1

(1)　$x+y=-3$，$xy=-5$ のとき，$x^3+x^2y+xy^2+y^3$ の値を求めよ。

(2)　$x+y=4$，$x^3+y^3=40$ のとき，xy，x^6+y^6 の値を求めよ。

2

次の式の展開式における［　］内の項の係数を求めよ。

(1)　$(2x+7)^5$　$[x^3]$

(2)　$(3-x)^8$　$[x^6]$

(3)　$(3x-2y)^7$　$[x^2y^5]$

3

次の等式を証明せよ。

(1)　${}_nC_0+6{}_nC_1+6^2{}_nC_2+\cdots\cdots+6^n{}_nC_n=7^n$

(2)　n が奇数のとき　${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_n$

4

$(1+2x-x^2)^{10}$ の展開式で，x^3 の係数を求めよ。

5

$2x^2+5xy+2y^2-2x+6y-4$ を $x+y-3$ で割る。

(1)　x の整式とみて，割り算をしたときの商と余りを求めよ。

(2)　y の整式とみて，割り算をしたときの商と余りを求めよ。

6

次の式を計算せよ。

(1)　$\dfrac{2}{x^2+3x+2}+\dfrac{5x}{x^2-x-6}-\dfrac{x+2}{x^2-2x-3}$

(2)　$\dfrac{ca}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{ab}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{bc}{(c-a)(a-b)}$

7

次の式を計算せよ。

(1)　$\dfrac{1}{x(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+9)}$

(2)　$\dfrac{1}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+8x+15}+\dfrac{1}{x^2+12x+35}$

8

次の式を簡単にせよ。

(1)　$\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}}$

(2)　$\dfrac{x+1}{1-\dfrac{1}{x+2}}+\dfrac{x+3}{1+\dfrac{1}{x+2}}$

9

次の等式が x，y についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$a(x+y)^2+b(x-y)^2=x^2+y^2$

(2)　$x^2-y^2-ax+4y-3=(x+y+b)(x-y+c)$

$\boxed{10}$

等式 $ax+(2a-1)y-5a+3=0$ が，a のどのような値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

$\boxed{11}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$，$\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ を証明せよ。

$\boxed{12}$

$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}=3$$

$\boxed{13}$

$x+y+z=a$，$a(xy+yz+zx)=xyz$ が成り立つとき，x，y，z のうち少なくとも 1 つは a であることを証明せよ。

$\boxed{14}$

次の不等式を証明せよ。

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき　$\sqrt{a}+2\sqrt{b}>\sqrt{a+4b}$

(2)　$\sqrt{14}-\sqrt{10}>\sqrt{15}-\sqrt{11}$

$\boxed{15}$

$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$9a+\dfrac{1}{4a}\geqq 3$

(2)　$\dfrac{3b}{2a}+\dfrac{2a}{3b}\geqq 2$

(3)　$a+b+\dfrac{12}{a+b}\geqq 4\sqrt{3}$

(4)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{16}{a}\right)\geqq 25$

$\boxed{16}$

(1)　$a>0$ のとき，$a+\dfrac{25}{a}$ の最小値を求めよ。

(2)　$x>0$，$y>0$ のとき，$(4x+3y)\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}\right)$ の最小値を求めよ。

解説

1

解説

(1)　$x^3+x^2y+xy^2+y^3=(x+y)^3-(2x^2y+2xy^2)=(x+y)^3-2xy(x+y)$

$$=(-3)^3-2\cdot(-5)\cdot(-3)=-27-30=-57$$

(2)　$x^3+y^3=40$ から　　$(x+y)^3-3xy(x+y)=40$

これに $x+y=4$ を代入して　　$4^3-3xy\cdot4=40$

すなわち　　$64-12xy=40$　　　　よって　　$xy=2$

また　　$x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3=(x^3+y^3)^2-2(xy)^3$

$$=40^2-2\cdot2^3=1600-16=1584$$

2

解説

(1)　展開式の一般項は　　${}_5\mathrm{C}_r(2x)^{5-r}\cdot7^r={}_5\mathrm{C}_r\cdot2^{5-r}\cdot7^rx^{5-r}$

x^3 の項は $r=2$ のときで，その係数は　　${}_5\mathrm{C}_2\cdot2^3\cdot7^2=10\cdot8\cdot49=3920$

