第１章

～　式と証明　～

第１講　二項定理

１　二項定理

1　パスカルの三角形

１　数の配列は左右対称で，各行の両端の数は１である。

２　２行目以降の両端以外の数は，左上と右上の数の和に等しい。

$n=1$	1　1	$a+b$
$n=2$	1　2　1	$(a+b)^2$
$n=3$	1　3　3　1	$(a+b)^3$
$n=4$	1　4　6　4　1	$(a+b)^4$
$n=5$	1　5　10　10　5　1	$(a+b)^5$

2　二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

3　$(a+b+c)^n$ の展開式　研究

$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \qquad \text{ただし}\quad p+q+r=n$$

第１講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

二項定理を用いて，次の式の展開式を求めよ。

(1)　$(x-3)^4$　　　　(2)　$(2x+y)^6$

$\boxed{2}$ ★★☆

次の式の展開式における [　] 内の項の係数を求めよ。

(1)　$(2x+3y)^5$　$[x^3y^2]$　　　　(2)　$(5x^2-2)^6$　$[x^6]$

(3)　$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^9$　[定数項]

$\boxed{3}$ ★★☆

次の等式を証明せよ。

$$ {}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^n{}_n\mathrm{C}_n=3^n $$

$\boxed{4}$ ★★☆

次の式の展開式における，[　]内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x+y+z)^5$　$[xy^2z^2]$　　　　(2)　$(a+b-2c)^7$　$[a^2b^3c^2]$

$\boxed{5}$ ★★★

$(1+x+x^2)^7$ の展開式における，x^3 の項の係数を求めよ。

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

次の式の展開式を求めよ。

(1)　$(a+b)^6$　　(2)　$(x-1)^7$　　(3)　$(2x+y)^5$　　(4)　$(3x-2y)^4$

$\boxed{2}$

次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x+2)^7$　　$[x^4]$　　(2)　$(x^2-1)^7$　　$[x^4,\ x^3]$

(3)　$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$　　$[x^{11}]$　　(4)　$\left(2x^4-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$　　[定数項]

$\boxed{3}$

次の等式を証明せよ。

(1)　${}_n\mathrm{C}_0-3{}_n\mathrm{C}_1+9{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-3)^n{}_n\mathrm{C}_n=(-2)^n$

(2)　${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

(3)　${}_n\mathrm{C}_0-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\boxed{4}$

次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x+2y+3z)^4$　$[x^3z]$　　(2)　$\left(2x-\dfrac{1}{2}y+z\right)^4$　$[xy^2z]$

$\boxed{5}$

$(x^2-3x+1)^{10}$ の展開式における x^3 の項の係数を求めよ。

第１講　レベルＡ

$\boxed{1}$ (1)［千葉工業大］(2)［小樽商科大］

(1)　$(2x+1)^n$ を展開した式における x^2 の係数が 420 であるとき，n の値を求めよ。

(2)　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ の展開式において，定数項を求めよ。

$\boxed{2}$［中京大］

$(x+ay+bz)^4$ の展開式で，x^2yz の係数が 1056，x^3z の係数が 44 のとき，定数 a，b の値を求めよ。また，このときの x^2z^2 の係数を求めよ。

$\boxed{3}$

n は 2 以上の整数とする。二項定理を利用して，次の不等式を証明せよ。

(1)　$a>0$ のとき　$(1+a)^n>1+na$　　　(2)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

第１講　レベルＢ

$\boxed{1}$(1)［愛知大］(2)［愛媛大］

(1)　11^{13} を 1000 で割るとき，余りを求めよ。

(2)　33^{20} を 90 で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{2}$

$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_r x^r + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$　を利用して，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　${}_n\mathrm{C}_0 - \dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2} + \dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2} - \cdots\cdots + (-1)^n \dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$

(2)　n が奇数のとき　${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^{n-1}$

(3)　n が偶数のとき　${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} = 2^{n-1}$

第２講　整式の割り算・分数式・恒等式

2　整式の割り算

1　整式の割り算

1　整式 A を整式 B で割った商を Q，余りを R とすると

$$A = BQ + R$$　(ただし，R は 0 か，B より次数の低い整式)

