2$ であるから　　$0<2k<4$　すなわち　$0<x<4$

よって，求める軌跡は　　直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ $(0<x<4)$

$\boxed{4}$

$\boxed{解答}$　(1)　$-1<k<1$　　(2)　円 $(x-1)^2+y^2=1$ の $1<x\leqq 2$ の部分

解説

(1)　$y=kx$ を $(x-2)^2+y^2=2$ に代入して　$(x-2)^2+(kx)^2=2$

整理すると　　$(k^2+1)x^2-4x+2=0$　……①

円 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わるための条件は，2 次方程式 ① の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2(k^2+1)=-2(k^2-1)>0$

ゆえに　　$k^2-1<0$　　　よって　　$-1<k<1$

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，P は直線 ℓ 上の点であるから　　$y=kx$

2 次方程式 ① の 2 つの解を α，β とすると，P は線分 AB の中点であり，解と係数の関係から　　$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{k^2+1}$

よって　　$x=\dfrac{2}{k^2+1}$　……②

$x\fallingdotseq 0$ であるから，$y=kx$ より　　$k=\dfrac{y}{x}$

② に代入して　　$x=\dfrac{2}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1}$

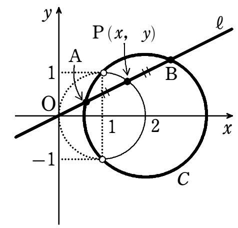
よって　　$x^2+y^2=2x$

(1) の結果から　　$0\leqq k^2<1$

ゆえに，② から　　$1<x\leqq 2$

したがって，求める軌跡は

円 $(x-1)^2+y^2=1$ の $1<x\leqq 2$ の部分



1

解答　(1)　$2x+2y+5=0$，$2x-2y-1=0$　　(2)　$x+7y-23=0$

解説

(1)　２直線のなす角の二等分線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

点Ｐは２直線 $x-2y-2=0$，$4x-2y+1=0$ から等距離にあるから

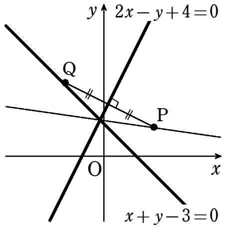
$$\frac{|x-2y-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|4x-2y+1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

よって　　$2|x-2y-2|=|4x-2y+1|$

すなわち　　$2(x-2y-2)=\pm(4x-2y+1)$

したがって，求める直線の方程式は　　$2x+2y+5=0$，$2x-2y-1=0$

(2)　直線 $2x-y+4=0$ に関して，直線 $x+y-3=0$ 上を動く点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ と対称な点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ $(x\neq s)$ とする。



直線PQが直線 $2x-y+4=0$ に垂直であるから，その傾きについて

$$2\cdot\frac{y-t}{x-s}=-1$$

よって　　$s+2t=x+2y$　……①

また，線分PQの中点 $\left(\frac{x+s}{2},\ \frac{y+t}{2}\right)$ が直線 $2x-y+4=0$ 上にあるから

$$2\cdot\frac{x+s}{2}-\frac{y+t}{2}+4=0$$

よって　　$2s-t=-2x+y-8$　……②

①，②から　　$s=\dfrac{-3x+4y-16}{5}$　……③，　$t=\dfrac{4x+3y+8}{5}$　……④

また，点Ｑは直線 $x+y-3=0$ 上にあるから　　$s+t-3=0$　……⑤

③，④を⑤に代入して　　$\dfrac{-3x+4y-16}{5}+\dfrac{4x+3y+8}{5}-3=0$

したがって，点Ｐの軌跡の方程式は　　$x+7y-23=0$

これが求める直線の方程式である。

2

解答　放物線　　$y=\dfrac{1}{6}(x-2)^2+\dfrac{1}{2}$

解説

Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。

第１象限内の円 C に外接し，x 軸に接する円の半径は y である。

２つの円が外接するから

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=y+1$$

両辺は正であるから２乗して

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(y+1)^2$$

整理して　　$y=\dfrac{1}{6}(x-2)^2+\dfrac{1}{2}$

したがって，求める軌跡は

放物線　　$y=\dfrac{1}{6}(x-2)^2+\dfrac{1}{2}$

3

解答　(1)　$\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$　　(2)　直線 $2x+2y-1=0$

(3)　円 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1$

解説

(1)　Ｑの座標を $(X,\ Y)$ とし，k は実数とする。

条件(A)から　　$X=kx$，$Y=ky$　……①，　$k>0$

条件(B)から　　$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(kx)^2+(ky)^2}=1$

よって　　$k(x^2+y^2)=1$　　……②

$x^2+y^2\neq0$ であるから　　$k=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

したがって，①から　　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

(2)　①から　　$x=\dfrac{X}{k}$，$y=\dfrac{Y}{k}$　　　②に代入して　　$\dfrac{X^2+Y^2}{k}=1$

よって　　$x=\dfrac{X}{X^2+Y^2}$，$y=\dfrac{Y}{X^2+Y^2}$　……③

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ から　　$x^2+y^2-2x-2y=0$

③を代入して　　$\dfrac{X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\dfrac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\dfrac{2X}{X^2+Y^2}-\dfrac{2Y}{X^2+Y^2}=0$

