6月度課題

$\boxed{1}$

x の2次方程式 $x^2-4x\cos\theta+2\cos\theta=0$ が実数解をもつとき，θ の値の範囲を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{2}$

$y=3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-6\sin x+2\sqrt{3}\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=t$ として，y を t で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) y の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{3}$

次の値を求めよ。

(1) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$　　(2) $\cos 10^\circ+\cos 110^\circ+\cos 130^\circ$

$\boxed{4}$

△ABC において，次の不等式を証明せよ。

(1) $2\sin A\geqq\sin 2B+\sin 2C$

(2) $\sin A+\sin B+\sin C\geqq\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$\boxed{5}$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\cos\theta-\sin\theta$　　(2) $2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\boxed{6}$

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta$ を t の式で表せ。　　(2) $\cos\theta$ を t の式で表せ。

(3) $y=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}$ を t の式で表せ。

(4) y の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ とする。

$\boxed{7}$

(1) $x+y=\pi$ を満たす実数 x，y に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sin x+\sin y=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$$

(2) $x+y+z=\pi$ を満たす実数 x，y，z に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$$

$\boxed{8}$

座標平面上の原点 O を中心とする半径1の円周上の点を P とおき，線分 OP と x 軸の正の向きとのなす角を θ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。また，2点 A$(0,\ -1)$，B$(\sqrt{3},\ -1)$ をとり，四角形 POAB の面積を S とする。

(1) S を θ を用いて表せ。

(2) θ が変化するとき，S の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{9}$

関数 $y=4^x+4^{-x}-5(2^x+2^{-x})+6$ について，次の問いに答えよ。

(1) $2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) y を t で表せ。

(3) y の最小値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{10}$

次の不等式を解け。ただし，a は1と異なる正の定数とする。

(1) $\log_a(x^2-2x-8)\geqq\log_a(2x-3)$

(2) $a^{2x+1}-a^{x+2}-a^{x-1}+1<0$

$\boxed{11}$

a，b を正の整数とする。a^3 が13桁，ab^3 が30桁の数のとき，a，b はそれぞれ何桁の数になるか。

$\boxed{12}$

不等式 $(\log_x y)^2+2\leqq 3\log_x y$ の表す領域を図示せよ。

$\boxed{13}$

(1) $5^a=2$，$5^b=3$ とするとき，$\log_5 72$，$\log_5 1.35$ を a，b で表せ。

(2) $x>1$，$y>1$，$z>1$，$x^6=y^3=z^2$ のとき，$\log_x\dfrac{z}{y}+\log_y\dfrac{x}{z}+\log_z\dfrac{y}{x}$ の値を求めよ。

$\boxed{14}$

次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2 x^2-\log_x 4+3=0$　　(2) $x^{\log_3 9x}=\left(\dfrac{x}{3}\right)^8$

(3) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)\geqq\log_{\frac{1}{9}}(2-x)$

$\boxed{15}$

$x\geqq 3$，$y\geqq 3$，$x^2y=3^6$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log_3 x$ および $\log_3 y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $(\log_3 x)(\log_3 y)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{16}$

a，b は自然数で a は偶数，b は3以上の奇数とする。$\log_a b$ は無理数であることを示せ。

$\boxed{17}$

x の整式 $f(x)$ が次の条件を満たしている。

(A) $f(0)=0$　　(B) $(x+1)f'(x)=2f(x)-4$

(1) $f(x)$ を x の n 次式とするとき，n の値を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{18}$

曲線 $y=x^3$ 上の点 P$(t,\ t^3)$ $[t\neq 0]$ における接線が x 軸，y 軸およびこの曲線と再び交わる点を，それぞれ Q，R，S とする。

(1) S の x 座標を t で表せ。　　(2) QR：RS を求めよ。

$\boxed{19}$

関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ が $x=-2$ で極大値，$x=1$ で極小値をとり，極大値と極小値の差が27であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{20}$

関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3bx+1$ が，$0\leqq x\leqq 1$ において単調に増加するとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

$\boxed{21}$

(1) 関数 $f(a)=\displaystyle\int_0^1|x(x-a)|\,dx$ を a の式で表せ。

(2) $f(a)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{22}$

関数 $y=2(\sin^3 x+\cos^3 x)+3(\sin x+\cos x-1)\sin 2x$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0\leqq x\leqq\pi$ とする。

(1) $\sin x+\cos x=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) y の最大値および最小値とそれらを与える x の値を求めよ。

