1

解答　(ア)　4　(イ)　6　(ウ)　3　(エ)　−3　(オ)　6

解説

$(x^3+1)^4$ の展開式の一般項は　${}_4\mathrm{C}_r x^{3r}$

x^9 の項は $r=3$ のときで，その係数は　${}_4\mathrm{C}_3={}^{ア}4$

x^6 の項は $r=2$ のときで，その係数は　${}_4\mathrm{C}_2={}^{イ}6$

また，$(x^3+x-1)^3$ の展開式の一般項は

$$\frac{3!}{p!q!r!}x^{3p}x^q\cdot(-1)^r=\frac{3!}{p!q!r!}(-1)^r x^{3p+q}$$

ただし　$p+q+r=3$　……①

x^5 の項は $3p+q=5$ のときで，これと ① を同時に満たす 0 以上の整数 p，q，r は $p=1$，$q=2$，$r=0$ のみである。

よって，x^5 の係数は　$\dfrac{3!}{1!2!0!}(-1)^0={}^{ウ}3$

同様にして，x^2 の項は $p=0$，$q=2$，$r=1$ のときであるから，x^2 の係数は

$$\frac{3!}{0!2!1!}(-1)^1={}^{エ}-3$$

ここで，$(x^3+1)^4(x^3+x-1)^3$ の展開式における x^{11} の係数を考える。

$(x^3+1)^4$ の項は x^{12}，x^9，x^6，x^3，定数項だけであることと $(x^3+x-1)^3$ の項を考えて

$$x^{11}=x^9\cdot x^2,\quad x^{11}=x^6\cdot x^5$$

の場合がある。

よって，上で求めたア ～ エより，x^{11} の係数は　$4\times(-3)+6\times3={}^{オ}6$

2

解答　(1)　略　(2)　$\dfrac{n}{k}$　(3)　略

解説

(1)　$2^n=(1+1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k$

(2)　${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

よって　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k}{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}=\dfrac{\dfrac{n!}{k!}}{\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!}}=\dfrac{n}{k}$

(3)　(2) から　$k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$　　また，(1) から　$\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k=2^{n-1}$

よって　$\sum_{k=1}^{n}k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n}n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k=n\cdot2^{n-1}$

3

解答　(1)　$54x^2-12x+1$　(2)　$780x^2+40x+1$　(3)　$780x^2-1520x+741$

解説

(1)　$(3x-1)^4=\{3x+(-1)\}^4$ の展開式で x の 2 次以下の項が x^3 で割ったときの余りである。

よって　${}_4\mathrm{C}_2(3x)^2(-1)^2+{}_4\mathrm{C}_3 3x\cdot(-1)^3+{}_4\mathrm{C}_4(-1)^4=54x^2-12x+1$

(2)　$(x+1)^{40}$ の展開式で x の 2 次以下の項が x^3 で割ったときの余りである。

よって　${}_{40}\mathrm{C}_{38}x^2\cdot1^{38}+{}_{40}\mathrm{C}_{39}x\cdot1^{39}+{}_{40}\mathrm{C}_{40}1^{40}=780x^2+40x+1$

(3)　$x-1=t$ とおくと　$x=t+1$

よって，x^{40} すなわち $(t+1)^{40}$ を，$(x-1)^3$ すなわち t^3 で割ったときの余りは，(2) の結果から　$780t^2+40t+1=780(x-1)^2+40(x-1)+1=780x^2-1520x+741$

4

解答　(1)　227　(2)　(ア)　3　(イ)　−1

解説

(1)　$15^2=x$ とおくと　$15^{10}+2\cdot15^2+1=x^5+2x+1$

$15^4-15^2+1=x^2-x+1$

x^5+2x+1 を x^2-x+1 で割ると次のようになる。

$$\begin{array}{r}
x^3+x^2-1 \\
x^2-x+1\,\big)\,\overline{x^5+2x+1} \\
\underline{x^5-x^4+x^3} \\
x^4-x^3+2x+1 \\
\underline{x^4-x^3+x^2} \\
-x^2+2x+1 \\
\underline{-x^2+x-1} \\
x+2
\end{array}$$

したがって，余りは　$15^2+2=225+2=227$

(2)　x^3+4x^2+2x+k を $x+1$ で割ると次のようになる。

$$\begin{array}{r}
x^2+3x-1 \\
x+1\,\big)\,\overline{x^3+4x^2+2x+k} \\
\underline{x^3+x^2} \\
3x^2+2x \\
\underline{3x^2+3x} \\
-x+k \\
\underline{-x-1} \\
k+1
\end{array}$$

よって，商は　$x^2+{}^{ア}3x-1$

また，余りは 0 であるから　$k+1=0$　　ゆえに　$k={}^{イ}-1$

5

解答　(1)　$a=-3$，$b=5$　(2)　$(x^2+5x-5)(x^2-5x-1)$

(3)　$x=\dfrac{-5\pm3\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

解説

(1)　(右辺)$=x^4+2ax^2+a^2-(b^2x^2-4bx+4)=x^4+(2a-b^2)x^2+4bx+a^2-4$

であるから，等式は　$x^4-31x^2+20x+5=x^4+(2a-b^2)x^2+4bx+a^2-4$

両辺の係数を比較すると

$2a-b^2=-31$　……①，

$4b=20$　……②，

$a^2-4=5$　……③

② から　$b=5$

① に代入して　$2a-25=-31$　　よって　$a=-3$

これは ③ を満たす。

したがって　$a=-3$，$b=5$

(2)　$a=-3$，$b=5$ のとき，(1) の等式から

$$\begin{aligned}x^4-31x^2+20x+5&=(x^2-3)^2-(5x-2)^2=\{(x^2-3)+(5x-2)\}\{(x^2-3)-(5x-2)\}\\&=(x^2+5x-5)(x^2-5x-1)\end{aligned}$$