ゆえに　　$\dfrac{X^2+Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\dfrac{2(X+Y)}{X^2+Y^2}=0$

$X^2+Y^2\neq0$ であるから　　$1-2(X+Y)=0$

したがって，Ｑの軌跡は　直線 $2x+2y-1=0$

(3)　$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ から　　$x^2+y^2-2x-2y=2$

③を代入して　　$\dfrac{X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\dfrac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\dfrac{2X}{X^2+Y^2}-\dfrac{2Y}{X^2+Y^2}=2$

ゆえに　　$\dfrac{X^2+Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\dfrac{2(X+Y)}{X^2+Y^2}=2$

$X^2+Y^2\neq0$ であるから　　$1-2(X+Y)=2(X^2+Y^2)$

よって　　$X^2+Y^2+X+Y-\dfrac{1}{2}=0$

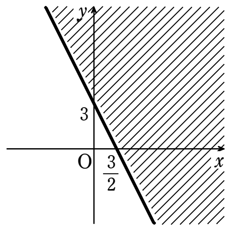
したがって，Ｑの軌跡は　　円 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1$

1

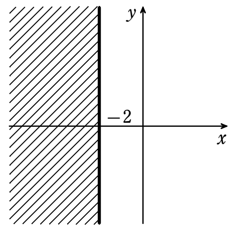
解答　(1)　［図］　境界線を含まない　　(2)　［図］　境界線を含む

(3)　［図］　境界線を含まない　　(4)　［図］境界線を含む

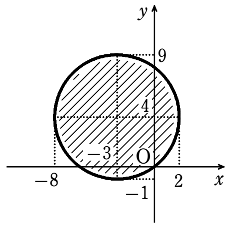
(1)



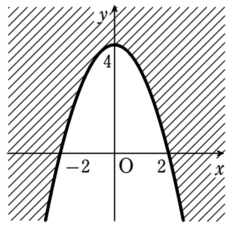
(2)



(3)

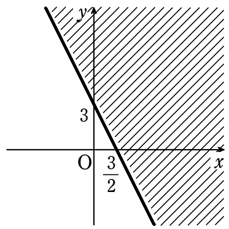


(4)



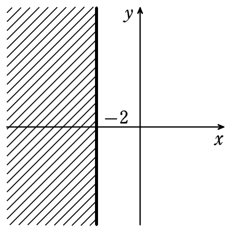
解説

(1)



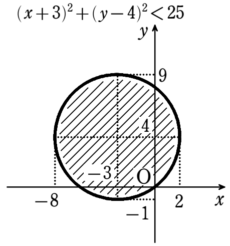
境界線を含まない

(2)



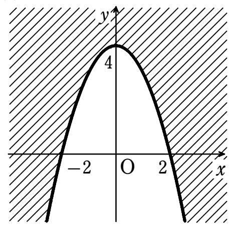
境界線を含む

(3)　$(x+3)^2+(y-4)^2<25$



境界線を含まない

(4)

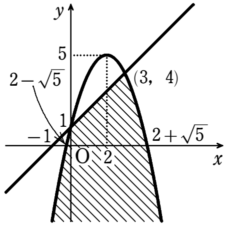


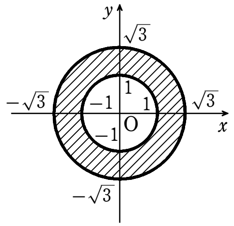
境界線を含む

2

解答　(1)　［図］境界線を含む　　(2)　［図］境界線を含む

(1)　　(2)



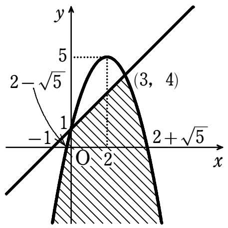


(解説)

⑴　$y \leqq -x^2+4x+1$ から　　$y \leqq -(x-2)^2+5$

求める領域は，放物線 $y=-(x-2)^2+5$ およびその下側と，直線 $y=x+1$ およびその下側の共通部分で，図の斜線部分。

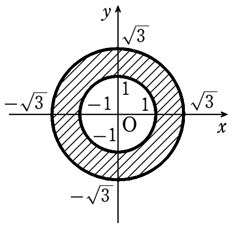
ただし，境界線を含む。



⑵　与式は $\begin{cases} 1 \leqq x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \leqq 3 \end{cases}$ と同値。

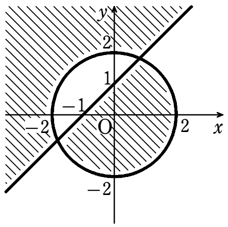
求める領域は，円 $x^2+y^2=1$ の周および外部と，円 $x^2+y^2=3$ の周および内部の共通部分で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



$\boxed{3}$★★☆

(解答)　〔図〕境界線を含まない



(解説)

$(x-y+1)(x^2+y^2-4)<0$ を連立不等式で表すと

$$\begin{cases} x-y+1>0 \\ x^2+y^2-4<0 \end{cases} \quad または \quad \begin{cases} x-y+1<0 \\ x^2+y^2-4>0 \end{cases}$$

