ナイトコラボ数学講座

【高３阪神理系数学】

～数Ⅲ 発展編～

極限

$\boxed{1}$

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$　(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{e^{x}-1}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 1}\frac{\log x}{x-1}$　(5) $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

$\boxed{2}$ [明治大]

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。$\displaystyle\lim_{x \to \infty}\frac{[\sqrt{x+x^{2}}]-\sqrt{x}}{x}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ [大分大]

$\cos x \geqq 1-\dfrac{x^{2}}{2}$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を証明せよ。

$\boxed{4}$ [琉球大]

$a_{1}=3$，$a_{n+1}=3-\dfrac{2}{a_{n}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_{n}\}$ を考える。

(1) $a_{n}>2$ を証明せよ。　(2) $0<a_{n+1}-2<\dfrac{1}{2}(a_{n}-2)$ を証明せよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty}a_{n}$ を求めよ。

微分

$\boxed{5}$ [青山学院大]

n は 2 以上の自然数とする。x^n-1 を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{6}$

関数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において単調増加関数であることを示せ。

$\boxed{7}$ [小樽商科大]

$e^{\frac{1}{e}}$ と $\sqrt[3]{3}$ の大小を比較せよ。

$\boxed{8}$

$\left(\dfrac{1}{11}\right)^{\frac{1}{10}}$ と $\left(\dfrac{1}{13}\right)^{\frac{1}{12}}$ の大小を判定せよ。

有名級数

$\boxed{9}$

(1)　初項1，公比 $-x\,(0\leqq x<1)$ の無限等比級数を考えることで，以下の等式を示せ。

$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots=\log 2$　　(メルカトル級数)

(2)　初項1，公比 $-x^2\,(0\leqq x<1)$ の無限等比級数を考えることで，以下の等式を示せ。

$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots\cdots=\dfrac{\pi}{4}$　　(ライプニッツ級数)

$\boxed{10}$

次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{5}<\int_1^2\frac{dx}{2x+1}<\frac{1}{3}$$

$\boxed{11}$ [津田塾大]

n を自然数とする。

(1)　$\displaystyle\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ を示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$ を示せ。

(3)　無限級数 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots$ の和を求めよ。

$\boxed{12}$ [芝浦工業大]

次の問いに答えよ。ただし，x は実数，n は自然数とする。

(1)　和 $1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ を求めよ。

(2)　不等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx=0$ を示せ。

(3)　無限級数 $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots\cdots$ の和を求めよ。

積分方程式

$\boxed{13}$

次の関数を微分せよ。

(1) $f(x)=\int_0^x (t-x)\sin t\,dt$　　(2) $f(x)=\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\log t}dt$ $(x>0)$

$\boxed{14}$［早稲田大］

関数 $f(x)$ は $f(x)=x+2\int_0^{\pi}\sin(x-t)f(t)\,dt$ を満たすとする。

このとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{15}$［岡山県立大］

次の等式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=1+x^2+\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt$$

$\boxed{16}$［東洋大(改)］

a を定数として，関数 $f(x)$ が関係式 $\int_0^{2x}f(t)\,dt=7+5\sin 2x-a\cos 2x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt$ を満たすとする。このとき $f(x)$ および a の値を求めよ。

面積

$\boxed{17}$

$a>0$ とする。曲線 $y=\sin 2x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，曲線 $y=a\sin x$ が2等分するように定数 a の値を定めよ。

$\boxed{18}$ [東京工業大]

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x=3\cos t-\cos 3t \\ y=3\sin t-\sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。

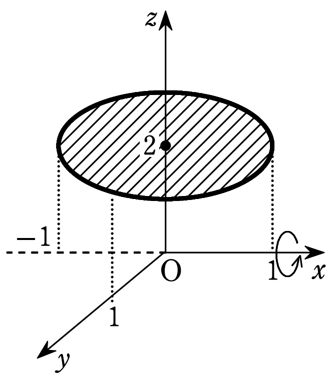
(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ。