(2)　展開式の一般項は　　${}_8\mathrm{C}_r\cdot3^{8-r}(-x)^r={}_8\mathrm{C}_r\cdot3^{8-r}\cdot(-1)^rx^r$

x^6 の項は $r=6$ のときで，その係数は　　${}_8\mathrm{C}_6\cdot3^2\cdot(-1)^6=28\cdot9\cdot1=252$

(3)　展開式の一般項は　　${}_7\mathrm{C}_r(3x)^{7-r}(-2y)^r={}_7\mathrm{C}_r\cdot3^{7-r}\cdot(-2)^rx^{7-r}y^r$

x^2y^5 の項は $r=5$ のときで，その係数は

$${}_7\mathrm{C}_5\cdot3^2\cdot(-2)^5=21\cdot9\cdot(-32)=-6048$$

3

解説

(1)　二項定理　$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$　において，

$a=1$，$b=6$ とすると

$$7^n={}_n\mathrm{C}_0+6{}_n\mathrm{C}_1+6^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+6^n{}_n\mathrm{C}_n$$

よって，与えられた等式が成り立つ。

(2)　二項定理　$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$　において，

$a=1$，$b=-1$ とすると

$$(1-1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1(-1)+{}_n\mathrm{C}_2(-1)^2+{}_n\mathrm{C}_3(-1)^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(-1)^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n(-1)^n$$

n は奇数であるから　　$0={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}-{}_n\mathrm{C}_n$

よって　　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$

4

解説

展開式の一般項は　　$\dfrac{10!}{p!q!r!}\cdot1^p\cdot(2x)^q(-x^2)^r=\dfrac{10!}{p!q!r!}\cdot2^q(-1)^rx^{q+2r}$

ただし　　$p+q+r=10$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^3 の項は $q+2r=3$ のときで，$q\geqq0$，$r\geqq0$ であるから　　$r=0$，1

よって，$q+2r=3$ と $p+q+r=10$ を満たす負でない整数 p，q，r の組は

$$(p,\ q,\ r)=(7,\ 3,\ 0),\ (8,\ 1,\ 1)$$

したがって，求める係数は

$$\frac{10!}{7!3!0!}\cdot2^3(-1)^0+\frac{10!}{8!1!1!}\cdot2^1(-1)^1=960-180=780$$

5

解説

$2x^2+5xy+2y^2-2x+6y-4$ を x について整理すると

$$2x^2+(5y-2)x+(2y^2+6y-4)$$

y について整理すると　　$2y^2+(5x+6)y+(2x^2-2x-4)$

(1)

$$\begin{array}{r|l} & 2x+(3y+4) \\ \hline x+(y-3) & 2x^2+(5y-2)x+(2y^2+6y-4) \\ & 2x^2+(2y-6)x \\ \hline & (3y+4)x+(2y^2+6y-4) \\ & (3y+4)x+(3y^2-5y-12) \\ \hline & -y^2+11y+8 \end{array}$$

商 $2x+3y+4$，
余り $-y^2+11y+8$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & 2y+(3x+12) \\ \hline y+(x-3) & 2y^2+(5x+6)y+(2x^2-2x-4) \\ & 2y^2+(2x-6)y \\ \hline & (3x+12)y+(2x^2-2x-4) \\ & (3x+12)y+(3x^2+3x-36) \\ \hline & -x^2-5x+32 \end{array}$$

商 $2y+3x+12$，
余り $-x^2-5x+32$

6

解説

(1) $(\text{与式})=\dfrac{2}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{5x}{(x+2)(x-3)}-\dfrac{x+2}{(x+1)(x-3)}$

$=\dfrac{2(x-3)}{(x+1)(x+2)(x-3)}+\dfrac{5x(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-3)}-\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

$=\dfrac{2x-6+5x^2+5x-(x^2+4x+4)}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\dfrac{4x^2+3x-10}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

$=\dfrac{(4x-5)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\dfrac{4x-5}{(x+1)(x-3)}$

(2) $(\text{与式})=\dfrac{ca(c-a)+ab(a-b)+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$(\text{分子})=c^2a-ca^2+a^2b-ab^2+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

よって　$(\text{与式})=\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$

7

解説

(1) $(\text{与式})=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+6}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+9}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+9}\right)=\dfrac{3}{x(x+9)}$

(2) $(\text{与式})=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}+\dfrac{1}{(x+5)(x+7)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+5}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+7}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+7}\right)=\dfrac{3}{(x+1)(x+7)}$

8

解説

(1) $(\text{与式})=\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}\right)$

$=\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}\div\dfrac{(x-y)^2-(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}$