$\boxed{23}$

関数 $y=x^2$ のグラフを C とする。点 A$(a,\ a^2)$ における C の接線の傾きは $\sqrt{3}$ とする。点 A を通りこの接線と直交している直線は，y 軸と点 B$(0,\ b)$ で交わるとする。点 B を中心とし，点 A を通る円を S とする。

(1) a，b の値および，円 S の半径を求めよ。

(2) 円 S の $y\leqq a^2$ の部分と C で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{24}$

a を正の実数とし，点 A$\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 C：$y=ax^2$ $(x\geqq 0)$ を考える。曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) $a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

解説

1

(解説)

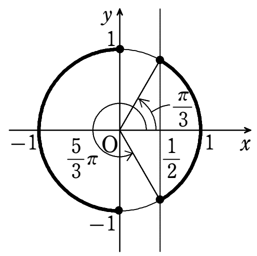
与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2\cos\theta)^2-1\cdot 2\cos\theta$$
$$=2\cos\theta(2\cos\theta-1)$$

方程式が実数解をもつための必要十分条件は

$D\geqq 0$　すなわち　$2\cos\theta(2\cos\theta-1)\geqq 0$

よって　$\cos\theta\leqq 0$　または　$\frac{1}{2}\leqq\cos\theta$



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，求める θ の値の範囲は

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3},\quad \frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi,\quad \frac{5}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$$

2

(解説)

$y=3\sin^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x-6\sin x+2\sqrt{3}\cos x$

(1)　$y=(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2-2\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)$

よって　$y=t^2-2\sqrt{3}\,t$　…… ①

(2)　$t=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

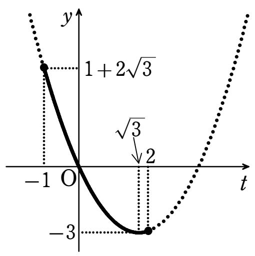
$0\leqq x\leqq\pi$ から　$-\frac{\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$　よって　$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-1\leqq t\leqq 2$　…… ②

(3)　① を変形すると　$y=(t-\sqrt{3})^2-3$

② の範囲で，y は　$t=-1$ で最大値 $1+2\sqrt{3}$，

$t=\sqrt{3}$ で最小値 -3　をとる。



$t=-1$ のとき　$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

よって　$x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$　ゆえに　$x=0$

$t=\sqrt{3}$ のとき　$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$　ゆえに　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi$

したがって　$x=0$ で最大値 $1+2\sqrt{3}$，$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi$ で最小値 -3

3

(解説)

(1)　$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=-\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 20^\circ)\sin 80^\circ$

$$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{2}\sin 80^\circ\cos 20^\circ$$
$$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{4}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)$$
$$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{4}\sin(180^\circ-80^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{8}$$
$$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(2)　$\cos 10^\circ+\cos 110^\circ+\cos 130^\circ=2\cos 60^\circ\cos 50^\circ+\cos 130^\circ$

$$=\cos 50^\circ+\cos(180^\circ-50^\circ)$$
$$=\cos 50^\circ-\cos 50^\circ=0$$

4

(解説)

$A+B+C=\pi$

(1)　$2\sin A-(\sin 2B+\sin 2C)=2\sin A-2\sin(B+C)\cos(B-C)$

$$=2\sin A-2\sin(\pi-A)\cos(B-C)$$
$$=2\sin A-2\sin A\cos(B-C)$$
$$=2\sin A\{1-\cos(B-C)\}$$

$\sin A>0$，$\cos(B-C)\leqq 1$ であるから　$2\sin A\{1-\cos(B-C)\}\geqq 0$

よって　$2\sin A-(\sin 2B+\sin 2C)\geqq 0$

ゆえに　$2\sin A\geqq\sin 2B+\sin 2C$　…… ①

(2)　① と同様に，次の 2 つの不等式が成り立つ。

$2\sin B\geqq\sin 2C+\sin 2A$　…… ②

$2\sin C\geqq\sin 2A+\sin 2B$　…… ③

①，②，③ の辺々を加えて

$2(\sin A+\sin B+\sin C)\geqq 2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

したがって　$\sin A+\sin B+\sin C\geqq\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

5

(解説)

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ の両辺を 2 乗すると　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

すなわち　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$　よって　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$

ゆえに　$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{9}{5}$$

$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$\cos\theta\leqq 0$，$\sin\theta\geqq 0$