2　整式 A を整式 B で割った商と余りを求める計算では，A，B を降べきの順に整理してから行う。

3　分数式とその計算

1　分数式

2 つの整式 A，B によって $\dfrac{A}{B}$ の形で表され，B に文字を含む式を，**分数式** という。

2　分数式の計算

1　$\dfrac{A}{B} = \dfrac{A \times C}{B \times C}$，　$\dfrac{A}{B} = \dfrac{A \div D}{B \div D}$　$(C \fallingdotseq 0,\ D \fallingdotseq 0)$

2　$\dfrac{A}{B} \times \dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$，　$\dfrac{A}{B} \div \dfrac{C}{D} = \dfrac{A}{B} \times \dfrac{D}{C} = \dfrac{AD}{BC}$

3　$\dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C} = \dfrac{A+B}{C}$，　$\dfrac{A}{C} - \dfrac{B}{C} = \dfrac{A-B}{C}$

3　部分分数に分解　$a \fallingdotseq b$ のとき

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)$$

4　恒等式

1　恒等式の性質

恒等式の両辺が x についての整式のとき，各辺で同類項を整理すると，次のことが成り立つ。

両辺の同じ次数の項の係数は，それぞれ等しい。

たとえば，x についての 2 次の整式について，次のことが成り立つ。

1　$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x についての恒等式である

$$\Longleftrightarrow\ a = a',\ b = b',\ c = c'$$

2　$ax^2 + bx + c = 0$ が x についての恒等式である

$$\Longleftrightarrow\ a = b = c = 0$$

2　恒等式の係数決定

①　**係数比較法**　両辺の同じ次数の項の係数を比較する。

②　**数値代入法**　適当な値を代入して，連立方程式を作り，それを解く。
(逆の確認が必要)

第２講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の整式 A を整式 B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A=x^2+5x+8$，$B=x+3$　　(2) $A=3x^3+8x^2+7$，$B=x^2-1+3x$

$\boxed{2}$ ★★☆

次の条件を満たす整式 A，B を求めよ。

(1) A を x^2-2x-1 で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ となる。

(2) $6x^3-x^2+3x+5$ を B で割ると，商が $3x+1$，余りが $-2x+3$ となる。

$\boxed{3}$ ★★☆

次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2}{x+3}-\dfrac{9}{x+3}$　　(2) $\dfrac{5x}{x^2-4}+\dfrac{10}{4-x^2}$

(3) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}$　　(4) $\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-1}$

$\boxed{4}$ ★☆☆

次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}}$　　(2) $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$

$\boxed{5}$ ★☆☆

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $ax^2+bx=(x-2)(x+2)+c(x+2)^2$

(2) $x^2=a(x-2)^2+b(x-2)+c$

(3) $4x^2-13x+13=a(x^2-1)+b(x+1)(x-2)+c(x-2)(x-1)$

$\boxed{6}$ ★★☆

等式 $\dfrac{5x+1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

第２講　例題

$\boxed{7}$ ★★☆

等式 $(1-2k)x+(2-k)y-4-k=0$ が，k のどのような値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

$\boxed{8}$ ★★☆

x についての整式 $2x^3+ax+10$ を x^2-3x+b で割ると余りが $3x-2$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。また，そのときの商を求めよ。

第２講　例題演習

$\boxed{1}$

次の整式 A，B について，A を B で割った商と余りを求めよ。

(1)　$A=2x^3+7x^2+5x+7$，$B=x+3$

(2)　$A=x^3-3x+2$，$B=x^2+4x-1$

(3)　$A=2x^4+x+5x^2+2-7x^3$，$B=2x^2-3x+1$

(4)　$A=4x^4-x^3+4x+8$，$B=2x^2-x+2$

$\boxed{2}$

次の条件を満たす整式 A，B を求めよ。

(1)　A を x^2+4x-3 で割ると，商が $3x+2$，余りが $4x+5$ となる。

(2)　$6x^4-7x^3+4x^2-3x+5$ を B で割ると，商が $2x^2-3x+1$，余りが $2x+3$ となる。

$\boxed{3}$

次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x}{x-4}+\dfrac{x-8}{x-4}$　　(2)　$\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{a}{a-x}$　　(3)　$\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