$=\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x-y)^2-(x+y)^2}=\dfrac{2x^2+2y^2}{-4xy}=-\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$

別解　分母と分子に $(x+y)(x-y)$ を掛けると

$(\text{与式})=\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x-y)^2-(x+y)^2}=\dfrac{2x^2+2y^2}{-4xy}=-\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$

(2) 各項の分母と分子に $x+2$ を掛けると

$(\text{与式})=\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+2)-1}+\dfrac{(x+3)(x+2)}{(x+2)+1}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+1}+\dfrac{(x+3)(x+2)}{x+3}$

$=(x+2)+(x+2)=2x+4$

9

解説

(1) 左辺を整理すると　$(a+b)x^2+2(a-b)xy+(a+b)y^2=x^2+y^2$

両辺の各項の係数が等しいから　$a+b=1,\ 2(a-b)=0$

これを解いて　$a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

別解　[数値代入法による]

恒等式であるから，x，y に適当な値を代入しても等式は成り立つ。

等式に $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ -1)$ を代入すると

$4a=2,\ 4b=2$　　よって　$a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

逆に，このとき

$(\text{左辺})=\dfrac{1}{2}(x+y)^2+\dfrac{1}{2}(x-y)^2=\dfrac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)+\dfrac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)$

$=x^2+y^2=(\text{右辺})$

となるから，与式は確かに恒等式となる。

したがって　$a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

(2) 右辺を展開して整理すると

$x^2-y^2-ax+4y-3=x^2-y^2+(b+c)x+(-b+c)y+bc$

両辺の各項の係数が等しいから

$-a=b+c$ ……①，　$4=-b+c$ ……②，　$-3=bc$ ……③

② から　$c=b+4$ ……④

④ を ③ に代入して　$-3=b(b+4)$　　よって　$b^2+4b+3=0$

これを解いて　$b=-1,\ -3$

④，① から，$b=-1$ のとき　$c=3,\ a=-2$

$b=-3$ のとき　$c=1,\ a=2$

したがって　$a=2,\ b=-3,\ c=1$　または　$a=-2,\ b=-1,\ c=3$

10

解説

等式を a について整理すると　$(x+2y-5)a-y+3=0$

これが a についての恒等式であるとき　$x+2y-5=0,\ -y+3=0$

これを解いて　$x=-1,\ y=3$

$\boxed{11}$

解説

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{bk+b}{b}=\frac{b(k+1)}{b}=k+1$$

$$\frac{c+d}{d}=\frac{dk+d}{d}=\frac{d(k+1)}{d}=k+1$$

よって　$\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$

$$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{b^2k+d^2k}{b^2k-d^2k}=\frac{(b^2+d^2)k}{(b^2-d^2)k}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

$$\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\frac{(b^2+d^2)k^2}{(b^2-d^2)k^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

よって　$\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$

$\boxed{12}$

解説

$a+b+c=0$ から　$c=-(a+b)$

よって　$(\text{左辺})=\dfrac{a^2}{(a+b)(-b)}+\dfrac{b^2}{(-a)(b+a)}+\dfrac{\{-(a+b)\}^2}{(-b)(-a)}$

$$=\frac{-a^3-b^3+(a+b)^3}{ab(a+b)}=\frac{3a^2b+3ab^2}{ab(a+b)}$$

$$=\frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)}=3=(\text{右辺})$$

別解　$a+b+c=0$ から　$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$

よって　$(\text{左辺})=\dfrac{a^2}{(-c)(-b)}+\dfrac{b^2}{(-a)(-c)}+\dfrac{c^2}{(-b)(-a)}$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$$

$$=\frac{3abc}{abc}=3=(\text{右辺})$$

注意　別解では，次の等式を利用している。

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$\boxed{13}$

解説

$$(x-a)(y-a)(z-a)=\{xy-(x+y)a+a^2\}(z-a)$$

$$=xyz-xya-(x+y)za+(x+y)a^2+za^2-a^3$$

$$=xyz-(xy+yz+zx)a+(x+y+z)a^2-a^3$$

$$=xyz-xyz+a\cdot a^2-a^3=0$$

よって　$x-a=0$　または　$y-a=0$　または　$z-a=0$

したがって，x，y，z のうち少なくとも 1 つは a である。

$\boxed{14}$

解説

(1)　$a>0,\ b>0$ から　$\sqrt{a}+2\sqrt{b}>0,\ \sqrt{a+4b}>0$　……①

両辺の平方の差をとると

$$(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+4b})^2=a+4\sqrt{ab}+4b-(a+4b)$$

$$=4\sqrt{ab}>0$$

よって　$(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+4b})^2$

ゆえに，① から　$\sqrt{a}+2\sqrt{b}>\sqrt{a+4b}$

(2)　$\sqrt{14}-\sqrt{10}>\sqrt{15}-\sqrt{11}$ を示すには，$\sqrt{14}+\sqrt{11}>\sqrt{15}+\sqrt{10}$ を示せばよい。