(3)　(2) から　$(x^2+5x-5)(x^2-5x-1)=0$

ゆえに　$x^2+5x-5=0$　または　$x^2-5x-1=0$

よって　$x=\dfrac{-5\pm3\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

6

解答　(1)　証明略，$a=b=c$　(2)　証明略，$a=b=c$　(3)　証明略，$a=b$

解説

(1)
$$\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2&=2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca)\\&=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\\&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqq0\end{aligned}$$

ゆえに　$3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$

等号が成り立つのは　$a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$ すなわち $a=b=c$ のときである。

別解　コーシー・シュワルツの不等式

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$

[等号が成り立つのは，$ay=bx$ かつ $bz=cy$ かつ $cx=az$ のとき]

において，$x=y=z=1$ とすると

$3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$

等号が成り立つのは，$a=b$ かつ $b=c$ かつ $c=a$ すなわち $a=b=c$ のときである。

(2)　$\left(\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$

$=\dfrac{a+b+c}{3}-\dfrac{a+b+c+2\sqrt{a}\sqrt{b}+2\sqrt{b}\sqrt{c}+2\sqrt{c}\sqrt{a}}{9}$

$=\dfrac{2a+2b+2c-2\sqrt{a}\sqrt{b}-2\sqrt{b}\sqrt{c}-2\sqrt{c}\sqrt{a}}{9}$

$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2}{9}\geqq0$　……①

よって　$\left(\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}\right)^2\geqq\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$　……②

a，b，c が正の数のとき　$\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}>0$，$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}>0$ であるから

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}\geqq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}$$

等号が成り立つのは，① から　$a=b=c$ のときである。

(3)　$P=\left|\dfrac{a}{b}\sqrt{a}-\dfrac{b}{a}\sqrt{b}\right|^2-|\sqrt{a}-\sqrt{b}|^2$ とすると

$$\begin{aligned}P&=\left(\frac{a}{b}\sqrt{a}-\frac{b}{a}\sqrt{b}\right)^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=\frac{a^3}{b^2}-2\sqrt{ab}+\frac{b^3}{a^2}-(a-2\sqrt{ab}+b)\\&=\frac{a^5-a^3b^2-a^2b^3+b^5}{a^2b^2}=\frac{(a^2-b^2)(a^3-b^3)}{a^2b^2}\\&=\frac{(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2}\end{aligned}$$

$a>0$，$b>0$ であるから　$P\geqq0$

ゆえに　$\left|\dfrac{a}{b}\sqrt{a}-\dfrac{b}{a}\sqrt{b}\right|^2\geqq|\sqrt{a}-\sqrt{b}|^2$

$\left|\dfrac{a}{b}\sqrt{a}-\dfrac{b}{a}\sqrt{b}\right|\geqq 0$，$|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\geqq 0$ であるから

$$\left|\frac{a}{b}\sqrt{a}-\frac{b}{a}\sqrt{b}\right|\geqq|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$$

また，等号が成り立つのは $a=b$ のときである。

$\boxed{7}$

解答　(1)　略

(2)　$x=\dfrac{3}{13}$，$y=\dfrac{2}{13}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{13}$

(3)　$x=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，$y=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$ のとき最大値 $\sqrt{13}$

解説

(1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$

$$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2\geqq 0$$

よって　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

参考　等号が成り立つのは $ay=bx$ のときである。

なお，この不等式はコーシー・シュワルツの不等式と呼ばれている。

(2)　(1) の不等式に $a=3$，$b=2$ を代入すると

$$(3^2+2^2)(x^2+y^2)\geqq(3x+2y)^2$$

$3x+2y=1$　……①であるから　　$13(x^2+y^2)\geqq 1$　　よって　　$x^2+y^2\geqq\dfrac{1}{13}$

等号が成り立つのは $3y=2x$　……②のときである。

①，② を解くと　　$x=\dfrac{3}{13}$，$y=\dfrac{2}{13}$

ゆえに，x^2+y^2 は $x=\dfrac{3}{13}$，$y=\dfrac{2}{13}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{13}$ をとる。

(3)　(1) の不等式に $a=2$，$b=3$ を代入すると

$$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geqq(2x+3y)^2$$

$x^2+y^2=1$　……①であるから　　$13\cdot 1\geqq(2x+3y)^2$

ゆえに　　$-\sqrt{13}\leqq 2x+3y\leqq\sqrt{13}$

等号が成り立つのは $2y=3x$　……②のときである。

①，② を解くと

$$x=\pm\frac{2\sqrt{13}}{13},\quad y=\pm\frac{3\sqrt{13}}{13}\quad\text{(複号同順)}$$

このうち，$2x+3y=\sqrt{13}$ となるのは $x=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，$y=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$ のときである。

したがって，$2x+3y$ は $x=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，$y=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$ のとき最大値 $\sqrt{13}$ をとる。

$\boxed{8}$

解答　$x=\sqrt{2}-1$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解説

$$\frac{x+1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}}=\frac{1}{x+1+\dfrac{2}{x+1}}$$