すなわち

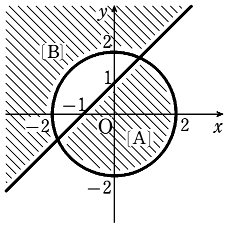
$$\begin{cases} y<x+1 \\ x^2+y^2<2^2 \end{cases} \cdots\cdots〔A〕 \quad または$$

$$\begin{cases} y>x+1 \\ x^2+y^2>2^2 \end{cases} \cdots\cdots〔B〕$$

求める領域は，〔A〕の表す領域と〔B〕の表す領域の和集合である。

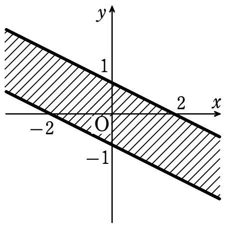
よって，求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



$\boxed{4}$★★☆

(解答)　〔図〕境界線を含む



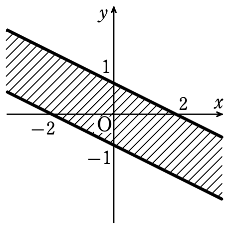
(解説)

$|x+2y| \leqq 2$ から　　$-2 \leqq x+2y \leqq 2$

よって　$\begin{cases} x+2y \geqq -2 \\ x+2y \leqq 2 \end{cases}$　すなわち　$\begin{cases} y \geqq -\dfrac{1}{2}x-1 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases}$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

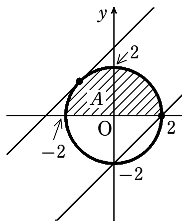


$\boxed{5}$

(解答)　$x=-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$，$x=2$，$y=0$ のとき最小値 -2

(解説)

連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$，$y \geqq 0$ の表す領域を A とすると，A は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$-x+y=k$ ……① とおくと，① は傾きが 1，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線 ① が領域 A 上で円 $x^2+y^2=4$ に接するとき，k の値は最大となる。

① から　　$y=x+k$　……②

これを $x^2+y^2=4$ に代入して　　$x^2+(x+k)^2=4$

整理すると　　$2x^2+2kx+k^2-4=0$　……③

この方程式の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-4)=-k^2+8$

直線 ① と円が接するとき，$D=0$ であるから

$-k^2+8=0$　　　　よって　　$k=\pm 2\sqrt{2}$

接点が領域 A 上にあるとき　　$k=2\sqrt{2}$

このとき，③ から　　$x=-\dfrac{k}{2}=-\sqrt{2}$

② から　　$y=-\sqrt{2}+k=\sqrt{2}$

また，直線 ① が点 (2, 0) を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　　$k=-2+0=-2$

したがって，$-x+y$ は　$x=-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$

$x=2$，$y=0$ のとき最小値 -2　をとる。

$\boxed{6}$

(解答)　最大値 $\dfrac{41}{9}$，最小値 $\dfrac{1}{2}$

(解説)

領域 D は，右の図のような，3 直線

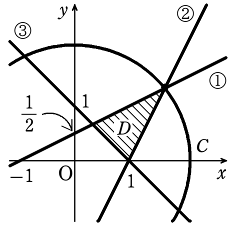
$x-2y+1=0$　……①，

$2x-y-2=0$　……②，

$x+y-1=0$　……③

で囲まれた部分である。

ただし，境界線を含む。



$x^2+y^2=k$ とおくと，$k>0$ のとき，これは中心が原点で半径が $\sqrt{k}$ の円を表す。

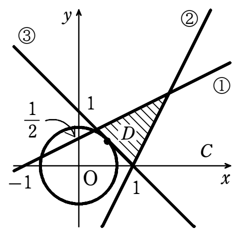
この円を C とおく。

点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，k が最大となるのは，右上の図より，円 C が 2 直線 ①，② の交点を通るときである。

①，② を連立させて解くと　　$x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{4}{3}$

よって，このとき k の値は　　$k=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{41}{9}$

また，点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，k が最小となるのは，右の図より，円 C が直線 ③ に接するときである。



よって　　$\dfrac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{k}$

ゆえに　　$\sqrt{k}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$k=\dfrac{1}{2}$

以上から　最大値 $\dfrac{41}{9}$，最小値 $\dfrac{1}{2}$

(参考)　(接点の座標)

$x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ と ③ を連立させて解くと　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$

よって，接点の座標は　　$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

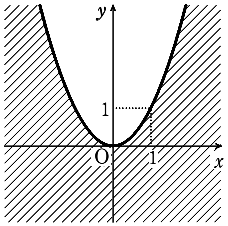
2 直線 ①，③ の交点の座標は $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ であり，

