1

解説

(1)　25 の平方根は ± 5

(2)　3 の平方根は $\pm\sqrt{3}$

2

解説

(1)　$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

(2)　$\sqrt{64}=\sqrt{8^2}=8$

(3)　$-\sqrt{81}=-\sqrt{9^2}=-9$

3

解説

(1)　$(\sqrt{6})^2=6$

(2)　$(-\sqrt{11})^2=11$

(3)　$-(\sqrt{9})^2=-9$

4

解説

(1)　$6<7$ であるから　$\sqrt{6}<\sqrt{7}$

(2)　$5=\sqrt{25}$ で，$26>25$ であるから

$\sqrt{26}>\sqrt{25}$

よって　$\sqrt{26}>5$

(3)　$0.6=\sqrt{0.36}$ で，$0.5>0.36$ であるから

$\sqrt{0.5}>\sqrt{0.36}$

よって　$\sqrt{0.5}>0.6$

(4)　$2=\sqrt{4}$ で，$5>4$ であるから

$\sqrt{5}>\sqrt{4}$

すなわち　$\sqrt{5}>2$

よって　$-\sqrt{5}<-2$

5

解説

(1)　$\sqrt{3}\times\sqrt{7}=\sqrt{3\times7}=\sqrt{21}$　答

(2)　$\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{14}{7}}=\sqrt{2}$　答

(3)　$\sqrt{36}\div\sqrt{12}=\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\dfrac{36}{12}}=\sqrt{3}$　答

6

解説

(1)　$2\sqrt{3}=2\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{2^2\times3}$

$=\sqrt{12}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{28}}{2}=\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{2^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{28}{2^2}}$

$=\sqrt{7}$

7

解説

(1)　$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}=\sqrt{3^2}\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

(2)　$\sqrt{360}=\sqrt{2^3\times3^2\times5}=\sqrt{2^2}\sqrt{3^2}\sqrt{10}=6\sqrt{10}$

8

解説

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(2)　$\dfrac{9}{4\sqrt{3}}=\dfrac{9\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{9\times\sqrt{3}}{4\times3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

(3)　$\dfrac{6}{\sqrt{75}}=\dfrac{6}{5\sqrt{3}}=\dfrac{6\times\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{6\times\sqrt{3}}{5\times3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

9

解説

(1)　$2\sqrt{10}\times3\sqrt{15}=(2\times3)\times\sqrt{10}\times\sqrt{15}$

$=6\sqrt{10\times15}=6\sqrt{2\times5\times3\times5}$

$=6\sqrt{5^2\times2\times3}=30\sqrt{6}$

(2)　$\sqrt{8}\sqrt{45}=\sqrt{8\times45}$

$=\sqrt{2^3\times3^2\times5}$

$=\sqrt{2^2\times3^2\times2\times5}$

$=(2\times3)\sqrt{2\times5}$

$=6\sqrt{10}$

(3)　$\sqrt{20}\times\sqrt{21}\times\sqrt{70}=\sqrt{20\times21\times70}$

$=\sqrt{2^2\times5\times3\times7\times2\times5\times7}$

$=\sqrt{2^2\times5^2\times7^2\times2\times3}$

$=(2\times5\times7)\sqrt{2\times3}$

$=70\sqrt{6}$

10

解説

(1)　$4\sqrt{2}+3\sqrt{2}=7\sqrt{2}$　答

(2)　$\sqrt{48}-9\sqrt{3}=4\sqrt{3}-9\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$　答

(3)　$\sqrt{72}+\sqrt{50}-\sqrt{98}=6\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}=4\sqrt{2}$　答

(4)　$\dfrac{\sqrt{8}}{3}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}+2\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}=\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}+2\right)\sqrt{2}$

$=\dfrac{4-3+12}{6}\times\sqrt{2}=\dfrac{13\sqrt{2}}{6}$　答

(5)　$-4\sqrt{2}-\sqrt{12}+3\sqrt{3}+\sqrt{50}=-4\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{3}$　答

11

解説

(1)　$(\sqrt{6}+2)^2=(\sqrt{6})^2+2\times2\times\sqrt{6}+2^2$

$=6+4\sqrt{6}+4$

$=10+4\sqrt{6}$

(2)　$(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2=(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}+(\sqrt{5})^2$

$=2-2\sqrt{10}+5$

$=7-2\sqrt{10}$

(3)　$(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})=3^2-(\sqrt{6})^2$

$=9-6$

$=3$

12

解説

(1)　$\dfrac{3}{\sqrt{7}+2}=\dfrac{3(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}$

$=\dfrac{3(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7})^2-2^2}=\dfrac{3(\sqrt{7}-2)}{7-4}$

$=\dfrac{3(\sqrt{7}-2)}{3}=\sqrt{7}-2$　答

(2)　$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}$

$=\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}=\dfrac{2(4+\sqrt{15})}{2}$

$=4+\sqrt{15}$　答

13

解説

$(2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3)-(\sqrt{7}-2)^2=\{(2\sqrt{5})^2-3^2\}-(7-4\sqrt{7}+4)$

$=(20-9)-(11-4\sqrt{7})$

$=11-11+4\sqrt{7}$

$=4\sqrt{7}$

14

解説

(1)　$(\sqrt{6}+2)^2-(\sqrt{6}-2)^2=\{(\sqrt{6}+2)+(\sqrt{6}-2)\}\{(\sqrt{6}+2)-(\sqrt{6}-2)\}$

$=2\sqrt{6}\times4$

$=8\sqrt{6}$

(2)　$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}$

$=(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2$

$=(1+2\sqrt{2}+2)-3$

$=2\sqrt{2}$

$\boxed{15}$

解説

(1) $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

$x+y=(\sqrt{6}+2)+(\sqrt{6}-2)=2\sqrt{6}$

であるから　$(x+y)^2=(2\sqrt{6})^2$

$=24$

(2) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$x+y=2\sqrt{6}$，$x-y=(\sqrt{6}+2)-(\sqrt{6}-2)=4$

であるから　$(x+y)(x-y)=2\sqrt{6}\times 4$

$=8\sqrt{6}$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x+y=(\sqrt{6}+2)+(\sqrt{6}-2)=2\sqrt{6}$

$xy=(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)=6-4=2$

であるから　$(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{6})^2-2\times 2$

$=24-4$

$=20$

$\boxed{16}$

解説

$3<\sqrt{10}<4$ であるから　$a=3$

よって　$b=\sqrt{10}-3$

したがって　$a^2+b^2=3^2+(\sqrt{10}-3)^2$

$=9+(10-6\sqrt{10}+9)$

$=28-6\sqrt{10}$

$\boxed{1}$

解説

(1) ± 4

(2) $\pm\dfrac{2}{3}$

(3) ± 0.6

(4) $\pm\sqrt{7}$

(5) $\pm\sqrt{1.2}$

(6) $\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

$\boxed{2}$

解説

(1) $(\sqrt{5})^2=5$　(2) $(\sqrt{8})^2=8$　(3) $(-\sqrt{10})^2=10$

(4) $-(\sqrt{10})^2=-10$　(5) $-(\sqrt{16})^2=-16$　(6) $-(-\sqrt{9})^2=-9$

(7) $\{-(-\sqrt{3})\}^2=(\sqrt{3})^2=3$　(8) $(-\sqrt{6})^4=\{(-\sqrt{6})^2\}^2=6^2=36$

$\boxed{3}$

解説

(1) $\sqrt{1}=\sqrt{1^2}=1$

(2) $\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=7$

(3) $-\sqrt{256}=-\sqrt{16^2}=-16$

(4) $\sqrt{\dfrac{81}{49}}=\sqrt{\left(\dfrac{9}{7}\right)^2}=\dfrac{9}{7}$

(5) $-\sqrt{\dfrac{64}{169}}=-\sqrt{\left(\dfrac{8}{13}\right)^2}=-\dfrac{8}{13}$

(6) $-\sqrt{\dfrac{18}{200}}=-\sqrt{\dfrac{9}{100}}=-\sqrt{\left(\dfrac{3}{10}\right)^2}=-\dfrac{3}{10}$

(7) $-\sqrt{0.49}=-\sqrt{0.7^2}=-0.7$

(8) $\sqrt{0.0225}=\sqrt{0.15^2}=0.15$

$\boxed{4}$

解説

(1) $5<7$ であるから　$\sqrt{5}<\sqrt{7}$

(2) $13>12$ であるから　$\sqrt{13}>\sqrt{12}$

(3) $4=\sqrt{16}$，$15<16$ であるから　$\sqrt{15}<\sqrt{16}$

すなわち　$\sqrt{15}<4$

(4) $8=\sqrt{64}$，$64>63$ であるから　$\sqrt{64}>\sqrt{63}$

すなわち　$8>\sqrt{63}$

(5) $\dfrac{2}{5}<0.5$ であるから　$\sqrt{\dfrac{2}{5}}<\sqrt{0.5}$

(6) $\dfrac{10}{3}>\dfrac{16}{5}$ であるから　$\sqrt{\dfrac{10}{3}}>\sqrt{\dfrac{16}{5}}$

(7) $1.3=\sqrt{1.69}$，$1.7>1.69$ であるから　$\sqrt{1.7}>\sqrt{1.69}$

すなわち　$\sqrt{1.7}>1.3$

(8) $2.8=\sqrt{7.84}$，$7.84<7.9$ であるから　$\sqrt{7.84}<\sqrt{7.9}$

すなわち　$2.8<\sqrt{7.9}$

(9) $10<11$ であるから　$\sqrt{10}<\sqrt{11}$

よって　$-\sqrt{10}>-\sqrt{11}$

(10) $5=\sqrt{25}$，$26>25$ であるから　$\sqrt{26}>\sqrt{25}$

すなわち　$\sqrt{26}>5$

よって　$-\sqrt{26}<-5$

(11) $\dfrac{7}{5}=\sqrt{\dfrac{49}{25}}$，$\dfrac{49}{25}<2$ であるから　$\sqrt{\dfrac{49}{25}}<\sqrt{2}$

