中2海星数学　課題考査対策

1

次の式を展開しなさい。

(1) $(x-3)(x-2)$　(2) $(x+3)(x-8)$　(3) $(p+3q)(p-7q)$

(4) $(x+2y)^2$　(5) $(3x-2y)^2$　(6) $(-5p+3q)^2$

(7) $(-3m-4n)^2$　(8) $(x+13)(x-13)$　(9) $(3x-5y)(5y+3x)$

2

$(x^5-3x^4+4x^3-2x+5)(x^3+2x^2+7x-6)$ を展開したとき，x^5の係数，x^3 の係数をそれぞれ求めなさい。

3

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x+y+1)^2-(x-y)^2$　(2) $(x+1)^2+2(x+1)-8$

(3) $(x+1)^2-2(x+1)-3$　(4) $(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+3$

(5) $(x^2-6x)^2+(x^2-6x)-56$　(6) $(x^2+4x)^2-8(x^2+4x)-48$

4

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^4-5x^2+4　(2) x^4+x^2-12　(3) x^4-20x^2+64

(4) x^4-13x^2-48　(5) $x^4-10x^2y^2+9y^4$　(6) x^4+3x^2+4

(7) x^4+5x^2+9　(8) $x^4-18x^2y^2+y^4$　(9) $4x^4+11x^2y^2+9y^4$

5

次の式を因数分解しなさい。

(1) $4a^2-49b^2$　(2) $9x^2+42x+49$　(3) $x^2-9x+18$

(4) $a(b-c)-b+c$　(5) $81-30t+t^2$　(6) $35x^2-12xy+y^2$

(7) $3a^2b-6ab-9b$　(8) $4x^2+16x+16$　(9) $36a^2-4$

(10) $\dfrac{1}{3}x^2-2x+3$　(11) $a(a-b+c)+c(b-a-c)$

(12) $5a^2x^3y+30a^2x^2y^2+45a^2xy^3$

6

次の数の正の約数を，素因数分解を使って求めなさい。

(1) 243　(2) 72　(3) 1296　(4) 90

7

1 から 60 までのすべての自然数の積は，末尾から続けて 0 が何個並んでいるか求めなさい。

8

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{3}(\sqrt{24}-\sqrt{6})$　(2) $(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)$

(3) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$　(4) $(\sqrt{2}+1)^2$

(5) $(\sqrt{8}-\sqrt{5})^2$　(6) $(\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$

(7) $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{27}-\sqrt{8})$　(8) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$

(9) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2\sqrt{3}$　(10) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+\sqrt{3}(4-\sqrt{3})$

(11) $\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{18})-(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

9

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$ を計算しなさい。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化しなさい。

10

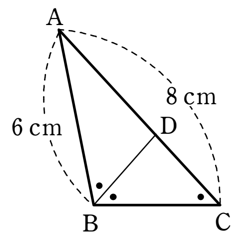
(1) $7-2\sqrt{3}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$3a^2-3ab+b^2$ の値を求めなさい。

(2) $4-\sqrt{3}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2a-b}$ の値を求めなさい。

(3) $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{a-b-1}$ の値を求めなさい。

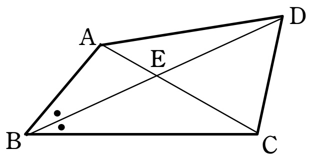
11

△ABC において，AB＝6 cm，AC＝8 cm である。∠B の二等分線と辺 AC の交点を D とすると，∠DBC＝∠C となった。このとき，辺 BC の長さを求めなさい。



12

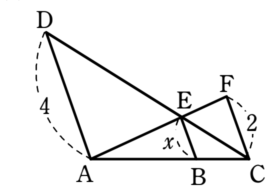
BC＝2AB である四角形 ABCD がある。
対角線の交点 E が対角線 BD の中点であり，∠ABD＝∠DBC であるとき，CD＝CE であることを証明しなさい。



