第１講　例題

1

解答　(1)　$x^4-12x^3+54x^2-108x+81$

(2)　$64x^6+192x^5y+240x^4y^2+160x^3y^3+60x^2y^4+12xy^5+y^6$

解説

(1)　$(x-3)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3(-3)+{}_4C_2x^2(-3)^2+{}_4C_3x(-3)^3+{}_4C_4(-3)^4$

$=1\cdot x^4+4\cdot x^3(-3)+6x^2\cdot 9+4x(-27)+1\cdot 81$

$=x^4-12x^3+54x^2-108x+81$

(2)　$(2x+y)^6={}_6C_0(2x)^6+{}_6C_1(2x)^5y+{}_6C_2(2x)^4y^2$

$+{}_6C_3(2x)^3y^3+{}_6C_4(2x)^2y^4+{}_6C_5(2x)y^5+{}_6C_6y^6$

$=64x^6+192x^5y+240x^4y^2+160x^3y^3+60x^2y^4+12xy^5+y^6$

2

解答　(1)　720　(2)　-20000　(3)　5376

解説

(1)　展開式の一般項は　${}_5C_r(2x)^{5-r}(3y)^r={}_5C_r\cdot 2^{5-r}\cdot 3^r x^{5-r}y^r$

x^3y^2 の項は $r=2$ のときで，その係数は

${}_5C_2\cdot 2^3\cdot 3^2=10\cdot 8\cdot 9=720$

(2)　展開式の一般項は　${}_6C_r(5x^2)^{6-r}\cdot(-2)^r={}_6C_r\cdot 5^{6-r}\cdot(-2)^r x^{2(6-r)}$

ここで，$2(6-r)=6$ とすると　$r=3$

よって，x^6 の項の係数は

${}_6C_3\cdot 5^3\cdot(-2)^3=20\cdot 125\cdot(-8)=-20000$

(3)　展開式の一般項は　${}_9C_r(x^2)^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_9C_r\cdot(-2)^r\frac{x^{2(9-r)}}{x^r}$

これが定数項となるとき　$\frac{x^{2(9-r)}}{x^r}=1$　よって　$x^{18-2r}=x^r$

両辺の x の指数を比較して　$18-2r=r$　ゆえに　$r=6$

よって，定数項は　${}_9C_6\cdot(-2)^6=84\cdot 64=5376$

3

解答　略

解説

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$$

において，$x=2$ とすると

$$3^n={}_nC_0+2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots\cdots+2^n{}_nC_n$$

よって，与えられた等式が成り立つ。

4

解答　(1)　30　(2)　840

解説

(1)　xy^2z^2 の項の係数は　$\frac{5!}{1!2!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3}{2\cdot1}=30$

別解　$\{(x+y)+z\}^5$ の展開式において，z^2 を含む項は　${}_5C_2(x+y)^3z^2$

また，$(x+y)^3$ の展開式において，xy^2 の項の係数は　${}_3C_2$

よって，xy^2z^2 の項の係数は　${}_5C_2\times{}_3C_2=10\times3=30$

(2)　$(a+b-2c)^7$ の $a^2b^3c^2$ の項は

$\frac{7!}{2!3!2!}a^2b^3(-2c)^2=\frac{7!}{2!3!2!}(-2)^2a^2b^3c^2$

よって，$a^2b^3c^2$ の項の係数は

$\frac{7!}{2!3!2!}\times(-2)^2=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot1\times2\cdot1}\times4=840$

別解　$\{(a+b)-2c\}^7$ の展開式において，c^2 を含む項は

${}_7C_2(a+b)^5(-2c)^2={}_7C_2(-2)^2(a+b)^5c^2$

また，$(a+b)^5$ の展開式において，a^2b^3 の項の係数は　${}_5C_3$

よって，$a^2b^3c^2$ の項の係数は

${}_7C_2(-2)^2\times{}_5C_3=21\times4\times10=840$

5

解答　77

解説

$(1+x+x^2)^7$ の展開式の一般項は

$\frac{7!}{p!q!r!}\cdot 1^p x^q(x^2)^r=\frac{7!}{p!q!r!}x^{q+2r}$

$p,\ q,\ r$ は整数で　$p\geqq0,\ q\geqq0,\ r\geqq0,\ p+q+r=7$

x^3 の項は $q+2r=3$　すなわち　$q=3-2r$ のときである。

$q\geqq0$ から　$3-2r\geqq0$　よって　$r=0,\ 1$

$q=3-2r,\ p=7-q-r$ から

$r=0$ のとき　$q=3,\ p=4$

$r=1$ のとき　$q=1,\ p=5$

すなわち　$(p,\ q,\ r)=(4,\ 3,\ 0),\ (5,\ 1,\ 1)$

ゆえに，x^3 の項の係数は

$\frac{7!}{4!3!0!}+\frac{7!}{5!1!1!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}+7\cdot6=35+42=77$

別解　$(1+x+x^2)^7=\{(1+x)+x^2\}^7$ の一般項は ${}_7C_r(1+x)^{7-r}(x^2)^r$ であるから，x^3 の項は，次の２つの場合に現れて，また，これ以外はない。

${}_7C_0(1+x)^7(x^2)^0$ から $(1+x)^7$ の x^3 の項は ${}_7C_0\cdot{}_7C_3x^3$

${}_7C_1(1+x)^6(x^2)^1$ から $(1+x)^6$ の x の項は ${}_7C_1\cdot{}_6C_1x\cdot x^2$

よって，求める x^3 の項の係数は

${}_7C_0\cdot{}_7C_3+{}_7C_1\cdot{}_6C_1=1\cdot35+7\cdot6=77$

第１講　例題演習

1

解答　(1)　$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

(2)　$x^7-7x^6+21x^5-35x^4+35x^3-21x^2+7x-1$

(3)　$32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$

(4)　$81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4$

解説

(1)　$(a+b)^6={}_6C_0a^6+{}_6C_1a^5b+{}_6C_2a^4b^2+{}_6C_3a^3b^3+{}_6C_4a^2b^4+{}_6C_5ab^5+{}_6C_6b^6$

$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

(2)　$(x-1)^7={}_7C_0x^7+{}_7C_1x^6(-1)+{}_7C_2x^5(-1)^2+{}_7C_3x^4(-1)^3+{}_7C_4x^3(-1)^4+{}_7C_5x^2(-1)^5$

$+{}_7C_6x(-1)^6+{}_7C_7(-1)^7$

$=x^7-7x^6+21x^5-35x^4+35x^3-21x^2+7x-1$

(3)　$(2x+y)^5={}_5C_0(2x)^5+{}_5C_1(2x)^4y+{}_5C_2(2x)^3y^2+{}_5C_3(2x)^2y^3+{}_5C_4(2x)y^4+{}_5C_5y^5$

$=32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$

(4)　$(3x-2y)^4={}_4C_0(3x)^4+{}_4C_1(3x)^3(-2y)+{}_4C_2(3x)^2(-2y)^2+{}_4C_3(3x)(-2y)^3+{}_4C_4(-2y)^4$

$=81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4$

2

解答　(1)　280　(2)　x^4 の項の係数は -21，x^3 の項の係数は 0　(3)　120

(4)　180

解説

(1)　$(x+2)^7$ の展開式の一般項は　${}_7C_rx^{7-r}2^r={}_7C_r\cdot2^rx^{7-r}$

x^4 の項は，$7-r=4$ より $r=3$ のときである。

ゆえに，求める係数は　${}_7C_3\cdot2^3=35\times8=280$

(2)　$(x^2-1)^7$ の展開式の一般項は　${}_7C_r(x^2)^{7-r}\cdot(-1)^r=(-1)^r{}_7C_rx^{14-2r}$

x^4 の項は，$14-2r=4$ より $r=5$ のときである。

ゆえに，x^4 の項の係数は　$(-1)^5{}_7C_5=-21$

x^3 の項は，$14-2r=3$ のときであるが，この等式を満たす 0 以上の整数 r は存在しない。

よって，x^3 の項の係数は　0

(3)　$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式の一般項は　${}_{10}C_r(x^2)^{10-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{10}C_r\cdot\frac{x^{20-2r}}{x^r}={}_{10}C_rx^{20-3r}$

x^{11} の項は，$20-3r=11$ より $r=3$ のときである。

よって，求める係数は　${}_{10}C_3=120$

(4)　$\left(2x^4-\frac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式の一般項は

${}_{10}C_r(2x^4)^{10-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r{}_{10}C_r\cdot2^{10-r}\cdot\frac{x^{40-4r}}{x^r}=(-1)^r{}_{10}C_r\cdot2^{10-r}\cdot x^{40-5r}$

定数項は，$40-5r=0$ より $r=8$ のときである。

よって　$(-1)^8{}_{10}C_8\cdot2^{10-8}={}_{10}C_2\cdot2^2=180$

3

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

二項定理により　$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$　……①

(1)　①に $x=-3$ を代入して　$(-2)^n={}_nC_0-3{}_nC_1+9{}_nC_2-\cdots\cdots+(-3)^n{}_nC_n$

(2)　①に，$x=-1$ を代入して　${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(3)　①に $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入して　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n={}_nC_0-\dfrac{{}_nC_1}{2}+\dfrac{{}_nC_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_nC_n}{2^n}$

4

解答　(1)　12　　(2)　6

解説

(1)　$(x+2y+3z)^4$ の x^3z の項は

$$\frac{4!}{3!0!1!}x^3(2y)^0\cdot 3z=\frac{4!}{3!}\cdot 3x^3z$$

ゆえに，x^3z の項の係数は

$$\frac{4!}{3!}\cdot 3=12$$

別解　$\{(x+2y)+3z\}^4$ の展開式において，z を含む項は

$${}_4C_1(x+2y)^3(3z)={}_4C_1\cdot 3(x+2y)^3z$$

また，$(x+2y)^3$ の展開式において，x^3 の項の係数は

$${}_3C_0$$

よって，x^3z の項の係数は

$${}_4C_1\cdot 3\times{}_3C_0=12\times 1=12$$

(2)　$\left(2x-\dfrac{1}{2}y+z\right)^4$ の xy^2z の項は

$$\frac{4!}{1!2!1!}(2x)\left(-\frac{1}{2}y\right)^2z=\frac{4!}{2!}\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2xy^2z$$