$x>0$ であるから，$\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$ が最大となるのは，$x+1+\dfrac{2}{x+1}$ が最小となるときである。$x>0$ のとき $x+1>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$x+1+\frac{2}{x+1}\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{x+1}}=2\sqrt{2}$$

等号が成り立つのは，$x+1=\dfrac{2}{x+1}$ のときである。

このとき　　$(x+1)^2=2$　　　$x+1>0$ であるから　　　$x+1=\sqrt{2}$

したがって，$x=\sqrt{2}-1$ で最大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ をとる。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{80-k}{5(k+1)}$　　(2)　13 乗

解説

(1)　$(x+5)^{80}$ の展開式の一般項は　　${}_{80}C_r x^{80-r}\cdot 5^r=5^r{}_{80}C_r x^{80-r}$

x^k $(1\leqq k\leqq 80)$ の係数を a_k とすると　　$a_k=5^{80-k}{}_{80}C_{80-k}$

よって　　$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{5^{79-k}{}_{80}C_{79-k}}{5^{80-k}{}_{80}C_{80-k}}$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{80!}{(79-k)!\{80-(79-k)\}!}\times\frac{(80-k)!\{80-(80-k)\}!}{80!}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{80!}{(79-k)!(k+1)!}\cdot\frac{(80-k)!k!}{80!}=\frac{80-k}{5(k+1)}$$

(2)　(1)の結果から

[1]　$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}<1$ とすると　　$\dfrac{80-k}{5(k+1)}<1$

両辺に $5(k+1)$ [>0] を掛けて　　$80-k<5(k+1)$

これを解いて　　$k>\dfrac{75}{6}=12.5$　　　よって，$k\geqq 13$ のとき　　$a_k>a_{k+1}$

[2]　$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}>1$ とすると　　$80-k>5(k+1)$

これを解いて　　$k<\dfrac{75}{6}=12.5$　　　よって，$k\leqq 12$ のとき　　$a_k<a_{k+1}$

ゆえに　　$a_1<a_2<\cdots\cdots<a_{12}<a_{13}>a_{14}>\cdots\cdots>a_{80}$

よって，x の 13 乗の係数が最大になる。

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$(1+x)^n(1+x)^n={}_nC_0({}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n)$

$$+{}_nC_1x({}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n)+\cdots\cdots$$

$$+{}_nC_nx^n({}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n)$$

ゆえに，$(1+x)^n(1+x)^n$ の展開式において，x^n の項の係数は，${}_nC_k={}_nC_{n-k}$ により

$${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_k\cdot{}_nC_{n-k}+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$$

$$={}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_k{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_n{}^2$$

一方，$(1+x)^{2n}$ の展開式において，x^n の項の係数は　　${}_{2n}C_n$

したがって　　${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_n{}^2={}_{2n}C_n$

(2)　$k{}_nC_k=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n{}_{n-1}C_{k-1}$ が成り立つ。

また　　$2^{n-1}=(1+1)^{n-1}={}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}$

よって，これらのことから

$${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots\cdots+n{}_nC_n=n({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})$$

$$=n\cdot 2^{n-1}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　3

解説

(1) $r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=r\cdot\dfrac{n\,!}{(n-r)!\,r\,!}=\dfrac{n\,!}{(n-r)!\,(r-1)!}$

$n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!}=\dfrac{n\,!}{(n-r)!\,(r-1)!}$

よって　$r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

(2) p は素数であるから，$p\geqq 2$ である。

ゆえに，(1) の等式から　$r\cdot{}_p\mathrm{C}_r=p\cdot{}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$ ……[A]

ここで，${}_p\mathrm{C}_r$，${}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$ は整数である。

また，p は素数，r は $1\leqq r\leqq p-1$ を満たす整数であるから，p と r は互いに素である。

よって，[A] から，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数である。

したがって，${}_p\mathrm{C}_r$ は p で割り切れる。

(3) 二項定理により

$(1+x)^p={}_p\mathrm{C}_0+{}_p\mathrm{C}_1x+{}_p\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_rx^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^p$ ……①

この等式 ① で $x=1$ とおくと

$2^p={}_p\mathrm{C}_0+{}_p\mathrm{C}_1+{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}+{}_p\mathrm{C}_p$

$=2+{}_p\mathrm{C}_1+{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}$ ……②

(2) より，$1\leqq r\leqq p-1$ のとき，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数であるから，${}_p\mathrm{C}_1+{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}$ は p の倍数である。

$p\geqq 3$ であるから，② より，2^p を p で割った余りは 2 である。

(4) (3) の等式 ① に $x=2$ を代入すると

$3^p={}_p\mathrm{C}_0+2{}_p\mathrm{C}_1+2^2{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^{p-1}{}_p\mathrm{C}_{p-1}+2^p{}_p\mathrm{C}_p$

$=2^p+1+2{}_p\mathrm{C}_1+2^2{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^{p-1}{}_p\mathrm{C}_{p-1}$ ……③

(2) より，$1\leqq r\leqq p-1$ のとき，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数であるから，

$2{}_p\mathrm{C}_1+2^2{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^{p-1}{}_p\mathrm{C}_{p-1}$ は p の倍数である。

よって，③ から，3^p を p で割った余りは，2^p+1 を p で割った余りに等しい。

(3) より，2^p を p で割った余りは 2 であり，また，$p\geqq 5$ であるから，3^p を p で割った余りは　$2+1=3$

4

解答 (1) 商は　$x+5$，　余りは　$-4x+6$

(2) $X=26$，　$Y=4$

(3) $a=1+\sqrt{5}$

解説

(1) 割り算を実行すると，右のようになる。

よって，商は　$x+5$，　余りは　$-4x+6$

$$\begin{array}{r} x+5 \\ x^2-2x\,\big)\,\overline{x^3+3x^2-14x+6} \\ \underline{x^3-2x^2} \\ 5x^2-14x \\ \underline{5x^2-10x} \\ -4x+6 \end{array}$$