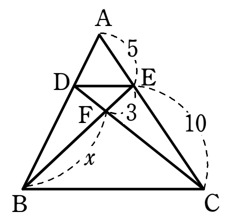
13

下の図で，(1) は AD∥BE∥CF，(2) は DE∥BC，(3) は AC∥ED，AD∥EF である。このとき，x の値を求めなさい。

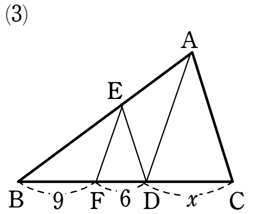
(1)



(2)



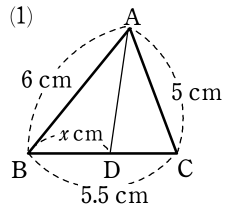
(3)



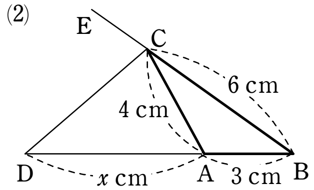
14

右の図において，x の値を求めなさい。ただし，(1) では ∠BAD＝∠CAD であり，(2) では ∠ECD＝∠ACD である。

(1)



(2)



15

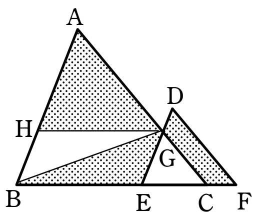
ひし形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ E，F，G，H とする。
このとき，四角形 EFGH は長方形であることを証明しなさい。

16

右の図において，△ABC∽△DEF であり，相似比は 2：1 である。また，HG∥BF であり，BE＝4 cm，CF＝1 cm である。

(1)　線分 CE の長さを求めなさい。

(2)　△AHG：△GBE：(四角形 DGCF の面積) を求めなさい。

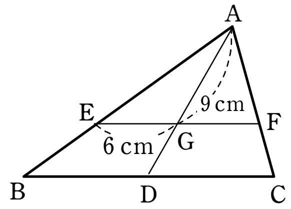


17

相似な 2 つの円錐 A，B があり，その相似比は 2：3 である。B の表面積が 54π cm^2 のとき，A の表面積を求めなさい。また，A の体積が 12π cm^3 のとき，B の体積を求めなさい。

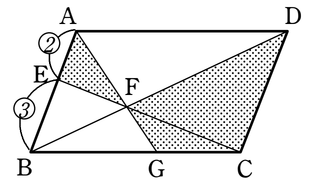
18

右の図において，点 G は △ABC の重心であり，EF∥BC である。このとき，線分 GD，BC の長さをそれぞれ求めなさい。



19

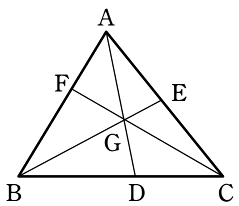
右の図において，四角形 ABCD は平行四辺形で，AE：EB＝2：3 である。
このとき，△AEF と四角形 DFGC の面積比を求めなさい。



20

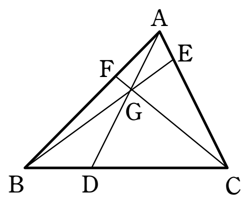
下の図において，次の比を求めなさい。

(1)　AE：EC



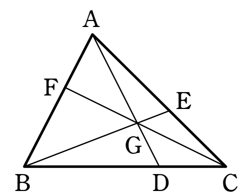
AF：FB＝2：3
AG：GD＝14：9

(2)　AE：EC



BD：DC＝1：2
FG：GC＝1：6

(3)　BG：GE



AF：FB＝2：3
BD：DC＝2：1

解説

$\boxed{1}$

(解説)