ゆえに，xy^2z の項の係数は

$$\frac{4!}{2!}\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=6$$

別解　$\left\{\left(2x-\dfrac{1}{2}y\right)+z\right\}^4$ の展開式において，z を含む項は

$${}_4C_1\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^3z$$

また，$\left(2x-\dfrac{1}{2}y\right)^3$ の展開式において，xy^2 の項は

$${}_3C_2(2x)\left(-\frac{1}{2}y\right)^2={}_3C_2\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2xy^2$$

よって，xy^2z の項の係数は

$${}_4C_1\times{}_3C_2\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=4\times\frac{3}{2}=6$$

5

解答　-3510

解説

$(x^2-3x+1)^{10}$ の展開式の一般項は

$$\frac{10!}{p!q!r!}(x^2)^p(-3x)^q\cdot 1^r=\frac{10!}{p!q!r!}(-3)^qx^{2p+q}$$

p，q，r は整数で　$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$，$p+q+r=10$

x^3 の項は $2p+q=3$ すなわち $q=3-2p$ のときである。

$q\geqq 0$ から $3-2p\geqq 0$　　よって　　$p=0$，1

$q=3-2p$，$r=10-p-q$ から

$p=0$ のとき　　$q=3$，$r=7$

$p=1$ のとき　　$q=1$，$r=8$

すなわち　　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 7)$，$(1,\ 1,\ 8)$

よって，x^3 の項の係数は

$$\frac{10!}{0!3!7!}\cdot(-3)^3+\frac{10!}{1!1!8!}\cdot(-3)=-3240-270=-3510$$

1

解答　(1)　$n=15$　　(2)　$\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

解説

(1)　$(2x+1)^n$ の展開式における一般項は　${}_nC_r(2x)^{n-r}\cdot 1^r={}_nC_r2^{n-r}x^{n-r}$

$n-r=2$ とすると　$r=n-2$　　x^2 の係数が 420 であることから　${}_nC_{n-2}2^2=420$

よって　$\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 4=420$　　$n>0$ であるから　$n=15$

(2)　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ の展開式の一般項は　${}_{2n}C_r\cdot x^{2n-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_{2n}C_r\cdot x^{2(n-r)}$

これが定数項となるのは $r=n$ のときである．

よって，定数項は　${}_{2n}C_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

2

解答　$a=8$，$b=11$；x^2z^2 の係数は 726

解説

$(x+ay+bz)^4$ の展開式における一般項は　$\dfrac{4!}{p!q!r!}x^p\cdot(ay)^q\cdot(bz)^r=\dfrac{4!}{p!q!r!}a^qb^rx^py^qz^r$

ただし，p，q，r は 0 以上の整数で　$p+q+r=4$

x^2yz の項は $p=2$，$q=1$，$r=1$ のときで，その係数が 1056 であるから

$$\frac{4!}{2!1!1!}ab=1056\qquad よって\quad ab=88$$

x^3z の項は $p=3$，$q=0$，$r=1$ のときで，その係数が 44 であるから　$\dfrac{4!}{3!0!1!}b=44$

よって　$b=11$　　　したがって　$a=8$，$b=11$

また，x^2z^2 の項の係数は $p=2$，$q=0$，$r=2$ のときで，その係数は　$\dfrac{4!}{2!0!2!}11^2=726$

3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　二項定理により

$$(1+a)^n={}_nC_0+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots\cdots+{}_nC_na^n$$

$n\geqq 2$，$a>0$ であるから，$2\leqq r\leqq n$ のとき　　$a^r>0$

また，$2\leqq r\leqq n$ のとき　　${}_nC_r>0$

よって　　${}_nC_ra^r>0$

ゆえに

$$\begin{aligned}(1+a)^n&={}_nC_0+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots\cdots+{}_nC_na^n\\&=1+na+({}_nC_2a^2+\cdots\cdots+{}_nC_na^n)\\&>1+na\end{aligned}$$

(2)　$n\geqq 2$ であるから　　$\dfrac{1}{n}>0$

よって，(1) の不等式で $a=\dfrac{1}{n}$ とおくと

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+n\cdot\frac{1}{n}=1+1=2$$

ゆえに　　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

$\boxed{1}$

解答　(1)　931　　(2)　81

解説

(1)　二項定理により　$11^{13}=(10+1)^{13}$

$$
\begin{aligned}
&=10^{13}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times10^{12}+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{10}\times10^3+{}_{13}\mathrm{C}_{11}\times10^2+{}_{13}\mathrm{C}_{12}\times10+1\\
&=10^3(10^{10}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times10^9+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{10})+\frac{13\cdot12}{2}\times10^2+13\times10+1\\
&=10^3(10^{10}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times10^9+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{10})+7931\\
&=1000(10^{10}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times10^9+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{10}+7)+931
\end{aligned}
$$

$10^{10}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times10^9+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{10}+7$ は整数であるから，

11^{13} を 1000 で割った余りは　931

(2)　二項定理により

$$
\begin{aligned}
33^{20}&=(30+3)^{20}\\
&={}_{20}\mathrm{C}_0\,30^{20}+{}_{20}\mathrm{C}_1\,30^{19}\cdot3^1+\cdots\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18}\,30^2\cdot3^{18}+{}_{20}\mathrm{C}_{19}\,30^1\cdot3^{19}+{}_{20}\mathrm{C}_{20}\,3^{20}
\end{aligned}
$$

$30^2=900$ および $30\cdot3=90$ は 90 で割り切れるから

$$33^{20}=90k+{}_{20}\mathrm{C}_{20}\,3^{20}\quad(k\text{ は整数})$$

よって，33^{20} を 90 で割った余りは，${}_{20}\mathrm{C}_{20}3^{20}$　すなわち 3^{20} を 90 で割った余りに等しい。

$$
\begin{aligned}
3^{20}&=(3^4)^5=81^5=(90-9)^5\\
&={}_5\mathrm{C}_0\,90^5+\cdots\cdots+{}_5\mathrm{C}_4\,90^1\cdot(-9)^4+{}_5\mathrm{C}_5(-9)^5
\end{aligned}
$$

よって　$3^{20}=90l+(-9)^5$　（l は整数）

ゆえに，3^{20} を 90 で割った余りは，$(-9)^5$ を 90 で割った余りに等しい。

$$
\begin{aligned}
(-9)^5&=(-9)^4\cdot(-9)=81^2\cdot(-9)=(90-9)^2\cdot(-9)\\
&=(90^2-2\cdot90\cdot9+81)\cdot(-9)
\end{aligned}
$$

よって　$(-9)^5=90m+81\cdot(-9)$　（m は整数）

ゆえに　$(-9)^5=90m+(90-9)\cdot(-9)=90(m-9)+81$

$m-9$ は整数であるから，$(-9)^5$ を 90 で割った余りは　81

したがって，33^{20} を 90 で割った余りは　81

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_rx^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$　……①とする。

(1)　①の等式において，$x=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

ゆえに　$${}_n\mathrm{C}_0-\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

(2)　①の等式において，$x=1$ を代入すると

$$2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\quad\cdots\cdots②$$

①の等式において，$x=-1$ を代入すると

$$0={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots-{}_n\mathrm{C}_n\quad\cdots\cdots③$$

②＋③から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})$

②－③から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)$

したがって　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}$

(3)　①の等式において，$x=-1$ を代入すると

$$0={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\quad\cdots\cdots④$$

よって，②＋④から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)$

②－④から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})$

したがって　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　商 $x+2$，余り 2　　(2)　商 $3x-1$，余り $6x+6$

解説

(1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\ \hline
x+3 & x^2+5x+8 \\
 & x^2+3x \\ \cline{2-2}
 & \quad 2x+8 \\
 & \quad 2x+6 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 2
\end{array}
$$

よって，商は $x+2$，余りは 2

(2)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x-1 \\ \hline
x^2+3x-1 & 3x^3+8x^2\qquad+7 \\
 & 3x^3+9x^2-3x \\ \cline{2-2}
 & \quad -x^2+3x+7 \\
 & \quad -x^2-3x+1 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 6x+6
\end{array}
$$

よって，商は $3x-1$，余りは $6x+6$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$A=2x^3-7x^2+2x+3$　　(2)　$B=2x^2-x+2$

解説

(1)　条件から　$A=(x^2-2x-1)(2x-3)-2x$

右辺を展開して整理すると　$A=2x^3-7x^2+2x+3$

(2)　条件から

$$6x^3-x^2+3x+5=B(3x+1)-2x+3$$

よって　$B(3x+1)=6x^3-x^2+5x+2$

ゆえに，B は $6x^3-x^2+5x+2$ を $3x+1$ で割ったときの商である。

右の計算から　$B=2x^2-x+2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-x+2 \\ \hline
3x+1 & 6x^3-\ x^2+5x+2 \\
 & 6x^3+2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -3x^2+5x \\
 & \quad -3x^2-\ x \\ \cline{2-2}
 & \qquad 6x+2 \\
 & \qquad 6x+2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x-3$　　(2)　$\dfrac{5}{x+2}$　　(3)　$\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}$　　(4)　$\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

解説

(1)　$(\text{与式})=\dfrac{x^2-9}{x+3}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}=x-3$