2 直線 ②，③ の交点の座標は (1, 0) であるから，

$k=\dfrac{1}{2}$ のとき円 C は確かに領域 D と共有点をもつ。

$\boxed{7}$

解答　(1)　$k=2,\ -4$　　(2)　［図］境界線を含む



解説

(1)　直線①が点 $(1,\ -8)$ を通るとき

$$2k\cdot1+(-8)+k^2=0\quad すなわち\quad k^2+2k-8=0$$

よって　$(k-2)(k+4)=0$　　ゆえに　$k=2,\ -4$

(2)　①を k について整理すると　$k^2+2xk+y=0$　……②

直線①が点 $(x,\ y)$ を通る条件は，②を満たす実数 k が存在することである。

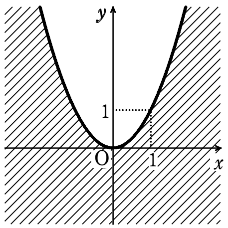
よって，k の２次方程式②の判別式 D について

$$\frac{D}{4}=x^2-y\geqq0$$

ゆえに　$y\leqq x^2$

したがって，直線①が通る範囲は，放物線 $y=x^2$ およびその下側の部分で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



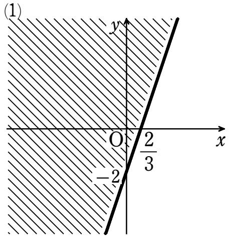
$\boxed{1}$

解答　(1)　［図］　境界線を含まない　　(2)　［図］　境界線を含む

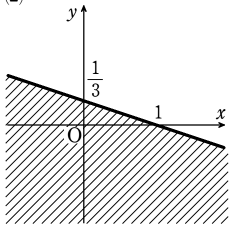
(3)　［図］　境界線を含まない　　(4)　［図］　境界線を含む

(5)　［図］　境界線を含まない　　(6)　［図］　境界線を含まない

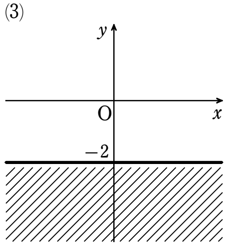
(1)



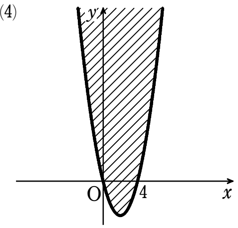
(2)



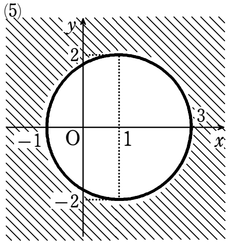
(3)



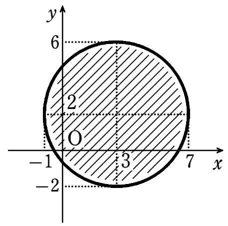
(4)



(5)



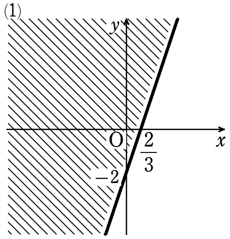
(6)



解説

(1)　図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

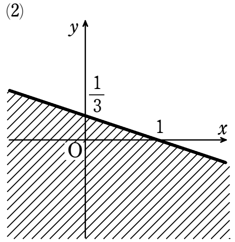
(1)



(2)　$x+3y\leqq1$ から　　$y\leqq-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$

図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

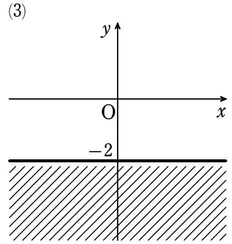
(2)



(3)　$y+2<0$ から　　$y<-2$

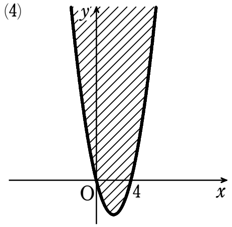
図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

(3)



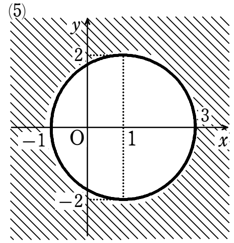
(4)　図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

(4)



(5)　図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

(5)

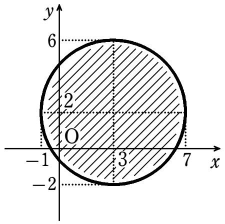


(6)　$x^2+y^2-6x-4y-3<0$ から　　$(x-3)^2+(y-2)^2<16$

よって，求める領域は，円 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$ の内部で，［図］の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。

(6)

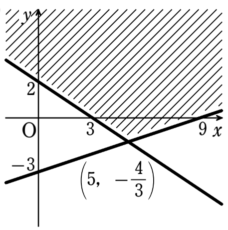


$\boxed{2}$

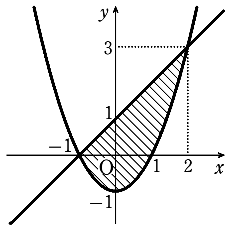
解答　(1)［図］ 境界線を含まない　　(2)［図］ 境界線を含む

(3)［図］ 円 $x^2+y^2=1$ は含まない，他は含む

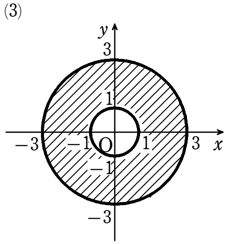
(1)



(2)



(3)