(2) (1) より

$x^3+3x^2-14x+6=(x^2-2x)(x+5)-4x+6$

$x=a$ を代入すると

$a^3+3a^2-14a+6=(a^2-2a)(a+5)-4a+6$

すなわち　$X=Y(a+5)-4a+6$

a について整理すると　$(4-Y)a+X-5Y-6=0$

a は無理数，X，Y は有理数であるから　$4-Y=0$，　$X-5Y-6=0$

よって　$X=26$，　$Y=4$

(3) $Y=4$ から　$a^2-2a=4$

よって，$a^2-2a-4=0$ を解いて　$a=1\pm\sqrt{5}$

素数 5 の平方根 $\sqrt{5}$ は無理数であるから，$1\pm\sqrt{5}$ は無理数である。

また，a は正の数であるから　$a=1+\sqrt{5}$

5

解答 $P(x)=x^2-x+1$

解説

$P(x)$ を定数とすると条件と矛盾する。よって

$P(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots$

とおく。ただし，$a\neq 0$，$n\geqq 1$ である。

よって

$P(x+1)-P(x)=a(x+1)^n+b(x+1)^{n-1}+\cdots\cdots-(ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots)$

$=anx^{n-1}+q_{n-2}(x)$

ただし，$q_{n-2}(x)$ を $n-2$ 次以下の整式とする。

$P(x+1)-P(x)=2x$ は x についての恒等式であるから，最高次の項を比較して

$n-1=1$ ……①，　$an=2$ ……②

① から　$n=2$

よって，② から　$a=1$

このとき，$P(x)=x^2+bx+c$ とおける。

$P(0)=1$ から　$c=1$

また　$P(x+1)-P(x)=(x+1)^2+b(x+1)+c-(x^2+bx+c)$

$=2x+b+1$

よって　$2x+b+1=2x$

この等式は，x についての恒等式であるから　$b+1=0$

すなわち　$b=-1$

したがって　$P(x)=x^2-x+1$

6

解答 (1) 略　(2) 略　(3) 略

解説

(1) (右辺)−(左辺)$=\dfrac{y}{1+y}-\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{y(1+x)-x(1+y)}{(1+y)(1+x)}=\dfrac{y-x}{(1+y)(1+x)}$

$0\leqq x\leqq y$ であるから　$\dfrac{y-x}{(1+y)(1+x)}\geqq 0$　　よって　$\dfrac{x}{1+x}\leqq\dfrac{y}{1+y}$

参考 等号が成り立つのは，$x=y$ のときである。

(2) (右辺)^2−(左辺)$^2=(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=(a^2+2|a||b|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)$

ここで，$-|ab|\leqq ab\leqq|ab|$ であるから　$2(|ab|-ab)\geqq 0$

ゆえに　$|a+b|^2\leqq(|a|+|b|)^2$

$|a+b|\geqq 0$，$|a|+|b|\geqq 0$ であるから　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

参考 等号が成り立つのは，$|ab|=ab$　すなわち　$ab\geqq 0$ のときである。

(3) (2) より，$0\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$ であるから，(1) において，$x=|a+b|$，$y=|a|+|b|$ とすると

$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqq\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}$ ……①

ここで，$1+|a|+|b|\geqq 1+|a|$，$1+|a|+|b|\geqq 1+|b|$ であるから

$\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqq\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$ ……②

①，② から　$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqq\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$

参考 等号が成り立つのは，

$|a+b|=|a|+|b|$ かつ $\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|}{1+|a|}$ かつ $\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|b|}{1+|b|}$

すなわち　$a=0$　または　$b=0$ のときである。

7

解答 (1) 略　(2) 略

解説

(1) $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqq 0$

よって　$3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$

また，等号が成り立つとき

$a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$

すなわち　$a=b=c$

(2) (1) を利用すると　$3(a^4+b^4+c^4)\geqq(a^2+b^2+c^2)^2$

よって　$27(a^4+b^4+c^4)\geqq 9(a^2+b^2+c^2)^2=\{3(a^2+b^2+c^2)\}^2$

(1) から　$\{3(a^2+b^2+c^2)\}^2\geqq\{(a+b+c)^2\}^2=(a+b+c)^4$

ゆえに　$27(a^4+b^4+c^4)\geqq(a+b+c)^4$

8

解答 (1) [略]　(2) $(a, b, c)=(0, 0, 3), (0, 3, 0), (3, 0, 0)$ のとき最大値 10

解説

(1) $(1+2^{a+b})-(2^a+2^b)=(2^a-1)(2^b-1)$

条件より $a\geqq 0, b\geqq 0$ であるから $2^a\geqq 1, 2^b\geqq 1$

ゆえに　$(2^a-1)(2^b-1)\geqq 0$　　よって　$2^a+2^b\leqq 1+2^{a+b}$

等号は $2^a=1$ または $2^b=1$

すなわち　$a=0$ または $b=0$ のときに成立する．

(2) (1) で証明した不等式を用いると $2^a+2^b+2^c\leqq 1+2^{a+b}+2^c$ ……①

$\leqq 1+1+2^{a+b+c}$ ……②

$=1+1+2^3=10$

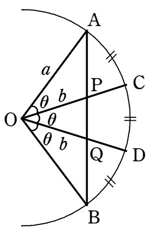
① の等号は $a=0$ または $b=0$ のときに成り立ち，② の等号は $a+b=0$ または $c=0$ のときに成り立つ．ゆえに，$a+b+c=3$ であるから

