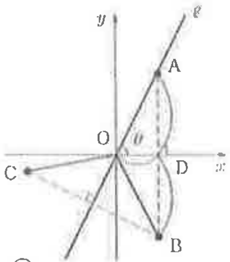
19

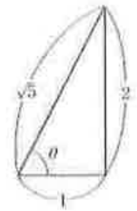
ℓ の傾きは 2 であるから

$$\tan\theta=2$$

このとき

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$





であり

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-1=-\frac{3}{5}\quad\cdots\cdots①$$

OA=OB=OC=a とおく。∠AOB=2θ より

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin 2\theta$$

∠BOC=$2(\pi-2\theta)=2\pi-4\theta$ より

$$\triangle OBC=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin(2\pi-4\theta)=-\frac{1}{2}a^2\sin 4\theta$$

よって

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OBC}=-\frac{\sin 2\theta}{\sin 4\theta}=-\frac{\sin 2\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}$$

← $\sin 4\theta=\sin(2\cdot 2\theta)$
$=2\sin 2\theta\cos 2\theta$

$$=-\frac{1}{2\cos 2\theta}$$

$$=\frac{5}{6}\qquad(①より)$$

20

(1)　$f(x)=\sqrt{6}\sin x+\sqrt{2}\cos x$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\quad(⓪)$$

← $\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$
$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$g(x)=\sqrt{6}\cos x-\sqrt{2}\sin x$

$$=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)\quad(④)$$

← $\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$，
$\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi$$

であるから，$f(x)$ は

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\quad すなわち\quad x=\frac{\pi}{3}\quad(③)$$

のとき，最大値 $2\sqrt{2}$ をとる。

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi\quad すなわち\quad x=\pi\quad(⑧)$$

のとき，最小値 $-\sqrt{2}$ をとる。

(3)　$y=f(x)$ のグラフは $y=2\sqrt{2}\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$ 平行移動したグラフであるから　③

← $f(0)=\sqrt{2}$，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$ から③であることがわかる。

$y=g(x)$ のグラフは $y=2\sqrt{2}\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{2}{3}\pi$ 平行移動したグラフであるから　④

← $g(0)=\sqrt{6}$，$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}$ から④であることがわかる。

(4)　任意の実数 x に対して

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=g(x)\quad(③)$$

が成り立つ。

← $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ 平行移動したグラフが $y=g(x)$

21

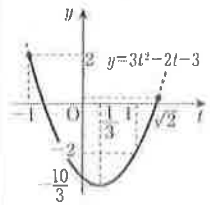
$$t^2=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1+\sin x$$

より

← $\sin x=t^2-1$

$$y=3(t^2-1)-2t=3t^2-2t-3$$

$$=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{10}{3}$$



また

$$t=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

であり，$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき $\frac{\pi}{4}\leqq\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるから

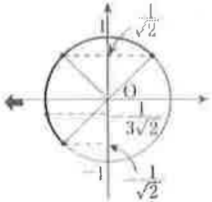
$$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

したがって　$-\frac{10}{3}\leqq y\leqq 2$

次に，$y=-2$ のとき

$$3t^2-2t-1=0$$

$$(t-1)(3t+1)=0\qquad\therefore\ t=1,\ -\frac{1}{3}$$

← 

・$t=1$ のとき，$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ から

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\qquad\therefore\ x=0,\ \pi$$