(2)　$(\text{与式})=\dfrac{5x}{x^2-4}-\dfrac{10}{x^2-4}=\dfrac{5x-10}{x^2-4}=\dfrac{5(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{5}{x+2}$

(3)　
$$
\begin{aligned}
(\text{与式})&=\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}=\frac{a\times(a+b)}{(a-b)\times(a+b)}-\frac{b\times(a-b)}{(a+b)\times(a-b)}\\
&=\frac{a^2+ab-(ab-b^2)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}
\end{aligned}
$$

(4)　$(\text{与式})=\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

$$= \frac{3\times(x+1)}{(x+2)(x-1)\times(x+1)} - \frac{2\times(x+2)}{(x+1)(x-1)\times(x+2)}$$

$$= \frac{3(x+1)-2(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-1)} = \frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x-1)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

4

解答 (1) $\frac{a+1}{a-1}$　(2) $\frac{x^2-1}{x^3}$

解説

(1) [方法 1]　(分母) $= a - \frac{2}{a+1} = \frac{a(a+1)-2}{a+1} = \frac{a^2+a-2}{a+1} = \frac{(a+2)(a-1)}{a+1}$

よって　(与式) $= (a+2) \div \frac{(a+2)(a-1)}{a+1} = (a+2) \times \frac{a+1}{(a+2)(a-1)} = \frac{a+1}{a-1}$

[方法 2]　(与式) $= \frac{(a+1)(a+2)}{a(a+1)-2} = \frac{(a+1)(a+2)}{a^2+a-2} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a-1)(a+2)} = \frac{a+1}{a-1}$

(2)　(与式) $= \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{\frac{x^2-1}{x}}} = \dfrac{1}{x + \dfrac{x}{x^2-1}} = \dfrac{1}{\dfrac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}}$

$$= \dfrac{1}{\dfrac{x^3}{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x^3}$$

5

解答 (1) $a=2$，$b=4$，$c=1$　(2) $a=1$，$b=4$，$c=4$　(3) $a=1$，$b=-2$，$c=5$

解説

(1)　右辺を展開して整理すると　$ax^2+bx=(c+1)x^2+4cx+4c-4$

これが x についての恒等式であるとき，両辺の各項の係数を比較すると

$a=c+1$，$b=4c$，$0=4c-4$　　これを解いて　$a=2$，$b=4$，$c=1$

別解　与えられた等式に $x=-2$，0，2 を代入すると，それぞれ

$4a-2b=0$，$0=-4+4c$，$4a+2b=16c$　　これを解いて　$a=2$，$b=4$，$c=1$

このとき，与式は x についての恒等式である。

(2)　右辺を展開して整理すると　$x^2=ax^2+(-4a+b)x+4a-2b+c$

これが x についての恒等式であるとき，両辺の各項の係数を比較すると

$1=a$，$0=-4a+b$，$0=4a-2b+c$　　これを解いて　$a=1$，$b=4$，$c=4$

別解　与えられた等式に $x=0$，1，2 を代入すると，それぞれ

$0=4a-2b+c$，$1=a-b+c$，$4=c$　　これを解いて　$a=1$，$b=4$，$c=4$

このとき，与式は x についての恒等式である。

(3)　この等式が恒等式ならば，$x=2$，1，-1 を代入しても成り立つ。

これらの値を代入すると，それぞれ

$3=3a$，$4=-2b$，$30=6c$

よって　$a=1$，$b=-2$，$c=5$

6

解答 $a=3$，$b=2$

解説

両辺に $(x+2)(x-1)$ を掛けて

$5x+1=a(x-1)+b(x+2)$　……①

[解法 1 (係数比較法)]　右辺を整理して

$5x+1=(a+b)x+(-a+2b)$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$5=a+b$，　$1=-a+2b$

これを解いて　$a=3$，$b=2$

[解法 2 (数値代入法)]　① が x についての恒等式ならば

$x=1$ を代入して　$6=3b$　　よって　$b=2$

$x=-2$ を代入して　$-9=-3a$　　よって　$a=3$

逆に，このとき ① の右辺は

$3(x-1)+2(x+2)=5x+1$

となり，左辺と一致するから ① は恒等式である。

よって　$a=3$，$b=2$

7

解答 $x=-2$，$y=3$

解説

等式を k について整理すると　$k(-2x-y-1)+x+2y-4=0$

これが k についての恒等式であるとき

$2x+y+1=0$，$x+2y-4=0$

これを解いて　$x=-2$，$y=3$

8

解答 $a=-11$，$b=2$，商 $2x+6$

解説

求める商を $2x+c$ とすると，条件から

$2x^3+ax+10=(x^2-3x+b)(2x+c)+3x-2$

が x についての恒等式である。

右辺を展開して整理すると

$2x^3+ax+10=2x^3+(c-6)x^2+(2b-3c+3)x+bc-2$

両辺の同じ次数の項の係数は等しいから

$0=c-6$，$a=2b-3c+3$，$10=bc-2$

これを解いて　$c=6$，$b=2$，$a=-11$

よって　$a=-11$，$b=2$　　商は　$2x+6$

別解　右の計算から，割り算の余りは

$(a-2b+18)x+10-6b$

これが $3x-2$ に等しいから

$a-2b+18=3$，$10-6b=-2$

これを解いて　$a=-11$，$b=2$

また，商は　$2x+6$

$$\begin{array}{r}
2x+6 \\
x^2-3x+b\,\big)\,\overline{2x^3 \qquad +ax+10} \\
\underline{2x^3-6x^2+\quad 2bx} \\
6x^2+(a-2b)x+10 \\
\underline{6x^2-\quad 18x+6b} \\
(a-2b+18)x+10-6b
\end{array}$$

1

解答 (1)　商 $2x^2+x+2$，余り 1　　(2)　商 $x-4$，余り $14x-2$

(3)　商 x^2-2x-1，余り 3　　(4)　商 $2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$，余り $\frac{5}{4}x+\frac{23}{2}$

解説

(1)

$$\begin{array}{r}
2x^2+x+2 \\
x+3\,\big)\,\overline{2x^3+7x^2+5x+7} \\
\underline{2x^3+6x^2} \\
x^2+5x \\
\underline{x^2+3x} \\
2x+7 \\
\underline{2x+6} \\
1
\end{array}$$

商 $2x^2+x+2$，余り 1

(2)

$$\begin{array}{r}
x-4 \\
x^2+4x-1\,\big)\,\overline{x^3 \qquad -3x+2} \\
\underline{x^3+4x^2-\ \ x} \\
-4x^2-\ 2x+2 \\
\underline{-4x^2-16x+4} \\
14x-2
\end{array}$$

商 $x-4$，余り $14x-2$

(3)

$$\begin{array}{r}
x^2-2x-1 \\
2x^2-3x+1\,\big)\,\overline{2x^4-7x^3+5x^2+\ x+2} \\
\underline{2x^4-3x^3+\ x^2} \\
-4x^3+4x^2+\ x \\
\underline{-4x^3+6x^2-2x} \\
-2x^2+3x+2 \\
\underline{-2x^2+3x-1} \\
3
\end{array}$$

商 x^2-2x-1，余り 3

(4)

$$\begin{array}{r}
2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{4} \\
2x^2-x+2\,\big)\,\overline{4x^4-\ x^3 \qquad +\ 4x+8} \\
\underline{4x^4-2x^3+\ 4x^2} \\
x^3-\ 4x^2+\ 4x \\
\underline{x^3-\frac{1}{2}x^2+\ \ x} \\
-\frac{7}{2}x^2+\ 3x+8 \\
\underline{-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{4}x-\frac{7}{2}} \\
\frac{5}{4}x+\frac{23}{2}
\end{array}$$

商 $2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$，

余り $\frac{5}{4}x+\frac{23}{2}$

2

解答　(1)　$A=3x^3+14x^2+3x-1$　　(2)　$B=3x^2+x+2$

解説

(1)　条件から　　$A=(x^2+4x-3)(3x+2)+4x+5$

右辺を整理して　　$A=3x^3+14x^2+3x-1$

(2)　条件から　　$6x^4-7x^3+4x^2-3x+5=B\times(2x^2-3x+1)+2x+3$

よって　　$6x^4-7x^3+4x^2-5x+2=B\times(2x^2-3x+1)$

ゆえに，$6x^4-7x^3+4x^2-5x+2$ は $2x^2-3x+1$ で割り切れて，その商が B である。

右の計算により　　$B=3x^2+x+2$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2+x+2 \\ \hline 2x^2-3x+1 & 6x^4-7x^3+4x^2-5x+2 \\ & 6x^4-9x^3+3x^2 \\ \hline & 2x^3+x^2-5x \\ & 2x^3-3x^2+x \\ \hline & 4x^2-6x+2 \\ & 4x^2-6x+2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

3

解答　(1)　2　　(2)　1　　(3)　$\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}$　　(4)　$\dfrac{4}{(x-1)(x-5)(x+3)}$

(5)　$\dfrac{2(x+4)}{x(x+2)}$

解説

(1)　(与式)$=\dfrac{x+(x-8)}{x-4}=\dfrac{2(x-4)}{x-4}=2$

(2)　(与式)$=\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{-a}{x-a}=\dfrac{x+(-a)}{x-a}=1$

(3)　(与式)$=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{1\cdot(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(x^2+2x)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}$

(4)　(与式)$=\dfrac{x+3}{(x-1)(x-5)(x+3)}-\dfrac{x-1}{(x-5)(x+3)(x-1)}=\dfrac{(x+3)-(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+3)}$

$=\dfrac{4}{(x-1)(x-5)(x+3)}$

(5)　(与式)$=\dfrac{x+8}{(x+2)(x-1)}+\dfrac{x-4}{x(x-1)}=\dfrac{(x+8)x+(x-4)(x+2)}{x(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{(x^2+8x)+(x^2-2x-8)}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{2x^2+6x-8}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{2(x^2+3x-4)}{x(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{2(x-1)(x+4)}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{2(x+4)}{x(x+2)}$