よって，$\cos\theta-\sin\theta\leqq 0$ であるから　$\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{\frac{9}{5}}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

(2)　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{4}{5}$

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{3}{5}$$

よって　$2\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\cos 2\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta$

$$=-\frac{3}{5}+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3+4\sqrt{3}}{5}$$

6

(解説)

(1)　$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$

$$=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

(2)　$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

(3)　(1)，(2) から　$y=\dfrac{\frac{2t}{1+t^2}-1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\dfrac{-t^2+2t-1}{2}=-\frac{1}{2}(t-1)^2$

(4)　$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$ から　$0\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{\pi}{3}$

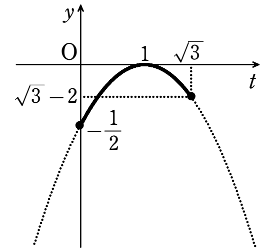
よって　$0\leqq\tan\frac{\theta}{2}\leqq\sqrt{3}$

すなわち　$0\leqq t\leqq\sqrt{3}$　…… ①

① の範囲で，y は

$t=1$ で最大値 0，

$t=0$ で最小値 $-\frac{1}{2}$　をとる。



$t=1$ のとき　$\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}$　よって　$\theta=\frac{\pi}{2}$

$t=0$ のとき　$\frac{\theta}{2}=0$　よって　$\theta=0$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 0，$\theta=0$ で最小値 $-\frac{1}{2}$

7

(解説)

(1)　$x+y=\pi$ から　$y=\pi-x$

よって　(左辺)$=\sin x+\sin(\pi-x)=\sin x+\sin x=2\sin x$

(右辺)$=4\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=2\sin x$

ゆえに　(左辺)$=$(右辺)

(2)　$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

また，$x+y+z=\pi$ より $z=\pi-(x+y)$ であるから

$$\sin z=\sin\{\pi-(x+y)\}=\sin(x+y)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

したがって

(左辺)$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right)=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{-y}{2}$$
$$=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}=(\text{右辺})$$

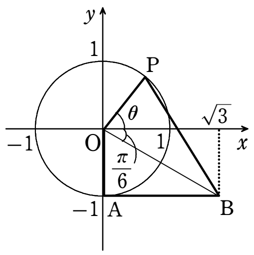
$\boxed{8}$

(解説)

(1)　B$(\sqrt{3},\ -1)$ から

$$\mathrm{OB}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$$

$$\angle\mathrm{POB}=\theta+\frac{\pi}{6}$$



$S=\triangle\mathrm{OBP}+\triangle\mathrm{OAB}$ であり

$$\triangle\mathrm{OBP}=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{POB}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OA}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　$S=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ から　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{2}{3}\pi$

よって　$\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq1$

したがって，S は

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ すなわち $\theta=0$ で最小値 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　をとる。

$\boxed{9}$

(解説)

$y=4^x+4^{-x}-5(2^x+2^{-x})+6$

(1)　相加平均と相乗平均の大小関係から

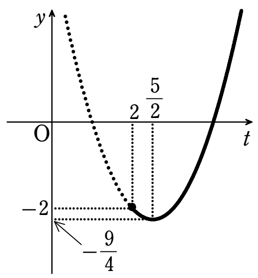
$$t=2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$$

よって，t のとりうる値の範囲は　$t\geqq2$　……①

(2)　$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=t^2-2$

よって　$y=(t^2-2)-5t+6=t^2-5t+4$

(3)　$y=\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$



① の範囲で，y は $t=\frac{5}{2}$ で最小値 $-\frac{9}{4}$ をとる。

$t=\frac{5}{2}$ のとき　$2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$

両辺に $2\cdot2^x\,(>0)$ を掛けると　$2(2^x)^2+2=5\cdot2^x$

すなわち　$2(2^x)^2-5\cdot2^x+2=0$

$2^x=X$ とおくと，$X>0$ で　$2X^2-5X+2=0$

よって　$(X-2)(2X-1)=0$

ゆえに　$X=2,\ \frac{1}{2}$　($X>0$ を満たす)

すなわち　$2^x=2,\ \frac{1}{2}$　　したがって　$x=1,\ -1$

以上から　$x=\pm1$ で最小値 $-\frac{9}{4}$

$\boxed{10}$

(解説)