解説

(1) 不等式を変形すると

$$y>\frac{1}{3}x-3,\quad y>-\frac{2}{3}x+2$$

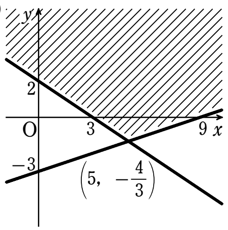
求める領域は，直線 $y=\frac{1}{3}x-3$ の上側と，

直線 $y=-\frac{2}{3}x+2$ の上側の共通部分で，

右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。

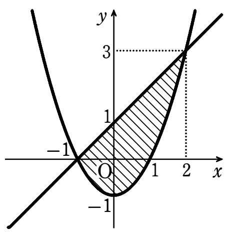
(1)



(2) 求める領域は，直線 $y=x+1$ およびその下側と，放物線 $y=x^2-1$ およびその上側の共通部分で，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。

(2)



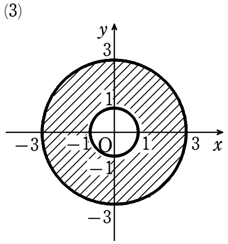
(3) $1<x^2+y^2\leqq 9$ から

$$x^2+y^2>1 \quad かつ \quad x^2+y^2\leqq 9$$

よって，求める領域は，円 $x^2+y^2=1$ の外部と円 $x^2+y^2=9$ およびその内部の共通部分で，［図］の斜線部分である。

ただし， 境界線は，円 $x^2+y^2=1$ は含まないで，他は含む。

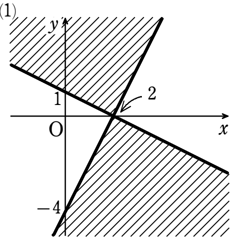
(3)



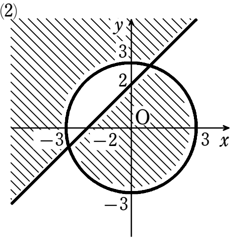
$\boxed{3}$

解答　(1)［図］ 境界線を含む　　(2)［図］ 境界線を含まない

(1)



(2)



解説

(1) 与えられた不等式は，次のように表される。

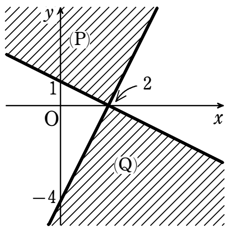
$$\begin{cases} x+2y-2\geqq 0 \\ 2x-y-4\leqq 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots (\mathrm{P})$$

または

$$\begin{cases} x+2y-2\leqq 0 \\ 2x-y-4\geqq 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots (\mathrm{Q})$$

求める領域は，(P) の表す領域と (Q) の表す領域の和集合で，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(2) 与えられた不等式は，次のように表される。

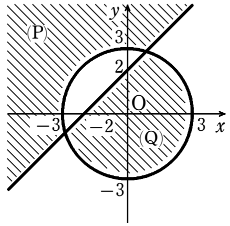
$$\begin{cases} x^2+y^2-9>0 \\ y-x-2>0 \end{cases} \quad \cdots\cdots (\mathrm{P})$$

または

$$\begin{cases} x^2+y^2-9<0 \\ y-x-2<0 \end{cases} \quad \cdots\cdots (\mathrm{Q})$$

求める領域は，(P) の表す領域と (Q) の表す領域の和集合で，右の図の斜線部分である。

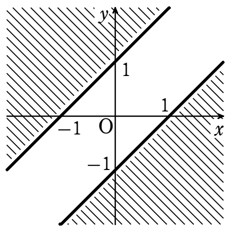
ただし，境界線を含まない。



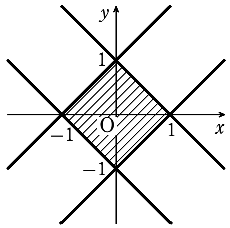
$\boxed{4}$

解答　(1)［図］ 境界線を含まない　　(2)［図］ 境界線を含む

(1)



(2)



解説

(1) $|x-y|>1$ から　　$x-y<-1$ または $1<x-y$

すなわち　　$y>x+1$ または $y<x-1$

よって，求める領域は［図］の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

(2) $|x|+|y|\leqq 1$ ……①

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，① は　　$x+y\leqq 1$　　　よって　$y\leqq -x+1$

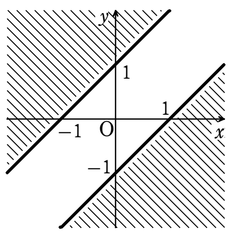
$x\geqq 0$，$y<0$ のとき，① は　　$x-y\leqq 1$　　　よって　$y\geqq x-1$

$x<0$，$y\geqq 0$ のとき，① は　　$-x+y\leqq 1$　　　よって　$y\leqq x+1$

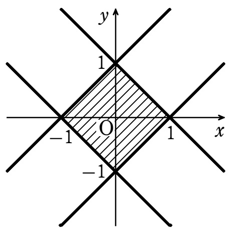
$x<0$，$y<0$ のとき，① は　　$-x-y\leqq 1$　　　よって　$y\geqq -x-1$

ゆえに，求める領域は［図］の斜線部分。ただし，境界線を含む。

(1)



(2)

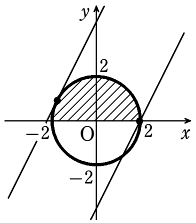


$\boxed{5}$

解答　$x=2$，$y=0$ のとき最大値 4；$x=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$，$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$