すなわち　$\dfrac{7}{5}<\sqrt{2}$

よって　$-\dfrac{7}{5}>-\sqrt{2}$

(12) $3.5=\sqrt{12.25}$，$12.25<12.3$ であるから　$\sqrt{12.25}<\sqrt{12.3}$

すなわち　$3.5<\sqrt{12.3}$

よって　$-3.5>-\sqrt{12.3}$

$\boxed{5}$

解説

(1) $\sqrt{5}\sqrt{7}=\sqrt{5\times 7}=\sqrt{35}$

(2) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{12}{6}}=\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{10}{3}}=\sqrt{3\times\dfrac{10}{3}}=\sqrt{10}$

(4) $\sqrt{0.25}\sqrt{12}=\sqrt{0.25\times 12}=\sqrt{3}$

(5) $\sqrt{42}\div\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{42}{7}}=\sqrt{6}$

(6) $\sqrt{30}\div\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{30}\times\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{30\times 3}{6}}=\sqrt{15}$

$\boxed{6}$

解説

(1) $2\sqrt{6}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{6}$

$=\sqrt{2^2\times 6}$

$=\sqrt{24}$

(2) $3\sqrt{3}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{3^2\times 3}$

$=\sqrt{27}$

(3) $\dfrac{\sqrt{8}}{2}=\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{8}{2^2}}$

$=\sqrt{2}$

$\boxed{7}$

解説

(1) $\sqrt{28}=\sqrt{2^2\times7}=\sqrt{2^2}\sqrt{7}=2\sqrt{7}$

(2) $\sqrt{32}=\sqrt{4^2\times2}=\sqrt{4^2}\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{75}=\sqrt{5^2\times3}=\sqrt{5^2}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{80}=\sqrt{4^2\times5}=\sqrt{4^2}\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

(5) $\sqrt{500}=\sqrt{10^2\times5}=\sqrt{10^2}\sqrt{5}=10\sqrt{5}$

(6) $\sqrt{252}=\sqrt{6^2\times7}=\sqrt{6^2}\sqrt{7}=6\sqrt{7}$

(7) $\sqrt{588}=\sqrt{14^2\times3}=\sqrt{14^2}\sqrt{3}=14\sqrt{3}$

(8) $\sqrt{768}=\sqrt{16^2\times3}=\sqrt{16^2}\sqrt{3}=16\sqrt{3}$

(9) $\sqrt{4500}=\sqrt{30^2\times5}=\sqrt{30^2}\sqrt{5}=30\sqrt{5}$

$\boxed{8}$

解説

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

(4) $\dfrac{5}{3\sqrt{2}}=\dfrac{5\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{5\times\sqrt{2}}{3\times2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

(5) $\dfrac{7}{2\sqrt{7}}=\dfrac{7\times\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{7\times\sqrt{7}}{2\times7}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(6) $\dfrac{9}{4\sqrt{3}}=\dfrac{9\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{9\times\sqrt{3}}{4\times3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

(7) $\dfrac{10}{\sqrt{45}}=\dfrac{10}{3\sqrt{5}}=\dfrac{10\times\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{10\times\sqrt{5}}{3\times5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

(8) $\dfrac{4}{\sqrt{18}}=\dfrac{4}{3\sqrt{2}}=\dfrac{4\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{4\times\sqrt{2}}{3\times2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{9}$

解説

(1) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{10}=2\times3\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}$
$=6\times\sqrt{5\times10}$
$=6\times\sqrt{5^2\times2}$
$=6\times5\sqrt{2}$
$=30\sqrt{2}$

(2) $4\sqrt{6}\times7\sqrt{15}=4\times7\times\sqrt{6}\times\sqrt{15}$
$=28\times\sqrt{6\times15}$
$=28\times\sqrt{3^2\times2\times5}$
$=28\times3\times\sqrt{2\times5}$
$=84\sqrt{10}$

(3) $\sqrt{18}\times\sqrt{54}=\sqrt{3^2\times2}\times\sqrt{3^2\times6}$
$=3\sqrt{2}\times3\sqrt{6}$
$=3\times3\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}$
$=9\times\sqrt{2\times6}$
$=9\times\sqrt{2^2\times3}$
$=9\times2\sqrt{3}$
$=18\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{24}\times\sqrt{84}=\sqrt{2^2\times6}\times\sqrt{2^2\times21}$
$=2\sqrt{6}\times2\sqrt{21}$
$=2\times2\times\sqrt{6}\times\sqrt{21}$
$=4\times\sqrt{6\times21}$
$=4\times\sqrt{3^2\times2\times7}$
$=4\times3\times\sqrt{2\times7}$
$=12\sqrt{14}$

$\boxed{10}$

解説

(1) $4\sqrt{7}+13\sqrt{7}=(4+13)\sqrt{7}=17\sqrt{7}$

(2) $\sqrt{50}-\sqrt{32}=5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(5-4)\sqrt{2}=\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{32}-\sqrt{72}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}$

(4) $2\sqrt{75}-\sqrt{48}-3\sqrt{3}=10\sqrt{3}-4\sqrt{3}-3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

(5) $2\sqrt{5}+3\sqrt{80}-\sqrt{20}-2\sqrt{180}=2\sqrt{5}+12\sqrt{5}-2\sqrt{5}-12\sqrt{5}=0$

(6) $\sqrt{\dfrac{3}{49}}+\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{7}+\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=\dfrac{5\sqrt{3}}{7}$

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{10}\times\dfrac{1}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

(8) $\sqrt{18}-\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{2}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

(9) $4\sqrt{2}-\sqrt{50}+\dfrac{\sqrt{8}}{2}=4\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=0$

(10) $3\sqrt{20}-\dfrac{15}{\sqrt{5}}-\sqrt{80}=3\sqrt{20}-\dfrac{15\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\sqrt{80}$
$=6\sqrt{5}-3\sqrt{5}-4\sqrt{5}$
$=-\sqrt{5}$

(11) $\dfrac{15\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\dfrac{4}{\sqrt{2}}-\dfrac{18}{\sqrt{3}}+\sqrt{18}=\dfrac{15}{\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{2}}-\dfrac{18}{\sqrt{3}}+3\sqrt{2}$
$=\dfrac{15\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\dfrac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\dfrac{18\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+3\sqrt{2}$
$=5\sqrt{3}-2\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$
$=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\boxed{11}$

解説

(1) $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2=(\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2$
$=5+2\sqrt{35}+7$
$=12+2\sqrt{35}$

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2$
$=3+2\sqrt{18}+6$
$=9+2\times3\sqrt{2}$
$=9+6\sqrt{2}$

(3) $(\sqrt{2}-\sqrt{7})^2=(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2$
$=2-2\sqrt{14}+7$
$=9-2\sqrt{14}$

(4) $(3\sqrt{2}-2)^2=(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times2+2^2$
$=18-12\sqrt{2}+4$
$=22-12\sqrt{2}$

(5) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2$
$=5-3=2$

(6) $(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{10}+\sqrt{6})=(\sqrt{10})^2-(\sqrt{6})^2$
$=10-6=4$

(7) $(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})=4^2-(\sqrt{3})^2$
$=16-3=13$

(8) $(2\sqrt{2}-\sqrt{5})(2\sqrt{2}+\sqrt{5})=(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2$
$=8-5$
$=3$

$\boxed{12}$

解説

(1) $\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\dfrac{4(3-\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2}$
$=\dfrac{4(3-\sqrt{5})}{9-5}=\dfrac{4(3-\sqrt{5})}{4}=3-\sqrt{5}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$
$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

(3) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}$
$=\dfrac{7+2\sqrt{35}+5}{7-5}=\dfrac{12+2\sqrt{35}}{2}$
$=\dfrac{2(6+\sqrt{35})}{2}=6+\sqrt{35}$

(4) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$
$=\dfrac{5-2\sqrt{15}+3}{5-3}=\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}$
$=\dfrac{2(4-\sqrt{15})}{2}=4-\sqrt{15}$

(5) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\dfrac{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$
$=\dfrac{18+6\sqrt{6}+3}{18-3}=\dfrac{21+6\sqrt{6}}{15}$
$=\dfrac{3(7+2\sqrt{6})}{15}=\dfrac{7+2\sqrt{6}}{5}$

$\boxed{13}$

(解説)

(1) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+2)^2=3-2\sqrt{6}+2+6+4\sqrt{6}+4$

$=15+2\sqrt{6}$

(2) $(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\{(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times1+1^2\}+\{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\}$

$=(2+2\sqrt{2}+1)+(3-2)$

$=(3+2\sqrt{2})+1$

$=4+2\sqrt{2}$

(3) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})=(3-2\sqrt{6}+2)-(7-3)$

$=5-2\sqrt{6}-4$

$=1-2\sqrt{6}$

(4) $(\sqrt{2}-2)^2+\dfrac{8}{\sqrt{2}}-\sqrt{54}\times3\sqrt{6}=2-4\sqrt{2}+4+\dfrac{8\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{6}\times3\sqrt{6}$

$=6-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}-54$

$=-48$

(5) $\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}-\dfrac{8-\sqrt{12}}{\sqrt{6}}-\dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{27}+\sqrt{6})}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{6}(8-\sqrt{12})}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{3}(3+\sqrt{6})}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{54}+\sqrt{12}}{2}-\dfrac{8\sqrt{6}-\sqrt{72}}{6}-\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{18}}{3}$

$=\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}-\dfrac{8\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{6}-\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3}$

$=\dfrac{9\sqrt{6}+6\sqrt{3}-8\sqrt{6}+6\sqrt{2}-6\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

(6) $\dfrac{\sqrt{72}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=\dfrac{(\sqrt{72}-2\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-(8-4\sqrt{6}+3)$

$=\dfrac{\sqrt{72}\times\sqrt{2}-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2}-(11-4\sqrt{6})$

$=\dfrac{12-2\sqrt{6}}{2}-11+4\sqrt{6}$

$=(6-\sqrt{6})-11+4\sqrt{6}$

$=3\sqrt{6}-5$

(7) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)=\dfrac{6}{\sqrt{3}}(3+2\sqrt{3}+1)-\sqrt{3}+1$

$=\dfrac{24}{\sqrt{3}}+12-\sqrt{3}+1$

$=13+8\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$=13+7\sqrt{3}$

(8) $(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2-(4-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})+\dfrac{4}{\sqrt{5}}(\sqrt{60}-\sqrt{15})$