(1)　真数は正であるから　$x^2-2x-8>0$ かつ $2x-3>0$

よって　$(x+2)(x-4)>0$ かつ $x>\frac{3}{2}$　　ゆえに　$x>4$　……①

[1]　$0<a<1$ のとき

不等式から　$x^2-2x-8\leqq2x-3$　　整理して　$x^2-4x-5\leqq0$

よって　$(x+1)(x-5)\leqq0$　　ゆえに　$-1\leqq x\leqq5$　……②

①，② から，解は　$4<x\leqq5$

[2]　$a>1$ のとき

不等式から　$x^2-2x-8\geqq2x-3$　　よって　$(x+1)(x-5)\geqq0$

ゆえに　$x\leqq-1,\ 5\leqq x$　……③

①，③ から，解は　$x\geqq5$

(2)　不等式から　$a\cdot a^{2x}-a^2a^x-\frac{1}{a}a^x+1<0$

$a^x=t$ とおくと　$at^2-a^2t-\frac{1}{a}t+1<0$

両辺に $a\,(>0)$ を掛けて　$a^2t^2-(a^3+1)t+a<0$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -a & \longrightarrow & -a^3 \\ a^2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline a^2 & & a & & -(a^3+1) \end{array}$$

よって　$(t-a)(a^2t-1)<0$

ゆえに　$a^2(t-a)\left(t-\frac{1}{a^2}\right)<0$

$a^2>0$ であるから　$(t-a)\left(t-\frac{1}{a^2}\right)<0$　……①

ここで　$a-\frac{1}{a^2}=\frac{a^3-1}{a^2}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2}$

[1]　$0<a<1$ のとき

$a<\frac{1}{a^2}$ であるから，① の解は　$a<t<\frac{1}{a^2}$　　よって　$a<a^x<a^{-2}$

底 a は 1 より小さいから　$-2<x<1$

[2]　$a>1$ のとき

$a>\frac{1}{a^2}$ であるから，① の解は　$\frac{1}{a^2}<t<a$　　よって　$a^{-2}<a^x<a$

底 a は 1 より大きいから　$-2<x<1$

したがって，解は　$-2<x<1$

$\boxed{11}$

(解説)

a^3 が 13 桁の数であるから　$10^{12}\leqq a^3<10^{13}$

各辺の常用対数をとると　$12\leqq3\log_{10}a<13$

よって　$4\leqq\log_{10}a<\frac{13}{3}$　……①　　ゆえに　$10^4\leqq a<10^{\frac{13}{3}}$

$4<\frac{13}{3}<5$ であるから，a は 5 桁の数である。

また，ab^3 が 30 桁の数であるから　$10^{29}\leqq ab^3<10^{30}$

各辺の常用対数をとると　$29\leqq\log_{10}a+3\log_{10}b<30$

よって　$\frac{29-\log_{10}a}{3}\leqq\log_{10}b<\frac{30-\log_{10}a}{3}$　……②

①，② から　$\frac{29-\frac{13}{3}}{3}<\log_{10}b<\frac{30-4}{3}$

すなわち　$\frac{74}{9}<\log_{10}b<\frac{26}{3}$　　ゆえに　$10^{\frac{74}{9}}<b<10^{\frac{26}{3}}$

$8<\frac{74}{9}<\frac{26}{3}<9$ であるから，b は 9 桁の数である。

$\boxed{12}$

(解説)

対数の底，真数の条件から

$$x>0,\ x\neq1,\ y>0$$

不等式から　$(\log_xy)^2-3\log_xy+2\leqq0$

すなわち　$(\log_xy-1)(\log_xy-2)\leqq0$

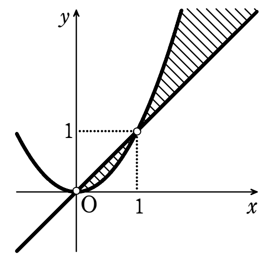
ゆえに　$1\leqq\log_xy\leqq2$

よって，$0<x<1$ のとき　$x^2\leqq y\leqq x$

$x>1$　のとき　$x\leqq y\leqq x^2$

したがって，求める領域は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線は 2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を含まないで，他は含む。



$\boxed{13}$

(解説)

