中3数学総合SA＋　6月度第1講演習問題

1

△ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1)　$a=12$，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$ のとき　b，外接円の半径 R

(2)　$b=\sqrt{6}$，$c=2$，$C=45^\circ$ のとき　B，A

(3)　$a=3$，外接円の半径 $R=3$ のとき　A

2

△ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1)　$b=\sqrt{2}$，$c=4$，$A=45^\circ$ のとき　a　　(2)　$a=4$，$b=7$，$C=60^\circ$ のとき　c

(3)　$a=13$，$b=7$，$c=15$ のとき　A

3

△ABCにおいて，次のものを求めよ。

(1)　$a=4$，$b=\sqrt{13}$，$B=60^\circ$ のとき　c

(2)　$b=2\sqrt{2}$，$c=4$，$C=135^\circ$ のとき　a

4

△ABCの辺BCの中点をM，線分BMの中点をDとする。$a=8$，$b=4$，$c=6$ のとき，AM，ADの長さを求めよ。

$\boxed{5}$

次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1) $a=\sqrt{6}$，$b=2$，$c=1+\sqrt{3}$

(2) $a=2\sqrt{3}$，$c=3-\sqrt{3}$，$B=120°$

(3) $a=10$，$A=45°$，$C=30°$

(4) $b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30°$

$\boxed{6}$

△ABC において，$a=5$，$b-c=2$，$A=120°$ のとき，b と c を求めよ。

$\boxed{7}$

△ABC において，次のものを求めよ。

(1) $A:B:C=1:2:3$ のとき　A，B，C，$a:b:c$

(2) $\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{3}:\sqrt{7}:4$ のとき　B

$\boxed{8}$

△ABC において，$\dfrac{\sin A}{5}=\dfrac{\sin B}{16}=\dfrac{\sin C}{19}$ のとき，この三角形の最も大きい角の大きさを求めよ。

解説

1

解説

(1)　正弦定理により　$\dfrac{12}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 60^\circ}=2R$

よって　$b=\dfrac{12\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=6\sqrt{6}$，　$R=\dfrac{12}{2\sin 45^\circ}=6\sqrt{2}$

(2)　正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$

よって　$\sin B=\dfrac{\sqrt{6}\sin 45^\circ}{2}=\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$C=45^\circ$ より $0^\circ<B<135^\circ$ であるから　$B=60^\circ$，120°

$B=60^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$

$B=120^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$

(3)　正弦定理により　$\dfrac{3}{\sin A}=2\cdot 3$　よって　$\sin A=\dfrac{3}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{2}$

したがって　$A=30^\circ$，150°

2

解説

(1)　余弦定理により　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$=(\sqrt{2})^2+4^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 4\cos 45^\circ=10$$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{10}$

(2)　余弦定理により　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$=4^2+7^2-2\cdot 4\cdot 7\cos 60^\circ=37$$

$c>0$ であるから　$c=\sqrt{37}$

(3)　余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7^2+15^2-13^2}{2\cdot 7\cdot 15}=\frac{105}{2\cdot 7\cdot 15}=\frac{1}{2}$$

よって　$A=60^\circ$

3

解説

(1)　余弦定理により，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ であるから

$$(\sqrt{13})^2=c^2+4^2-2\cdot c\cdot 4\cos 60^\circ$$

よって　$c^2-4c+3=0$　これを解いて　$c=1$，3

(2)　余弦定理により，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ であるから

$$4^2=a^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot a\cdot 2\sqrt{2}\cos 135^\circ$$

よって　$a^2+4a-8=0$　これを解いて　$a=-2\pm 2\sqrt{3}$

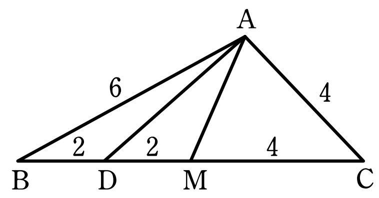
$a>0$ であるから　$a=-2+2\sqrt{3}$

4

解説

与えられた条件から

$$\mathrm{BM}=\frac{a}{2}=4,\quad \mathrm{BD}=\frac{\mathrm{BM}}{2}=2$$



△ABC において，余弦定理により

$$\cos B=\frac{6^2+8^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 8}=\frac{84}{2\cdot 6\cdot 8}=\frac{7}{8}$$

△ABM において，余弦定理により

$$\mathrm{AM}^2=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{7}{8}=10$$

$\mathrm{AM}>0$ であるから　$\mathrm{AM}=\sqrt{10}$

△ABD において，余弦定理により　$\mathrm{AD}^2=6^2+2^2-2\cdot 6\cdot 2\cdot\dfrac{7}{8}=19$

$\mathrm{AD}>0$ であるから　$\mathrm{AD}=\sqrt{19}$

5

解説

(1)　余弦定理により

$$\cos A=\frac{2^2+(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{3})}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{2}\qquad \text{よって}\qquad A=60^\circ$$

$$\cos B=\frac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{6}}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(1+\sqrt{3})\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \text{よって}\qquad B=45^\circ$$

したがって　$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$

(2)　余弦定理により

$$b^2=(3-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}\cos 120^\circ=18$$

$b>0$ であるから　$b=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

余弦定理により

$$\cos A=\frac{(3\sqrt{2})^2+(3-\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot(3-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{18-6\sqrt{3}}{6\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{6\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \text{よって}\qquad A=45^\circ$$

したがって　$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=15^\circ$

別解　b を求めた後で A を求めるのに，正弦定理を用いてもよい。

正弦定理により　$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin A}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ}$