$(a, b, c)=(0, 0, 3), (0, 3, 0), (3, 0, 0)$ のとき最大値 10 をとる．

9

解答 略

解説



$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=b$，

$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{COD}=\theta$ $(0^\circ<\theta<60^\circ)$ とおく．

△AOP において，余弦定理により

$\mathrm{AP}^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

△POQ において，余弦定理により

$\mathrm{PQ}^2=b^2+b^2-2b^2\cos\theta$

よって

$\mathrm{AP}^2-\mathrm{PQ}^2=a^2-b^2-2b(a-b)\cos\theta$

$=(a-b)(a+b-2b\cos\theta)$

$a>b$，$0^\circ<\theta<60^\circ$ であるから

$a-b>0$，

章末問題B

$$a+b-2b\cos\theta>b+b-2b\cos\theta=2b(1-\cos\theta)>0$$

ゆえに　$AP^2-PQ^2>0$　　すなわち　$AP^2>PQ^2$

したがって　　$AP>PQ$

別解　$\angle APO=\alpha$ とおくと　$\angle OPQ=180^\circ-\alpha$

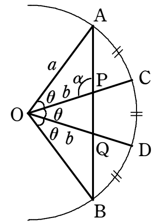
$\triangle AOP$ において，正弦定理により　$\dfrac{AP}{\sin\theta}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

よって　　$AP=\dfrac{a\sin\theta}{\sin\alpha}$

$\triangle POQ$ において，正弦定理により　$\dfrac{PQ}{\sin\theta}=\dfrac{b}{\sin(180^\circ-\alpha)}$

すなわち　$\dfrac{PQ}{\sin\theta}=\dfrac{b}{\sin\alpha}$

よって　　$PQ=\dfrac{b\sin\theta}{\sin\alpha}$



$a>b$ であるから　　$AP>PQ$

$\boxed{10}$

解答　$x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ で最小値 6

解説

$x^4-2x^3-x^2+2x+34=(x^2-x+3)(x^2-x-5)+49$

であるから

$$\frac{x^4-2x^3-x^2+2x+34}{x^2-x+3}=\frac{(x^2-x+3)(x^2-x-5)+49}{x^2-x+3}$$

$$=(x^2-x-5)+\frac{49}{x^2-x+3}$$

$$=(x^2-x+3)+\frac{49}{x^2-x+3}-8 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，x^2-x+3 について　　$x^2-x+3=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$

よって，$x^2-x+3>0$，$\dfrac{49}{x^2-x+3}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により　　$(x^2-x+3)+\dfrac{49}{x^2-x+3}\geqq 2\sqrt{(x^2-x+3)\cdot\dfrac{49}{x^2-x+3}}=2\cdot 7=14$　……②

①，② から　　$f(x)\geqq 14-8=6$

等号が成り立つのは $x^2-x+3=\dfrac{49}{x^2-x+3}$ すなわち $x^2-x+3=7$ のときである。

ゆえに　　$x^2-x-4=0$

$x\geqq 0$ であるから，この 2 次方程式の解は　　$x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

したがって，関数 $f(x)$ は $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ で最小値 6 をとる。

$\boxed{11}$

解答　$x=y=z=24$ のとき最小値 144

解説

$$(x+2y+3z)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)=14+2\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+6\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+3\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ より

$$x+2y+3z=4\left\{14+2\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+6\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+3\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\right\}$$

$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係から

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqq 2\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}=2$，　$\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\geqq 2\sqrt{\dfrac{z}{y}\cdot\dfrac{y}{z}}=2$，　$\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\geqq 2\sqrt{\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{z}{x}}=2$

等号は，それぞれ $\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{z}{y}=\dfrac{y}{z}$，$\dfrac{x}{z}=\dfrac{z}{x}$ のとき成立するから，$x=y=z$ のときすべての等号が成立する。

このとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ から　　$\dfrac{6}{x}=\dfrac{1}{4}$

よって　　$x=y=z=24$

したがって，$x+2y+3z$ は，$x=y=z=24$ のとき

最小値 $24+2\cdot 24+3\cdot 24=144$

をとる。

別解　$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから，コーシー・シュワルツの不等式により

$$\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2y})^2+(\sqrt{3z})^2\}\times\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2\right\}$$

$$\geqq\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{2y}\cdot\sqrt{\frac{2}{y}}+\sqrt{3z}\cdot\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2$$

すなわち　　$(x+2y+3z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}\right)\geqq(1+2+3)^2$

よって　　$(x+2y+3z)\cdot\dfrac{1}{4}\geqq 6^2$

ゆえに　　$x+2y+3z\geqq 144$

等号は，$\sqrt{x}:\sqrt{2y}:\sqrt{3z}=\sqrt{\dfrac{1}{x}}:\sqrt{\dfrac{2}{y}}:\sqrt{\dfrac{3}{z}}$　$(x>0,\ y>0,\ z>0)$

かつ　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$，

すなわち $x=y=z=24$ のとき成立する。

したがって，求める最小値は　　144

章末問題C

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}$　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p$ は，p 個の因数 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r$ の積

$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)\times(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)\times\cdots\cdots\times(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)$ である。

