$\boxed{1}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\sqrt{3}\tan\theta = 1$

$\boxed{2}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta > \dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta \geqq \sqrt{3}$

$\boxed{3}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち 1 つが次の値をとるとき，各場合について他の 2 つの値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{3}{7}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$　　(3)　$\tan\theta = -2\sqrt{6}$

$\boxed{4}$

2 直線 $y = x$，$y = -\sqrt{3}\,x$ と，x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ求めよ。また，この 2 直線のなす鋭角を求めよ。

$\boxed{5}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

$\boxed{6}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

(1)　$4\sin^2\theta - 4\cos\theta - 1 = 0$　　(2)　$2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

$\boxed{7}$

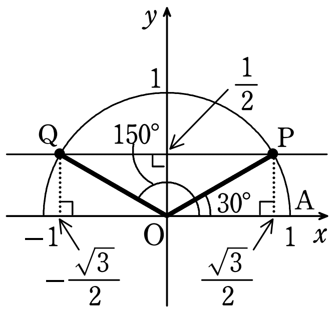
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$y = 4\sin^2\theta + 4\cos\theta + 3$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{1}$

（解説）

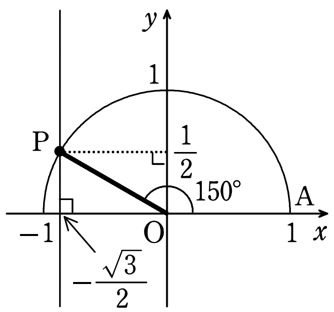
(1)　半径 1 の半円周上で，y 座標が $\dfrac{1}{2}$ となる点は右の図の 2 点 P，Q である。
求める θ は $\angle$AOP と $\angle$AOQ であるから

$\theta=30°,\ 150°$



(2)　半径 1 の半円周上で，x 座標が $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は右の図の点 P である。
求める θ は $\angle$AOP であるから

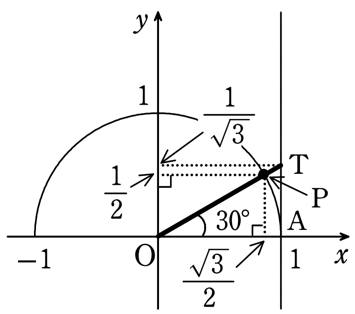
$\theta=150°$



(3)　$\sqrt{3}\tan\theta=1$ から　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

直線 $x=1$ 上で，y 座標が $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる点を T とすると，直線 OT と半径 1 の半円の交点は右の図の点 P である。
求める θ は $\angle$AOP であるから

$\theta=30°$



$\boxed{2}$

（解説）

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　　$\theta=30°,\ 150°$

図から，求める θ の値の範囲は

$30°<\theta<150°$

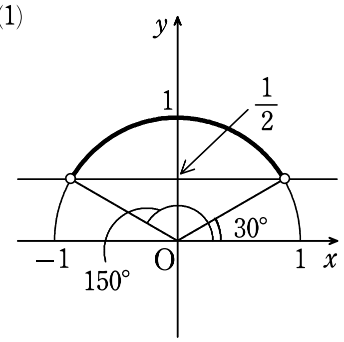
(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は　　$\theta=135°$

図から，求める θ の値の範囲は

$135°<\theta\leqq180°$

(3)　$\tan\theta=\sqrt{3}$ を満たす θ は　　$\theta=60°$

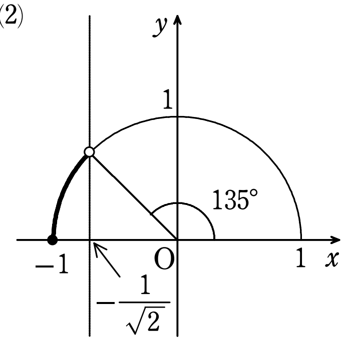
(1)



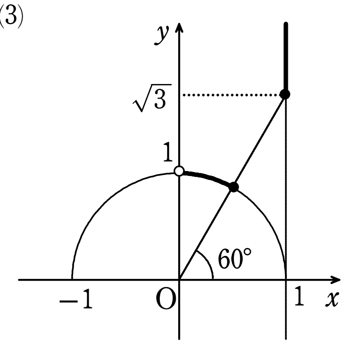
図から，求める θ の値の範囲は

$60°\leqq\theta<90°$

(2)