よって　$\sin A=\dfrac{2\sqrt{3}\sin 120^\circ}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$B=120^\circ$ より $0^\circ<A<60^\circ$ であるから　$A=45^\circ$

(3)　$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}$

よって　$c=\dfrac{10\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=10\cdot\dfrac{1}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

余弦定理により，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ であるから

$$10^2=b^2+(5\sqrt{2})^2-2\cdot b\cdot 5\sqrt{2}\cos 45^\circ$$

よって　$b^2-10b-50=0$　　これを解いて　$b=5\pm 5\sqrt{3}=5(1\pm\sqrt{3})$

$b>0$ であるから　$b=5(1+\sqrt{3})$

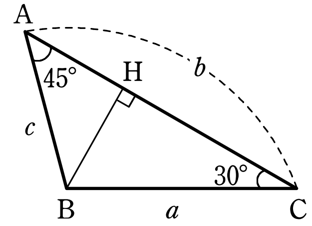
注意　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ の代わりに $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ を用いてもよい。

この場合，$(5\sqrt{2})^2=10^2+b^2-2\cdot 10\cdot b\cos 30^\circ$ から　$b^2-10\sqrt{3}b+50=0$　が得られる。

これを解くと　$b=5(\sqrt{3}\pm 1)$

ここで，$B=105^\circ$ で最大角であるから，b が最大辺で $b>10$ となり，$b=5(\sqrt{3}+1)$ のみ適する。

別解　c を求めた後で，次のように b を求めてもよい。



点 B から辺 CA に垂線 BH を下ろすと

$$b=\mathrm{AH}+\mathrm{CH}=c\cos A+a\cos C$$
$$=5\sqrt{2}\cos 45^\circ+10\cos 30^\circ$$
$$=5+5\sqrt{3}=5(1+\sqrt{3})$$

(4)　(解 1)　[先に a を求める]

余弦定理により，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ であるから

$$3^2=(3\sqrt{3})^2+a^2-2\cdot 3\sqrt{3}\cdot a\cos 30^\circ$$

ゆえに　$a^2-9a+18=0$　　これを解いて　$a=3,\ 6$

[1]　$a=3$ のとき

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{3^2+(3\sqrt{3})^2-3^2}{2\cdot 3\cdot 3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　ゆえに　$A=30^\circ$

よって　$C=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

[2]　$a=6$ のとき

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{3^2+(3\sqrt{3})^2-6^2}{2\cdot 3\cdot 3\sqrt{3}}=0$　　ゆえに　$A=90^\circ$

よって　$C=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$

以上から　$a=3,\ A=30^\circ,\ C=120^\circ$　または　$a=6,\ A=90^\circ,\ C=60^\circ$

(解 2)　[先に，角の大きさを求める]

正弦定理により　$\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin C}$　　よって　$\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}\sin 30^\circ}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$B=30^\circ$ より $0^\circ<C<150^\circ$ であるから　$C=60^\circ,\ 120^\circ$

[1]　$C=60^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$

三平方の定理により　$a=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}=6$

[2]　$C=120^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

よって，$A=B$ であるから，△ABC は $a=b$ の二等辺三角形である。

ゆえに　$a=3$

以上から　$a=6,\ A=90^\circ,\ C=60^\circ$　または　$a=3,\ A=30^\circ,\ C=120^\circ$

$\boxed{6}$

(解説)

$b-c=2$ から　　$b=c+2$　…… ①

余弦定理により　　$5^2=b^2+c^2-2bc\cos 120°$

① を代入すると　　$5^2=(c+2)^2+c^2-2(c+2)c\cos 120°$

整理して　　$3(c^2+2c-7)=0$　　　これを解くと　　$c=-1\pm 2\sqrt{2}$

$c>0$ であるから　　$c=-1+2\sqrt{2}$

これを ① に代入して　　$b=1+2\sqrt{2}$　　　これは $b>0$ を満たす。

$\boxed{7}$

(解説)

(1)　$A:B:C=1:2:3$ から　$A=\theta$，$B=2\theta$，$C=3\theta$　とおける。

$A+B+C=180°$ であるから　　$\theta+2\theta+3\theta=180°$　　すなわち　　$6\theta=180°$

よって　　$\theta=30°$　　　ゆえに　　$A=30°$，$B=60°$，$C=90°$

正弦定理により　　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$$=\sin 30°:\sin 60°:\sin 90°$$

$$=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$$

(2)　正弦定理により　　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{3}:\sqrt{7}:4$

よって，$a=\sqrt{3}\,k$，$b=\sqrt{7}\,k$，$c=4k$（$k>0$）とおける。

余弦定理により　　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{(4k)^2+(\sqrt{3}\,k)^2-(\sqrt{7}\,k)^2}{2\cdot 4k\cdot\sqrt{3}\,k}$

$$=\frac{12k^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{3}\,k^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　　$B=30°$

$\boxed{8}$

(解説)

正弦定理により　　$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

また，与えられた等式より，$\sin A:\sin B:\sin C=5:16:19$ であるから

$$a:b:c=5:16:19$$

よって，$a=5k$，$b=16k$，$c=19k$（$k>0$）とおける。

$a<b<c$ であるから　　$A<B<C$

よって，C が最大の角である。

余弦定理により　　$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(5k)^2+(16k)^2-(19k)^2}{2\cdot 5k\cdot 16k}$

$$=\frac{(25+256-361)k^2}{2\cdot 5\cdot 16k^2}=\frac{-80k^2}{2\cdot 5\cdot 16k^2}=-\frac{1}{2}$$

よって　　$C=120°$　　　したがって，求める角の大きさは　$120°$