解説

連立不等式 $x^2+y^2\leqq 4$，$y\geqq 0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域は右図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$2x-y=k$ ……①

とおくと，① は傾きが 2，y 切片が $-k$ の直線を表す。

図から，直線 ① が点 $(2,\ 0)$ を通るとき $-k$ の値は最小となる。すなわち，k の値は最大となる。

このとき　　$k=2\cdot 2-0=4$

また，領域上で直線 ① が円 $x^2+y^2=4$ に接するとき $-k$ の値は最大となる。すなわち，k の値は最小となる。

① から　　$y=2x-k$ ……②

これを $x^2+y^2=4$ に代入して

$x^2+(2x-k)^2=4$　　よって　　$5x^2-4kx+k^2-4=0$ ……③

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-4)=-k^2+20$$

直線 ① が円に接するとき，$D=0$ であるから

$-k^2+20=0$　　よって　　$k=\pm 2\sqrt{5}$

接点が領域上にあるとき，接線 ② の y 切片は正であるから　　$k=-2\sqrt{5}$

このとき，③ から　　$x=\dfrac{2k}{5}=-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

② から　　$y=2\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)-k=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

よって，$2x-y$ は

$x=2$，$y=0$ のとき最大値 4，

$x=-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，$y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$

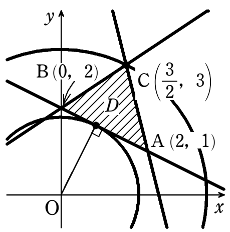
をとる。

6

解答　$x=\dfrac{3}{2}$，$y=3$ のとき最大値 $\dfrac{45}{4}$；$x=\dfrac{4}{5}$，$y=\dfrac{8}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{16}{5}$

解説

与えられた連立不等式の表す領域 D は，3 点 A $(2,\ 1)$，B $(0,\ 2)$，C $\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$ を頂点とする三角形の周および内部である。



$x^2+y^2=k$ $(k>0)$ ……① とおくと，① は原点を中心とし，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。この円 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から，円 ① が C $\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$ を通るとき，k は最大で

$$k=\mathrm{OC}^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2=\frac{45}{4}$$

また，図から円 ① が直線 AB：$x+2y-4=0$ ……② に接するとき，k が最小になる。

接点の座標は，原点を通り直線 ② に垂直な直線 $2x-y=0$ と，直線 ② の交点であるから

$$(x,\ y)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$

円 ① がこの点を通るとき，k は最小で

$$k=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$$

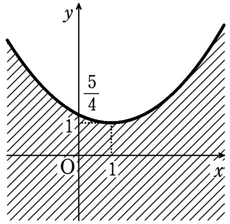
よって，x^2+y^2 は　　$x=\dfrac{3}{2}$，$y=3$ のとき最大値 $\dfrac{45}{4}$ をとり，

$x=\dfrac{4}{5}$，$y=\dfrac{8}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{16}{5}$ をとる。

7

解答　(1)　$k=0,\ 1$

(2)　$y\leqq\dfrac{1}{4}(x-1)^2+1$；[図]　境界線を含む。



解説

(1)　$x=2$，$y=1$ を L の式に代入して

$1=k\cdot 2+1-k-k^2$

すなわち　　$k^2-k=0$　　　よって　　$k(k-1)=0$

ゆえに　　$k=0,\ 1$

(2)　L の式を k について整理すると

$k^2-(x-1)k+y-1=0$ ……①

直線 L が点 $(x,\ y)$ を通るとき，① を満たす実数 k が存在する。

よって，k の 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

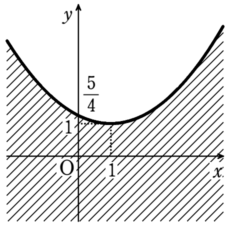
$D=\{-(x-1)\}^2-4(y-1)\geqq 0$

すなわち　　$y-1\leqq\dfrac{1}{4}(x-1)^2$

ゆえに　　$y\leqq\dfrac{1}{4}(x-1)^2+1$

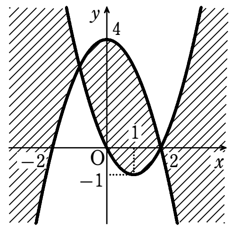
よって，直線 L が通る範囲は，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



1

解答　[図]，境界線を含む



解説

与えられた不等式は

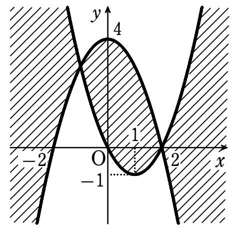
$$\begin{cases} x^2-2x-y\geqq 0 \\ x^2+y-4\geqq 0 \end{cases}\quad \text{または}\quad \begin{cases} x^2-2x-y\leqq 0 \\ x^2+y-4\leqq 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} y\leqq x^2-2x \\ y\geqq -x^2+4 \end{cases}\quad \text{または}\quad \begin{cases} y\geqq x^2-2x \\ y\leqq -x^2+4 \end{cases}$$