4

解答　(1)　$x+2$　　(2)　x

解説

(1)　[方法 1]

(分子)$=\dfrac{x(x-1)-6}{x-1}=\dfrac{x^2-x-6}{x-1}=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}$

(分母)$=\dfrac{(x-1)-2}{x-1}=\dfrac{x-3}{x-1}$　であるから

(与式)$=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}\div\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}\times\dfrac{x-1}{x-3}=x+2$

[方法 2]

(与式)$=\dfrac{x(x-1)-6}{(x-1)-2}=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-3}=x+2$

(2)　(与式)$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{x}{x+(1-x)}=x$

5

解答　(1)　$a=-1$，$b=2$　　(2)　$a=1$，$b=1$，$c=-3$　　(3)　$a=3$，$b=7$，$c=35$

(4)　$a=2$，$b=-1$，$c=1$　　(5)　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

解説

(1)　等式の右辺を x について整理すると　　$x=(a+b)x-(2a+b)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　　$1=a+b$，$0=2a+b$

これを解いて　　$a=-1$，$b=2$

別解　等式に $x=1$，2 を代入すると，それぞれ

$1=-a$，$2=b$　　　よって　　$a=-1$，$b=2$

逆に，このとき

(右辺)$=-(x-2)+2(x-1)=x=$(左辺)

となり，与式は x についての恒等式である。

したがって　　$a=-1$，$b=2$

(2)　等式の右辺を x について整理すると　　$x^2-x-3=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$1=a$，$-1=-2a+b$，$-3=a-b+c$

これを解いて　　$a=1$，$b=1$，$c=-3$

別解　等式に $x=1$，0，2 を代入すると，それぞれ

$-3=c$，$-3=a-b+c$，$-1=a+b+c$

これを解いて　　$a=1$，$b=1$，$c=-3$

逆に，このとき

(右辺)$=(x-1)^2+(x-1)-3$

$=(x^2-2x+1)+(x-1)-3=x^2-x-3=$(左辺)

となり，与式は x についての恒等式である。

したがって　　$a=1$，$b=1$，$c=-3$

(3)　等式の右辺を x について整理すると　　$12x^2+43x+c=4ax^2+(5a+4b)x+5b$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　　$12=4a$，$43=5a+4b$，$c=5b$

これを解いて　　$a=3$，$b=7$，$c=35$

(4)　等式の左辺を x について整理すると　　$(a+b+c)x^2+(a-b)x-c=2x^2+3x-1$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　　$a+b+c=2$，$a-b=3$，$-c=-1$

これを解いて　　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

別解　等式に $x=0$，1，-1 を代入すると，それぞれ

$-c=-1$，$2a=4$，$2b=-2$

これを解いて　　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

逆に，このとき

(左辺)$=2x(x+1)-x(x-1)+(x+1)(x-1)$

$=2x^2+2x-x^2+x+x^2-1=2x^2+3x-1=$(右辺)

となり，与式は x についての恒等式である。

したがって　　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

(5)　等式の右辺を x について整理すると

$x^3=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$1=a$，$0=3a+b$，$0=3a+2b+c$，$0=a+b+c+d$

これを解いて　　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

別解　等式に $x=-2$，-1，0，1 を代入すると，それぞれ

$-8=-a+b-c+d$，$-1=d$，$0=a+b+c+d$，$1=8a+4b+2c+d$

これを解いて　　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

逆に，このとき

(右辺)$=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1$

$=(x^3+3x^2+3x+1)-3(x^2+2x+1)+3(x+1)-1$

$=x^3=$(左辺)

となり，与式は x についての恒等式である。

したがって　　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

6

解答　(1)　$a=1$，$b=2$　　(2)　$a=3$，$b=1$，$c=-1$

解説

(1)　両辺に $(x-1)(x+1)$ を掛けて

$3x-1=a(x+1)+b(x-1)$　……①

[解法 1]　(係数比較法)　右辺を展開して整理すると

$3x-1=(a+b)x+a-b$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$3=a+b$，$-1=a-b$

この連立方程式を解いて　　$a=1$，$b=2$

[解法 2]　(数値代入法)　① が x についての恒等式ならば

$x=1$　を代入して　　$2=2a$　　よって　$a=1$

$x=-1$ を代入して　　$-4=-2b$　よって　$b=2$

逆に，このとき ① の右辺は

$(x+1)+2(x-1)=3x-1$

となり，左辺と一致するから ① は恒等式である。

よって　　$a=1$，$b=2$

(2)　両辺に $(x+1)^2(x-1)$ を掛けて

$x-5=a(x-1)+b(x+1)(x-1)+c(x+1)^2$　……①

[解法 1]　(係数比較法)　右辺を展開して整理すると

$x-5=(b+c)x^2+(a+2c)x+(-a-b+c)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$0=b+c$，$1=a+2c$，$-5=-a-b+c$

この連立方程式を解いて　　$a=3$，$b=1$，$c=-1$

[解法 2]　(数値代入法)　① が x についての恒等式ならば

$x=1$　を代入して　　$-4=4c$

$x=-1$ を代入して　　$-6=-2a$

$x=0$　を代入して　　$-5=-a-b+c$

これを解いて　　$a=3$，$b=1$，$c=-1$

逆に，このとき ① の右辺は

$3(x-1)+(x+1)(x-1)-(x+1)^2=x-5$

となり，左辺と一致するから ① は恒等式である。

よって　　$a=3,\ b=1,\ c=-1$

$\boxed{7}$

解答　$x=-1,\ y=-2$

解説

等式を k について整理すると

$$(x-2y-3)k+(x-3y-5)=0$$

これが k についての恒等式であるとき

$$x-2y-3=0,\ x-3y-5=0$$

これを解いて　　$x=-1,\ y=-2$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$a=-3,\ b=4$，商は $2x-1$　　(2)　$a=6,\ b=24$，商は $x+8$

解説

(1)　商は１次式になるから $cx+d$ とおくと

$$2x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)(cx+d)+x+3$$

この等式は x についての恒等式である。

右辺を x について整理すると

$$2x^3+ax^2+bx+2=cx^3+(-c+d)x^2+(c-d+1)x+(d+3)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$2=c,\ a=-c+d,\ b=c-d+1,\ 2=d+3$$

これを解いて　　$a=-3,\ b=4,\ c=2,\ d=-1$

よって　　$a=-3,\ b=4$，商は　$2x-1$

(2)　商は１次式になるから $cx+d$ とおくと

$$x^3+ax^2-13x+b=(x^2-2x+3)(cx+d)$$

この等式は x についての恒等式である。

右辺を x について整理すると

$$x^3+ax^2-13x+b=cx^3+(-2c+d)x^2+(3c-2d)x+3d$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$1=c,\ a=-2c+d,\ -13=3c-2d,\ b=3d$$

これを解いて　　$a=6,\ b=24,\ c=1,\ d=8$

よって　　$a=6,\ b=24$，商は $x+8$

$\boxed{1}$

解答　(1)　商 $2x+3y+4$，余り $-y^2+11y+8$

(2)　商 $2y+3x+12$，余り $-x^2-5x+32$

解説

$2x^2+5xy+2y^2-2x+6y-4$ を x について整理すると

$$2x^2+(5y-2)x+(2y^2+6y-4)$$

y について整理すると　　$2y^2+(5x+6)y+(2x^2-2x-4)$

(1)

$$\begin{array}{r|l} & 2x+(3y+4) \\ \hline x+(y-3) & 2x^2+(5y-2)x+(2y^2+6y-4) \\ & 2x^2+(2y-6)x \\ \hline & \quad (3y+4)x+(2y^2+6y-4) \\ & \quad (3y+4)x+(3y^2-5y-12) \\ \hline & \qquad -y^2+11y+8 \end{array}$$

商 $2x+3y+4$，
余り $-y^2+11y+8$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & 2y+(3x+12) \\ \hline y+(x-3) & 2y^2+(5x+6)y+(2x^2-2x-4) \\ & 2y^2+(2x-6)y \\ \hline & \quad (3x+12)y+(2x^2-2x-4) \\ & \quad (3x+12)y+(3x^2+3x-36) \\ \hline & \qquad -x^2-5x+32 \end{array}$$

商 $2y+3x+12$，
余り $-x^2-5x+32$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\dfrac{x^2-3}{x-3}$　　(2)　$-4x^2+7x$

解説

(1)　$$\frac{x^4-7x^2+12}{x^2-x-6}\times\frac{2x^2+7x+3}{2x+1}=\frac{(x^2-3)(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-3)}\times\frac{(2x+1)(x+3)}{2x+1}$$
$$=\frac{(x^2-3)(x-2)(x+3)}{x-3}$$

よって　　$$(与式)=\frac{\dfrac{(x^2-3)(x-2)(x+3)}{x-3}}{(x-2)(x+3)}=\frac{x^2-3}{x-3}$$

(2)　$$(与式)=\frac{3x-5}{1-\dfrac{x+1}{(x+1)-1}}-\frac{x(2x-3)}{1+\dfrac{x-1}{(x-1)-1}}$$
$$=\frac{3x-5}{1-\dfrac{x+1}{x}}-\frac{x(2x-3)}{1+\dfrac{x-1}{x-2}}=\frac{(3x-5)x}{x-(x+1)}-\frac{x(2x-3)(x-2)}{(x-2)+(x-1)}$$
$$=-x(3x-5)-\frac{x(2x-3)(x-2)}{2x-3}=-3x^2+5x-x(x-2)$$
$$=-3x^2+5x-x^2+2x=-4x^2+7x$$