(1)　$5^a=2$ から　$a=\log_52$　　$5^b=3$ から　$b=\log_53$

よって　$\log_572=\log_5(2^3\times3^2)=3\log_52+2\log_53=3a+2b$

$$\log_51.35=\log_5\frac{135}{100}=\log_5\frac{27}{20}=\log_5\frac{3^3}{2^2\times5}$$

$$=3\log_53-(2\log_52+\log_55)$$

$$=3b-(2a+1)=-2a+3b-1$$

(2)　$x^6=y^3=z^2$ の各辺は正の数であるから，x を底として各辺の対数をとると

$6=3\log_xy=2\log_xz$　　よって　$\log_xy=2,\ \log_xz=3$

ゆえに　$\log_x\frac{z}{y}+\log_y\frac{x}{z}+\log_z\frac{y}{x}=(\log_xz-\log_xy)+\frac{\log_x\frac{x}{z}}{\log_xy}+\frac{\log_x\frac{y}{x}}{\log_xz}$

$$=(\log_xz-\log_xy)+\frac{1-\log_xz}{\log_xy}+\frac{\log_xy-1}{\log_xz}$$

$$=(3-2)+\frac{1-3}{2}+\frac{2-1}{3}=1-1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

14

解説

(1) 対数の底，真数の条件から　$x>0$，$x\neq 1$　……①

方程式から　$2\log_2 x-\frac{\log_2 4}{\log_2 x}+3=0$　　よって　$2\log_2 x-\frac{2}{\log_2 x}+3=0$

両辺に $\log_2 x\ (\neq 0)$ を掛けて整理すると　$2(\log_2 x)^2+3\log_2 x-2=0$

すなわち　$(\log_2 x+2)(2\log_2 x-1)=0$　　ゆえに　$\log_2 x=-2,\ \frac{1}{2}$

したがって　$x=\frac{1}{4},\ \sqrt{2}$　　これらは①を満たす。

(2) 真数は正であるから　$9x>0$　　すなわち　$x>0$　……①

よって，方程式の両辺は正であるから，3を底として両辺の対数をとると

$$\log_3 x^{\log_3 9x}=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)^8$$

$$(\log_3 9x)(\log_3 x)=8\log_3\frac{x}{3}$$

$$(2+\log_3 x)(\log_3 x)=8(\log_3 x-1)$$

$$(\log_3 x)^2-6\log_3 x+8=0$$

$$(\log_3 x-2)(\log_3 x-4)=0$$

ゆえに　$\log_3 x=2,\ 4$　　よって　$x=9,\ 81$　　これらは①を満たす。

(3) 真数は正であるから　$3x-2>0$ かつ $2-x>0$

よって　$\frac{2}{3}<x<2$　……①

$\log_{\frac{1}{9}}(2-x)=\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}}=\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)}{2}$　であるから，不等式は

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)\geqq\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$$

$$2\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)\geqq\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$$

よって　$\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)^2\geqq\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから　$(3x-2)^2\leqq 2-x$

ゆえに　$9x^2-11x+2\leqq 0$　　すなわち　$(x-1)(9x-2)\leqq 0$

よって　$\frac{2}{9}\leqq x\leqq 1$　……②

①，②から，解は　$\frac{2}{3}<x\leqq 1$

15

解説

(1) $\log_3 x=X$，$\log_3 y=Y$ とおく。

3を底として，$x^2y=3^6$ の両辺の対数をとると　$\log_3 x^2y=\log_3 3^6$

よって　$2\log_3 x+\log_3 y=6$　　すなわち　$2X+Y=6$　……①

また，$x\geqq 3$，$y\geqq 3$ から　$\log_3 x\geqq\log_3 3$，$\log_3 y\geqq\log_3 3$

すなわち　$X\geqq 1$ ……②，$Y\geqq 1$ ……③

①から　$Y=6-2X$　……④

③から　$6-2X\geqq 1$　　よって　$X\leqq\frac{5}{2}$

これと②の共通範囲は　$1\leqq X\leqq\frac{5}{2}$　……⑤

すなわち　$1\leqq\log_3 x\leqq\frac{5}{2}$

また，④，⑤から　$6-2\cdot\frac{5}{2}\leqq Y\leqq 6-2\cdot 1$

よって　$1\leqq Y\leqq 4$　　すなわち　$1\leqq\log_3 y\leqq 4$

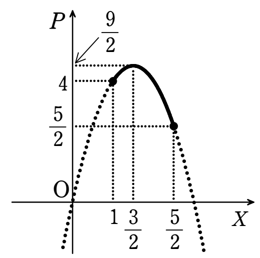
(2) $P=(\log_3 x)(\log_3 y)$ とすると

$$P=XY=X(6-2X)=-2X^2+6X=-2\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

⑤の範囲で，P は

$X=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{9}{2}$，

$X=\frac{5}{2}$ で最小値 $\frac{5}{2}$ をとる。



$X=\frac{3}{2}$ のとき，④から　$Y=3$

よって　$x=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$，$y=3^3=27$

$X=\frac{5}{2}$ のとき，④から　$Y=1$

よって　$x=3^{\frac{5}{2}}=9\sqrt{3}$，$y=3$

したがって　$x=3\sqrt{3}$，$y=27$ のとき最大値 $\frac{9}{2}$，　$x=9\sqrt{3}$，$y=3$ のとき最小値 $\frac{5}{2}$