(3)



$\boxed{3}$

（解説）

(1)　$\sin\theta=\dfrac{3}{7}$ から，$0°<\theta<90°$ または $90°<\theta<180°$ である。

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{3}{7}\right)^2=1-\frac{9}{49}=\frac{40}{49}$$

[1]　$0°<\theta<90°$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{40}{49}}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{7}\div\dfrac{2\sqrt{10}}{7}=\dfrac{3}{2\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$

[2]　$90°<\theta<180°$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{40}{49}}=-\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{7}\div\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{7}\right)=-\dfrac{3}{2\sqrt{10}}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$

(2)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$

$\sin\theta\geqq0$ であるから　　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\div\dfrac{1}{3}=2\sqrt{2}$

(3)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-2\sqrt{6})^2=25$　　よって　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{25}$

$\tan\theta<0$ より $90°<\theta<180°$ であるから　　$\cos\theta<0$

ゆえに　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{25}}=-\dfrac{1}{5}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-2\sqrt{6})\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

4

解説

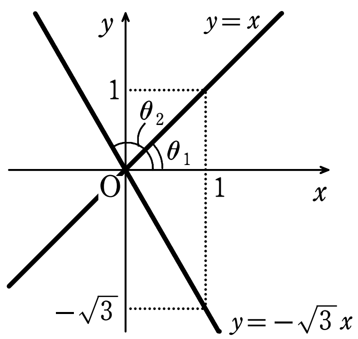
2 直線 $y=x$，$y=-\sqrt{3}x$ と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ θ_1，θ_2 とすると

$$\tan\theta_1=1,\quad \tan\theta_2=-\sqrt{3}$$

よって　$\theta_1=45^\circ$，$\theta_2=120^\circ$

したがって，2 直線のなす鋭角は

$$\theta_2-\theta_1=120^\circ-45^\circ=75^\circ$$



5

解説

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{25}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{25}$

よって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{12}{25}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{5}\left\{1-\left(-\frac{12}{25}\right)\right\}=\frac{1}{5}\cdot\frac{37}{25}=\frac{37}{125}$$

別解　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{12}{25}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{125}+\frac{36}{125}=\frac{37}{125}$$

6

解説

(1)　$4\sin^2\theta-4\cos\theta-1=0$ から　$4(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta-1=0$

よって　$4\cos^2\theta+4\cos\theta-3=0$

ゆえに　$(2\cos\theta-1)(2\cos\theta+3)=0$　……①

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから　$2\cos\theta+3\neq0$

よって，① から　$2\cos\theta-1=0$　すなわち　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$

(2)　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$ から　$(\sin\theta-1)(2\sin\theta-1)=0$

よって　$\sin\theta=1,\ \dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから

$\sin\theta=1$　より　$\theta=90^\circ$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=30^\circ$，150°

したがって，求める θ は　$\theta=30^\circ$，90°，150°

7

解説

$y=4(1-\cos^2\theta)+4\cos\theta+3=-4\cos^2\theta+4\cos\theta+7$

$\cos\theta=x$ とおくと

$$y=-4x^2+4x+7=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8$$

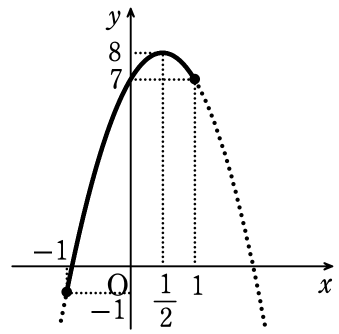
また，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ から　$-1\leqq x\leqq1$

よって，y は

$x=\dfrac{1}{2}$ で最大値 8，

$x=-1$ で最小値 -1

をとる。



$x=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=60^\circ$

$x=-1$ すなわち $\cos\theta=-1$ のとき　$\theta=180^\circ$

したがって　$\theta=60^\circ$ で最大値 8

$\theta=180^\circ$ で最小値 -1