$x>1$，$y>1$ より，$\log_2 x>0$，$\log_2 y>0$ であるから相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$\log_2 x+\log_2 y \geqq 2\sqrt{(\log_2 x)(\log_2 y)}=2\sqrt{4}=4 \quad (③より)$$

となり

$$\log_2 xy \geqq 4 \qquad \therefore\ xy \geqq 2^4=16$$

等号は $\log_2 x=\log_2 y=2 \quad \therefore\ x=y=4$

のとき成立。このとき $a=1$，$b=\dfrac{2}{3}$

← $a=\dfrac{1}{2}\log_2 4$

$b=\dfrac{1}{3}\log_2 4$

よって，xy の最小値は 16 である。

(4) 与式を X，Y で表すと

$$X^2+Y^2=2X+4Y$$
$$(X-1)^2+(Y-2)^2=5$$

であり，$0<x\leqq 1$ より $X\leqq 0$

よって $(X-1)^2+(Y-2)^2=5 \quad (X\leqq 0)$ ……④

であり，点 (X, Y) の存在範囲は右図の実線部分(円弧)となる。

$\log_{10}x^3y=k$ とおくと $3X+Y=k$ ……⑤

XY 平面上で④，⑤が共有点をもつような k の値の範囲を考える。

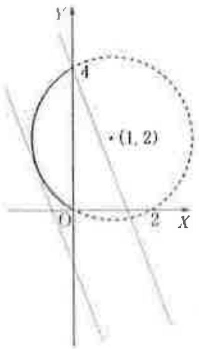
⑤が点 $(0, 4)$ を通るとき $k=4$

⑤が円弧④と接するとき，中心 $(1, 2)$ と⑤との距離が半径と等しいので

$$\frac{|3\cdot 1+2-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{5} \quad より \quad k=5\pm 5\sqrt{2}$$

ゆえに，右図より $5-5\sqrt{2}\leqq k\leqq 4$ であり

$\log_{10}x^3y$ の最大値は 4，最小値は $5-5\sqrt{2}$



32

(1) $\log_{10}1=0$ (③)，$\log_{10}10=1$ (⑤)

$\log_{10}0.1=-1$ (①)，$\log_{10}0.01=-2$ (⓪)

(2) $\log_{10}0.04=\log_{10}\dfrac{2^2}{100}=2\log_{10}2-\log_{10}100$

$=2a-2$

$\log_{10}0.96=\log_{10}\dfrac{2^5\cdot 3}{100}=5\log_{10}2+\log_{10}3-\log_{10}100$

$=5a+b-2$

(3) ガラス板 A が 1 枚のとき，光の強さは 4% 減るので 96% になる。すなわち 0.96 倍になる。

ガラス板 A を n 枚重ねると，光の強さは 0.96^n 倍になるので，$0.96^n\times 100$(%) (⑦)になる。

$$0.96^n\times 100\leqq 50$$

$$0.96^n\leqq 0.5$$

両辺の常用対数をとると

$$n\log_{10}0.96\leqq \log_{10}0.5$$
$$\log_{10}0.96=5\cdot 0.301+0.477-2=-0.018$$
$$\log_{10}0.5=\log_{10}\frac{1}{2}=-\log_{10}2=-0.301$$

より

$$-0.018n\leqq -0.301$$
$$n\geqq \frac{0.301}{0.018}=16.7\cdots$$

したがって，17 枚以上。

ガラス板 B を 5 枚重ねると，光の強さは $0.8^5\times 100$(%)になる。

常用対数をとると

$$\log_{10}(0.8^5\times 100)=5\log_{10}\frac{2^3}{10}+2$$
$$=5(3\log_{10}2-1)+2$$
$$=1.515$$

であり

$$\log_{10}30=1.477$$
$$\log_{10}40=1.602$$

← $\log_{10}10=1$

$\log_{10}20=\log_{10}2+1=1.301$

$\log_{10}30=\log_{10}3+1=1.477$

$\log_{10}40=2\log_{10}2+1=1.602$

であるから

$$30<0.8^5\times 100<40$$

したがって，30% 以上 40% 未満。(④)

解説

33

(1) x が 1 から $1+h$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad (②)$$

$x=1$ における $f(x)$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad (⑤)$$

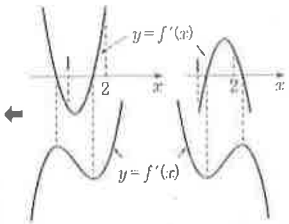
(2) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(x)$ が極値をもつ条件は $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことであるから，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=b^2-3ac>0 \quad (⑦)$$

(3) $f'(x)$ は $1<x<2$ の範囲で負から正に変化するから，$f(x)$ は $1<x<2$ の範囲において極小値をとる。

←



$a>0$ のときは $x<1$ の範囲において，$a<0$ のときは $2<x$ の範囲において，それぞれ $f'(x)$ は正から負に変化するので，