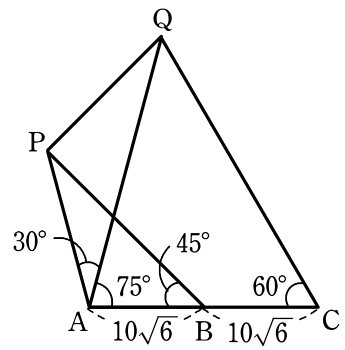
$\boxed{1}$

右の図において，次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　AQ　　(2)　AP

(3)　PQ



$\boxed{2}$

△ABC において，次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか。

(1)　$a\sin A + b\sin B = c\sin C$　　(2)　$b\cos A + a\cos B = b$

(3)　$a\cos A = b\cos B$

$\boxed{3}$

四角形 ABCD が円に内接し，AB＝1，BC＝$\sqrt{2}$，CD＝1，DA＝$2\sqrt{2}$ であるとき，次のものを求めよ。

(1)　BD の長さ　　(2)　四角形 ABCD の面積

$\boxed{4}$

AB＝2，BC＝CA＝4 である △ABC の外接円の周上に点 D を AD＝2 であるようにとる。ただし，点 D は点 B とは異なる点とする。次のものを求めよ。

(1)　$\cos\angle$ABC の値と △ABC の外接円の半径 R

(2)　線分 CD の長さ　　(3)　四角形 ABCD の面積

$\boxed{5}$

$AB=3$，$AC=2$，$\angle A=60^\circ$ である $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。線分 AD，BD の長さを求めよ。

$\boxed{6}$

四面体 ABCD において，

$AB=BC=3$，$CA=2\sqrt{5}$，$BD=1$，

$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$

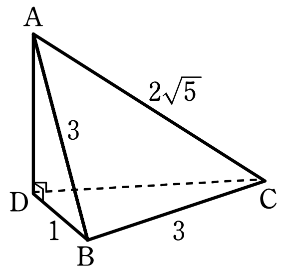
であるとき，次のものを求めよ。

(1)　CD の長さ

(2)　四面体 ABCD の体積

(3)　$\triangle ABC$ の面積

(4)　頂点 D から平面 ABC へ下ろした垂線 DH の長さ



$\boxed{7}$

$AB=AC=AD=\sqrt{21}$，$BC=CD=DB=6$ である三角錐 ABCD において，頂点 A から $\triangle BCD$ に垂線 AH を下ろす。このとき，次のものを求めよ。

(1)　AH の長さ　　(2)　この三角錐の体積

(3)　この三角錐の表面積　　(4)　この三角錐に内接する球の体積

$\boxed{8}$

(1)　半径 4 の円に内接する正六角形の面積を求めよ。

(2)　半径 4 の円に内接する正 n 角形の面積を n を用いて表せ。

1

(解説)

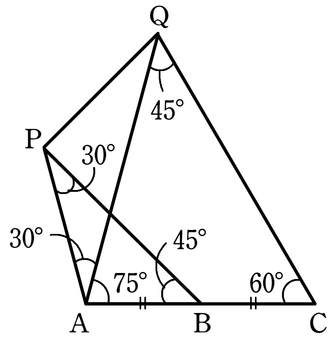
(1)　△ACQ において

$$\angle \mathrm{AQC}=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$$

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin 45^\circ}$

$\mathrm{AC}=10\sqrt{6}+10\sqrt{6}=20\sqrt{6}$ であるから

$$\mathrm{AQ}=\frac{\mathrm{AC}\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=20\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{\sqrt{2}}=60$$



(2)　△ABP において

$$\angle \mathrm{APB}=180^\circ-(30^\circ+75^\circ+45^\circ)=30^\circ$$

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin 30^\circ}$

よって　$\mathrm{AP}=\dfrac{\mathrm{AB}\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=10\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{1}{2}=20\sqrt{3}$

(3)　△PAQ において，余弦定理により

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\cos 30^\circ$$

$$=(20\sqrt{3})^2+60^2-2\cdot 20\sqrt{3}\cdot 60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1200$$

$\mathrm{PQ}>0$ であるから　$\mathrm{PQ}=\sqrt{1200}=20\sqrt{3}$

2

(解説)