$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p$ の展開式における $x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots\cdots x_r^{p_r}$ $(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_r=p)$ の項は，p 個の因数のうちから，x_1 を p_1 個，x_2 を p_2 個，……，x_r を p_r 個取り，それらを掛け合わせて得られる項をすべて加え合わせたものである。

それらの項の数は，p 個の因数のうちから，x_1 を p_1 個，x_2 を p_2 個，……，x_r を p_r 個選ぶ順列の総数であるから，$x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots\cdots x_r^{p_r}$ の項の係数は　$\dfrac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}$

(2)　$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p$ の展開式における x_1^p，x_2^p，……，x_r^p の係数はそれぞれ 1 である。

したがって，(1) から，

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p-(x_1^p+x_2^p+\cdots\cdots+x_r^p) \quad \cdots\cdots ①$$

の各項は　$\dfrac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots\cdots x_r^{p_r}$

ただし　$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_r=p$，

$1\leqq i\leqq r$ について　$0\leqq p_i\leqq p-1$ ……②

と表すことができる。

ここで，$\dfrac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}=\dfrac{p\cdot(p-1)!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}$ は整数であるが，p は素数であり，② から，この式の分母は p を素因数にもたない。

ゆえに，$\dfrac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}$ は p の倍数である。よって，① は p で割り切れる。

(3)　(2) の ① において，$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_r=1$ を代入すると，$r^p-r=r(r^{p-1}-1)$ は素数 p で割り切れる。

ここで，r は p で割り切れないから，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れる。

$\boxed{2}$

解答　(1)　15　　(2)　順に -120，225　　(3)　15　　(4)　略

解説

(1)　$(1-x^2)^6$ の展開式の一般項は　　${}_6C_r\cdot 1^{6-r}\cdot(-x^2)^r=(-1)^r{}_6C_r x^{2r}$

x^4 の項は $2r=4$ すなわち $r=2$ のときで，その係数は　　$(-1)^2{}_6C_2=15$

(2)　$(1+x)^6$ の展開式の一般項は　　${}_6C_p\cdot 1^{6-p}\cdot x^p={}_6C_p x^p$

$(1-y)^6$ の展開式の一般項は　　${}_6C_q\cdot 1^{6-q}\cdot(-y)^q=(-1)^q{}_6C_q y^q$

よって，$(1+x)^6(1-y)^6$ の展開式の一般項は　　$(-1)^q{}_6C_p\cdot{}_6C_q x^p y^q$

xy^3 の項は $p=1$，$q=3$ のときで，その係数は　　$(-1)^3{}_6C_1\cdot{}_6C_3=-6\cdot 20=-120$

x^2y^2 の項は $p=2$，$q=2$ のときで，その係数は　　$(-1)^2{}_6C_2\cdot{}_6C_2=15\cdot 15=225$

(3)　求める値は，$(1+x)^6(1-y)^6$ の展開式における x，y の 4 次の項，すなわち y^4，xy^3，x^2y^2，x^3y，x^4 の係数の和である。

これは $y=x$ とおいた $(1+x)^6(1-y)^6=(1-x^2)^6$ の展開式における x^4 の係数に等しい。

(1) により，求める値は　　15

別解　(与式)$=2({}_6C_0\cdot{}_6C_4-{}_6C_1\cdot{}_6C_3)+({}_6C_2)^2=2(1\cdot 15-6\cdot 20)+15^2=15$

(4)　$f(n)$ は $(1+x)^n(1-y)^n$ の展開式における x，y の 4 次の項，すなわち y^4，xy^3，x^2y^2，x^3y，x^4 の係数の和である。

これは $y=x$ とおいた $(1+x)^n(1-y)^n=(1-x^2)^n$ の展開式における x^4 の係数に等しい。

$(1-x^2)^n$ の展開式の一般項は　${}_n\mathrm{C}_r\cdot 1^{n-r}\cdot(-x^2)^r=(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r x^{2r}$

x^4 の項は $2r=4$ すなわち $r=2$ のときであるから　$f(n)=(-1)^2{}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

よって，$f(n)$ は n の 2 次式である。

別解　$f(n)=2({}_n\mathrm{C}_0\cdot{}_n\mathrm{C}_4-{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_3)+({}_n\mathrm{C}_2)^2$

$$=2\left\{1\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}-n\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}\right\}+\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$$

$$=\frac{n(n-1)}{12}\{(n-2)(n-3)-4n(n-2)+3n(n-1)\}$$

$$=\frac{n(n-1)}{12}(n^2-3n+6-4n^2+8n+3n^2-3n)=\frac{n(n-1)}{12}\cdot6=\frac{n(n-1)}{2}$$

よって，$f(n)$ は n の 2 次式である。

3

解答　(1)　略　　(2)　$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

解説

(1)　$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\neq0)$ とおくと

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a_n}{x^{n-4}}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-5}}+\cdots\cdots+a_0x^4$$

この右辺は，$n\geqq5$ のとき多項式にならない。

一方，条件 (A) から $x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は多項式である。

よって，条件 (A) を満たす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下である。

(2)　$f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ とおくと

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$$

条件 (A) から　$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

この両辺の各項の係数を比較すると　$a_0=a_4$，$a_1=a_3$

よって　$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$　……①

条件 (B) において，$x=1$，$x=2$ を代入すると

$$f(0)=f(1),\quad f(-1)=f(2)$$

これと条件 (C) から

$$a_0=1,\quad 2a_0+2a_1+a_2=1,\quad 2a_0-2a_1+a_2=17a_0+10a_1+4a_2$$

よって　$a_0=1$，$a_1=-2$，$a_2=3$

① に代入して　$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

このとき　$f(1-x)=(1-x)^4-2(1-x)^3+3(1-x)^2-2(1-x)+1$

$$=(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)-2(1-3x+3x^2-x^3)$$
$$+3(1-2x+x^2)-2(1-x)+1$$
$$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1=f(x)$$