$\boxed{3}$

解答　$a=2,\ b=2,\ c=1$

解説

右辺を展開して整理すると

$$2x^2-xy-3y^2+5x-5y+a=2x^2-xy-3y^2+(2b+c)x+(-3b+c)y+bc$$

この等式が x，y についての恒等式となるのは，両辺の各項の係数が等しいときであるから

$2b+c=5$　　……①
$-3b+c=-5$　……②
$bc=a$　　……③

①，② から　　$b=2,\ c=1$

これを ③ に代入して　　$a=2$

以上から　　$a=2,\ b=2,\ c=1$

1

解答　$p=-4$，$q=12$，$r=6$

解説

$2x-4y+5z=3$ ……①，$3x+y+4z=1$ ……② とする。

①×4−②×5 から　$-7x-21y=7$

したがって　$x=-3y-1$ ……③

①×3−②×2 から　$-14y+7z=7$

したがって　$z=2y+1$ ……④

③，④ を $px^2+qy^2+rz^2=2$ に代入すると

$$p(-3y-1)^2+qy^2+r(2y+1)^2=2$$

整理すると　$(9p+q+4r)y^2+(6p+4r)y+p+r-2=0$

これが y についての恒等式であるから

$$9p+q+4r=0,\ 6p+4r=0,\ p+r-2=0$$

この連立方程式を解いて　$p=-4$，$q=12$，$r=6$

2

解答　(1)　$(a,\ b)=(6,\ 6),\ (-6,\ -6)$　(2)　$a=7, b=13$

解説

(1)　$x^4+ax^3+11x^2+bx+1=(x^2+px+q)^2$ とおける．

右辺を展開すると

$$x^4+ax^3+11x^2+bx+1=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$$

両辺の係数を比較すると

$$a=2p \text{ ……①},\ 11=p^2+2q \text{ ……②},\ b=2pq \text{ ……③},\ 1=q^2 \text{ ……④}$$

④ から　$q=\pm1$

[1]　$q=1$ のとき

② に代入して　$11=p^2+2$　よって　$p=\pm3$

(i)　$p=3$ のとき　① から　$a=6$，　③ から　$b=6$

これは a，b が整数であるから適する．

(ii)　$p=-3$ のとき　① から　$a=-6$，　③ から　$b=-6$

これは a，b が整数であるから適する．

[2]　$q=-1$ のとき

② に代入して　$11=p^2-2$　よって　$p=\pm\sqrt{13}$

①，③ に代入すると，a，b が整数にならないから不適．

[1]，[2] から，求める a，b の値は　$(a,\ b)=(6,\ 6),\ (-6,\ -6)$

(2)　条件から　$x^4-x^3-ax^2+bx-6=(x-1)^2(x^2+cx+d)$ と表される．

右辺を展開すると　右辺$=x^4+(c-2)x^3+(-2c+d+1)x^2+(c-2d)x+d$

よって　$-1=c-2, -a=-2c+d+1, b=c-2d, -6=d$

これを解いて　$c=1, d=-6, a=7, b=13$　答

3

解答　(1)　$f(0)=f(1)=f(2)=0$　(2)　3　(3)　$f(x)=x^3-3x^2+2x$

解説

(1)　与式に $x=0$ を代入すると　$f(0)=0$

$x=-1$ を代入すると　$f(1)=-f(0)$

$x=1$　を代入すると　$f(1)=f(2)$

よって　$f(0)=f(1)=f(2)=0$

(2)　$f(x)$ の次数を n とする。

(1) より，$f(x)$ は異なる 3 個の x の値に対して 0 となるが，恒等的に 0 ではない。

よって，恒等式の両辺の次数を比較すると

$2n=n+3$　ゆえに　$n=3$

(3)　(2) の結果から，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおける。

$f(0)=f(1)=f(2)=0$ であるから

$d=0,\ \ a+b+c+d=0,\ \ 8a+4b+2c+d=0$

よって　$b=-3a$，$c=2a$，$d=0$

ゆえに　$f(x)=ax^3-3ax^2+2ax=ax(x^2-3x+2)=ax(x-1)(x-2)$

$f(x^2)=ax^2(x^2-1)(x^2-2)$，$f(x+1)=a(x+1)x(x-1)$ を恒等式に代入すると

$$ax^2(x^2-1)(x^2-2)=x^3\cdot a(x+1)x(x-1)-2x^4+2x^2$$

x^2 の項の係数を比較すると　$2a=2$　よって　$a=1$

ゆえに　$f(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$

1

解答　略

解説

(左辺)$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)=6a^2b+2b^3$

(右辺)$=6a^2b+2b^3$

よって　$(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$

別解　(左辺)$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

$=6a^2b+2b^3=2b(3a^2+b^2)=$(右辺)

よって　$(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$

2

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$a+b=1$ より，$b=1-a$ であるから

(左辺)$=a^2+(1-a)^2+1=a^2+1-2a+a^2+1=2a^2-2a+2=2(a^2-a+1)$

(右辺)$=2\{a+(1-a)-a(1-a)\}=2(a+1-a-a+a^2)=2(a^2-a+1)$

よって，等式は成り立つ。

別解　$a+b=1$ であるから

(左辺)$=(a+b)^2-2ab+1=1^2-2ab+1=2-2ab=2(1-ab)$

(右辺)$=2(1-ab)$

よって，等式は成り立つ。

(2)　$a+b+c=0$ から　$c=-(a+b)$

(左辺)$=b\{-(a+b)\}\{b-(a+b)\}-(a+b)a\{-(a+b)+a\}+ab(a+b)$

$=ab(a+b)+ab(a+b)+ab(a+b)=3ab(a+b)$

(右辺)$=-3ab\{-(a+b)\}=3ab(a+b)$

よって　$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)=-3abc$

別解1　(左辺)−(右辺)$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$

$=\{bc(b+c)+abc\}+\{ca(c+a)+abc\}+\{ab(a+b)+abc\}$

$=bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)$

$=(bc+ca+ab)(a+b+c)$

$a+b+c=0$ であるから　(左辺)−(右辺)$=0$

よって　$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)=-3abc$

別解2　$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$ であるから

(左辺)$=bc(-a)+ca(-b)+ab(-c)=-3abc=$(右辺)

よって　$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)=-3abc$

(3)　$a+b+c=0$ から　$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$

(左辺)$=a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)+3abc$

$=-a^3-b^3-c^3+3abc$

$=-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$=-0\cdot(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0$

3

解答　(1)　略　(2)　略

解説

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$，$c=dk$

(1)　(左辺)$=(bk+b)(dk-d)=bd(k+1)(k-1)$

$$(\text{右辺})=(bk-b)(dk+d)=bd(k-1)(k+1)$$

よって　$(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d)$

(2)
$$(\text{左辺})=\frac{b^2k+d^2k}{b^2k-d^2k}=\frac{k(b^2+d^2)}{k(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$
$$(\text{右辺})=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\frac{k^2(b^2+d^2)}{k^2(b^2-d^2)}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

よって　$\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

$$\begin{aligned}(a-2)(b-2)(c-2)&=\{ab-2(a+b)+4\}(c-2)\\&=abc-2ab-2(a+b)c+4(a+b)+4c-8\\&=abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8\\&=abc-abc+4\cdot2-8=0\end{aligned}$$

よって　$a-2=0$　または　$b-2=0$　または　$c-2=0$

したがって，a，b，c のうち少なくとも１つは２である。

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$(\text{右辺})=(x^5+x^4+x^3+x^2+x)-(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$=x^5-1=(\text{左辺})$

よって　$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

(2)　$(\text{左辺})=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$(\text{右辺})=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2adbc+b^2c^2$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

よって　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

別解　$(\text{右辺})=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2adbc+b^2c^2$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$

$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(\text{左辺})$

よって　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$a+b+c=0$ から　$c=-(a+b)$

$(\text{左辺})=a^3\{b+(a+b)\}+b^3\{-(a+b)-a\}+\{-(a+b)\}^3(a-b)$

$=a^3(a+2b)+b^3(-2a-b)-(a+b)^3(a-b)$

$=a^4+2a^3b-2ab^3-b^4-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a-b)$

$=a^4+2a^3b-2ab^3-b^4-(a^4+2a^3b-2ab^3-b^4)$

$=0=(\text{右辺})$

よって　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0$

別解　$(\text{左辺})=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+b^3c-bc^3$

$=(b-c)a^3-(b-c)(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)(b-c)$

$=(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}$

ここで

$$\begin{aligned}a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)&=(c-a)b^2+(c^2-ca)b+a^3-c^2a\\&=(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c+a)(c-a)\\&=(c-a)\{b^2+cb-a(c+a)\}\\&=(c-a)\{b+(c+a)\}(b-a)\\&=-(a-b)(c-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

であるから

$(\text{左辺})=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

よって，$a+b+c=0$ のとき　$(\text{左辺})=0$

ゆえに　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0$

(2)　$a+b+c=0$ から　$c=-(a+b)$

$(\text{左辺})=\{b-(a+b)\}^2+\{-(a+b)+a\}^2+(a+b)^2$

$=a^2+b^2+(a^2+2ab+b^2)=2(a^2+ab+b^2)$

$(\text{右辺})=-2\{-b(a+b)-(a+b)a+ab\}$

$=-2(-ab-b^2-a^2-ab+ab)=2(a^2+ab+b^2)$

よって　$(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2=-2(bc+ca+ab)$

別解　$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$ であるから

$(\text{左辺})-(\text{右辺})=(-a)^2+(-b)^2+(-c)^2+2(bc+ca+ab)$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=(a+b+c)^2=0^2=0$

よって　$(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2=-2(bc+ca+ab)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$，$c=dk$

[1]　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{bk-b}{b}=k-1$，　$\dfrac{c-d}{d}=\dfrac{dk-d}{d}=k-1$

