第１回　ナイトコラボ　良問演習講座（文系数学）

$\boxed{1}$

A，Bの２人が，はじめに，Aは２枚の硬貨を，Bは１枚の硬貨を持っている。２人は次の操作 (P) を繰り返すゲームを行う。

(P)　２人は持っている硬貨すべてを同時に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の枚数を数え，その枚数が少ない方が相手に１枚の硬貨を渡す。表が出た硬貨の枚数が同じときは硬貨のやりとりは行わない。

操作 (P) を繰り返し，２人のどちらかが持っている硬貨の枚数が３枚となった時点でこのゲームは終了する。操作 (P) を n 回繰り返し行ったとき，A が持っている硬貨の枚数が３枚となってゲームが終了する確率を p_n とする。ただし，どの硬貨も１回投げたとき，表の出る確率は $\dfrac{1}{2}$ とする。

(1)　p_1 の値を求めよ。　　(2)　p_2 の値を求めよ。　　(3)　p_3 の値を求めよ。

$\boxed{2}$

a，b を実数とし，$1<a<b$ とする。

(1)　x，y，z を０でない実数とする。$a^x=b^y=(ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ であることを示せ。

(2)　m，n を $m>n$ を満たす自然数とし，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{5}$ とする。m，n の値を求めよ。

(3)　m，n を自然数とし，$a^m=b^n=(ab)^5$ とする。b の値を a を用いて表せ。

第１回　ナイトコラボ　良問演習講座（文系数学）

$\boxed{1}$

解答　(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{3}{16}$　(3) $\dfrac{5}{64}$

$\boxed{2}$

解答　(1) 略　(2) $m=30$，$n=6$　(3) $b=a^5$

第１回　ナイトコラボ　良問演習講座（文系数学）

$\boxed{1}$

(1)　A が２枚持っている状況で操作 (P) を１回行い，A が持っている枚数が３枚となるのは，操作 (P) で表が出た枚数が

A：２枚　または 「A：１枚，B：０枚」

のときであるから　$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

(2)　A が２枚持っている状況で操作 (P) を１回行い，A が持っている枚数が２枚のままとなるのは，操作 (P) で表が出た枚数が

「A：１枚，B：１枚」 または 「A：０枚，B：０枚」

のときであるから，その確率は

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

よって，(1) から　$p_2=\frac{3}{8}\times p_1=\frac{3}{16}$

(3)　A が２枚持っている状況で操作 (P) を１回行い，A が持っている枚数が１枚となるのは，(1) から　$1-\left(p_1+\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{8}$

A が１枚持っている状況で操作 (P) を１回行い，A が持っている枚数が２枚となるのは，操作 (P) で表が出た枚数が「A：１枚，B：０枚」のときであるから，その確率は

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

したがって，(1)，(2) から

$$p_3=\frac{3}{8}\times p_2+\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}\times p_1=\frac{5}{64}$$

$\boxed{2}$

(1)　$a^x=b^y=(ab)^z$　……① とする。

$1<a<b$ であるから，① の各辺は正の数である。

よって，① の各辺の常用対数をとって

$$\log_{10}a^x=\log_{10}b^y=\log_{10}(ab)^z=k$$

とおくと　$x\log_{10}a=y\log_{10}b=z(\log_{10}a+\log_{10}b)=k$

ゆえに　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{\log_{10}a}{k}$，$\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log_{10}b}{k}$，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\log_{10}a+\log_{10}b}{k}$

したがって，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ は成り立つ。

(2)　$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{5}$ から　$5n+5m=mn$

よって　$(m-5)(n-5)=25$　……②

m，n は $m>n$ を満たす自然数であるから，$m-5$，$n-5$ は，$m-5>n-5\geqq-4$ を満たす整数である。

ゆえに，② から　$m-5=25$，$n-5=1$

したがって　$m=30$，$n=6$

(3)　m，n は自然数であるから，m，n は 0 でない実数である。

よって，(1) から $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{5}$ が成り立つ。

また，$a^m=b^n$ において，$1<a<b$ であるから，

$$a^m=b^n>a^n \quad \text{すなわち} \quad a^m>a^n$$

底 a は 1 より大きいから　$m>n$

ゆえに，(2) より $m=30$，$n=6$ となるから　$a^{30}=b^6=(ab)^5$

$b^6=(ab)^5$ から　$b^6=a^5b^5$

$b^5>0$ であるから，両辺を b^5 で割ると　$b=a^5$

これは，$a^{30}=b^6$を満たす。

したがって　$b=a^5$