となり，条件 (B) を満たす。

したがって　$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

4

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ から　$\dfrac{bc+ca+ab}{abc}=\dfrac{1}{a+b+c}$

ゆえに　$(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$

$\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-abc=0$

$(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)=0$

$(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}=0$

よって　$(b+c)(c+a)(a+b)=0$

ゆえに　$a+b=0$　または　$b+c=0$　または　$c+a=0$

$a+b=0$ のとき　$b=-a$

n は奇数であるから　$\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{(-a)^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{c^n}$

$$\frac{1}{(a+b+c)^n}=\frac{1}{(a-a+c)^n}=\frac{1}{c^n}$$

したがって　$\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{(a+b+c)^n}$

$b+c=0$，$c+a=0$ のときも同様に成り立つ。

以上から　$\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{(a+b+c)^n}$

(2)　$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおくと，条件の式は

$$X+Y+Z=0,\quad X^3+Y^3+Z^3=0$$

$X^3+Y^3+Z^3=(X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)+3XYZ$ であるから

$0=3XYZ$　すなわち　$XYZ=0$

ゆえに　$(x-1)(y-1)(z-1)=0$

したがって　$x-1=0$　または　$y-1=0$　または　$z-1=0$

すなわち，x，y，z の少なくとも 1 つは 1 に等しい。

5

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　略

解説

(1)　$(n+2)^3-(n+1)(n+2)(n+3)=n^3+6n^2+12n+8-(n^3+6n^2+11n+6)$

$$=n+2>0$$

したがって　$(n+1)(n+2)(n+3)<(n+2)^3$

よって　$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)}<n+2$　……①

参考　まず，$(n+1)(n+3)<(n+2)^2$ が成り立つことを示し，両辺に $n+2$ を掛けてもよい。

(2)　$(n+1)(n+4)(n+6)-(n+3)^3=n^3+11n^2+34n+24-(n^3+9n^2+27n+27)$

$$=2n^2+7n-3$$
$$=2n^2+4n+3(n-1)>0$$

したがって　$(n+3)^3<(n+1)(n+4)(n+6)$

よって　$n+3<\sqrt[3]{(n+1)(n+4)(n+6)}$　……②

(3)　$(n+2)(n+3)(n+5)-(n+3)^3=n^3+10n^2+31n+30-(n^3+9n^2+27n+27)$

$$=n^2+4n+3>0$$

したがって　$(n+3)^3<(n+2)(n+3)(n+5)$

よって　$n+3<\sqrt[3]{(n+2)(n+3)(n+5)}$　……③

参考　まず，$(n+3)^2<(n+2)(n+5)$ が成り立つことを示し，両辺に $n+3$ を掛けてもよい。

(4)　②，③ の辺々を掛けて

$$(n+3)^2<\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$$

したがって　$n+3<\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$

① において，n を $n+3$ におき換えると

$$\sqrt[3]{(n+4)(n+5)(n+6)}<n+5\quad\cdots\cdots④$$

①，④ の辺々を掛けて

$$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<(n+2)(n+5)$$
$$=n^2+7n+10$$
$$=\left(n+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}<\left(n+\frac{7}{2}\right)^2$$

したがって　$\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<n+\dfrac{7}{2}$

以上から　$n+3<\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<n+\dfrac{7}{2}$

6

解答　(1)　最小値 $\dfrac{k^2}{3}$　　(2)　最大値 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

解説

(1)　$x+2y=k$ より　$x=-2y+k$

よって　$x^2+2y^2=(-2y+k)^2+2y^2=6y^2-4ky+k^2=6\left(y-\dfrac{k}{3}\right)^2+\dfrac{k^2}{3}$

ゆえに，$y=\dfrac{k}{3}$，$x=\dfrac{k}{3}$ のとき，x^2+2y^2 は最小値 $\dfrac{k^2}{3}$ をとる。

(2)　$x+2y=k$ とすると　$f(x,\ y)=\dfrac{k+3}{x^2+2y^2+3}$

$k\leqq-3$ のとき，$f(x,\ y)\leqq0$ となる。最大値を考えるのだから，$k>-3$ としてよい。

このとき，(1) から

$$f(x,\ y)\leqq\frac{k+3}{\dfrac{k^2}{3}+3}=\frac{3(k+3)}{k^2+9}=\frac{3}{\dfrac{k^2+9}{k+3}}=\frac{3}{\dfrac{(k-3)(k+3)+18}{k+3}}$$

$$=\frac{3}{k-3+\dfrac{18}{k+3}}=\frac{3}{k+3+\dfrac{18}{k+3}-6}$$

ここで，$k+3>0$，$\dfrac{18}{k+3}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均) から

$$k+3+\frac{18}{k+3}\geqq2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$$

よって　$\dfrac{3(k+3)}{k^2+9}\leqq\dfrac{3}{6\sqrt{2}-6}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

ゆえに　$f(x,\ y)\leqq\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

等号が成り立つのは，$y=\dfrac{k}{3}$，$x=\dfrac{k}{3}$　かつ　$k>-3$　かつ　$k+3=\dfrac{18}{k+3}$ のとき，

