高 1 甲陽数学　9/27　演習用

$\boxed{1}$

放物線 $C：y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上に点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ をとる。x 軸上に中心 A をもち点 P で放物線に接する円と x 軸との交点のうち原点に近い方を B とするとき，円弧 BP (短い方) と放物線 C および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

曲線 $y=x^3+2x^2$ と直線 $y=mx$ $(m<0)$ は異なる 3 点で交わるとする。この曲線と直線で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるような定数 m の値を求めよ。

$\boxed{3}$

$f(t)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-tx|\,dx$ とする。$f(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

$\boxed{1}$

(解説)

点 P における接線に垂直な直線の方程式は，$y'=x$ から

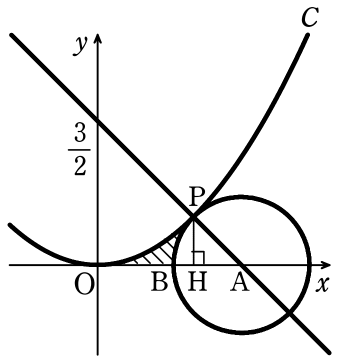
$$y=-(x-1)+\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad y=-x+\frac{3}{2}$$

この直線と x 軸の交点が円の中心 A であるから，その座標は

$$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$$

よって，円の半径は　$\mathrm{AP}=\sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

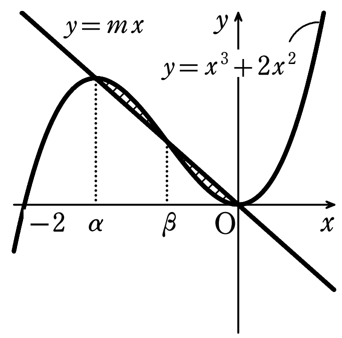
点 P から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を H とすると，求める面積は



$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^2dx+(\triangle\mathrm{PHA}\text{ の面積})$$
$$-(\text{扇形 APB の面積})$$
$$=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{\pi}{16}=\frac{7}{24}-\frac{\pi}{16}$$

$\boxed{2}$

(解説)



曲線と直線の交点の x 座標は，$x^3+2x^2=mx$ すなわち

$$x(x^2+2x-m)=0 \ \cdots\cdots \ ①$$

の実数解である。

曲線と直線は異なる 3 点で交わるから，$x^2+2x-m=0$ は 0 でない異なる 2 つの実数解をもつ。

判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=1^2+m>0$

また，$m<0$ であるから　$-1<m<0$　$\cdots\cdots$ ②

よって，① の解は　$x=0,\ -1\pm\sqrt{1+m}$

ここで，$-1-\sqrt{1+m}=\alpha$，$-1+\sqrt{1+m}=\beta$ とおくと　$\alpha<\beta<0$

2 つの図形の面積が等しくなるための条件は

$$\int_\alpha^\beta (x^3+2x^2-mx)dx=\int_\beta^0 \{mx-(x^3+2x^2)\}dx$$

したがって　$\int_\alpha^0 (x^3+2x^2-mx)dx=0$

左辺の定積分を I とすると

$$I=-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2\right]_0^\alpha=-\frac{\alpha^2}{12}(3\alpha^2+8\alpha-6m)$$

$I=0$ のとき，$\alpha\fallingdotseq 0$ であるから　$3\alpha^2+8\alpha-6m=0$　$\cdots\cdots$ ③

α は $x^2+2x-m=0$ の解であるから　$m=\alpha^2+2\alpha$　$\cdots\cdots$ ④

③ に代入して整理すると　$3\alpha^2+4\alpha=0$　$\alpha\fallingdotseq 0$ であるから　$\alpha=-\frac{4}{3}$

このとき，④ から　$m=-\frac{8}{9}$　これは ② を満たす。

$\boxed{3}$

(解説)

$g(x)=x^2-tx$ とする。

$g(x)=0$ の解は　　$x=0,\ t$

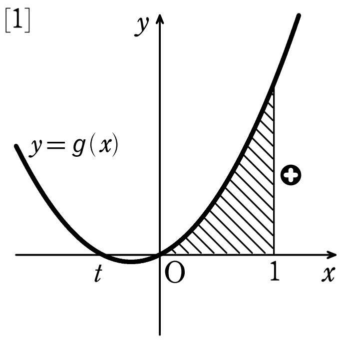
[1]　$t \leqq 0$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ では　　$g(x) \geqq 0$

よって　　$f(t)=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 (x^2-tx)\,dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{t}{2}$$

[1]



[2]　$0<t<1$ のとき

$0 \leqq x \leqq t$ では　　$g(x) \leqq 0$,

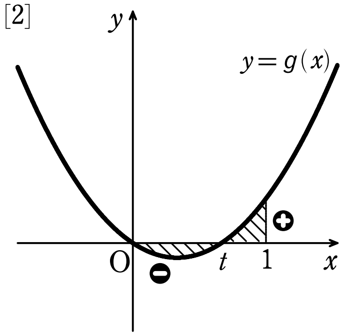
$t \leqq x \leqq 1$ では　　$g(x) \geqq 0$

よって　　$f(t)=-\int_0^t g(x)\,dx+\int_t^1 g(x)\,dx$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_0^t+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_t^1$$

$$=\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}$$

[2]



$f'(t)=t^2-\frac{1}{2}=\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0<t<1$ における増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	

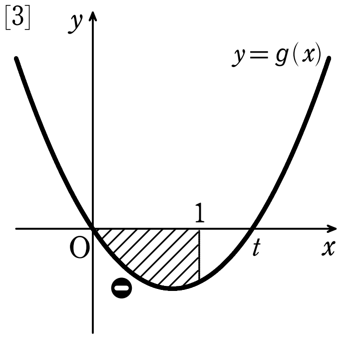
[3]　$t \geqq 1$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ では　　$g(x) \leqq 0$

よって　　$f(t)=-\int_0^1 g(x)\,dx$

$$=-\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)=\frac{t}{2}-\frac{1}{3}$$

[3]



以上から，$y=f(t)$ のグラフは，右の図のようになる。

したがって，$f(t)$ は

$$t=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{のとき最小値}\ \frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

をとる。