$=2-4\sqrt{3}+6-\{4^2-(2\sqrt{2})^2\}+4\sqrt{12}-4\sqrt{3}$

$=8-4\sqrt{3}-8+8\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$=0$

(9) $\dfrac{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}{\sqrt{6}}+\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{4}=\dfrac{7-4}{\sqrt{6}}+\dfrac{3-2\sqrt{6}+2}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{4}$

$=\dfrac{5}{4}$

(10) $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{24}{\sqrt{3}}+\sqrt{27}=\dfrac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-\dfrac{24\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\sqrt{3^2\times3}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1}-\dfrac{24\sqrt{3}}{3}+3\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)-8\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

$=6+2\sqrt{3}-8\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

$=6-3\sqrt{3}$

$\boxed{14}$

(解説)

(1) $(5+\sqrt{2})^2-(\sqrt{2}-5)^2=\{(5+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-5)\}\{(5+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-5)\}$

$=2\sqrt{2}\times10$

$=20\sqrt{2}$

(2) $(\sqrt{3}+2+\sqrt{6})^2-(\sqrt{3}-2+\sqrt{6})^2$

$=\{(\sqrt{3}+2+\sqrt{6})+(\sqrt{3}-2+\sqrt{6})\}\{(\sqrt{3}+2+\sqrt{6})-(\sqrt{3}-2+\sqrt{6})\}$

$=\{2(\sqrt{3}+\sqrt{6})\}\times4$

$=8\sqrt{3}+8\sqrt{6}$

(3) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3})=\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})-\sqrt{3}\}\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})+\sqrt{3}\}$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2$

$=2-2\sqrt{12}+6-3$

$=5-4\sqrt{3}$

(4) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)=\{(\sqrt{3}+1)+\sqrt{2}\}\{(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}\}$

$=(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2$

$=3+2\sqrt{3}+1-2$

$=2+2\sqrt{3}$

(5) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(5+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3})(-5+\sqrt{6})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+5)(\sqrt{6}-5)$

$=\{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\}\{(\sqrt{6})^2-5^2\}$

$=(3-2)(6-25)$

$=-19$

$\boxed{15}$

(解説)

(1) $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

$=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}^2$

$=(2\sqrt{2})^2$

$=(\sqrt{8})^2=8$

(2) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$=\{(\sqrt{5}+\sqrt{7})+(\sqrt{5}-\sqrt{7})\}\{(\sqrt{5}+\sqrt{7})-(\sqrt{5}-\sqrt{7})\}$

$=2\sqrt{5}\times2\sqrt{7}$

$=4\sqrt{35}$

(3) $x+y=(\sqrt{5}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{2})=2\sqrt{5}$

$xy=(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2=5-2=3$

であるから　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(2\sqrt{5})^2-2\times3$

$=20-6=14$

$\boxed{16}$

(解説)

(1) $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$　であるから　$1<\sqrt{3}<2$

よって　$a=1$,　$b=\sqrt{3}-1$

ゆえに　$a^2+b^2=1^2+(\sqrt{3}-1)^2$

$=1+(3-2\sqrt{3}+1)$

$=5-2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{9}<\sqrt{14}<\sqrt{16}$　であるから　$3<\sqrt{14}<4$

よって　$a=3$,　$b=\sqrt{14}-3$

ゆえに　$a^2+b^2=3^2+(\sqrt{14}-3)^2$

$=9+(14-6\sqrt{14}+9)$

$=32-6\sqrt{14}$

$\boxed{1}$

解説

(1) $4\sqrt{7}+13\sqrt{7}=(4+13)\sqrt{7}=17\sqrt{7}$

(2) $\sqrt{50}-\sqrt{32}=5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(5-4)\sqrt{2}=\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{32}-\sqrt{72}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}$

(4) $2\sqrt{75}-\sqrt{48}-3\sqrt{3}=10\sqrt{3}-4\sqrt{3}-3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

(5) $2\sqrt{5}+3\sqrt{80}-\sqrt{20}-2\sqrt{180}=2\sqrt{5}+12\sqrt{5}-2\sqrt{5}-12\sqrt{5}=0$

(6) $\sqrt{\frac{3}{49}}+\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{5\sqrt{3}}{7}$

(7) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{10}\times\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

(8) $\sqrt{18}-\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{2}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

(9) $4\sqrt{2}-\sqrt{50}+\frac{\sqrt{8}}{2}=4\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2}=0$

(10) $3\sqrt{20}-\frac{15}{\sqrt{5}}-\sqrt{80}=3\sqrt{20}-\frac{15\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\sqrt{80}$

$=6\sqrt{5}-3\sqrt{5}-4\sqrt{5}$

$=-\sqrt{5}$

(11) $\frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\frac{4}{\sqrt{2}}-\frac{18}{\sqrt{3}}+\sqrt{18}=\frac{15}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{2}}-\frac{18}{\sqrt{3}}+3\sqrt{2}$

$=\frac{15\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\frac{18\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+3\sqrt{2}$

$=5\sqrt{3}-2\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\boxed{2}$

解説

(1) $\sqrt{3}(\sqrt{24}-\sqrt{6})=\sqrt{3}(2\sqrt{6}-\sqrt{6})=\sqrt{3}\sqrt{6}=3\sqrt{2}$

(2) $(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^2+(2-1)\sqrt{2}+2\times(-1)$

$=2+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}$

(3) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{5}-\sqrt{2}\sqrt{3}$

$=5-\sqrt{10}+\sqrt{15}-\sqrt{6}$

(4) $(\sqrt{2}+1)^2=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times1+1^2$

$=2+2\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$

(5) $(\sqrt{8}-\sqrt{5})^2=(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$

$=(2\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$

$=8-4\sqrt{10}+5=13-4\sqrt{10}$

(6) $(\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})=3(\sqrt{2})^2+\{1\times\sqrt{3}+(-2\sqrt{3})\times3\}\sqrt{2}+(-2\sqrt{3})\times\sqrt{3}$

$=6-5\sqrt{6}-6=-5\sqrt{6}$

(7) $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{27}-\sqrt{8})$

$=(\sqrt{3}-3\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

$=3(\sqrt{3})^2+\{1\times(-2\sqrt{2})+(-3\sqrt{2})\times3\}\sqrt{3}+(-3\sqrt{2})\times(-2\sqrt{2})$

$=9-11\sqrt{6}+12$

$=21-11\sqrt{6}$

(8) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2$

$=7-2=5$

(9) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2\sqrt{3}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

(10) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+\sqrt{3}(4-\sqrt{3})=(\sqrt{6})^2-2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+4\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2$

$=6-4\sqrt{3}+2+4\sqrt{3}-3=5$

(11) $\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{18})-(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

$=\sqrt{3}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})-\{(2\sqrt{3})^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2\}$

$=6+3\sqrt{6}-(12+4\sqrt{6}+2)$

$=-8-\sqrt{6}$

$\boxed{3}$

解説

(1) $\sqrt{6}+\sqrt{27}-\frac{\sqrt{18}-6}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}+3\sqrt{3}-\frac{(\sqrt{18}-6)\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\sqrt{6}+3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{54}-6\sqrt{3}}{3}$

$=\sqrt{6}+3\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{3}$

$=\sqrt{6}+3\sqrt{3}-\sqrt{6}+2\sqrt{3}$

$=5\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2}-\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)-\frac{6}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}-\sqrt{18}+2\sqrt{3}-\frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\frac{6\sqrt{3}}{3}$

$=\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

$=-2\sqrt{2}$

(3) $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{72}}{3}(\sqrt{2}-1)=\frac{6\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}+\frac{6\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}-1)$

$=\frac{6\sqrt{18}}{6}+2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

$=\sqrt{18}+2\times2-2\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}$

$=4+\sqrt{2}$

(4) $\frac{\sqrt{45}-\sqrt{27}}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\frac{3}{\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}$

(5) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{8}}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{15}}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}+\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}$

$=\sqrt{\frac{2}{8}}+\sqrt{\frac{6}{8}}-\sqrt{\frac{5}{20}}+\sqrt{\frac{15}{20}}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{3}{4}}$

$=2\sqrt{\frac{3}{4}}$

$=\sqrt{3}$

(6) $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{10}+3)}{5}-\frac{3+\sqrt{20}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{10}+3)}{5}-\frac{(3+\sqrt{20})\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{8}{2}}$

$=\frac{\sqrt{50}+3\sqrt{5}}{5}-\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{100}}{5}+\sqrt{4}$

$=\frac{\sqrt{50}-\sqrt{100}}{5}+\sqrt{4}$

$=\frac{5\sqrt{2}-10}{5}+2$

$=\sqrt{2}-2+2$

$=\sqrt{2}$

(7) $\sqrt{54}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{18}-18}{\sqrt{2}}=3\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{(\sqrt{18}-18)\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=3\sqrt{18}-\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{36}-18\sqrt{2}}{2}$

$=3\times3\sqrt{2}-3\sqrt{\frac{6}{2}}+\frac{6-18\sqrt{2}}{2}$

$=9\sqrt{2}-3\sqrt{3}+3-9\sqrt{2}$

$=3-3\sqrt{3}$

(8) $\frac{12}{\sqrt{3}}-2\sqrt{5}\times\sqrt{15}+(\sqrt{3}+3)^2=\frac{12\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-2\sqrt{5\times15}+(3+6\sqrt{3}+9)$

$=\frac{12\sqrt{3}}{3}-2\times5\sqrt{3}+12+6\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}-10\sqrt{3}+12+6\sqrt{3}$

$=12$

(9) $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})+\frac{1}{\sqrt{12}}(1-\sqrt{3})^2=3^2-(2\sqrt{2})^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}(1-2\sqrt{3}+3)$

$=9-8+\frac{1}{2\sqrt{3}}(4-2\sqrt{3})$

$=1+\frac{4}{2\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$=1+\frac{2}{\sqrt{3}}-1$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(10) $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})(\sqrt{12}-\sqrt{2})-\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-2\right)^2$

$=(\sqrt{2}+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})-\left(\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-2\right)^2$

$=(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{6}-2)^2$

$=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2-(6-4\sqrt{6}+4)$

$=12-2-10+4\sqrt{6}$

$=4\sqrt{6}$

$\boxed{4}$

解説

(1) $(2\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+3)^2=(2\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}\times1+1^2-\{(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times3+3^2\}$
$=8-4\sqrt{2}+1-(2+6\sqrt{2}+9)$
$=-2-10\sqrt{2}$