よって，求める領域は右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



2

解答　(1)　$x^2+y^2>4$，$(x-2)^2+y^2<1$，$y>0$　　(2)　$(x^2-y-1)(x^2+y-1)<0$

解説

(1)　円 $x^2+y^2=2^2$ の外部を領域 A，

円 $(x-2)^2+y^2=1^2$ の内部を領域 B，

x 軸の上側を領域 C

とすると，与えられた図の斜線部分は $A\cap B\cap C$ であるから，求める不等式は

$$\begin{cases} x^2+y^2>4 \\ (x-2)^2+y^2<1 \\ y>0 \end{cases}$$

(2)　放物線 $y=x^2-1$ の上側を領域 A，下側を領域 B，

放物線 $y=-x^2+1$ の上側を領域 C，下側を領域 D

とすると，与えられた図の斜線部分は $(A\cap C)\cup(B\cap D)$ であるから，求める不等式は

$$\begin{cases} y>x^2-1 \\ y>-x^2+1 \end{cases}\quad \text{または}\quad \begin{cases} y<x^2-1 \\ y<-x^2+1 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x^2-y-1<0 \\ x^2+y-1>0 \end{cases}\quad \text{または}\quad \begin{cases} x^2-y-1>0 \\ x^2+y-1<0 \end{cases}$$

よって　　$(x^2-y-1)(x^2+y-1)<0$

3

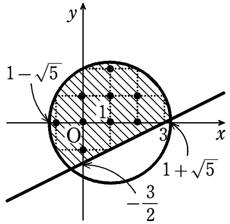
解答　$(-1,\ 0)$，$(0,\ -1)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$

解説

$x^2+y^2-2x-4<0$ から　　$(x-1)^2+y^2<5$ ……①

$x-2y-3<0$ から　　$y>\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ ……②

よって，与えられた不等式の表す領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。



図から　　$1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}$

これを満たす整数 x は　　$x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$x=-1$ のとき，①，② から　　$y^2<1,\ y>-2$

　これを満たす整数 y は　　$y=0$

$x=0$ のとき，①，② から　　$y^2<4,\ y>-\frac{3}{2}$

　これを満たす整数 y は　　$y=-1,\ 0,\ 1$

$x=1$ のとき，①，② から　　$y^2<5,\ y>-1$

　これを満たす整数 y は　　$y=0,\ 1,\ 2$

$x=2$ のとき，①，② から　　$y^2<4,\ y>-\frac{1}{2}$

　これを満たす整数 y は　　$y=0,\ 1$

$x=3$ のとき，①，② から　　$y^2<1,\ y>0$

　これを満たす整数 y は存在しない。

よって，求める整数 $(x,\ y)$ の組は

$(-1,\ 0),\ (0,\ -1),\ (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1)$

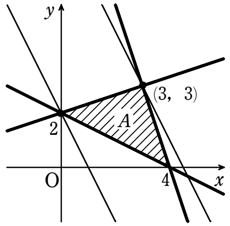
4

解答　$x=3,\ y=3$ のとき最大値 9；$x=0,\ y=2$ のとき最小値 2

解説

与えられた連立不等式の表す領域を A とする。

領域 A は 3 点 $(4,\ 0),\ (3,\ 3),\ (0,\ 2)$ を頂点とする三角形の周および内部である。



$$2x+y=k\quad\cdots\cdots①$$

とおくと，これは傾きが -2，y 切片が k である直線を表す。

領域 A においては，直線 ① が

　点 $(3,\ 3)$ を通るとき k は最大で，そのとき　$k=9$

　点 $(0,\ 2)$ を通るとき k は最小で，そのとき　$k=2$

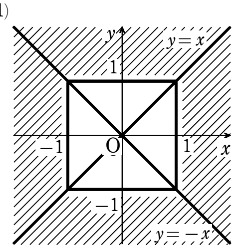
よって　　$x=3,\ y=3$ のとき最大値 9；$x=0,\ y=2$ のとき最小値 2

1

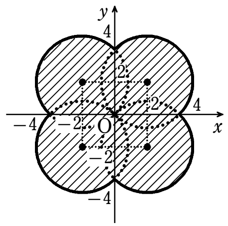
解答　(1)［図］境界線を含まない

　　(2)［図］境界線を含む

(1)



(2)