(4)　$\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}-\dfrac{1}{(x-5)(x+3)}$　　(5)　$\dfrac{x+8}{x^2+x-2}+\dfrac{x-4}{x^2-x}$

$\boxed{4}$

次の式を簡単にせよ。

(1)　$\dfrac{x-\dfrac{6}{x-1}}{1-\dfrac{2}{x-1}}$　　(2)　$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$

$\boxed{5}$

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

(1)　$x=a(x-2)+b(x-1)$

(2)　$x^2-x-3=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

(3)　$12x^2+43x+c=(4x+5)(ax+b)$

(4)　$ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)=2x^2+3x-1$

(5)　$x^3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

第２講　例題演習

$\boxed{6}$

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $\dfrac{3x-1}{x^2-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$　　　(2) $\dfrac{x-5}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}$

$\boxed{7}$

等式 $(k+1)x-(2k+3)y-3k-5=0$ が，k のどのような値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

$\boxed{8}$

(1) x についての整式 $2x^3+ax^2+bx+2$ を x^2-x+1 で割ると，余りが $x+3$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。また，そのときの商を求めよ。

(2) x についての整式 $x^3+ax^2-13x+b$ が x^2-2x+3 で割り切れるように，定数 a，b の値を定めよ。また，そのときの商を求めよ。

第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$

$2x^2+5xy+2y^2-2x+6y-4$ を $x+y-3$ で割る。

(1)　x の整式とみて，割り算をしたときの商と余りを求めよ。

(2)　y の整式とみて，割り算をしたときの商と余りを求めよ。

$\boxed{2}$［武蔵大］

次の式を簡単にせよ。

(1)　$$\frac{\dfrac{x^4-7x^2+12}{x^2-x-6}\times\dfrac{2x^2+7x+3}{2x+1}}{x^2+x-6}$$

(2)　$$\frac{3x-5}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}}-\frac{x(2x-3)}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x-1}}}$$

$\boxed{3}$

次の等式が x，y についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$2x^2-xy-3y^2+5x-5y+a=(x+y+b)(2x-3y+c)$$

第２講　レベルＢ

$\boxed{1}$［武庫川女子大］

$2x-4y+5z=3$，$3x+y+4z=1$ が成り立つとき，$px^2+qy^2+rz^2=2$ が x，y，z についての恒等式となるように，定数 p，q，r の値を定めよ。

$\boxed{2}$(1)［摂南大］(2)［東北学院大］

(1)　a，b を整数とする．$x^4+ax^3+11x^2+bx+1$ が，ある 2 次式の平方になるとき，a，b の値を求めよ．

(2)　整式 $x^4-x^3-ax^2+bx-6$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，a,b の値を求めよ．

$\boxed{3}$［東京都立大］

多項式 $f(x)$ について，恒等式 $f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$ が成り立つとする。

(1)　$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ の値を求めよ。　　(2)　$f(x)$ の次数を求めよ。

(3)　$f(x)$ を決定せよ。

第３講　等式の証明

５　等式の証明

$\boxed{1}$　**恒等式の証明**

恒等式 $A=B$ の証明方法

１　A か B の一方を変形して，他方を導く。

２　A と B の両方を変形して，同じ式を導く。

３　$A-B$ を変形して，0 になることを示す。

$\boxed{2}$　**条件つきの等式の証明**

①　条件式を用いて文字を消去し，$\boxed{1}$ で示した恒等式の証明方法で行う。

②　条件式が $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ($\Longleftrightarrow$ $a:b=c:d$，$a:c=b:d$) のような比の値を用いた式 (比例式) のときは，(比の値)$=k$ とおく。