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{4}-\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{4}$
$=\dfrac{(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times1+1^2}{4}-\dfrac{(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times1+1^2}{4}$
$=\dfrac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$

別解 $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$
$=\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$

(3) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2=(3\sqrt{2})^2+2\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2$
$=18+12\sqrt{6}+12=6(5+2\sqrt{6})$
よって　$(5-2\sqrt{6})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2=(5-2\sqrt{6})\times6(5+2\sqrt{6})$
$=6\{5^2-(2\sqrt{6})^2\}$
$=6(25-24)=6$

(4) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}^2$
$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$
$=2+2\sqrt{6}+3-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}+5$
$=10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$

別解 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$
$=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times(-\sqrt{5})+2(-\sqrt{5})\times\sqrt{2}$
$=2+3+5+2\sqrt{6}-2\sqrt{15}-2\sqrt{10}$
$=10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$

(5) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$
$=\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\times\{(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}\}\{(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}\}$
$=\{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\}\{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\}$
$=(1+2\sqrt{2}+2-3)(1+2\sqrt{3}+3-2)$
$=2\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})=4\sqrt{2}+4\sqrt{6}$

(6) $\dfrac{1}{12}\{(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})^2\}$
$=\dfrac{1}{12}\{\{(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21})+(\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})\}$
$\times\{(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21})-(\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})\}\}$
$=\dfrac{1}{12}\times2\sqrt{3}\times2(\sqrt{15}+\sqrt{21})$
$=\dfrac{1}{3}(3\sqrt{5}+3\sqrt{7})=\sqrt{5}+\sqrt{7}$

$\boxed{5}$

解説

(1) (与式)$=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}+\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}$
$=\dfrac{1}{2}\{(5-\sqrt{15})+(\sqrt{21}+\sqrt{15})-(\sqrt{21}-3)\}=4$

(2) (与式)$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2=2+2\sqrt{6}+3-5=2\sqrt{6}$

(3) (与式)$=\{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})\}^2-4(\sqrt{3}-1)^2$
$=(7-3)^2-4(3-2\sqrt{3}+1)$
$=4^2-4(4-2\sqrt{3})=16-16+8\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

(4) (与式)$=\{(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)\}^3$
$=[\{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)\}\{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\}]^3=\{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-1)^2\}^3$
$=\{3-(2-2\sqrt{2}+1)\}^3=(2\sqrt{2})^3=16\sqrt{2}$

$\boxed{6}$

解説

(1) $x+y=(\sqrt{7}+\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$
$=2\sqrt{7}$

(2) $xy=(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$
$=7-5=2$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(2\sqrt{7})^2-2\times2$
$=28-4=24$

(4) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}=\dfrac{24}{2}=12$

$\boxed{7}$

解説

(1) $xy=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=1$

(2) $x+y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$
$=\dfrac{(4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\dfrac{8}{2}=4$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot1=14$

(4) $x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)=1\cdot14=14$

$\boxed{8}$

解説

(1) $x+y=(\sqrt{5}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{2})=2\sqrt{5}$
$xy=(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=5-2=3$
このとき　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(2\sqrt{5})^2-2\times3$
$=20-6$
$=14$

(2) $x+y=(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=6$
$xy=(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=9-2=7$
このとき　$3x^2+3y^2=3(x^2+y^2)$
$=3\{(x+y)^2-2xy\}$
$=3(6^2-2\times7)$
$=3\times22$
$=66$

(3) $x+y=(\sqrt{6}+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})=2\sqrt{6}$
$xy=(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})=6-5=1$
このとき　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}$
$=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$
$=\dfrac{(2\sqrt{6})^2-2}{1}$
$=24-2$
$=22$

$\boxed{9}$［東京慈恵会医科大］

解説

$a=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{3-2}=5+2\sqrt{6}$

$b=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{5-2\sqrt{6}}{3-2}=5-2\sqrt{6}$

$ab=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1$

よって　$a+b=(5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})=$ ${}^{ア}10$
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=10^2-2\cdot1=$ ${}^{イ}98$

$\boxed{10}$

解説

(1) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
$=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}}\right)$
$=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$
$=-\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

(2) $x^2+y^2-6xy=(x+y)^2-8xy$
$=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-8\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
$=1^2-2\times(1+\sqrt{5})\times(1-\sqrt{5})$
$=1-2\times(1-5)$
$=9$

(3) $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$
$=\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^2-\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$
$=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2-\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{9}$
$=\dfrac{8}{9}-\dfrac{2-1}{9}$
$=\dfrac{7}{9}$

$\boxed{11}$

解説

(1)　$x=4+\sqrt{3}$ より　$x-4=\sqrt{3}$

両辺を 2 乗すると　$(x-4)^2=(\sqrt{3})^2$

すなわち　$x^2-8x+16=3$

したがって　$x^2-8x=-13$

別解　$x^2-8x=x(x-8)$

$=(4+\sqrt{3})\times\{(4+\sqrt{3})-8\}$

$=(4+\sqrt{3})\times(-4+\sqrt{3})$

$=(\sqrt{3}+4)\times(\sqrt{3}-4)$

$=(\sqrt{3})^2-4^2$

$=3-16$

$=-13$

(2)　$x^2-x=x(x-1)$

$=\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\times\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}-1\right)$

$=\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\times\frac{-1-3\sqrt{5}}{2}$

$=-\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\times\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right)$

$=-\frac{1^2-(3\sqrt{5})^2}{4}$

$=-\frac{1-45}{4}$

$=11$

$\boxed{12}$［清教学園］

解説

$(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)-3=(x^2+2x-1)(x^2+2x+3)$

ここで　$x^2+2x=(\sqrt{2}-1)^2+2(\sqrt{2}-1)=2-2\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-2=1$

したがって　$(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)-3=(1-1)(1+3)=0$

$\boxed{13}$

解説

(1)　$3<\sqrt{11}<4$ であるから　$a=3$

よって，$a+b=\sqrt{11}$ から　$b=\sqrt{11}-3$

ゆえに　$\frac{1}{b}+\frac{a}{2}=\frac{1}{\sqrt{11}-3}+\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{11}+3}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}+\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{11}+3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6+\sqrt{11}}{2}$

(2)　$2<\sqrt{6}<3$ であるから　$\sqrt{6}=2+a$　　よって　$a=\sqrt{6}-2$

$1<\sqrt{2}<2$ であるから　$\sqrt{2}=1+b$　　よって　$b=\sqrt{2}-1$

また　$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\frac{\sqrt{6}+2}{2}$

$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$

したがって　$\left(a-\frac{2}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\{\sqrt{6}-2-(\sqrt{6}+2)\}(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1)$

$=(-4)\cdot 2\sqrt{2}=-8\sqrt{2}$

(3)　$44^2=1936$，$45^2=2025$ であり，$1936<2011<2025$ であるから　$44<\sqrt{2011}<45$

よって，$\sqrt{2011}$ の整数部分 a は　$a=44$

ゆえに，小数部分 b は　$b=\sqrt{2011}-a=\sqrt{2011}-44$

したがって　$b^2+2ab=b(b+2a)$

$=(\sqrt{2011}-44)\{(\sqrt{2011}-44)+2\cdot 44\}$

$=(\sqrt{2011}-44)(\sqrt{2011}+44)$

$=(\sqrt{2011})^2-44^2=2011-1936$

$=75$

(4)　$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$ であるから　$2<\sqrt{7}<3$

よって　$a=2$，$b=\sqrt{7}-2$

$\frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{7}-2}=\frac{2(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$

$=\frac{2(2+\sqrt{7})}{7-4}=\frac{4+2\sqrt{7}}{3}$

$\sqrt{25}<\sqrt{28}<\sqrt{36}$ であるから　$5<2\sqrt{7}<6$

よって　$\frac{4+5}{3}<\frac{4+2\sqrt{7}}{3}<\frac{4+6}{3}$

ゆえに　$3<\frac{4+2\sqrt{7}}{3}<\frac{10}{3}<4$

したがって，$\frac{a}{b}$ の整数部分は　3

(5)　$3^2<14<4^2$ より　$3<\sqrt{14}<4$

よって　$a=3$，$b=\sqrt{14}-a=\sqrt{14}-3$

)　$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{14}-3}=\frac{\sqrt{14}+3}{(\sqrt{14}-3)(\sqrt{14}+3)}=\frac{\sqrt{14}+3}{5}$

$3<\sqrt{14}<4$ より　$6<\sqrt{14}+3<7$

よって　$\frac{6}{5}<\frac{\sqrt{14}+3}{5}<\frac{7}{5}$

$\frac{6}{5}=1.2$，$\frac{7}{5}=1.4$ であるから　$c=1$

ゆえに　$d=\frac{\sqrt{14}+3}{5}-c=\frac{\sqrt{14}-2}{5}$

$\boxed{14}$

解説

(1)　$3<\sqrt{10}<4$ であるから，$\sqrt{10}$ の整数部分は　3

よって，$1+\sqrt{10}$ の整数部分は　$a=1+3=4$

小数部分は　$b=(1+\sqrt{10})-4=\sqrt{10}-3$

(2)　(1) から　$b+\frac{1}{b}=\sqrt{10}-3+\frac{1}{\sqrt{10}-3}$

$=\sqrt{10}-3+\frac{\sqrt{10}+3}{10-9}=2\sqrt{10}$

よって　$b^2+\frac{1}{b^2}=\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-2b\cdot\frac{1}{b}$

$=(2\sqrt{10})^2-2\cdot 1=38$

$\boxed{15}$［土佐］

解説

(1)　$\frac{(\sqrt{7}+1)^2}{2}=\frac{(\sqrt{7})^2+2\times\sqrt{7}\times 1+1^2}{2}=\frac{8+2\sqrt{7}}{2}$

$=4+\sqrt{7}$

(2)　(ア)，(イ)　$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$ であるから　$2<\sqrt{7}<3$