(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

体積

$\boxed{19}$

空間に円盤 $x^2+y^2 \leqq 1$，$z=2$ がある。これを x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。



$\boxed{20}$ [早稲田大]

座標空間に 2 点 A $(0,\ -1,\ 1)$ と B $(-1,\ 0,\ 0)$ をとる。線分 AB を z 軸の周りに 1 回転してできる面と 2 つの平面 $z=0$，$z=1$ とで囲まれた部分の体積を求めよ。

$\boxed{21}$

O を原点とする xyz 座標空間で 3 点 A$(1,\ 3,\ 0)$，B$(-4,\ 3,\ 0)$，C$(-4,\ 3,\ 5)$ を頂点とする △ABC を z 軸のまわりに 1 回転したときに通過する部分の立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{22}$ [大阪市立大(改)]

座標空間内で，連立不等式

$$x^2+y^2 \leqq 1,\quad z+2x^2-x^4 \leqq 1,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad z \geqq 0$$

の表す領域の体積を求めよ。

$\boxed{23}$

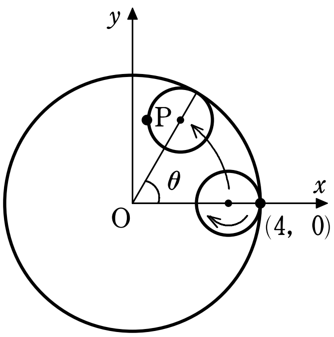
連立不等式

$$y^2 \leqq 1-x^2,\quad z \leqq x,\quad z \leqq -x+1,\quad z \geqq 0$$

を満たす立体 K の体積 V を求めよ。

$\boxed{24}$ [北海道大]

xy 平面の原点 O を中心とする半径 4 の円 E がある。半径 1 の円 C が，内部から E に接しながらすべることなく転がって反時計回りに 1 周する。このとき，円 C の周上に固定された点 P の軌跡を考える。ただし，初めに点 P は点 (4，0) の位置にあるものとする。

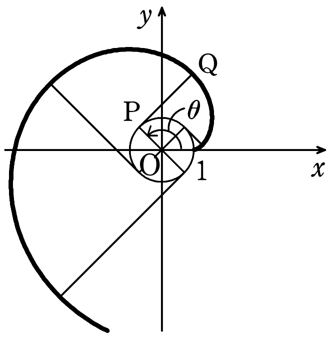


(1) 図のように，x 軸と円 C の中心のなす角度が θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ となったときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を，θ を用いて表せ。

(2) 点 P の軌跡の長さを求めよ。

$\boxed{25}$ [信州大]

図 は原点 O を中心とする半径 1 の円と，その外周に右回りに巻き付けた糸をたるまないようにほどいたときの糸の端点 Q の軌跡を太線で示したものである。端点 Q は，はじめ座標 (1，0) にあるものとする。糸の太さや伸びは考えないものとする。



(1) 端点 Q の座標 $(x,\ y)$ を θ を用いて表せ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における端点 Q の軌跡と，x 軸および $\theta = \pi$ における糸で囲まれた部分の面積を求めよ。

積分（その他）

$\boxed{26}$［岐阜大］

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n+2}\frac{n}{k^2+n^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{3n+k}$

$\boxed{27}$［横浜国立大］

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

$\boxed{28}$［早稲田大］

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots\cdots+[\sqrt{n}])$$

$\boxed{29}$［首都大学東京］

(1) 自然数 n に対して，次の不等式を証明せよ。

$$n\log n-n+1\leqq\log(n!)\leqq(n+1)\log(n+1)-n$$

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n!)}{n\log n-n}$ を求めよ。

$\boxed{30}$［芝浦工業大］

$S=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{100}}$ とするとき，S の整数部分を求めよ。

$\boxed{31}$［宮崎大］

実数 x に対して，$f(x)=\displaystyle\int_0^1 e^{|t-x|}dt$ の最小値を求めよ。

$\boxed{32}$［中央大(改)］

$t>0$ とする。$I(t)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-t\cos x|dx$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。