$\boxed{1}$

放物線 A：$y=x^2$ と y 軸上に中心 B をもつ円 C が 2 点 P，Q で接している。
$\angle \mathrm{PBQ}=120^\circ$ であるとき，放物線 A と円 C で囲まれた領域 (放物線より上で円より下の部分) の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$

曲線 $y=x^3-6x^2+9x$ と直線 $y=mx$ で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるような定数 m の値を求めよ。ただし，$0<m<9$ とする。

$\boxed{3}$

t が区間 $-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 2$ を動くとき，$F(t)=\displaystyle\int_0^1 x|x-t|\,dx$ の最大値と最小値を求めよ。

高１甲陽数学　9/27　授業用

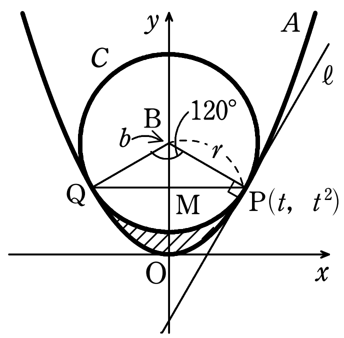
1

解説

点Pが第１象限にあるものとしてよい。

$B(0,\ b)$，$P(t,\ t^2)$，円 C の半径を r $(b>0,\ t>0,\ r>0)$ とし，直線PQと y 軸の交点をMとする。

$y=x^2$ より $y'=2x$ であるから，点Pにおける接線 ℓ の傾きは　　$2t$

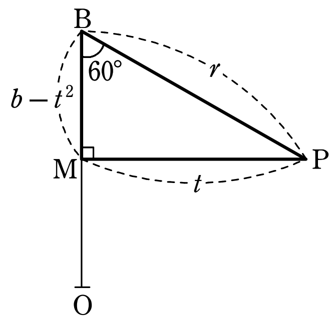


BP⊥ℓ であるから　　$\dfrac{t^2-b}{t-0}\cdot 2t=-1$

よって　　$b-t^2=\dfrac{1}{2}$　　すなわち　　$BM=\dfrac{1}{2}$

$\angle PBQ=120°$ より $\angle PBM=60°$ であるから

$$r=BP=2BM=1,\quad t=PM=\sqrt{3}\,BM=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad t^2=\frac{3}{4}$$



直線PQと放物線 A で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S=S_1+\triangle BPQ-(\text{扇形 }BPQ)$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-x^2\right)dx+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi$$

$$=-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$

2

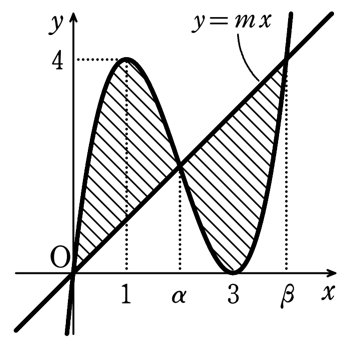
解説

曲線と直線の交点の x 座標は，$x^3-6x^2+9x=mx$ を解くと $x(x-3)^2=mx$ から　　$x\{(x-3)^2-m\}=0$

$0<m<9$ であるから　　$x=0,\ 3\pm\sqrt{m}$

ここで，$3-\sqrt{m}=\alpha$，$3+\sqrt{m}=\beta$ とおくと

$$0<\alpha<\beta$$



２つの図形の面積が等しくなるための条件は

$$\int_0^{\alpha}\{(x^3-6x^2+9x)-mx\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{mx-(x^3-6x^2+9x)\}dx$$

したがって　　$\displaystyle\int_0^{\beta}\{x^3-6x^2+(9-m)x\}dx=0$

左辺の定積分を I とすると　　$I=\left[\dfrac{x^4}{4}-2x^3+\dfrac{9-m}{2}x^2\right]_0^{\beta}=\dfrac{\beta^2}{4}\{\beta^2-8\beta+2(9-m)\}$

$\beta\fallingdotseq 0$ であるから，$I=0$ のとき　　$\beta^2-8\beta+2(9-m)=0$

$\beta=3+\sqrt{m}$ を代入して　　$m+2\sqrt{m}-3=0$

よって　　$(\sqrt{m}-1)(\sqrt{m}+3)=0$

$\sqrt{m}+3>0$ であるから　　$\sqrt{m}=1$　すなわち　$m=1$ $(0<m<9$ を満たす$)$

$\boxed{3}$

(解説)

$f(x)=x|x-t|$ とする。

$x-t \geqq 0$ すなわち $x \geqq t$ のとき　　$f(x)=x(x-t)=x^2-tx$

$x-t \leqq 0$ すなわち $x \leqq t$ のとき　　$f(x)=-x(x-t)=-x^2+tx$

$f(x)=0$ とすると　　$x=0,\ t$

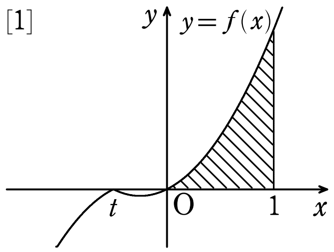
[1]　$-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 0$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ では　　$f(x)=x^2-tx$

よって　$F(t)=\displaystyle\int_0^1 (x^2-tx)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{2}$

[1]



[2]　$0<t<1$ のとき

$0 \leqq x \leqq t$ では　　$f(x)=-x^2+tx$

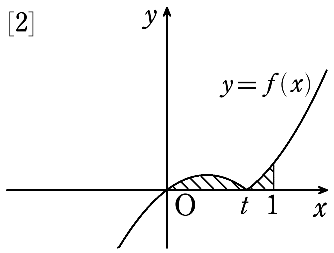
$t \leqq x \leqq 1$ では　　$f(x)=x^2-tx$

よって　$F(t)=\displaystyle\int_0^t (-x^2+tx)dx+\int_t^1 (x^2-tx)dx$

$=\left[-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{t}{2}x^2\right]_0^t+\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{t}{2}x^2\right]_t^1$

$=\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{3}$

[2]



$F'(t)=t^2-\dfrac{1}{2}=\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$F'(t)=0$ とすると　　$t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0<t<1$ における増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$F'(t)$		$-$	0	$+$	
$F(t)$		↘	$\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗	

[3]　$1 \leqq t \leqq 2$ のとき

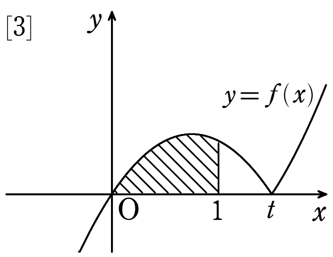
$0 \leqq x \leqq 1$ では　　$f(x)=-x^2+tx$

よって　$F(t)=\displaystyle\int_0^1 (-x^2+tx)dx$

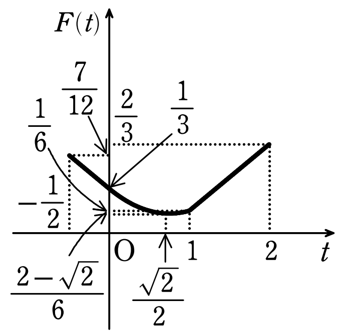
$=-\displaystyle\int_0^1 (x^2-tx)dx$

$=\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{3}$

[3]



[1], [2], [3] から，$y=F(t)$ のグラフは，右の図のようになる。



したがって，$F(t)$ は

$t=2$ のとき最大値 $\dfrac{2}{3}$，

$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

をとる。