よって，$\sqrt{7}$ の整数部分は 2 である。

したがって　$a=4+2=6$

$b=(4+\sqrt{7})-6=\sqrt{7}-2$

(ウ)　$a^2+2ab+b^2-8b=(a^2+2ab+b^2)-8b$

$=(a+b)^2-8b$

$=(4+\sqrt{7})^2-8(\sqrt{7}-2)$

$=(16+8\sqrt{7}+7)-8\sqrt{7}+16$

$=39$

$\boxed{16}$

解説

(1)　$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$ であるから　$2<\sqrt{7}<3$

各辺に -1 をかけて　$-3<-\sqrt{7}<-2$

各辺に 5 をたして　$2<5-\sqrt{7}<3$

よって　$a=2$　答

(2)　$5-\sqrt{7}$ から a をひいたものが b であるから

$b=(5-\sqrt{7})-a$

$=(5-\sqrt{7})-2$

$=3-\sqrt{7}$　答

(3)　$b(a-b+4)=(3-\sqrt{7})\{2-(3-\sqrt{7})+4\}$

$=(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})$

$=3^2-(\sqrt{7})^2=9-7=2$　答

$\boxed{17}$

解説

(1) $0^2<\dfrac{1}{3}<1^2$ であるから　　$0<\sqrt{\dfrac{1}{3}}<1$

よって　　$-1<-\sqrt{\dfrac{1}{3}}<0$

$2^2<5<3^2$　であるから　　$2<\sqrt{5}<3$

$3^2<14<4^2$　であるから　　$3<\sqrt{14}<4$

$2^2<6<3^2$　であるから　　$2<\sqrt{6}<3$

よって　　$-3<-\sqrt{6}<-2$

$\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$ より，$1^2<\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2<2^2$ であるから　　$1<\dfrac{\sqrt{10}}{2}<2$

したがって　　A：$-\sqrt{6}$，　B：$-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$，　C：$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，　D：$\sqrt{5}$，　E：$\sqrt{14}$

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3n^2}}{3}\right)^2=\dfrac{3n^2}{9}=\dfrac{n^2}{3}$，$\left(\sqrt{\dfrac{n}{3}}\right)^2=\dfrac{n}{3}$

n は1より大きい整数であるから　　$n^2>n$

よって　　$\dfrac{n^2}{3}>\dfrac{n}{3}$　　したがって　　$\dfrac{\sqrt{3n^2}}{3}>\sqrt{\dfrac{n}{3}}$　　……①

また　　$\left(\dfrac{\sqrt{n}}{3}\right)^2=\dfrac{n}{9}$　　$\dfrac{n}{3}>\dfrac{n}{9}$ であるから　　$\sqrt{\dfrac{n}{3}}>\dfrac{\sqrt{n}}{3}$　……②

①，②から　　$\dfrac{\sqrt{n}}{3}<\sqrt{\dfrac{n}{3}}<\dfrac{\sqrt{3n^2}}{3}$

$\boxed{18}$［西南学院］

解説

$1.5<\sqrt{a}<\dfrac{7}{3}$ から　　$(1.5)^2<(\sqrt{a})^2<\left(\dfrac{7}{3}\right)^2$

よって　　$2.25<a<\dfrac{49}{9}$

a は整数であるから　　$a=3,\ 4,\ 5$　……①

また，$a+2b=8$ から　　$2b=8-a$

$$b=\frac{8-a}{2}$$

これに①を代入すると，順に

$$b=\frac{5}{2},\ 2,\ \frac{3}{2}$$

b は整数であるから　　$b=2$

$\boxed{19}$

解説

(1) $\sqrt{140a}=\sqrt{2^2\times5\times7\times a}$ である。

$\sqrt{140a}$ が自然数となるのは，$140a$ が自然数の2乗の形になるときである。

よって，求める a の値は　　$a=5\times7=35$

(2) $\sqrt{270x}=\sqrt{2\times3^3\times5\times x}$ である。

$\sqrt{270x}$ が自然数となるのは，$270x$ が自然数の2乗の形になるときである。

よって，求める x の値は　　$x=2\times3\times5=30$

$\boxed{20}$

解説

(1) 整数部分が10となる数は，10以上11未満の数である。

よって　　$10\leqq\sqrt{k}<11$

すなわち　　$\sqrt{100}\leqq\sqrt{k}<\sqrt{121}$

したがって　$100\leqq k<121$

これを満たす整数 k の個数は　21個

(2) $30-a$ が0以上の整数の2乗で表される数と等しくなるとき，$\sqrt{30-a}$ は整数となる。

また，根号の中の数は0以上であるから

$30-a\geqq0$　すなわち　$a\leqq30$

よって，$30-a$ の値が 0，1，4，9，16，25 のいずれかになればよい。

したがって，求める a の値は　　5，14，21，26，29，30

(3) 根号の中の数は0より大きくなくてはならないから　　$168-12n>0$

よって　　$n<14$

$168-12n=12(14-n)=2^2\times3\times(14-n)$

であるから，$\sqrt{168-12n}$ が自然数となるためには，$n<14$ であることを考えて

$14-n=3$　または　$14-n=3\times2^2$

すなわち　　$n=11$　または　$n=2$

したがって　　$n=2,\ 11$

$\boxed{1}$

解説

(1) $\dfrac{2\sqrt{5}-3\sqrt{15}}{\sqrt{5}}-\dfrac{5\sqrt{8}-2\sqrt{50}}{\sqrt{10}}-\dfrac{9}{\sqrt{3}}\times(-1)^3$

$=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\dfrac{3\sqrt{15}}{\sqrt{5}}-\dfrac{10\sqrt{2}-10\sqrt{2}}{\sqrt{10}}-\dfrac{9\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\times(-1)$

$=2-3\sqrt{3}-0+3\sqrt{3}$

$=2$

(2) $\left\{1+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right\}\times(\sqrt{2}+1)$

$=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\times(\sqrt{2}+1)$

$=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)\times(\sqrt{2}+1)$

$=\dfrac{6-3\sqrt{2}}{4}\times(\sqrt{2}+1)$

$=\dfrac{6\sqrt{2}+6-6-3\sqrt{2}}{4}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

(3) $(2\sqrt{8}+\sqrt{6}-\sqrt{2})\left(\sqrt{18}+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

$=(4\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2})\left(3\sqrt{2}+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$

$=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$

$=18+6\sqrt{12}+6$

$=24+12\sqrt{3}$

(4) $\{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-1)^2\}\{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+1)^2\}$

$=\{(3+2\sqrt{2})-(4-2\sqrt{3})\}\{(3-2\sqrt{2})-(4+2\sqrt{3})\}$

$=(-1+2\sqrt{2}+2\sqrt{3})(-1-2\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

$=\{-1+2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\}\{-1-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\}$

$=(-1)^2-4(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

$=1-4(5+2\sqrt{6})$

$=1-20-8\sqrt{6}$

$=-19-8\sqrt{6}$

(5) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+2-\sqrt{6})-(\sqrt{3}-1)^2$

$=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})-(4-2\sqrt{3})$

$=\sqrt{2}\{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\}-(4-2\sqrt{3})$

$=\sqrt{2}(1+2\sqrt{2}+2-3)-4+2\sqrt{3}$

$=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}-4+2\sqrt{3}$

$=4-4+2\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}$

(6) $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}=A$，$\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}=B$ とおくと

$\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^2-2\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)-3\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^2=A^2-2AB-3B^2$

$=(A-3B)(A+B)$

A，B をもとに戻して

$(A-3B)(A+B)=\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}-3\times\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\times\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}+\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$

$=\dfrac{5+\sqrt{13}-15+3\sqrt{13}}{2}\times5$

$=(-5+2\sqrt{13})\times5$

$=-25+10\sqrt{13}$

$\boxed{2}$［立教大］

解説

(与式)$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{\sqrt{81}-\sqrt{79}}{2}$

$=\dfrac{-1+\sqrt{81}}{2}=\dfrac{-1+9}{2}=4$

$\boxed{3}$［実践女子大］

解説

(1) $(3+\sqrt{10})^{100}=a$，$(3-\sqrt{10})^{100}=b$ とおくと

$\{(3+\sqrt{10})^{100}+(3-\sqrt{10})^{100}\}^2-\{(3+\sqrt{10})^{100}-(3-\sqrt{10})^{100}\}^2$

$=(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=4ab$

したがって

$\{(3+\sqrt{10})^{100}+(3-\sqrt{10})^{100}\}^2-\{(3+\sqrt{10})^{100}-(3-\sqrt{10})^{100}\}^2$

$=4\times(3+\sqrt{10})^{100}\times(3-\sqrt{10})^{100}=4\{(3+\sqrt{10})(3-\sqrt{10})\}^{100}$

$=4\{3^2-(\sqrt{10})^2\}^{100}=4(-1)^{100}=4$

(2) $a=(9+4\sqrt{5})^n$，$b=(9-4\sqrt{5})^n$ とすると

(与式)$=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab=4(9+4\sqrt{5})^n(9-4\sqrt{5})^n$

$=4\{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})\}^n=4(81-80)^n=4\cdot1^n=4$

$\boxed{4}$［愛媛大］

解説

(1) ① $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$

$=2+2\sqrt{6}+3-5=2\sqrt{6}$

② $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

(2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3}+\sqrt{7})(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})}=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}$

$=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{7+4\sqrt{3}-7}=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+3-\sqrt{21}}{12}$

$\boxed{5}$［京都産業大，金沢工業大，慶応義塾大］

解説

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)$

$=(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)$

$=\{\sqrt{3}+(\sqrt{2}+1)\}\{\sqrt{3}-(\sqrt{2}+1)\}\{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\}\{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)\}$

$=\{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}+1)^2\}\{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-1)^2\}$

$=-2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=-8$

(2) $(4+\sqrt{2}+\sqrt{3})(4-\sqrt{2}+\sqrt{3})(4+\sqrt{2}-\sqrt{3})(4-\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=\{4+(\sqrt{2}+\sqrt{3})\}\{4-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\}\times\{4-(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}\{4+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}$

$=\{4^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\}\{4^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2\}=\{16-(2+2\sqrt{6}+3)\}\{16-(2-2\sqrt{6}+3)\}$

$=(11-2\sqrt{6})(11+2\sqrt{6})=11^2-(2\sqrt{6})^2=121-24=97$

(3) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7})(-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})$

$=\{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{7}\}\{(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{7}\}\{\sqrt{7}+(\sqrt{3}-\sqrt{5})\}\{\sqrt{7}-(\sqrt{3}-\sqrt{5})\}$

$=\{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2\}\{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2\}$