第３講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

等式 $(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$ を証明せよ。

$\boxed{2}$ ★★☆

次のことが成り立つことを証明せよ。

(1)　$a+b=1$ のとき　　$a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$

(2)　$a+b+c=0$ のとき　　$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)=-3abc$

(3)　$a+b+c=0$ のとき　　$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc=0$

$\boxed{3}$ ★★☆

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d)$　　　　(2)　$\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$

$\boxed{4}$ ★★★

$2(ab+bc+ca)=abc$，$a+b+c=2$ のとき，a，b，c のうち少なくとも１つは２であることを示せ。

第３講　例題演習

$\boxed{1}$

次の等式を証明せよ。

(1)　$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

(2)　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$\boxed{2}$

$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0$

(2)　$(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2=-2(bc+ca+ab)$

$\boxed{3}$

次のことが成り立つことを証明せよ。

(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき　　[1]　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$　　[2]　$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{cd}{c^2+d^2}$

(2)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき　　[1]　$\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x}{a}$　　[2]　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

$\boxed{4}$

$x+y+z=a$，$a(yz+zx+xy)=xyz$ が成り立つとき，x，y，z のうち，少なくとも 1 つは a であることを証明せよ。

第３講　レベルＡ

1 ［倉敷芸術科学大］

$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}=3$$

2

$\dfrac{x+y}{6}=\dfrac{y+z}{7}=\dfrac{z+x}{8}\neq 0$ のとき，$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xz+yz-y^2}$ の値を求めよ。

3

$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ のとき，この式の値を求めよ。

第３講　レベルＢ

$\boxed{1}$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$ のとき，x，y，z のうち，どれか 2 つの和は 0 であることを証明せよ。

$\boxed{2}$［大阪市立大］

実数 α，β，γ が $\alpha+\beta+\gamma=3$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ を満たしているとき，α，β，γ はすべて 1 であることを示せ。

$\boxed{3}$

$ax^2+bx+c=0$ が互いに異なる 3 つの x の値 x_1，x_2，x_3 に対して成り立つとき，$a=b=c=0$ であることを証明せよ。

第４講　不等式の証明

６　不等式の証明

注　以下では，とくに断らない限り，文字は実数を表すものとする。

1　実数の大小関係

０　2 つの実数 a，b については，$a>b$，$a=b$，$a<b$ のうち，どれか 1 つの関係だけが成り立つ。

１　$a>b$，$b>c \Longrightarrow a>c$

２　$a>b \Longrightarrow a+c>b+c$，$a-c>b-c$

３　$a>b$，$c>0 \Longrightarrow ac>bc$，$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

４　$a>b$，$c<0 \Longrightarrow ac<bc$，$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

５　$a>b \Longleftrightarrow a-b>0$　　　６　$a<b \Longleftrightarrow a-b<0$

2　不等式の証明

不等式を証明するには，上記の大小関係，および以下の性質を利用する。

実数の平方　$a^2 \geqq 0$　(等号は $a=0$ のとき成り立つ)

$a^2+b^2 \geqq 0$　(等号は $a=b=0$ のとき成り立つ)

平方の大小　$a>0$，$b>0$ のとき　$a^2>b^2 \Longleftrightarrow a>b$，$a^2 \geqq b^2 \Longleftrightarrow a \geqq b$

絶対値　$|a| \geqq 0$，$|a| \geqq a$，$|a| \geqq -a$，$|a|^2=a^2$，$|ab|=|a||b|$

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　(等号は $a=b$ のとき成り立つ)

第４講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次のことを証明せよ。

(1)　$x>3$，$y>4$ のとき，$xy+12>4x+3y$

(2)　$a>b>0$ のとき，$\dfrac{a}{1+a}>\dfrac{b}{1+b}$

$\boxed{2}$ ★★☆

次の不等式を証明せよ。また，(2) は等号が成り立つ場合を調べよ。

(1)　$a^2+11>6a$　　(2)　$x^2+2y^2 \geqq 2xy-4y-4$

(3)　$x^2-xy+y^2+x-2y+2>0$

$\boxed{3}$ ★★☆

次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき　$5\sqrt{a}+3\sqrt{b} \geqq \sqrt{25a+9b}$