16

解説

$a\geqq 2$，$b\geqq 3$ であるから　$\log_a b>0$

よって，$\log_a b$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると，2つの自然数 m，n を用いて　$\log_a b=\frac{m}{n}$　と表すことができる。

このとき　$a^{\frac{m}{n}}=b$

両辺を n 乗して　$a^m=b^n$

a は偶数，b は奇数であるから，この等式の左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾する。

したがって，$\log_a b$ は無理数である。

17

解説

(1) [1] $n=0$ のとき

$f(x)$ は定数関数であり，条件(A)から　$f(x)=0$

これは条件(B)を満たさないから不適。

[2] $n\geqq 1$ のとき

$f(x)$ の最高次の項を $ax^n\ (a\neq 0)$ とする。

このとき，$(x+1)f'(x)$ の最高次の項は　$x\cdot nax^{n-1}$　すなわち　nax^n

$2f(x)-4$　の最高次の項は　$2ax^n$

これらが一致するから，係数を比較して　$na=2a$

$a\neq 0$ であるから　$n=2$

注意　$f(x)$ が n 次式 $(n\geqq 1)$ のとき，$f'(x)$ は $(n-1)$ 次式となり，$f(x)$ の次数は $f'(x)$ の次数より1だけ大きい。

一方，$f(x)$ が定数関数のときは，$f(x)$，$f'(x)$ の次数が一致する（ともに次数0）。

よって，この場合を別に調べる必要がある。

(2) (1)の結果と条件(A)から $f(x)=ax^2+bx$ とおける。

$f'(x)=2ax+b$ であるから，(B)により　$(x+1)(2ax+b)=2(ax^2+bx)-4$

整理すると　$(2a-b)x+b+4=0$

これが x についての恒等式であるから　$2a-b=0$，$b+4=0$

これを解いて　$a=-2$，$b=-4$　　よって　$f(x)=-2x^2-4x$

18

解説

(1) $y=x^3$ を微分すると　$y'=3x^2$

点P$(t,\ t^3)$ における，曲線の接線の方程式は

$y-t^3=3t^2(x-t)$　すなわち　$y=3t^2x-2t^3$　……①

よって，点Sの x 座標は，方程式 $x^3=3t^2x-2t^3$ ……② の t 以外の解である。

②から　$x^3-3t^2x+2t^3=0$　　左辺を因数分解して　$(x-t)^2(x+2t)=0$

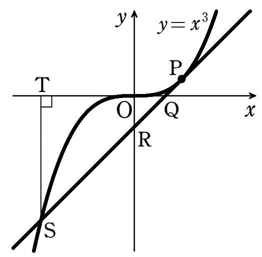
したがって，Sの x 座標は　$x=-2t$

(2) ①で，$y=0$ とすると　$0=3t^2x-2t^3$

すなわち　$t^2(3x-2t)=0$

$t^2\neq 0$ であるから　$x=\frac{2}{3}t$

よって，Qの座標は　$\left(\frac{2}{3}t,\ 0\right)$



Sから x 軸に下ろした垂線をSTとすると，Tの座標は　$(-2t,\ 0)$

OR∥TSであるから　QR：RS＝OQ：OT

OQ$=\left|\frac{2}{3}t\right|=\frac{2}{3}|t|$，OT$=|-2t|=2|t|$ であるから

$$\mathrm{QR}:\mathrm{RS}=\frac{2}{3}|t|:2|t|=1:3$$

19

解説

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=-2$，1で極値をとるから　$f'(-2)=0$，$f'(1)=0$