よって　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

[2]　$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{b^2k}{b^2k^2+b^2}=\dfrac{k}{k^2+1}$，　$\dfrac{cd}{c^2+d^2}=\dfrac{d^2k}{d^2k^2+d^2}=\dfrac{k}{k^2+1}$

よって　$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{cd}{c^2+d^2}$

(2)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと　$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$

[1]　$\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{ak+bk+ck}{a+b+c}=k$，　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{ak}{a}=k$

よって　$\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x}{a}$

[2]　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{a^2+b^2+c^2}=k^2$

$\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}=\dfrac{abk^2+bck^2+cak^2}{ab+bc+ca}=k^2$

よって　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

$$(x-a)(y-a)(z-a)=xyz-(yz+zx+xy)a+(x+y+z)a^2-a^3$$

よって，$x+y+z=a$，$a(yz+zx+xy)=xyz$ が成り立つとき

$$(x-a)(y-a)(z-a)=xyz-xyz+a\cdot a^2-a^3=0$$

したがって，$x-a=0$ または $y-a=0$ または $z-a=0$ であるから，

x，y，z のうち少なくとも１つは a である。

第３講　レベルA

1

解答　略

解説

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$$(\text{左辺})=\frac{a^2}{(a+b)(-b)}+\frac{b^2}{(-a)(b+a)}+\frac{(a+b)^2}{(-b)(-a)}$$

$$=\frac{-a^3-b^3+(a+b)^3}{ab(a+b)}=\frac{3a^2b+3ab^2}{ab(a+b)}=\frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)}=3$$

したがって，等式は証明された。

別解　$a+b+c=0$ より，

$a+b=-c$，$a+c=-b$，$b+c=-a$ であるから

$$(\text{左辺})=\frac{a^2}{(-c)(-b)}+\frac{b^2}{(-a)(-c)}+\frac{c^2}{(-b)(-a)}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc+3abc}{abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$$

$$=\frac{3abc}{abc}=3$$

したがって，等式は証明された。

2

解答　$\dfrac{2}{11}$

解説

$\dfrac{x+y}{6}=\dfrac{y+z}{7}=\dfrac{z+x}{8}=k$ とおくと，$k\fallingdotseq 0$ で

$x+y=6k$　……①

$y+z=7k$　……②

$z+x=8k$　……③

辺々加えて　$2(x+y+z)=21k$　　よって　$x+y+z=\dfrac{21}{2}k$　……④

④−②，④−③，④−① から　$x=\dfrac{7}{2}k$，$y=\dfrac{5}{2}k$，$z=\dfrac{9}{2}k$

したがって　$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xz+yz-y^2}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)+(xz+yz)}$

$$=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)+(x+y)z}=\frac{x-y}{x-y+z}$$

$$=\frac{\frac{7}{2}k-\frac{5}{2}k}{\frac{7}{2}k-\frac{5}{2}k+\frac{9}{2}k}=\frac{k}{\frac{11}{2}k}=\frac{2}{11}$$

3

解答　$a+b+c\fallingdotseq 0$ のとき 2，$a+b+c=0$ のとき -1

解説

$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=k$ とおくと

$b+c=ak$ ……①，$c+a=bk$ ……②，$a+b=ck$ ……③

①+②+③ から　$2(a+b+c)=(a+b+c)k$

[1]　$a+b+c\fallingdotseq 0$ のとき　$k=2$

このとき，①−② から　$a=b$，　②−③ から　$b=c$

すなわち，$a=b=c$ が得られる。

[2]　$a+b+c=0$ のとき　$b+c=-a$

したがって　$k=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{-a}{a}=-1$

よって　$a+b+c\fallingdotseq 0$ のとき 2，$a+b+c=0$ のとき -1

第３講　レベルB

1

解答　略

解説

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$ から　$\dfrac{yz+zx+xy}{xyz}=\dfrac{1}{x+y+z}$

よって　$(x+y+z)(yz+zx+xy)=xyz$

ゆえに　$\{x+(y+z)\}\{(y+z)x+yz\}-xyz=0$

$(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)=0$

$(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}=0$

$(y+z)(x+y)(x+z)=0$

よって　$y+z=0$ または $x+y=0$ または $x+z=0$

したがって，x，y，z のうちどれか 2 つの和は 0 である。

2［大阪市立大］

解答　略

解説

$A=(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2+(\gamma-1)^2$ とおくと

$$A=(\alpha^2-2\alpha+1)+(\beta^2-2\beta+1)+(\gamma^2-2\gamma+1)$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2(\alpha+\beta+\gamma)+3$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2(\alpha+\beta+\gamma)+3$$

これに条件式を代入すると

$$A=3^2-2\cdot3-2\cdot3+3=0$$

すなわち　$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2+(\gamma-1)^2=0$

よって，α，β，γ はすべて 1 である。

3

解答　略

解説

異なる 3 つの値 x_1，x_2，x_3 に対して

$a{x_1}^2+bx_1+c=0$　……①，$a{x_2}^2+bx_2+c=0$　……②，

$a{x_3}^2+bx_3+c=0$　……③

が成り立つとする。

①−② から　$(x_1-x_2)\{a(x_1+x_2)+b\}=0$

①−③ から　$(x_1-x_3)\{a(x_1+x_3)+b\}=0$

$x_1\fallingdotseq x_2$，$x_1\fallingdotseq x_3$ であるから

$a(x_1+x_2)+b=0$　……④，$a(x_1+x_3)+b=0$　……⑤

④−⑤ から　$a(x_2-x_3)=0$　　$x_2\fallingdotseq x_3$ であるから　$a=0$

$a=0$ を ④ に代入して　$b=0$

$a=b=0$ を ① に代入して　$c=0$

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$x>3$，$y>4$ から　　$x-3>0$，$y-4>0$

よって　　$xy+12-(4x+3y)=x(y-4)-3(y-4)$

$=(x-3)(y-4)>0$

ゆえに　　$xy+12>4x+3y$

(2)　$\dfrac{a}{1+a}-\dfrac{b}{1+b}=\dfrac{a(1+b)-b(1+a)}{(1+a)(1+b)}=\dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)}$

$a>b>0$ より，$a-b>0$，$1+a>0$，$1+b>0$ であるから　　$\dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)}>0$

したがって　　$\dfrac{a}{1+a}>\dfrac{b}{1+b}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　証明は略，等号成立は $x=y=-2$ のとき　　(3)　略

解説

(1)　　$(a^2+11)-6a=a^2-6a+11$

$=(a^2-6a+9)+11-9=(a-3)^2+2>0$

よって　　$a^2+11>6a$

(2)　$x^2+2y^2-(2xy-4y-4)=x^2-2xy+2y^2+4y+4$

$=(x^2-2xy+y^2)-y^2+2y^2+4y+4$

$=(x-y)^2+y^2+4y+4=(x-y)^2+(y+2)^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$x-y=0$ かつ $y+2=0$ すなわち $x=y=-2$ のときである。

(3)　$x^2-xy+y^2+x-2y+2=x^2-(y-1)x+y^2-2y+2$

$=\left\{x^2-2\cdot\dfrac{y-1}{2}x+\left(\dfrac{y-1}{2}\right)^2\right\}-\left(\dfrac{y-1}{2}\right)^2+y^2-2y+2$

$=\left(x-\dfrac{y-1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{7}{4}$

$=\left(x-\dfrac{y-1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(y-1)^2+1>0$

$\boxed{3}$

解答　(1)　証明略，$a=0$ または $b=0$　　(2)　証明略，$a=b$　　(3)　証明略，$ab\geqq 0$

解説

(1)　$(5\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2-(\sqrt{25a+9b})^2=(25a+30\sqrt{a}\sqrt{b}+9b)-(25a+9b)$

$=30\sqrt{a}\sqrt{b}=30\sqrt{ab}\geqq 0$　……①

よって　$(5\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2\geqq(\sqrt{25a+9b})^2$

$5\sqrt{a}+3\sqrt{b}\geqq 0$，$\sqrt{25a+9b}\geqq 0$ であるから

$5\sqrt{a}+3\sqrt{b}\geqq\sqrt{25a+9b}$

等号が成り立つのは，① から $a=0$ または $b=0$ のときである。

(2)　$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$

$=a-2\sqrt{ab}+b$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$　……①

よって　　$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2\geqq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{2(a+b)}\geqq 0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqq 0$ であるから　　$\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

等号が成り立つのは，① から $a=b$ のときである。

(3)　$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geqq 0$　……①

よって　　$|a+b|^2\leqq(|a|+|b|)^2$

$|a+b|\geqq 0$，$|a|+|b|\geqq 0$ であるから　　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

等号が成り立つのは，$|ab|-ab=0$

すなわち　$|ab|=ab$　より　$ab\geqq 0$　のとき

別解　$-|a|\leqq a\leqq|a|$，$-|b|\leqq b\leqq|b|$ であるから

辺々を加えて　　$-(|a|+|b|)\leqq a+b\leqq|a|+|b|$

$|a|+|b|\geqq 0$ であるから　　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

$\boxed{4}$

解答　(1)　証明は略，等号成立は $a=\dfrac{1}{6}$ のとき

(2)　証明は略，等号成立は $ab=4$ のとき

解説

相加平均と相乗平均の大小関係を利用する。

(1)　$9a>0$，$\dfrac{1}{4a}>0$ であるから

$$9a+\frac{1}{4a}\geqq 2\sqrt{9a\cdot\frac{1}{4a}}=2\sqrt{\frac{9}{4}}=3$$

等号が成り立つのは，$9a=\dfrac{1}{4a}$ すなわち $a^2=\dfrac{1}{36}$ のときであるが，$a>0$ であるから

$a=\dfrac{1}{6}$ のときである。

(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{16}{a}\right)=ab+16+1+\dfrac{16}{ab}=ab+\dfrac{16}{ab}+17$