(1)　△ABC の外接円の半径を R とする。

正弦定理により　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

これらを等式 $a\sin A+b\sin B=c\sin C$ に代入すると

$$a\cdot\frac{a}{2R}+b\cdot\frac{b}{2R}=c\cdot\frac{c}{2R}$$

両辺に $2R$ を掛けて　$a^2+b^2=c^2$

よって，△ABC は $C=90^\circ$ の直角三角形である。

(2)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

これらを等式 $b\cos A+a\cos B=b$ に代入すると

$$b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b$$

すなわち　$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}=b$

両辺に $2c$ を掛けて　$b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2=2bc$

ゆえに　$2c^2=2bc$　……①

$c\neq 0$ であるから，① の両辺を $2c$ で割ると　$c=b$

よって，△ABC は $b=c$ の二等辺三角形である。

(3)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

これらを等式 $a\cos A=b\cos B$ に代入すると

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

両辺に $2abc$ を掛けて　$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

両辺を展開して c について整理すると　$(a^2-b^2)c^2-a^4+b^4=0$

ゆえに　$(a^2-b^2)c^2-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$

よって　$(a^2-b^2)\{c^2-(a^2+b^2)\}=0$

すなわち　$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$　……①

$a>0$，$b>0$ であるから　$a+b>0$

ゆえに，① から　$a-b=0$ または $a^2+b^2-c^2=0$

すなわち　$a=b$ または $a^2+b^2=c^2$

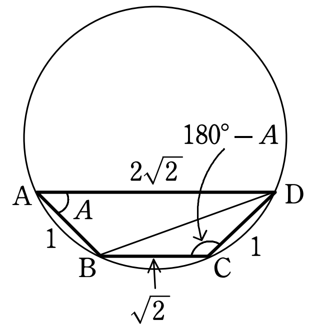
よって，△ABC は $a=b$ の二等辺三角形または $C=90^\circ$ の直角三角形である。

3

(解説)

(1)　四角形 ABCD は円に内接するから

$$C=180^\circ-A$$



△ABD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=1^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\cos A$$

$$=9-4\sqrt{2}\cos A\quad\cdots\cdots ①$$

△BCD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=(\sqrt{2})^2+1^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cos(180^\circ-A)$$

$$=3+2\sqrt{2}\cos A\quad\cdots\cdots ②$$

①，② から　$9-4\sqrt{2}\cos A=3+2\sqrt{2}\cos A$

整理して　$6\sqrt{2}\cos A=6$　　よって　$\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　……③

これを ① に代入して　$\mathrm{BD}^2=9-4\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5$

$\mathrm{BD}>0$ であるから　$\mathrm{BD}=\sqrt{5}$

(2)　③ から　$A=45^\circ$　　よって　$C=180^\circ-A=135^\circ$

したがって，四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\sin 45^\circ+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1\sin 135^\circ$$

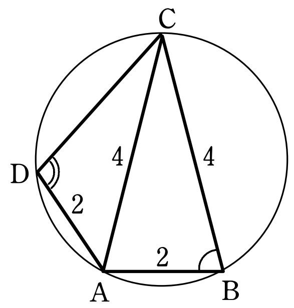
$$=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}$$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　△ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle ABC=\frac{2^2+4^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 4}=\frac{4}{2\cdot 2\cdot 4}=\frac{1}{4}$$



$\sin\angle ABC>0$ であるから

$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

△ABC において，正弦定理により　$\dfrac{4}{\sin\angle ABC}=2R$

したがって　$R=\dfrac{4}{2\sin\angle ABC}=\dfrac{4}{2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{8}{\sqrt{15}}=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$

(2)　四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle CDA=180°-\angle ABC$

よって　$\cos\angle CDA=\cos(180°-\angle ABC)=-\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{4}$

$CD=x$ とおく。△ACD において，余弦定理により

$4^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot 2\cos\angle CDA$　すなわち　$16=x^2+4-4x\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

整理して　$x^2+x-12=0$　よって　$(x+4)(x-3)=0$

$x>0$ であるから　$x=3$　したがって　$CD=3$

(3)　$\sin\angle CDA=\sin(180°-\angle ABC)=\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin\angle ABC+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin\angle CDA$$

$$=4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$$

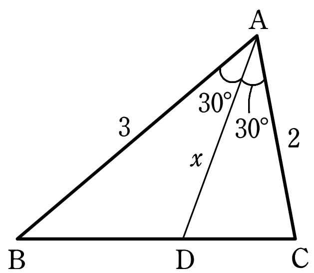
$\boxed{5}$

(解説)

$AD=x$ とおく。

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\sin 30°+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x\sin 30°$$



よって　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}x$

ゆえに　$\dfrac{5}{4}x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

したがって　$x=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$　すなわち　$AD=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

△ABD において，余弦定理により

$$BD^2=3^2+\left(\frac{6\sqrt{3}}{5}\right)^2-2\cdot 3\cdot\frac{6\sqrt{3}}{5}\cos 30°=9+\frac{108}{25}-\frac{54}{5}=\frac{63}{25}$$

$BD>0$ であるから　$BD=\sqrt{\dfrac{63}{25}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{5}$

(参考)　一般に，△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると

$$AB:AC=BD:DC$$

が成り立つ。このことを利用すると，BD の長さは次のように求めることもできる。

△ABC において，余弦定理により

$$BC^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cos 60°=7$$

$BC>0$ であるから　$BC=\sqrt{7}$

$BD:DC=AB:AC=3:2$ であるから　$BD=\dfrac{3}{5}BC=\dfrac{3\sqrt{7}}{5}$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　△ADBにおいて，三平方の定理により

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

△ADCにおいて，三平方の定理により

$$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

(2)　$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$ から　　AD⊥△BCD

△BCDにおいて，余弦定理により

$$\cos\angle DBC=\frac{BD^2+BC^2-CD^2}{2BD\cdot BC}=\frac{1^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 1\cdot 3}=\frac{-2}{2\cdot 1\cdot 3}=-\frac{1}{3}$$