よって　$12a-4b+c=0$ ……①，　$3a+2b+c=0$ ……②

極大値と極小値の差が27であるから　$f(-2)-f(1)=27$

よって　$(-8a+4b-2c)-(a+b+c)=27$

ゆえに　$3a-b+c=-9$　……③

①−②から　$9a-6b=0$　　よって　$3a-2b=0$　……④

②−③から　$3b=9$　　よって　$b=3$

これと④から　$a=2$

$a=2$，$b=3$ を②に代入して c の値を求めると　$c=-12$

このとき　$f(x)=2x^3+3x^2-12x$

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2,\ 1$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，$f(x)$ は $x=-2$ で極大，$x=1$ で極小となり，条件を満たす。

したがって　$a=2$，$b=3$，$c=-12$

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 20	↘	極小 −7	↗

$\boxed{20}$

解説

$f(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ において単調に増加するための必要十分条件は，$0\leqq x\leqq 1$ で $f'(x)\geqq 0$ となることである。

$$f'(x)=3x^2-6ax+3b=3(x-a)^2-3a^2+3b$$

よって，$y=f'(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。

[1] $a<0$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f'(x)$ は $x=0$ で最小になるから　$f'(0)=3b\geqq 0$　であればよい。

よって　$b\geqq 0$

[2] $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f'(x)$ は $x=a$ で最小になるから　$f'(a)=-3a^2+3b\geqq 0$　であればよい。

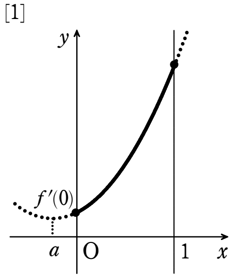
よって　$b\geqq a^2$

[3] $1<a$ のとき

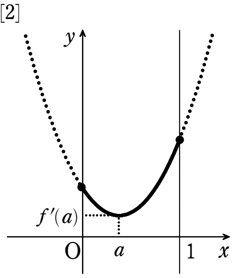
$0\leqq x\leqq 1$ において，$f'(x)$ は $x=1$ で最小になるから　$f'(1)=3-6a+3b\geqq 0$　であればよい。

よって　$b\geqq 2a-1$

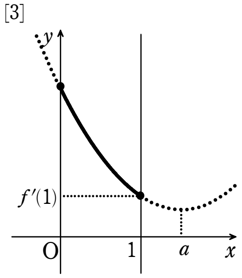
[1]



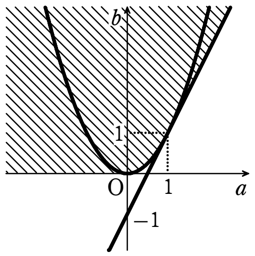
[2]



[3]



よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$\boxed{21}$

解説

(1) $f(a)=\int_0^1|x(x-a)|dx$

[1] $a<0$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ で $x(x-a)\geqq 0$ であるから

$$f(a)=\int_0^1 x(x-a)dx=\int_0^1(x^2-ax)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}$$

[2] $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$0\leqq x\leqq a$ で $x(x-a)\leqq 0$,

$a\leqq x\leqq 1$ で $x(x-a)\geqq 0$　であるから

$$f(a)=-\int_0^a x(x-a)dx+\int_a^1 x(x-a)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$

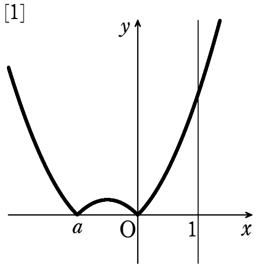
$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\quad\cdots\cdots①$$

[3] $1<a$ のとき

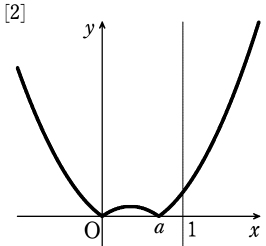
$0\leqq x\leqq 1$ で $x(x-a)\leqq 0$ であるから

$$f(a)=-\int_0^1 x(x-a)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=\frac{a}{2}-\frac{1}{3}$$

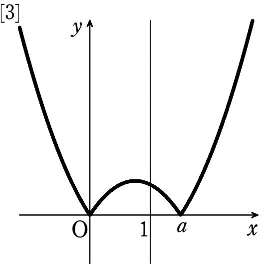
[1]



[2]



[3]



(2) ① について　$f'(a)=a^2-\frac{1}{2}$

$0\leqq a\leqq 1$ の範囲で，$f'(a)=0$ を解くと　$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(a)$ の増減表は右のようになる。

よって，$f(a)$ は

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

をとる。

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(a)$	↘		↘	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗		↗

$\boxed{22}$

解説

(1) $\sin x+\cos x=t$ の両辺を 2 乗すると　$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$