$=\{(8+2\sqrt{15})-7\}\{7-(8-2\sqrt{15})\}$

$=(2\sqrt{15}+1)(2\sqrt{15}-1)$

$=(2\sqrt{15})^2-1^2=60-1=59$

$\boxed{6}$［大同大］

解説

$36+2\sqrt{155}=(31+5)+2\sqrt{31\cdot5}=(\sqrt{^{\text{ア}}31}+\sqrt{^{\text{イ}}5})^2$　((ア)，(イ)は順不同)

$36-2\sqrt{155}=(31+5)-2\sqrt{31\cdot5}=(\sqrt{31}-\sqrt{5})^2$

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{36+2\sqrt{155}}}+\dfrac{1}{\sqrt{36-2\sqrt{155}}}=\dfrac{1}{\sqrt{31}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{31}-\sqrt{5}}$

$=\dfrac{(\sqrt{31}-\sqrt{5})+(\sqrt{31}+\sqrt{5})}{(\sqrt{31}-\sqrt{5})(\sqrt{31}+\sqrt{5})}$

$=\dfrac{2\sqrt{31}}{26}=\dfrac{\sqrt{^{\text{ウ}}31}}{^{\text{エ}}13}$

$\boxed{7}$［日本大学桜丘］

解説

$$\frac{9+2\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\frac{(9+2\sqrt{15})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}+6\sqrt{5}}{3}=3\sqrt{3}+2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{9+2\sqrt{15}}{\sqrt{3}}\right)^{2014}\times(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})^{2014}&=(3\sqrt{3}+2\sqrt{5})^{2014}\times(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})^{2014}\\&=\{(3\sqrt{3}+2\sqrt{5})(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})\}^{2014}\\&=\{(3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{5})^2\}^{2014}\\&=(27-20)^{2014}\\&=7^{2014}\end{aligned}$$

$7,\ 7^2,\ 7^3,\ 7^4,\ 7^5,\ \cdots\cdots$ の 1 の位の数は順に 7，9，3，1，7，…… であり，

4 つの数 7，9，3，1 がくり返される。

$2014=503\times4+2$ より，7^{2014} の 1 の位の数は 7^2 の 1 の位の数に等しい。

よって　9

$\boxed{8}$

解説

(1) $$\begin{aligned}a-\frac{2}{a}&=a-2\times\frac{1}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}+2}-2\times\frac{\sqrt{6}+2}{2}\\&=\frac{2\times(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}-(\sqrt{6}+2)\\&=\frac{2\times(\sqrt{6}-2)}{6-4}-(\sqrt{6}+2)\\&=\sqrt{6}-2-\sqrt{6}-2=-4\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}&\left(a+\frac{8}{a}\right)\left(2a+\frac{1}{a}\right)+\left(a-\frac{8}{a}\right)\left(2a-\frac{1}{a}\right)\\&=2a^2+a\times\frac{1}{a}+\frac{8}{a}\times2a+\frac{8}{a^2}+2a^2+a\times\left(-\frac{1}{a}\right)-\frac{8}{a}\times2a+\frac{8}{a^2}\\&=2a^2+1+16+\frac{8}{a^2}+2a^2-1-16+\frac{8}{a^2}\\&=4a^2+\frac{16}{a^2}=4\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)\\&=4\left\{\left(a-\frac{2}{a}\right)^2+2\times a\times\frac{2}{a}\right\}\\&=4\left\{\left(a-\frac{2}{a}\right)^2+4\right\}=4\{(-4)^2+4\}=80\end{aligned}$$

$\boxed{9}$［(1) 金沢工業大，(2) 甲南大，(3) 名城大］

解説

(1) $$\begin{aligned}(\text{与式})&=(x^3+y^3)+(x^2y+xy^2)\\&=(x+y)^3-3xy(x+y)+xy(x+y)\\&=(x+y)^3-2xy(x+y)\\&=(2\sqrt{5})^3-2(-3)\cdot2\sqrt{5}={}^{\text{ア}}52\sqrt{{}^{\text{イ}}5}\end{aligned}$$

(2) $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

であるから

$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$，$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$

よって　$$\begin{aligned}x^3+x^2y+xy^2+y^3&=(x+y)^3-2xy(x+y)=(2\sqrt{3})^3-2\cdot1\cdot2\sqrt{3}\\&=24\sqrt{3}-4\sqrt{3}=20\sqrt{3}\end{aligned}$$

(3) $x+y=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$，$xy=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=1$

よって　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{6})^2-2\cdot1={}^{\text{ア}}4$

また　$x^3+x^2y+xy^2+y^3=x^2(x+y)+y^2(x+y)=(x^2+y^2)(x+y)={}^{\text{イ}}4\sqrt{6}$

$\boxed{10}$

解説

(1) $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$，$\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$ であるから　$3<2\sqrt{3}<4$

各辺に -1 をかけて　$-4<-2\sqrt{3}<-3$

各辺に 7 をたして　$3<7-2\sqrt{3}<4$

よって　$a=3$，$b=7-2\sqrt{3}-3=4-2\sqrt{3}$

したがって　$$\begin{aligned}3a^2-3ab+b^2&=3\times3^2-3\times3(4-2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})^2\\&=27-(36-18\sqrt{3})+(16-16\sqrt{3}+12)\\&=19+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$ であるから　$1<\sqrt{3}<2$

各辺に -1 をかけて　$-2<-\sqrt{3}<-1$

各辺に 4 をたして　$2<4-\sqrt{3}<3$

よって　$a=2$，$b=4-\sqrt{3}-2=2-\sqrt{3}$

したがって　$$\begin{aligned}\frac{1}{b}+\frac{1}{2a-b}&=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2\times2-(2-\sqrt{3})}\\&=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\qquad\cdots\cdots(*)\\&=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\\&=\frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}\\&=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4\end{aligned}$$

別解　$(*)=\dfrac{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{4}{2^2-(\sqrt{3})^2}=4$

(3) $$\begin{aligned}\frac{7}{3-\sqrt{2}}&=\frac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\frac{7(3+\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2}\\&=\frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}=3+\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$ であるから　$1<\sqrt{2}<2$

各辺に 3 をたして　$4<3+\sqrt{2}<5$

よって　$a=4$，$b=3+\sqrt{2}-4=\sqrt{2}-1$

したがって　$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{a-b-1}&=\frac{1}{4+(\sqrt{2}-1)+1}+\frac{1}{4-(\sqrt{2}-1)-1}\\&=\frac{1}{4+\sqrt{2}}+\frac{1}{4-\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots(*)\\&=\frac{4-\sqrt{2}}{(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})}+\frac{4+\sqrt{2}}{(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})}\\&=\frac{4-\sqrt{2}}{4^2-(\sqrt{2})^2}+\frac{4+\sqrt{2}}{4^2-(\sqrt{2})^2}\\&=\frac{4-\sqrt{2}}{16-2}+\frac{4+\sqrt{2}}{16-2}\\&=\frac{4-\sqrt{2}}{14}+\frac{4+\sqrt{2}}{14}\\&=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}\end{aligned}$$

別解　$(*)=\dfrac{(4-\sqrt{2})+(4+\sqrt{2})}{(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})}=\dfrac{8}{4^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}$

$\boxed{11}$

解説

(1) $1<\sqrt{2}<2$　であるから　$0<\sqrt{2}-1<1$

よって　$[a]=0$

(2) $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{1\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$

$1<\sqrt{2}<2$　であるから　$2<\sqrt{2}+1<3$

よって　$\left[\dfrac{1}{a}\right]=2$

(3) $\dfrac{a-1}{a+1}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{2}-2)\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

$-2<-\sqrt{2}<-1$　であるから　$-1<1-\sqrt{2}<0$

よって　$\left[\dfrac{a-1}{a+1}\right]=-1$

$\boxed{12}$［16センター追試］

解説

$16<21<25$ であるから　$4<\sqrt{21}<5$

すなわち，$\sqrt{21}$ の整数部分は　${}^{\text{ア}}4$

また，$16<23<25$ より，$4<\sqrt{23}<5$ であるから，$\sqrt{23}$ の整数部分は　4

$25<31<36$ より，$5<\sqrt{31}<6$ であるから，$\sqrt{31}$ の整数部分は　5

したがって　$a=\sqrt{21}-4$，$b=\sqrt{23}-4$，$c=\sqrt{31}-5$

よって　$a-c=(\sqrt{21}-4)-(\sqrt{31}-5)={}^{\text{イ}}1+\sqrt{21}-\sqrt{31}$

$$\begin{aligned}&(1+\sqrt{21}-\sqrt{31})(1+\sqrt{21}+\sqrt{31})(9+2\sqrt{21})\\&=\{(1+\sqrt{21})-\sqrt{31}\}\{(1+\sqrt{21})+\sqrt{31}\}(9+2\sqrt{21})\\&=\{(1+\sqrt{21})^2-(\sqrt{31})^2\}(9+2\sqrt{21})=(-9+2\sqrt{21})(9+2\sqrt{21})\\&=(2\sqrt{21})^2-9^2={}^{\text{ウ}}3\end{aligned}$$

すなわち　$(a-c)(1+\sqrt{21}+\sqrt{31})(9+2\sqrt{21})>0$

$1+\sqrt{21}+\sqrt{31}>0$，$9+2\sqrt{21}>0$ であるから　$a-c>0$

よって　$c<a$

一方　$b-a=(\sqrt{23}-4)-(\sqrt{21}-4)=\sqrt{23}-\sqrt{21}>0$

よって　$a<b$

以上から　$c<a<b$　（エ ②）

13

解説

(1)
$$3x+2=\sqrt{6}(x+1)$$
$$3x+2=\sqrt{6}x+\sqrt{6}$$
$$(3-\sqrt{6})x=\sqrt{6}-2$$
よって　$x=\dfrac{\sqrt{6}-2}{3-\sqrt{6}}$
$$=\frac{(\sqrt{6}-2)(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}$$
$$=\frac{3\sqrt{6}+6-6-2\sqrt{6}}{9-6}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2)
$$\sqrt{8}x+2\geqq\sqrt{32}x+5$$
$$\sqrt{8}x-\sqrt{32}x\geqq5-2$$
$$2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}x\geqq3$$
$$-2\sqrt{2}x\geqq3$$
$$x\leqq-\frac{3}{2\sqrt{2}}$$
$$x\leqq-\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