$\sin\angle DBC>0$ であるから

$$\sin\angle DBC=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって　　$\triangle BCD=\frac{1}{2}BD\cdot BC\sin\angle DBC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

したがって，四面体ABCDの体積をVとすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot AD=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{4}{3}$$

(3)　△ABCはAB＝BCの二等辺三角形であるから，

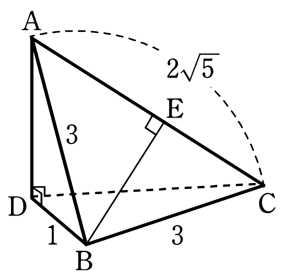
Bから辺ACに下ろした垂線をBEとすると

$$AE=CE=\sqrt{5}$$

よって，三平方の定理により

$$BE=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{4}=2$$

ゆえに　　$\triangle ABC=\frac{1}{2}AC\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2=2\sqrt{5}$



別解　$\angle ABC=\theta$ とおく。

△ABCにおいて，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{3^2+3^2-(2\sqrt{5})^2}{2\cdot 3\cdot 3}=\frac{-2}{2\cdot 3\cdot 3}=-\frac{1}{9}$$

$\sin\theta>0$ であるから　　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{80}{81}}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

よって　　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{4\sqrt{5}}{9}=2\sqrt{5}$

(4)　$V=\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot DH$ であるから

$$\frac{4}{3}=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{5}\cdot DH$$　　　よって　　$DH=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{7}$

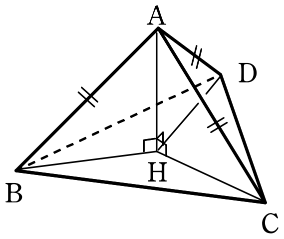
(解説)

(1)　△ABH，△ACH，△ADH はいずれも直角三角形で

$$AB=AC=AD,\quad AH \text{ は共通}$$

であるから，これらの直角三角形は合同である。

よって，BH＝CH＝DH であるから，H は △BCD (正三角形) の外接円の中心である。



ゆえに，△BCDにおいて，正弦定理により

$$\frac{6}{\sin 60^\circ}=2\cdot BH$$

よって　$BH=\dfrac{6}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

したがって，三平方の定理により

$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{(\sqrt{21})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{9}=3$$

(2)　$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=9\sqrt{3}$

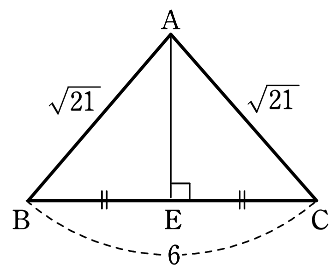
よって，三角錐 ABCD の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot AH=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 3=9\sqrt{3}$$

(3)　△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であるから，

A から辺 BC に下ろした垂線を AE とすると

$$BE=CE=\frac{6}{2}=3$$



よって，三平方の定理により

$$AE=\sqrt{(\sqrt{21})^2-3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

ゆえに　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}BC\cdot AE=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

同様に　$\triangle ACD=\triangle ADB=6\sqrt{3}$

したがって，三角錐 ABCD の表面積を S とすると

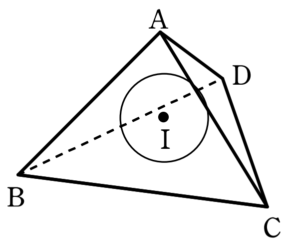
$$S=\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADB+\triangle BCD$$
$$=3\times 6\sqrt{3}+9\sqrt{3}=27\sqrt{3}$$

(4)　内接する球の中心を I，半径を r とすると

V＝(三角錐 IABC)＋(三角錐 IACD)

＋(三角錐 IADB)＋(三角錐 IBCD)

$$=\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot r+\frac{1}{3}\triangle ACD\cdot r$$
$$+\frac{1}{3}\triangle ADB\cdot r+\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot r$$
$$=\frac{1}{3}(\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADB+\triangle BCD)r=\frac{1}{3}Sr$$



よって，(2)，(3) の結果から　$9\sqrt{3}=\dfrac{1}{3}\cdot 27\sqrt{3}\cdot r$　　ゆえに　$r=1$

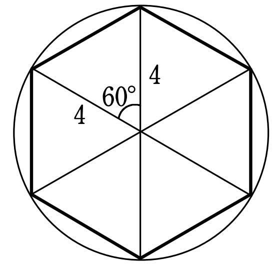
したがって，求める球の体積は　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\dfrac{4}{3}\pi$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　半径 4 の円に内接する正六角形の面積を S とする。

$$S=6\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sin 60^\circ\right)=24\sqrt{3}$$



(2)　半径 4 の円に内接する正 n 角形の面積を S とする。

$$S=n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sin\frac{360^\circ}{n}\right)=8n\sin\frac{360^\circ}{n}$$