すなわち，$x=y=-1+\sqrt{2}$　のときである。

このとき，$f(x,\ y)$ は最大値 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。

7

解答　(1)　証明略，等号は $x=y$ のとき成り立つ

(2) 証明略，等号は $n=1$ または $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$ $(n\geqq 2)$ のとき成り立つ

解説

(1) $x>0$，$y>0$ より，$xy>0$ であるから

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}-2=\frac{y^2+x^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geqq 0$$

よって $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqq 2$

等号が成立するための条件は，$x=y$ である。

(2) [1] $n=1$ のとき

左辺$=a_1\cdot\frac{1}{a_1}=1$，右辺$=1^2=1$ より，成り立つ。

[2] $n\geqq 2$ のとき

$$(a_1+\cdots\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$=a_1\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)+a_2\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)+\cdots\cdots+a_n\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_1}{a_n}\right)+\left(\frac{a_2}{a_1}+1+\cdots\cdots+\frac{a_2}{a_n}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_n}{a_2}+\cdots\cdots+1\right)$$

$$=n+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$$

(ただし，$1\leqq i<j\leqq n$)

ここで，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たす自然数の組 $(i,\ j)$ は ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$ 個ある。

また，$a_i>0$，$a_j>0$ であるから，(1) より

$$\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\geqq 2 \quad (\text{等号成立は } a_i=a_j \text{ のとき})$$

よって $(a_1+\cdots\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n+2\times\frac{n(n-1)}{2}=n^2$

$n=1$ のとき，等号は常に成り立つ。

$n\geqq 2$ のとき，等号が成立するための条件は $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$

参考 一般に，次のシュワルツの不等式が成り立つ。

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)\geqq(x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n)^2$$

$x_i=a_i$，$y_j=\frac{1}{a_j}$ とすると，(2) の不等式になる。

8

解答 (1) 略 (2) $(x,\ y)=(3,\ 1),\ (7,\ 5)$

解説

(1) $x^2=y^2+z$ から $(x+y)(x-y)=z$

$z>0$ から $(x+y)(x-y)>0$

$x>0$，$y>0$ より，$x+y>0$ であるから $x-y>0$

よって $x>y$ ……①

また $y+\frac{z}{2y}-x=\frac{2y^2+z-2xy}{2y}=\frac{2y^2+(x^2-y^2)-2xy}{2y}=\frac{(x-y)^2}{2y}$

$y>0$，① から $\frac{(x-y)^2}{2y}>0$

よって $y+\frac{z}{2y}>x$ ……②

①，② から $y<x<y+\frac{z}{2y}$

(2) x，y を正の整数とすると，$y\geqq 1$ より $8\sqrt{2y-1}>0$ であるから，(1) の結果を利用すると，次の不等式が成り立つ。

$$y<x<y+\frac{8\sqrt{2y-1}}{2y} \quad \cdots\cdots ③$$

ここで $\frac{8\sqrt{2y-1}}{2y}=4\sqrt{\frac{2y-1}{y^2}}=4\sqrt{\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}}=4\sqrt{-\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+1}\leqq 4$

よって，③ から $y<x<y+4$

x，y は整数であるから $x=y+1,\ y+2,\ y+3$

[1] $x=y+1$ のとき

$(y+1)^2=y^2+8\sqrt{2y-1}$ から $2y+1=8\sqrt{2y-1}$

両辺を 2 乗すると $(2y+1)^2=64(2y-1)$

整理すると $4y^2-124y+65=0$

これを解くと $y=\frac{31\pm 8\sqrt{14}}{2}$

y は整数であるから，不適。

[2] $x=y+2$ のとき

$(y+2)^2=y^2+8\sqrt{2y-1}$ から $y+1=2\sqrt{2y-1}$

両辺を 2 乗すると $(y+1)^2=4(2y-1)$

整理すると $y^2-6y+5=0$

よって $(y-1)(y-5)=0$ ゆえに $y=1,\ 5$

$y=1$ のとき $x=3$，$y=5$ のとき $x=7$

[3] $x=y+3$ のとき

$(y+3)^2=y^2+8\sqrt{2y-1}$ から $6y+9=8\sqrt{2y-1}$

両辺を 2 乗すると $(6y+9)^2=64(2y-1)$

整理すると $36y^2-20y+145=0$

この 2 次方程式は実数解をもたないから，不適。

[1]～[3] から，求める正の整数 x，y の組は $(x,\ y)=(3,\ 1),\ (7,\ 5)$

9

解答 略

解説

$$x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$
$$=x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$
$$=(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2\geqq 0$$

$$1-(x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$$
$$=1-x^2-y^2+x^2y^2+x^2y^2-2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$
$$=(1-x^2)(1-y^2)+x^2y^2-2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$
$$=(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy)^2\geqq 0$$

よって $0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq 1$

別解 $x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$$=x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$
$$=(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2$$

$|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ より $x=\cos\alpha$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$，$y=\cos\beta$ $(0\leqq\beta\leqq\pi)$ となる α，β が存在する。

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=(\cos\alpha)\sqrt{1-\cos^2\beta}+(\cos\beta)\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$=(\cos\alpha)|\sin\beta|+(\cos\beta)|\sin\alpha|$$
$$=\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha$$
$$=\sin(\alpha+\beta)$$

$-1\leqq\sin(\alpha+\beta)\leqq 1$ から $0\leqq\sin^2(\alpha+\beta)\leqq 1$

よって $0\leqq(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2\leqq 1$

したがって $0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq 1$