(3)
$$\begin{cases}x+\sqrt{2}y=2\sqrt{6} & \cdots\cdots ① \\ \sqrt{2}x-y=\sqrt{3} & \cdots\cdots ②\end{cases}$$
②$\times\sqrt{2}$ より　$2x-\sqrt{2}y=\sqrt{6}$　……③
①＋③ より　$3x=3\sqrt{6}$
よって　$x=\sqrt{6}$
② より　$y=\sqrt{2}x-\sqrt{3}=\sqrt{2}\times\sqrt{6}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$

(4)
$$\begin{cases}\sqrt{3}x+\sqrt{2}y=3 & \cdots\cdots ① \\ \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=1 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$
①$\times\sqrt{3}$ より　$3x+\sqrt{6}y=3\sqrt{3}$　……③
②$\times\sqrt{2}$ より　$2x-\sqrt{6}y=\sqrt{2}$　……④
③＋④ より　$5x=3\sqrt{3}+\sqrt{2}$
よって　$x=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5}$
①$\times\sqrt{2}$ より　$\sqrt{6}x+2y=3\sqrt{2}$　……⑤
②$\times\sqrt{3}$ より　$\sqrt{6}x-3y=\sqrt{3}$　……⑥
⑤－⑥ より　$5y=3\sqrt{2}-\sqrt{3}$
よって　$y=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$

14 ［京都女子］

解説

(1)　$(3x+y)(3x-y)-2(x+2y)^2-3(x-y)(2x-y)$
$=9x^2-y^2-2(x^2+4xy+4y^2)-3(2x^2-3xy+y^2)$
$=9x^2-y^2-2x^2-8xy-8y^2-6x^2+9xy-3y^2$
$=x^2+xy-12y^2$

(2)　$(3x+y)(3x-y)-2(x+2y)^2-3(x-y)(2x-y)$
$=x^2+xy-12y^2$
$=(x-3y)(x+4y)$
連立方程式 $\begin{cases}x-3y=2\sqrt{3}-3\sqrt{2} \\ x+4y=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\end{cases}$ より，求める式の値は
$$(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})=12-18$$
$$=-6$$

15 ［(1) 東京学芸大学附属，(2) 東大寺学園］

解説

(1)　$3x^2-5xy-2y^2-(2x+y)(x-3y)=3x^2-5xy-2y^2-(2x^2-5xy-3y^2)=x^2+y^2$
この式に $x=\sqrt{14}+\sqrt{13}$，$y=\sqrt{14}-\sqrt{13}$ を代入すると，求める式の値は
$(\sqrt{14}+\sqrt{13})^2+(\sqrt{14}-\sqrt{13})^2=14+2\sqrt{14\times13}+13+14-2\sqrt{14\times13}+13=54$

(2)　$x^2-xy-2y^2+3x-6y=(x-2y)(x+y)+3(x-2y)$
$=(x-2y)\{(x+y)+3\}$
$=(x-2y)(x+y+3)$
$=-\sqrt{3}\times(2\sqrt{3}-3+3)$
$=-6$

16

解説

(1)　$11=\sqrt{121}$，$12=\sqrt{144}$ であるから　$\sqrt{121}\leqq\sqrt{a}<\sqrt{144}$
よって　$121\leqq a<144$
a は自然数であるから　$121\leqq a\leqq143$
よって，求める自然数 a の個数は　$143-121+1=23$

(2)　$\sqrt{2^3\times3^4\times5\times6^3\times7^3\times a}$ が自然数となるのは，$2^3\times3^4\times5\times6^3\times7^3\times a$ が自然数の2乗になるときである。
自然数の2乗になるためには，$2^3\times3^4\times5\times6^3\times7^3\times a$ を素因数分解したときに，すべての指数が偶数になっている必要がある。
$2^3\times3^4\times5\times6^3\times7^3\times a=2^6\times3^7\times5\times7^3\times a$ であるから，このような条件を満たす a で最も小さいものは
$$a=3\times5\times7=105$$

(3)　$\sqrt{\dfrac{936}{x}}$ が自然数となるのは，$\dfrac{936}{x}$ が自然数の2乗になるときである。
自然数の2乗になるためには，$\dfrac{936}{x}$ を素因数分解したときに，すべての指数が偶数になっている必要がある。
$\dfrac{936}{x}=\dfrac{2^3\times3^2\times13}{x}$ であるから，このような条件を満たす x で最も小さいものは
$$x=2\times13=26$$

17 ［(1) 立教大，(2) 桐朋，(3) 東奥義塾，(4) 智弁学園和歌山］

解説

(1)　$50\leqq\sqrt{n}<51$ であるから　$2500\leqq n<2601$
これを満たす自然数 n の個数は　$2600-2500+1=101$（個）

(2)　$n\leqq\sqrt{a}\leqq n+3$ を満たす整数 a がちょうど40個であるとき
$$(n+3)^2-n^2+1=40$$
$$6n=30$$
よって　$n=5$

(3)　$2<\sqrt{a}<b$ より　$2^2<a<b^2$
$$4<a<b^2$$
この式を満たす自然数 a の値が11個あるから，a の値は
$$a=5，6，……，15$$
よって，$b^2=16$ であるから，求める b の値は
$$b=4$$

(4)　$m\leqq\sqrt{2n}<m+1$ より
$$m^2\leqq2n<(m+1)^2$$
$$\frac{m^2}{2}\leqq n<\frac{(m+1)^2}{2}$$
この不等式を満たす n の値がちょうど7個あるとき
$$\frac{(m+1)^2}{2}-\frac{m^2}{2}>6 \quad \cdots\cdots ①$$
$\dfrac{(m+1)^2}{2}-\dfrac{m^2}{2}=m+\dfrac{1}{2}$ であるから，① は
$$m+\frac{1}{2}>6$$
$$m>\frac{11}{2}$$
よって，m は6以上の自然数である。
$m=6$，7 は問題に適するが，$m=8$ は適さない。
したがって，求める m の値は　6，7

18

解説

$44^2=1936$，$45^2=2025$ であるから　$44^2<2004<45^2$
よって　$44<\sqrt{2004}<45$
したがって　$a=44$
また，$\{n\}=20$ を満たす自然数 n について
$$20\leqq\sqrt{n}<21$$
が成り立つ。
$20=\sqrt{400}$，$21=\sqrt{441}$ であるから　$\sqrt{400}\leqq\sqrt{n}<\sqrt{441}$
よって　$400\leqq n<441$
n は自然数であるから　$400\leqq n\leqq440$
したがって　$b=440-400+1=41$
答　$a=44$，$b=41$

$\boxed{1}$［中京大］

解説

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-1=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{2})+3\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}-1$$
$$=\frac{5+\sqrt{10}+3\sqrt{10}-6}{5-2}-1=\frac{4}{3}(\sqrt{10}-1)$$

よって　(与式)$=\frac{3}{4}\cdot\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}-1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{(2\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{10}+1)}{(\sqrt{10}-1)(\sqrt{10}+1)}$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{10\sqrt{2}+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{10-1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{9}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$\boxed{2}$［奈良大］

解説

(1)　$(3+\sqrt{3})★(3-\sqrt{3})=\frac{(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}}=\frac{6}{3-\sqrt{3}}=\frac{6(3+\sqrt{3})}{3^2-3}=3+\sqrt{3}$　答

(2)　$(3-\sqrt{3})★(3+\sqrt{3})=\frac{(3-\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}=\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3}$
$=3-\sqrt{3}$ …… ①

よって，(1) の結果も用いて　(与式)$=(3+\sqrt{3})-(3-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$　答

(3)　(1) の結果と ① を用いて

(与式)$=(3+\sqrt{3})★(3-\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})★(3+\sqrt{3})$
$=3+\sqrt{3}-\frac{3+\sqrt{3}+3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=3+\sqrt{3}-2=1+\sqrt{3}$　答

$\boxed{3}$

解説

(1)　$\frac{1}{x}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$
$=\frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5}$
$=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

よって　$x+\frac{1}{x}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=3$

(2)　$x+\frac{1}{x}=3$ の両辺を 2 乗すると

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2$$
$$x^2+2\times x\times\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=9$$
$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$$

よって　$x^2+\frac{1}{x^2}=9-2=7$

(3)　$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$
$=x\times x^2+x\times\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\times x^2+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x^2}$
$=x^3+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x^3}$
$=x^3+\frac{1}{x^3}+\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=x^3+\frac{1}{x^3}+3$

一方，(1)，(2) より，$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=3\times7=21$

であるから　$x^3+\frac{1}{x^3}+3=21$

よって　$x^3+\frac{1}{x^3}=21-3=18$

$\boxed{4}$

解説

(1)　$xy=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\times\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}{5}=\frac{12-7}{5}=1$

$x+y=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$x-y=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}}-\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

であるから

$x^{12}y^{10}-x^{10}y^{12}=x^2(xy)^{10}-y^2(xy)^{10}$
$=x^2-y^2$
$=(x+y)(x-y)$
$=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$
$=\frac{8\sqrt{21}}{5}$

(2)　$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$
$=\frac{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}$
$=\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

ここで　$x+y=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{2})=2\sqrt{6}$
$x-y=(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$
$xy=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})=6-2=4$

であるから

$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{4}}{2\sqrt{2}}$
$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$
$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\boxed{5}$［倉敷芸術科学大］

解説

(1)　$a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ から　$2a-1=-\sqrt{5}$

両辺を 2 乗して　$4a^2-4a+1=5$

よって　$4(a^2-a-1)=0$　　したがって　$a^2-a-1=0$

(2)　(1) から　$a^2=a+1$

よって　$a^3=a\cdot a^2=a(a+1)=a^2+a$
$=(a+1)+a=2a+1$
$a^6=(a^3)^2=(2a+1)^2=4a^2+4a+1$
$=4(a+1)+4a+1=8a+5$
$a^{12}=(a^6)^2=(8a+5)^2=64a^2+80a+25$
$=64(a+1)+80a+25=144a+89$
$=144\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}+89=161-72\sqrt{5}$