(2)　$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき　$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$

(3)　$|a+b| \leqq |a|+|b|$

$\boxed{4}$ ★★☆

$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$9a+\dfrac{1}{4a} \geqq 3$　　(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{16}{a}\right) \geqq 25$

$\boxed{5}$ ★★☆

$a>0$ のとき，$a-2+\dfrac{2}{a+1}$ の最小値を求めよ。

第４講　例題演習

1

次のことを証明せよ。

(1)　$x>-3$，$y>2$ のとき　$xy-6>2x-3y$

(2)　$2a>b>0$ のとき　$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+2}{a+1}$

(3)　$x\geqq y\geqq z$ のとき　$xy+yz\geqq zx+y^2$

2

次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$x^2-x+4\geqq 3x$　　(2)　$x^2+6xy+11y^2\geqq 0$

(3)　$2(x^2+3y^2)\geqq 5xy$　　(4)　$x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5\geqq 0$

3

次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のとき　$7\sqrt{a}+2\sqrt{b}\geqq\sqrt{49a+4b}$

(2)　$a\geqq b\geqq 0$ のとき　$\sqrt{a-b}\geqq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

(3)　$\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqq|a|+|b|$

4

$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$　　(2)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 8$　　(3)　$\dfrac{2}{a+b}+2a+2b\geqq 4$

5

(1)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x+2}$ の最小値を求めよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，$(2a+3b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{3}{b}\right)$ の最小値を求めよ。

第４講　レベルＡ

$\boxed{1}$ [摂南大]

(1)　2 つの実数 a，b が $a+b=1$ を満たすとき，$a^2+b^2 \geqq \frac{1}{2}$ であることを示せ.

(2)　3 つの実数 a，b，c が $a+b+c=1$ を満たすとき，$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{3}$ であることを示せ.

$\boxed{2}$ [群馬大]

実数 a，b が不等式 $|a|<1<b$ を満たすとき，$-1<\frac{ab+1}{a+b}<1$ が成立することを証明せよ。

$\boxed{3}$

次の不等式を証明せよ。

(1)　$|a|-|b| \leqq |a+b|$　　　(2)　$\sqrt{14}-\sqrt{10}>\sqrt{15}-\sqrt{11}$

$\boxed{4}$ [成蹊大]

$x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right) \geqq k$ が常に成り立つような定数 k の最大値は ${}^{ア}\boxed{}$ である。また，$k={}^{ア}\boxed{}$ のとき等号が成り立つのは，$xy={}^{イ}\boxed{}$ のときである。

$\boxed{5}$ [松山大]

a，b，c を正の数とするとき，不等式 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{c}\right)\left(c+\frac{9}{a}\right) \geqq 48$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

$\boxed{6}$ [甲南大]

(1)　$x>0$ のとき，$\frac{x^2-4x+3}{x}$ は $x={}^{ア}\boxed{}$ のとき，最小値 ${}^{イ}\boxed{}$ をとる。

(2)　$x>0$ のとき，$x^2+2x+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+2}+2$ は $x={}^{ウ}\boxed{}$ のとき，最小値 ${}^{エ}\boxed{}$ をとる。

第４講　レベルＢ

$\boxed{1}$［岩手医科大］

正の実数 x，y，z に対して，$x^3+y^3+z^3 \geqq 3xyz$ かつ $\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$［福岡教育大］

a，b，c，x，y，z を実数とする。

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x+y+z=1$ のとき，$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$［甲南大］

$a > \sqrt{2}$ を満たすとき，次の３つの数を小さい方から順に並べよ。

$$\frac{a+2}{a+1},\quad \frac{a}{2}+\frac{1}{a},\quad \sqrt{2}$$

$\boxed{4}$［摂南大］

a，b，c を正の数とするとき，$\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ のとりうる最小の値を求めよ。