$a>0$，$b>0$ より，$ab>0$，$\dfrac{16}{ab}>0$ であるから

$$ab+\frac{16}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}}=8$$

よって　　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{16}{a}\right)\geqq 8+17=25$

等号が成り立つのは，$ab=\dfrac{16}{ab}$ すなわち $(ab)^2=16$ のときであるが，$ab>0$ であるから $ab=4$ のときである。

$\boxed{5}$

解答　$a=\sqrt{2}-1$ のとき最小値 $2\sqrt{2}-3$

解説

$a-2+\dfrac{2}{a+1}=a+1+\dfrac{2}{a+1}-3$

$a>0$ より，$a+1>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$$a+1+\frac{2}{a+1}\geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{2}{a+1}}=2\sqrt{2}$$

よって　　$a-2+\dfrac{2}{a+1}\geqq 2\sqrt{2}-3$

等号が成り立つのは，$a+1=\dfrac{2}{a+1}$ のときである。

このとき　　$(a+1)^2=2$

$a+1>0$ であるから　　$a=\sqrt{2}-1$

したがって　　$a=\sqrt{2}-1$ のとき最小値 $2\sqrt{2}-3$

1

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$x>-3$，$y>2$ より　$x+3>0$，$y-2>0$

よって　$xy-6-(2x-3y)=x(y-2)+3(y-2)$
$=(x+3)(y-2)>0$

ゆえに　$xy-6>2x-3y$

(2)　$\dfrac{b+2}{a+1}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a(b+2)-b(a+1)}{a(a+1)}=\dfrac{2a-b}{a(a+1)}$

$2a>b>0$ より，$2a-b>0$ であるから　$\dfrac{2a-b}{a(a+1)}>0$

したがって　$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+2}{a+1}$

(3)　$xy+yz-(zx+y^2)=x(y-z)-y(y-z)=(x-y)(y-z)$

$x\geqq y\geqq z$ より，$x-y\geqq 0$，$y-z\geqq 0$ であるから　$(x-y)(y-z)\geqq 0$

したがって　$xy+yz\geqq zx+y^2$

参考　等号が成り立つのは　$x-y=0$　または　$y-z=0$

すなわち，$x=y$　または　$y=z$ のときである。

2

解答　(1)　証明は略，等号成立は $x=2$ のとき

(2)　証明は略，等号成立は $x=y=0$ のとき

(3)　証明は略，等号成立は $x=y=0$ のとき

(4)　証明略，等号が成り立つのは $x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ のとき

解説

(1)　$(x^2-x+4)-3x=x^2-4x+4=(x-2)^2\geqq 0$

よって　$x^2-x+4\geqq 3x$

等号が成り立つのは，$x-2=0$ すなわち $x=2$ のときである。

(2)　$x^2+6xy+11y^2=(x^2+6xy+9y^2)-9y^2+11y^2$
$=(x+3y)^2+2y^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$x+3y=0$ かつ $y=0$ すなわち $x=y=0$ のときである。

(3)　$2(x^2+3y^2)-5xy=2\left(x^2-\dfrac{5}{2}xy\right)+6y^2=2\left(x-\dfrac{5}{4}y\right)^2-2\cdot\dfrac{25}{16}y^2+6y^2$

$=2\left(x-\dfrac{5}{4}y\right)^2+\dfrac{23}{8}y^2\geqq 0$

よって　$2(x^2+3y^2)\geqq 5xy$

等号が成り立つのは，$x-\dfrac{5}{4}y=0$ かつ $y=0$ すなわち $x=y=0$ のときである。

(4)　$x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5=x^2+2(y-2)x+5y^2-8y+5$
$=\{x^2+2(y-2)x+(y-2)^2\}-(y-2)^2+5y^2-8y+5$
$=\{x+(y-2)\}^2+4y^2-4y+1$
$=(x+y-2)^2+(2y-1)^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$x+y-2=0$ かつ $2y-1=0$，すなわち $x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ のときである。

3

解答　(1)　証明略，$a=0$ または $b=0$　(2)　証明略，$b=0$ または $a=b$

(3)　証明略，$a=b$ または $a=-b$

解説

(1)　$(7\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2-(\sqrt{49a+4b})^2=(49a+28\sqrt{ab}+4b)-(49a+4b)$
$=28\sqrt{ab}\geqq 0$　……①

よって　$(7\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2\geqq(\sqrt{49a+4b})^2$

$7\sqrt{a}+2\sqrt{b}\geqq 0$，$\sqrt{49a+4b}\geqq 0$ であるから

$7\sqrt{a}+2\sqrt{b}\geqq\sqrt{49a+4b}$

等号が成り立つのは，①から　$a=0$ または $b=0$ のとき。

(2)　$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)$
$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$　……①

$a\geqq b\geqq 0$ のとき　$2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geqq 0$

よって　$(\sqrt{a-b})^2\geqq(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$\sqrt{a-b}\geqq 0$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}\geqq 0$ であるから　$\sqrt{a-b}\geqq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

等号が成り立つのは，①から，$\sqrt{b}=0$ または $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$

すなわち $b=0$ または $a=b$ のときである。

(3)　$\left\{\sqrt{2(a^2+b^2)}\right\}^2-(|a|+|b|)^2=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$
$=a^2-2|a||b|+b^2=(|a|-|b|)^2\geqq 0$

よって　$\left\{\sqrt{2(a^2+b^2)}\right\}^2\geqq(|a|+|b|)^2$

$\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqq 0$，$|a|+|b|\geqq 0$ であるから　$\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqq|a|+|b|$

等号が成り立つのは，$|a|-|b|=0$　のとき，

すなわち，$|a|=|b|$　より　$a=b$ または $a=-b$　のとき

4

解答　(1)　証明は略，等号成立は $a=3$ のとき

(2)　証明は略，等号成立は $a=2b$ のとき

(3)　証明は略，等号成立は $a+b=1$ のとき

解説

相加平均と相乗平均の大小関係を利用する。

(1)　$a>0$ であるから　$a+\dfrac{9}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{9}{a}}=6$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{9}{a}$　すなわち　$a^2=9$　のときであるが，

$a>0$ であるから $a=3$ のときである。

(2)　(左辺)$=4+\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}\geqq 4+2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{4b}{a}}=8$

等号が成り立つのは，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{4b}{a}$　すなわち　$a^2=4b^2$　のときであるが，

$a>0$，$b>0$ であるから $a=2b$ のときである。

(3)　$a+b>0$ であるから

$$(左辺)=\frac{2}{a+b}+2(a+b)\geqq 2\sqrt{\frac{2}{a+b}\cdot 2(a+b)}=4$$

等号が成り立つのは，$\dfrac{2}{a+b}=2(a+b)$　すなわち $(a+b)^2=1$ のときであるが，

$a+b>0$ であるから $a+b=1$ のときである。

5

解答　(1)　$x=1$ で最小値 4　(2)　$a=2b$ のとき最小値 49

解説

(1)　$x+\dfrac{9}{x+2}=x+2+\dfrac{9}{x+2}-2$

$x>0$ より $x+2>0$，$\dfrac{9}{x+2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+2+\frac{9}{x+2}\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{9}{x+2}}=2\cdot 3=6$$

ゆえに　$x+\dfrac{9}{x+2}\geqq 4$

等号が成り立つのは，$x+2=\dfrac{9}{x+2}$ のときである。

このとき　$(x+2)^2=9$

$x+2>0$ であるから　$x+2=3$

ゆえに　$x=1$

したがって　$x=1$ で最小値 4

(2)　$(2a+3b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{3}{b}\right)=25+\dfrac{24b}{a}+\dfrac{6a}{b}$

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{24b}{a}>0$，$\dfrac{6a}{b}>0$ であるから，

(相加平均)≧(相乗平均) により

$$\frac{24b}{a}+\frac{6a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{24b}{a}\cdot\frac{6a}{b}}=24$$

よって　$25+\dfrac{24b}{a}+\dfrac{6a}{b}\geqq 25+24=49$

等号が成り立つのは，$\dfrac{24b}{a}=\dfrac{6a}{b}$ のときである。

このとき　$a^2=4b^2$　$a>0$，$b>0$ であるから　$a=2b$

したがって　$a=2b$ のとき最小値 49

1

解答 (1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$a+b=1$ から　$b=1-a$

よって　$a^2+b^2-\frac{1}{2}=a^2+(1-a)^2-\frac{1}{2}$

$=2a^2-2a+\frac{1}{2}=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0$

したがって　$a^2+b^2\geqq\frac{1}{2}$

(2)　$a+b+c=1$ から　$c=1-(a+b)$

よって　$a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}=a^2+b^2+\{1-(a+b)\}^2-\frac{1}{3}$

$=2a^2+2ab+2b^2-2a-2b+\frac{2}{3}$

$=2\{a^2+(b-1)a\}+2b^2-2b+\frac{2}{3}$

$=2\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2-2\left(\frac{b-1}{2}\right)^2+2b^2-2b+\frac{2}{3}$

$=2\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(b^2-\frac{2}{3}b+\frac{1}{9}\right)$

$=2\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(b-\frac{1}{3}\right)^2\geqq 0$

