中3数学総合SA＋　夏期第５講確認テスト　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$

次のことが成り立つことを証明せよ。

(1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき　　[1] $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$　　[2] $\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{cd}{c^2+d^2}$

$\boxed{2}$

$x+y+z=a$，$a(yz+zx+xy)=xyz$ が成り立つとき，x，y，z のうち，少なくとも1つは a であることを証明せよ。

解答

$\boxed{1}$

(解説)

(1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

[1] $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{bk-b}{b}=k-1,\quad \dfrac{c-d}{d}=\dfrac{dk-d}{d}=k-1$

よって　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

[2] $\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{b^2k}{b^2k^2+b^2}=\dfrac{k}{k^2+1},\quad \dfrac{cd}{c^2+d^2}=\dfrac{d^2k}{d^2k^2+d^2}=\dfrac{k}{k^2+1}$

よって　$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{cd}{c^2+d^2}$

$\boxed{2}$

(解説)

$$(x-a)(y-a)(z-a)=xyz-(yz+zx+xy)a+(x+y+z)a^2-a^3$$

よって，$x+y+z=a$，$a(yz+zx+xy)=xyz$ が成り立つとき

$$(x-a)(y-a)(z-a)=xyz-xyz+a\cdot a^2-a^3=0$$

したがって，$x-a=0$ または $y-a=0$ または $z-a=0$ であるから，
x，y，z のうち少なくとも 1 つは a である。