よって　$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

ゆえに　$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)$

$$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$$

$$=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\frac{3t-t^3}{2}$$

また　$\sin 2x=2\sin x\cos x=t^2-1$

よって　$y=(3t-t^3)+3(t-1)(t^2-1)=3t-t^3+3(t^3-t-t^2+1)$

$$=2t^3-3t^2+3$$

(2) $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq \pi$ から　$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi\quad\cdots\cdots①$

よって　$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　　ゆえに　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}\quad\cdots\cdots②$

(3) $\frac{dy}{dt}=6t^2-6t=6t(t-1)$

$\frac{dy}{dt}=0$ とすると　$t=0,\ 1$

② の範囲における y の増減表は，右のようになる。

よって，y は

$t=0$ で最大値 3,

$t=-1$ で最小値 -2　をとる。

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	↗	3	↘	2	↗	$4\sqrt{2}-3$

$t=0$ のとき　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

① から　$x+\frac{\pi}{4}=\pi$　　よって　$x=\frac{3}{4}\pi$

$t=-1$ のとき　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

① から　$x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$　　よって　$x=\pi$

したがって　$x=\frac{3}{4}\pi$ で最大値 3，$x=\pi$ で最小値 -2

$\boxed{23}$

解説

(1) $y=x^2$ から　$y'=2x$

点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における C の接線の傾きが $\sqrt{3}$ であるから　$2a=\sqrt{3}$

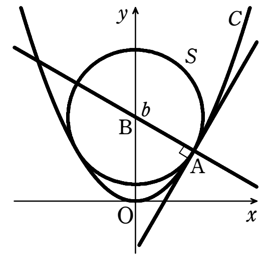
よって　$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　ゆえに　$\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$

直線 AB は点 A を通り，傾きが $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，

その方程式は　$y-\frac{3}{4}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

すなわち　$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{4}$　　よって　$b=\frac{5}{4}$，$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$

円 S の半径を r とすると　$r=\mathrm{AB}=\sqrt{\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)^2}=1$



(2) 面積を求める部分は右の図の斜線部分で，y 軸に関して対称である。

$\mathrm{H}\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$ とすると

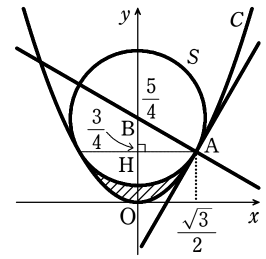
$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BH}=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$，$\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\angle\mathrm{ABH}=\frac{\pi}{3}$ であるから，求める面積は

$$2\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{4}-x^2\right)dx-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$=2\left[-\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{\pi}{3}$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{5\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$



$\boxed{24}$

解説

(1)　C 上の点を $\mathrm{Q}\,(t,\ at^2)$ $(t \geqq 0)$ とすると

$$\mathrm{AQ}^2=(t-0)^2+\left(at^2-a-\frac{1}{2a}\right)^2=t^2+a^2t^4-(2a^2+1)t^2+\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2$$

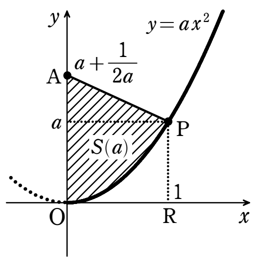
$$=a^2t^4-2a^2t^2+a^2+1+\frac{1}{4a^2}=a^2(t^2-1)^2+1+\frac{1}{4a^2}$$

$a^2>0$ であるから，A と Q との距離は $t^2=1$ のとき最小になる。

このとき，$t \geqq 0$ から　$t=1$　　　よって，点 P の座標は　$(1,\ a)$

また，AP の長さは　$\sqrt{1+\dfrac{1}{4a^2}}$

(2)　$\mathrm{R}\,(1,\ 0)$ とすると



$$S(a)=(\text{台形 PAOR})-\int_0^1 ax^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{a+\left(a+\frac{1}{2a}\right)\right\}\cdot 1-\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=a+\frac{1}{4a}-\frac{a}{3}=\frac{2}{3}a+\frac{1}{4a}$$

(3)　$a>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$S(a) \geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{4a}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号が成り立つのは，$\dfrac{2}{3}a=\dfrac{1}{4a}$ のときである。

$\dfrac{2}{3}a=\dfrac{1}{4a}$ から　　$a^2=\dfrac{3}{8}$　　　　$a>0$ であるから　$a=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

よって，$S(a)$ は $a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ で最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。