$\sqrt{14}+\sqrt{11}>0,\ \sqrt{15}+\sqrt{10}>0$　……①

両辺の平方の差をとると

$$(\sqrt{14}+\sqrt{11})^2-(\sqrt{15}+\sqrt{10})^2=(14+2\sqrt{14\cdot 11}+11)-(15+2\sqrt{15\cdot 10}+10)$$

$$=2(\sqrt{154}-\sqrt{150})>0$$

よって　$(\sqrt{14}+\sqrt{11})^2>(\sqrt{15}+\sqrt{10})^2$

ゆえに，① から　$\sqrt{14}+\sqrt{11}>\sqrt{15}+\sqrt{10}$

したがって　$\sqrt{14}-\sqrt{10}>\sqrt{15}-\sqrt{11}$

$\boxed{15}$

(解説)

相加平均と相乗平均の大小関係を利用する。

(1)　$9a>0$，$\dfrac{1}{4a}>0$ であるから

$$9a+\frac{1}{4a} \geqq 2\sqrt{9a\cdot\frac{1}{4a}}=2\sqrt{\frac{9}{4}}=3$$

等号が成り立つのは，$9a=\dfrac{1}{4a}$ すなわち $a^2=\dfrac{1}{36}$ のときであるが，$a>0$ であるから

$a=\dfrac{1}{6}$ のときである。

(2)　$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{3b}{2a}>0$，$\dfrac{2a}{3b}>0$ であるから

$$\frac{3b}{2a}+\frac{2a}{3b} \geqq 2\sqrt{\frac{3b}{2a}\cdot\frac{2a}{3b}}=2$$

等号が成り立つのは，$\dfrac{3b}{2a}=\dfrac{2a}{3b}$ すなわち $(2a)^2=(3b)^2$ のときであるが，$a>0$，$b>0$

であるから $2a=3b$ のときである。

(3)　$a>0$，$b>0$ より，$a+b>0$，$\dfrac{12}{a+b}>0$ であるから

$$a+b+\frac{12}{a+b} \geqq 2\sqrt{(a+b)\cdot\frac{12}{a+b}}=4\sqrt{3}$$

等号が成り立つのは，$a+b=\dfrac{12}{a+b}$ すなわち $(a+b)^2=12$ のときであるが，

$a+b>0$ であるから $a+b=2\sqrt{3}$ のときである。

(4)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{16}{a}\right)=ab+16+1+\dfrac{16}{ab}=ab+\dfrac{16}{ab}+17$

$a>0$，$b>0$ より，$ab>0$，$\dfrac{16}{ab}>0$ であるから

$$ab+\frac{16}{ab} \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}}=8$$

よって　　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{16}{a}\right) \geqq 8+17=25$

等号が成り立つのは，$ab=\dfrac{16}{ab}$ すなわち $(ab)^2=16$ のときであるが，$ab>0$ であるか

ら $ab=4$ のときである。

$\boxed{16}$

(解説)

(1)　$a>0$，$\dfrac{25}{a}>0$ であるから

$$a+\frac{25}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{25}{a}}=10 \quad \cdots\cdots ①$$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{25}{a}$ すなわち $a^2=25$ のときである。

$a>0$ から，$a^2=25$ のとき　　$a=5$

よって　　$a=5$ で最小値 10

注意　① が得られたからといって，すぐに「最小値が 10」としてはいけない。

最小値を与える a の値が存在することをきちんと確認する必要がある。

(2)　$(4x+3y)\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}\right)=16+\dfrac{12x}{y}+\dfrac{12y}{x}+9=12\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)+25$

$x>0$，$y>0$ より，$\dfrac{y}{x}>0$，$\dfrac{x}{y}>0$ であるから

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2$$

よって　　$(4x+3y)\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}\right) \geqq 12\cdot 2+25=49$

等号が成り立つのは，$\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}$ すなわち $x^2=y^2$ のときであるが，$x>0$，$y>0$ から

$x=y$ のときである。

したがって　　$x=y$ のとき最小値 49