高２甲陽数学　9月20日　微分の応用　演習問題

$\boxed{1}$

$x>0$ のとき，$\log x \leqq \dfrac{x}{e}$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{2}$

$x>0$ のとき，$\log(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{3}$

$x>0$ のとき，$e^x>x^2$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{4}$

$x>0$ のとき，不等式 $\sin x>x-\dfrac{x^2}{2}$ を証明せよ。

$\boxed{5}$

x の方程式 $2\sqrt{x}-x+a=0$ の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変化するかを調べよ。

$\boxed{6}$

すべての正の数 x について不等式 $kx^3 \geqq \log x$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{7}$

関数 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(3)　k を定数とするとき，x についての方程式 $x^3-kx^2+2k=0$ の異なる実数解の個数を調べよ。

1

解説

$f(x)=\dfrac{x}{e}-\log x$ とすると　　$f'(x)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-e}{ex}$

$x>0$ のとき，$f'(x)=0$ とすると　　$x=e$

$f(x)$ の増減表は右のようになり，$x=e$ で最小値 0 をとる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小 0	↗

よって，$x>0$ のとき　　$f(x)\geqq 0$

すなわち　　$\log x\leqq\dfrac{x}{e}$

2

解説

$f(x)=\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)-\log(1+x)$ とすると

$f'(x)=1-x+x^2-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{(1+x)(1-x+x^2)-1}{1+x}=\dfrac{x^3}{1+x}$

$x>0$ のとき　　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき　　$\log(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$

3

解説

$f(x)=e^x-x^2$ とすると

$$f'(x)=e^x-2x,\quad f''(x)=e^x-2$$

$x>0$ における $f'(x)$ の増減表は右のようになり，$x=\log 2$ で極小かつ最小となる。

x	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$		↘	極小	↗

$$f'(\log 2)=2-2\log 2$$

$$=2\log\frac{e}{2}>0$$

よって，$x>0$ のとき　　$f'(x)\geqq f'(\log 2)>0$

ゆえに，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

よって，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)=1>0$

したがって　　$e^x>x^2$

4

解説

$f(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とすると

$$f'(x)=\cos x-1+x,\quad f''(x)=-\sin x+1\geqq 0$$

$f''(x)\geqq 0$ より，$f'(x)$ は常に増加するから，$x>0$ のとき　$f'(x)>f'(0)=0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加するから，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき　　$\sin x>x-\dfrac{x^2}{2}$

5

解説

方程式を変形して　　$x-2\sqrt{x}=a$

この方程式の実数解の個数は，曲線 $y=x-2\sqrt{x}$ と直線 $y=a$ の共有点の個数と一致する。

$f(x)=x-2\sqrt{x}$ とする。

$f(x)$ の定義域は　　$x\geqq 0$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1$

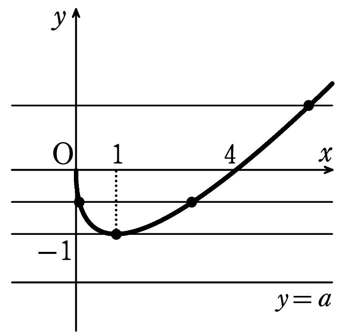
よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	極小 -1	↗

また　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)$

$$=\infty$$

方程式 $f(x)=0$ の解が $x=0,\ 4$ などから，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べると，実数解の個数は

$a<-1$ のとき　0 個

$a=-1,\ 0<a$ のとき　1 個

$-1<a\leqq 0$ のとき　2 個

$\boxed{6}$

(解説)

$x>0$ のとき，不等式 $kx^3 \geqq \log x$ は $k \geqq \dfrac{\log x}{x^3}$ と同値である。

$f(x)=\dfrac{\log x}{x^3}$ とすると

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot x^3-(\log x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{1-3\log x}{x^4}$$

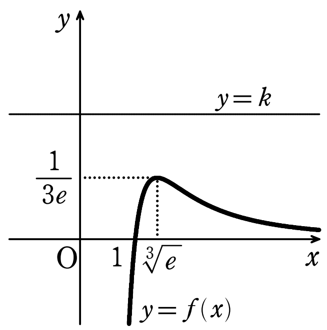
$f'(x)=0$ とすると　　$\log x=\dfrac{1}{3}$

ゆえに　　$x=\sqrt[3]{e}$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt[3]{e}$ で極大かつ最大となり，最大値は　　$f(\sqrt[3]{e})=\dfrac{\log\sqrt[3]{e}}{(\sqrt[3]{e})^3}=\dfrac{1}{3e}$



すべての正の数 x について不等式が成り立つための必要十分条件は，k の値が $f(x)$ の最大値と等しいか，または最大値より大きいことであるから

$$k \geqq \frac{1}{3e}$$

$\boxed{7}$

(解説)

(1)　$f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2-2)-x^3\cdot 2x}{(x^2-2)^2}=\dfrac{x^4-6x^2}{(x^2-2)^2}$

(2)　$f(x)$ の定義域は，$x=\pm\sqrt{2}$ を除く実数全体である。

(1) から　　$f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-6)}{(x^2-2)^2}=\dfrac{x^2(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})}{(x^2-2)^2}$

$x \fallingdotseq \pm\sqrt{2}$ で $f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ \pm\sqrt{6}$

$x \fallingdotseq \pm\sqrt{2}$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで　　$f(\sqrt{6})=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，$f(-\sqrt{6})=-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-\dfrac{2}{x^2}}=\infty,$$

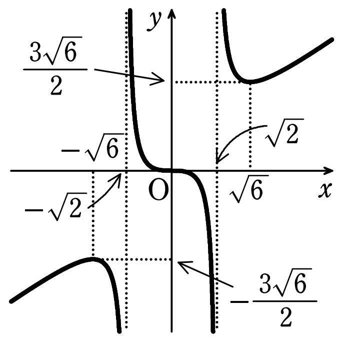
また，$x=-t$ とおくと

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^3}{t^2-2}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{1-\dfrac{2}{t^2}}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}+0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{2}-0} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}+0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\sqrt{2}-0} f(x)=-\infty$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(3)　方程式 $x^3-kx^2+2k=0$ は $x=\pm\sqrt{2}$ を解にもたない。

$x \fallingdotseq \pm\sqrt{2}$ のとき，方程式を変形すると　　$\dfrac{x^3}{x^2-2}=k$

方程式 $x^3-kx^2+2k=0$ の異なる実数解の個数は，

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の個数と一致するから，

(2) のグラフより

$k<-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}<k$ のとき　　3 個

$k=\pm\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$　　のとき　　2 個

$-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}<k<\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$　　のとき　　1 個