$\boxed{6}$

解説

6，$\sqrt{38}$，$3+\sqrt{10}$ はすべて正の数であるから，2 乗しても大小関係は変わらない。

$6^2=36$，$(\sqrt{38})^2=38$，$(3+\sqrt{10})^2=19+6\sqrt{10}$

ここで，36，38，$19+6\sqrt{10}$ の大小関係を調べる。

$6\sqrt{10}$ について　$18^2=324$，$(6\sqrt{10})^2=360$，$19^2=361$

であるから　$18^2<(6\sqrt{10})^2<19^2$

18，$6\sqrt{10}$，19 は正の数であるから

$18<6\sqrt{10}<19$

よって　$18+19<6\sqrt{10}+19<19+19$

$37<6\sqrt{10}+19<38$

したがって　$36<19+6\sqrt{10}<38$

すなわち　$6^2<(3+\sqrt{10})^2<(\sqrt{38})^2$

よって　$6<3+\sqrt{10}<\sqrt{38}$

$\boxed{7}$［お茶の水女子大学附属］

解説

正方形 A の 1 辺の長さを x $(x>0)$ とする。

正方形 B の 1 辺の長さは　$x+\sqrt{3}$

正方形 C の 1 辺の長さは　$\sqrt{3}x$

正方形 B と正方形 C の面積が等しいとき，1 辺の長さも等しいから

$x+\sqrt{3}=\sqrt{3}x$
$(\sqrt{3}-1)x=\sqrt{3}$
$x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$
$=\frac{\sqrt{3}\times(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1)}$
$=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

このとき，正方形 A の面積は　$\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9+6\sqrt{3}+3}{4}$
$=\frac{6+3\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{8}$［灘］

解説

$a^3+b^3-a^2b-ab^2-bc^2-c^2a=(a^3-a^2b)+(b^3-ab^2)-(bc^2+c^2a)$

$=a^2(a-b)-b^2(a-b)-c^2(a+b)$

$=(a-b)(a^2-b^2)-c^2(a+b)$

$=(a-b)^2(a+b)-c^2(a+b)$

$=(a+b)\{(a-b)^2-c^2\}$

$=(a+b)\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}$

$=(a+b)(a-b+c)(a-b-c)$

また　$a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-b^2c-bc^2-c^2a-ca^2+2abc$

$=(a^3+b^3-a^2b-ab^2-bc^2-c^2a)+(c^3-b^2c-ca^2+2abc)$

$=(a+b)(a-b+c)(a-b-c)-c\{(a^2-2ab+b^2)-c^2\}$

$=(a+b)(a-b+c)(a-b-c)-c\{(a-b)^2-c^2\}$

$=(a+b)(a-b+c)(a-b-c)-c\{(a-b)+c\}\{(a-b)+c\}$

$=(a+b)(a-b+c)(a-b-c)-c(a-b+c)(a-b-c)$

$=(a-b+c)(a-b-c)\{(a+b)-c\}$

$=(a-b+c)(a-b-c)(a+b-c)$

これに $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}+\sqrt{6}$，$c=\sqrt{2}+\sqrt{6}$ を代入すると

$\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{3}+\sqrt{6})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{3}+\sqrt{6})-(\sqrt{2}+\sqrt{6})\}$

$\times\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}+\sqrt{6})-(\sqrt{2}+\sqrt{6})\}$

$=2\sqrt{2}\times(-2\sqrt{6})\times2\sqrt{3}$

$=-48$

$\boxed{9}$［灘］

解説

ア について

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=x^3+xy^2+z^2x-x^2y-xyz-zx^2$

$+x^2y+y^3+yz^2-xy^2-y^2z-xyz$

$+zx^2+y^2z+z^3-xyz-yz^2-z^2x$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

イ について

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$ である。

$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}=x$，$1-\sqrt{2}+\sqrt{3}=y$，$-2-2\sqrt{3}=z$ とおくと

$x+y+z=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-2-2\sqrt{3})=0$

$xyz=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(-2-2\sqrt{3})$

$=\{(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}\}\{(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}\}\times(-2-2\sqrt{3})$

$=\{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\}\times(-2-2\sqrt{3})$

$=(1+2\sqrt{3}+3-2)\times(-2-2\sqrt{3})$

$=(2+2\sqrt{3})\times\{-(2+2\sqrt{3})\}$

$=-(2+2\sqrt{3})^2$

$=-(4+8\sqrt{3}+12)$

$=-16-8\sqrt{3}$

よって　$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^3+(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})^3+(-2-2\sqrt{3})^3$

$=0+3(-16-8\sqrt{3})$

$=-48-24\sqrt{3}$

$\boxed{10}$［大阪経済大］

解説

$\sqrt{n^2+24}$ が自然数となるとき，$n^2+24=k^2$（k は自然数）と表せる。

このとき　$k^2-n^2=24$　　すなわち　$(k+n)(k-n)=24$

n，k は自然数であるから，$k+n$，$k-n$ は整数であり，$k+n>0$ かつ $k+n>k-n$ である。

よって　$(k+n,\ k-n)=(24,\ 1),\ (12,\ 2),\ (8,\ 3),\ (6,\ 4)$

これを満たす k，n の組のうち，k，n がともに自然数であるものは

$(k,\ n)=(7,\ 5),\ (5,\ 1)$

よって　$n=$ ア1，イ5（順不同）

$\boxed{11}$［小樽商科大］

解説

k を自然数として，$\sqrt{n^2+2017}=k$ とおき，両辺を 2 乗すると

$n^2+2017=k^2$

整理すると　$(k+n)(k-n)=2017$

ここで，$k>n$ であるから $k-n>0$

また，$k+n>k-n$ であり，2017 は素数であるから　$k+n=2017$，$k-n=1$

これを解いて　$k=1009$，$n=1008$

$\boxed{12}$［帝塚山］

解説

(1)（ア）$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$ より　$2<\sqrt{7}<3$

よって　$3<\sqrt{7}+1<4$

ゆえに　$\dfrac{3}{2}<\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}<2$

したがって　$\ll\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}\gg=\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}-1$

$=\dfrac{\sqrt{7}+1-2}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$

（イ）$\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}$ より　$5<\sqrt{32}<6$

よって　$\ll\sqrt{32}\gg^2+3\sqrt{2}=(\sqrt{32}-5)^2+3\sqrt{2}$

$=32-10\sqrt{32}+25+3\sqrt{2}$

$=32-10\times4\sqrt{2}+25+3\sqrt{2}$

$=57-37\sqrt{2}$

(2)　$3<x<5$ より　$2<x-1<4$

よって　$1<\dfrac{x-1}{2}<2$

したがって　$\dfrac{x}{2}-\ll\dfrac{x-1}{2}\gg=\dfrac{x}{2}-\left(\dfrac{x-1}{2}-1\right)$

$=\dfrac{x-(x-1)+2}{2}$

$=\dfrac{x-x+1+2}{2}$

$=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{13}$［近畿大］

解説

$44^2=1936$，$45^2=2025$ であるから　$44<\sqrt{2013}<45$

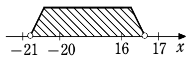
よって　$\dfrac{3-45}{2}<\dfrac{3-\sqrt{2013}}{2}<\dfrac{3-44}{2}$

ゆえに　$-21<\dfrac{3-\sqrt{2013}}{2}<-20$　……①

また　$\dfrac{5+44}{3}<\dfrac{5+\sqrt{2013}}{3}<\dfrac{5+45}{3}$

よって　$16<\dfrac{5+\sqrt{2013}}{3}<17$　……②

①，② から，$\dfrac{3-\sqrt{2013}}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{2013}}{3}$ を満たす



整数 x は -20 から 16 までの整数で，全部で

$20+1+16=$ ア37（個）

あり，x の最大値は イ16 である。

$\boxed{14}$［立教新座］

解説

(1)　① の数の列の 300 番目は　$\sqrt{300}$

$\sqrt{300}$ の整数部分は 17 であるから，求める数は

17

(2)　② の数の列は，

1 が　$4-1=3$（個）

2 が　$9-4=5$（個）

3 が　$16-9=7$（個）

4 が　$25-16=9$（個）

⋮

$50=(3+5+7+9+11+13)+2$ であるから，求める数の和は

$1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+5\times11+6\times13+7\times2=217$

15 [常総学院]

解説

(1) (ア) $n^2-(n-1)^2=n^2-(n^2-2n+1)$

$=2n-1$

(イ) $2n-1=3^2$

よって $n=5$

(ウ) 3

(エ) $b=5-1=4$

(オ) $c=5$

(2) $b=n-2$，$c=n$ を $a^2=c^2-b^2$ に代入すると

$a^2=n^2-(n-2)^2$

$=n^2-(n^2-4n+4)$

$=4n-4$

よって $a=2\sqrt{n-1}$

したがって，$n-1$ は自然数の平方になればよい。

$n-1=1^2$ であるとき $n=2$

このとき，$a=2$，$b=0$，$c=2$ となり，条件に合わない。

$n-1=2^2$ であるとき $n=5$

このとき，$a=4$，$b=3$，$c=5$ となり，(1) でみつけているから条件に合わない。

$n-1=3^2$ であるとき $n=10$

このとき，$a=6$，$b=8$，$c=10$ となり，条件に合わない。

$n-1=4^2$ であるとき $n=17$

このとき，$a=8$，$b=15$，$c=17$ となり，条件に合う。

よって，求める自然数は 8，15，17

16 [慶應義塾]

解説

③ を満たす 5 以下の自然数 x，y の組は $(x,\ y)=(2,\ 1)$

このとき，$x^2-3y^2=(x+\sqrt{3}\,y)(x-\sqrt{3}\,y)$ より

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ ……④

両辺を 2 乗すると

$(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})=1$ ……⑤

$7^2-3\times16=1$

$7^2-3\times4^2=1$

よって，$(x,\ y)=(7,\ 4)$ も ③を満たす。

$x=7$，$y=4$ のとき

$x^2-3y^2=(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})$

両辺を 2 乗すると

$(97+56\sqrt{3})(97-56\sqrt{3})=1$

$97^2-3\times56^2=1$

よって，$(x,\ y)=(97,\ 56)$ も ③ を満たす。

④ と ⑤ の辺をかけると

$(2+\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})=1$

$(14+15\sqrt{3}+12)(14-15\sqrt{3}+12)=1$

$(26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})=1$

$26^2-3\times15^2=1$

よって，$(x,\ y)=(26,\ 15)$ も ③ を満たす。

以上より $(x,\ y)=(2,\ 1)$，$(7,\ 4)$，$(26,\ 15)$，$(97,\ 56)$