したがって　$a^2+b^2+c^2\geqq\frac{1}{3}$

2

解答 略

解説

$|a|<1$ から　$-1<a<1$

$a>-1$ の両辺に b を加えて　$a+b>b-1$

$b>1$ より，$b-1>0$ であるから　$a+b>0$

ゆえに　$\frac{ab+1}{a+b}+1=\frac{ab+1+a+b}{a+b}=\frac{(a+1)(b+1)}{a+b}>0,$

$1-\frac{ab+1}{a+b}=\frac{a+b-1-ab}{a+b}=\frac{(1-a)(b-1)}{a+b}>0$

よって　$-1<\frac{ab+1}{a+b}<1$

3

解答 (1)　略　　(2)　略

解説

(1)　[1]　$|a|-|b|<0$ のとき

$|a+b|\geqq 0$ であるから，$|a|-|b|<|a+b|$ は成り立つ。

[2]　$|a|-|b|\geqq 0$ のとき

$|a+b|^2-(|a|-|b|)^2=a^2+2ab+b^2-(a^2-2|a||b|+b^2)$

$=2(ab+|ab|)\geqq 0$

よって　$(|a|-|b|)^2\leqq|a+b|^2$

$|a|-|b|\geqq 0$，$|a+b|\geqq 0$ であるから　$|a|-|b|\leqq|a+b|$

[1]，[2] から　$|a|-|b|\leqq|a+b|$

(2)　$\sqrt{14}-\sqrt{10}>\sqrt{15}-\sqrt{11}$ を示すには，$\sqrt{14}+\sqrt{11}>\sqrt{15}+\sqrt{10}$ を示せばよい。

$\sqrt{14}+\sqrt{11}>0$，$\sqrt{15}+\sqrt{10}>0$　……①

両辺の平方の差をとると

$(\sqrt{14}+\sqrt{11})^2-(\sqrt{15}+\sqrt{10})^2=(14+2\sqrt{14\cdot 11}+11)-(15+2\sqrt{15\cdot 10}+10)$

$=2(\sqrt{154}-\sqrt{150})>0$

よって　$(\sqrt{14}+\sqrt{11})^2>(\sqrt{15}+\sqrt{10})^2$

ゆえに，① から　$\sqrt{14}+\sqrt{11}>\sqrt{15}+\sqrt{10}$

したがって　$\sqrt{14}-\sqrt{10}>\sqrt{15}-\sqrt{11}$

4

解答 (ア)　25　　(イ)　$\frac{1}{6}$

解説

$$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)=36xy+9+4+\frac{1}{xy}=13+36xy+\frac{1}{xy}$$

$x>0$，$y>0$ より，$36xy>0$，$\frac{1}{xy}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$36xy+\frac{1}{xy}\geqq 2\sqrt{36xy\cdot\frac{1}{xy}}=12$$

よって　$13+36xy+\frac{1}{xy}\geqq 13+12=25$

等号が成り立つのは，$36xy=\frac{1}{xy}$ (>0) すなわち　$xy=\frac{1}{6}$ のときである。

ゆえに，$x>0$，$y>0$ において，$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)$ は $xy=\frac{1}{6}$ のとき最小値 25 をとる。

したがって，$x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)\geqq k$ が常に成り立つような定数 k の最大値は　$^{ア}25$

また，$k=25$ のとき等号が成り立つのは，$xy={}^{イ}\frac{1}{6}$ のときである。

5

解答 証明略，$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=6$

解説

(左辺)$=\left(ab+\frac{4a}{c}+1+\frac{4}{bc}\right)\left(c+\frac{9}{a}\right)$

$=abc+9b+4a+\frac{36}{c}+c+\frac{9}{a}+\frac{4}{b}+\frac{36}{abc}$

$=\left(4a+\frac{9}{a}\right)+\left(9b+\frac{4}{b}\right)+\left(c+\frac{36}{c}\right)+\left(abc+\frac{36}{abc}\right)$

各項はすべて正であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

(左辺)$\geqq 2\sqrt{4a\cdot\frac{9}{a}}+2\sqrt{9b\cdot\frac{4}{b}}+2\sqrt{c\cdot\frac{36}{c}}+2\sqrt{abc\cdot\frac{36}{abc}}$

$=12+12+12+12=48$

よって　$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{c}\right)\left(c+\frac{9}{a}\right)\geqq 48$

等号が成り立つのは

$4a=\frac{9}{a}$ かつ $9b=\frac{4}{b}$ かつ $c=\frac{36}{c}$ かつ $abc=\frac{36}{abc}$

すなわち　$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=6$ のときである。

別解　$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$a+\frac{1}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$　……①，$b+\frac{4}{c}\geqq 2\sqrt{\frac{4b}{c}}$　……②，$c+\frac{9}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{9c}{a}}$　……③

この３つの不等式の各辺はすべて正であるから，辺々掛けて

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{c}\right)\left(c+\frac{9}{a}\right)\geqq 8\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{c}\cdot\frac{9c}{a}}=8\cdot 6=48$$

等式が成り立つのは，①，②，③ のすべてで等号が成り立つとき，すなわち

$ab=1$　……①′，$bc=4$　……②′，$ca=9$　……③′ のときである。

①′，②′，③′ の辺々を掛けて　$(abc)^2=36$

$abc>0$ であるから　$abc=6$　……④

④ と ②′，④ と ③′，④ と ①′ から，それぞれ

$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=6$

6

解答 (1)　(ア)　$\sqrt{3}$　　(イ)　$2\sqrt{3}-4$　　(2)　(ウ)　$-1+\sqrt{3}$　　(エ)　6

解説

(1)　$\frac{x^2-4x+3}{x}=x-4+\frac{3}{x}$

$x>0$，$\frac{3}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{3}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{3}$$

ゆえに　$x-4+\frac{3}{x}\geqq 2\sqrt{3}-4$

等号が成り立つのは，$x>0$　かつ　$x=\frac{3}{x}$ のとき，

すなわち　$x=\sqrt{3}$ のときである。

したがって，$\frac{x^2-4x+3}{x}$ は $x={}^{ア}\sqrt{3}$ のとき，最小値 ${}^{イ}2\sqrt{3}-4$ をとる。

(2)　$x^2+2x+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+2}+2=x(x+2)+\frac{2(x+2)-2x}{x(x+2)}+2$

$=x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}+2$

$x(x+2)>0$，$\frac{4}{x(x+2)}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}\geqq 2\sqrt{x(x+2)\cdot\frac{4}{x(x+2)}}=4$$

ゆえに　$x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}+2\geqq 6$

等号が成り立つのは，$x>0$　かつ　$x(x+2)=\frac{4}{x(x+2)}$ のときである。

$x(x+2)=\frac{4}{x(x+2)}$ から　$x^2(x+2)^2=4$

よって　$(x^2+2x)^2-4=0$

ゆえに　$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=0$

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ であるから　$x^2+2x-2=0$

これを解いて　$x=-1\pm\sqrt{3}$

$x>0$ を満たすものは　　$x=-1+\sqrt{3}$

したがって，$x=$ ウ $-1+\sqrt{3}$ のとき，最小値 エ 6 をとる。

$\boxed{1}$

解答　略

解説

$$(左辺)-(右辺)=x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

ここで，$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから　　$x+y+z>0$

また　　$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$$=\frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geqq 0$$

ゆえに　　$x^3+y^3+z^3\geqq 3xyz$ ……①

参考　等号は $x-y=y-z=z-x=0$ すなわち $x=y=z$ のとき成り立つ。

$X=\sqrt[3]{x}$，$Y=\sqrt[3]{y}$，$Z=\sqrt[3]{z}$ とすると，X，Y，Z も正の実数であるから，① において

$x=X$，$y=Y$，$z=Z$ とすると　　$X^3+Y^3+Z^3\geqq 3XYZ$

すなわち　　$x+y+z\geqq 3\cdot\sqrt[3]{xyz}$　　　ゆえに　　$\dfrac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$

参考　等号は $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$ すなわち $x=y=z$ のとき成り立つ。

$\boxed{2}$

解答　(1) 略　　(2) $\dfrac{1}{3}$

解説

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2$$
$$-2abxy-2bcyz-2cazx$$

$$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+c^2x^2-2cazx+a^2z^2$$

$$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\geqq 0$$

よって，$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ が成り立つ。

(2)　(1) の不等式で $a=b=c=1$ とおくと

$$3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2=1$$

よって　　$x^2+y^2+z^2\geqq\dfrac{1}{3}$

等号が成り立つのは，$y-x=z-y=x-z=0$ すなわち $x=y=z$ のとき。

このとき，$x+y+z=1$ から　　$x=y=z=\dfrac{1}{3}$

したがって，$x^2+y^2+z^2$ は $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}$ をとる。

$\boxed{3}$

解答　$\dfrac{a+2}{a+1}$，$\sqrt{2}$，$\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a}$

解説

$a>\sqrt{2}$ であるから　　$a-\sqrt{2}>0$

$$\sqrt{2}-\frac{a+2}{a+1}=\frac{\sqrt{2}(a+1)-(a+2)}{a+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)a-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{a+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2})}{a+1}>0$$

よって　　$\dfrac{a+2}{a+1}<\sqrt{2}$

また　　$\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a}-\sqrt{2}=\dfrac{a^2+2-2\sqrt{2}a}{2a}=\dfrac{(a-\sqrt{2})^2}{2a}>0$

よって　　$\sqrt{2}<\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a}$

したがって，3 つの数を小さい方から順に並べると

$$\frac{a+2}{a+1},\ \sqrt{2},\ \frac{a}{2}+\frac{1}{a}$$

$\boxed{4}$

解答　$a=b=c$ のとき最小値 8

解説

$P=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ とおくと

$$P=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)$$

$$=\left(1+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\right)$$

$$=2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2 \quad (等号成立は\ a=b\ のとき)$$

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}=2 \quad (等号成立は\ b=c\ のとき)$$

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geqq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2 \quad (等号成立は\ c=a\ のとき)$$

よって　$P\geqq 2+2\times 3=8$

したがって，$a=b=c$ のとき最小値 8 をとる。

別解　$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$，$b+c\geqq 2\sqrt{bc}$，$c+a\geqq 2\sqrt{ca}$

(等号成立は，それぞれ $a=b$，$b=c$，$c=a$ のとき)

それぞれ，両辺ともに正であるから辺々を掛けると

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$$

よって　$\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geqq 8$

したがって，$a=b=c$ のとき最小値 8 をとる。