解説

(1)　$y\leqq x$　かつ　$y\geqq -x$ のとき

$$|x-y|+|x+y|=(x-y)+(x+y)=2x$$

　よって　　$2x>2$　　　ゆえに　　$x>1$

$y\leqq x$　かつ　$y<-x$ のとき

$$|x-y|+|x+y|=(x-y)-(x+y)=-2y$$

　よって　　$-2y>2$　　　ゆえに　　$y<-1$

$y>x$　かつ　$y\geqq -x$ のとき

$$|x-y|+|x+y|=-(x-y)+(x+y)=2y$$

　よって　　$2y>2$　　　ゆえに　　$y>1$

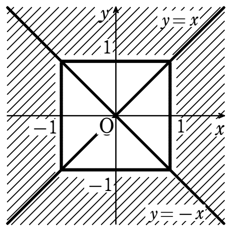
$y>x$　かつ　$y<-x$ のとき

$$|x-y|+|x+y|=-(x-y)-(x+y)=-2x$$

　よって　　$-2x>2$　　　ゆえに　　$x<-1$

したがって，求める領域は，図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



(2)　$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき

$$x^2+y^2\leqq 4x+4y$$

　よって　　$(x-2)^2+(y-2)^2\leqq 8$

$x\geqq 0,\ y<0$ のとき

$$x^2+y^2\leqq 4x-4y$$

　よって　　$(x-2)^2+(y+2)^2\leqq 8$

$x<0,\ y\geqq 0$ のとき

$$x^2+y^2\leqq -4x+4y$$

　よって　　$(x+2)^2+(y-2)^2\leqq 8$

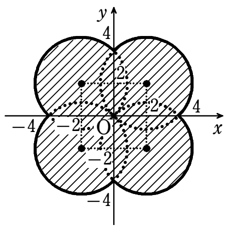
$x<0,\ y<0$ のとき

$$x^2+y^2\leqq -4x-4y$$

　よって　　$(x+2)^2+(y+2)^2\leqq 8$

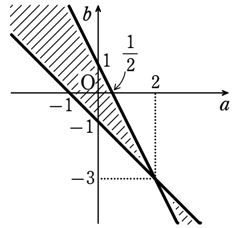
したがって，求める領域は，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



2

解答　［図］境界線を含まない



解説

条件を満たすのは，2 点 P，Q のうち，一方が直線 $y=ax+b$ の上側，他方が下側にあるときである。

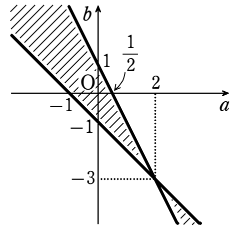
よって　　$(-1>a\cdot 1+b$　かつ　$1<a\cdot 2+b)$

　または　$(-1<a\cdot 1+b$　かつ　$1>a\cdot 2+b)$

ゆえに　$\begin{cases}a+b+1<0\\2a+b-1>0\end{cases}$　または　$\begin{cases}a+b+1>0\\2a+b-1<0\end{cases}$

すなわち　$\begin{cases}b<-a-1\\b>-2a+1\end{cases}$　または　$\begin{cases}b>-a-1\\b<-2a+1\end{cases}$

したがって，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は［図］の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。



参考　$f(x,\ y)=ax-y+b$ とおく。

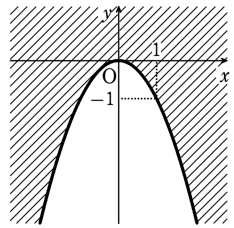
　直線 $y=ax+b$ すなわち $f(x,\ y)=0$ により座標平面は 2 つの領域 $f(x,\ y)>0$，$f(x,\ y)<0$ に分けられる。

　P，Q がそれぞれ別の領域に属すればよいから

$$\begin{cases}f(1,\ -1)<0\\f(2,\ 1)>0\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}f(1,\ -1)>0\\f(2,\ 1)<0\end{cases}$$

3

解答　(1)　$y=-x^2$　　(2)［図］境界線を含む



解説

(1)　$\mathrm{P}(p,\ q)$ とする。

　直線 ℓ_t が点 P を通るとき　　$q=2tp+t^2$

　すなわち　　$t^2+2pt-q=0$　……①

　点 P を通る直線 ℓ_t がただ 1 つであるための条件は，① を満たす実数 t がただ 1 つ存在することである。

　よって，t の 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=p^2+q=0\qquad\text{ゆえに}\qquad q=-p^2$$

したがって，点Pの軌跡の方程式は　$y=-x^2$

(2)　$y=2tx+t^2$ から　$t^2+2xt-y=0$　……②

直線 ℓ_t が点 $(x,\ y)$ を通る条件は，② を満たす実数 t が存在することである。

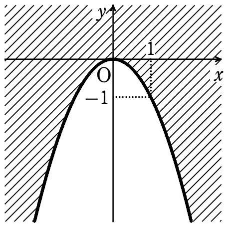
よって，t の２次方程式②の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=x^2+y\geqq 0$$

ゆえに　$y\geqq -x^2$

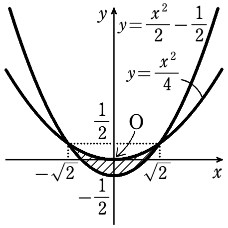
したがって，直線 ℓ_t が通る範囲は図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



$\boxed{4}$ [東京工業大]

解答　[図]，境界線を含む



解説

$x+y=X$，$xy=Y$ とおく。

$x^2+y^2\leqq 1$ から　$(x+y)^2-2xy\leqq 1$ すなわち $X^2-2Y\leqq 1$

したがって　$Y\geqq \frac{X^2}{2}-\frac{1}{2}$　……①

また，x，y は２次方程式 $t^2-(x+y)t+xy=0$　すなわち

$t^2-Xt+Y=0$ の２つの実数解であるから，判別式 D について

$D=X^2-4Y\geqq 0$ より　$Y\leqq \frac{X^2}{4}$　……②

①，② から　$\frac{X^2}{2}-\frac{1}{2}\leqq Y\leqq \frac{X^2}{4}$

変数を x，y におき換えて

$$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\leqq y\leqq \frac{x^2}{4}$$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分。ただし，境界線を含む。