(1) $(x-3)(x-2)=x^2+(-3-2)x+(-3)\times(-2)$
$=x^2-5x+6$

(2) $(x+3)(x-8)=x^2+(3-8)x+3\times(-8)$
$=x^2-5x-24$

(3) $(p+3q)(p-7q)=p^2+(3q-7q)p+3q\times(-7q)$
$=p^2-4pq-21q^2$

(4) $(x+2y)^2=x^2+2\times x\times 2y+(2y)^2=x^2+4xy+4y^2$

(5) $(3x-2y)^2=(3x)^2-2\times 3x\times 2y+(2y)^2=9x^2-12xy+4y^2$

(6) $(-5p+3q)^2=(-5p)^2+2\times(-5p)\times 3q+(3q)^2$
$=25p^2-30pq+9q^2$

(7) $(-3m-4n)^2=(-3m)^2-2\times(-3m)\times 4n+(4n)^2$
$=9m^2+24mn+16n^2$

別解 $(-3m-4n)^2=\{-(3m+4n)\}^2=(3m+4n)^2$
$=(3m)^2+2\times 3m\times 4n+(4n)^2$
$=9m^2+24mn+16n^2$

(8) $(x+13)(x-13)=x^2-13^2=x^2-169$

(9) $(3x-5y)(5y+3x)=(3x-5y)(3x+5y)=(3x)^2-(5y)^2$
$=9x^2-25y^2$

$\boxed{2}$

(解説)

与えられた式を展開したとき，x^5 の項は

$x^5\times(-6)+(-3x^4)\times 7x+4x^3\times 2x^2=-6x^5-21x^5+8x^5$
$=-19x^5$

よって，x^5 の係数は　-19

また，x^3 の項は

$4x^3\times(-6)+(-2x)\times 2x^2+5\times x^3=-24x^3-4x^3+5x^3$
$=-23x^3$

よって，x^3 の係数は　-23

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $(x+y+1)^2-(x-y)^2=\{(x+y+1)+(x-y)\}\{(x+y+1)-(x-y)\}$
$=(2x+1)(2y+1)$

(2) $(x+1)^2+2(x+1)-8=\{(x+1)+4\}\{(x+1)-2\}$
$=(x+5)(x-1)$

(3) $(x+1)^2-2(x+1)-3=\{(x+1)+1\}\{(x+1)-3\}$
$=(x+2)(x-2)$

(4) $(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+3=\{(x^2-2x)-1\}\{(x^2-2x)-3\}$
$=(x^2-2x-1)(x^2-2x-3)$
$=(x^2-2x-1)(x+1)(x-3)$

(5) $(x^2-6x)^2+(x^2-6x)-56=\{(x^2-6x)+8\}\{(x^2-6x)-7\}$
$=(x^2-6x+8)(x^2-6x-7)$
$=(x-2)(x-4)(x+1)(x-7)$

(6) $(x^2+4x)^2-8(x^2+4x)-48=\{(x^2+4x)+4\}\{(x^2+4x)-12\}$
$=(x^2+4x+4)(x^2+4x-12)$
$=(x+2)^2(x+6)(x-2)$

$\boxed{4}$

(解説)

(1) $x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)$
$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

(2) $x^4+x^2-12=(x^2)^2+x^2-12=(x^2+4)(x^2-3)$

(3) $x^4-20x^2+64=(x^2)^2-20x^2+64=(x^2-4)(x^2-16)$
$=(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)$

(4) $x^4-13x^2-48=(x^2)^2-13x^2-48=(x^2+3)(x^2-16)$
$=(x^2+3)(x+4)(x-4)$

(5) $x^4-10x^2y^2+9y^4=(x^2)^2-10x^2y^2+9(y^2)^2$
$=(x^2-y^2)(x^2-9y^2)$
$=(x+y)(x-y)(x+3y)(x-3y)$

(6) $x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2=(x^2+2)^2-x^2$
$=\{(x^2+2)+x\}\{(x^2+2)-x\}$
$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

(7) $x^4+5x^2+9=(x^4+6x^2+9)-x^2=(x^2+3)^2-x^2$
$=\{(x^2+3)+x\}\{(x^2+3)-x\}$
$=(x^2+x+3)(x^2-x+3)$

(8) $x^4-18x^2y^2+y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)-16x^2y^2$
$=(x^2-y^2)^2-(4xy)^2$
$=\{(x^2-y^2)+4xy\}\{(x^2-y^2)-4xy\}$
$=(x^2+4xy-y^2)(x^2-4xy-y^2)$

(9) $4x^4+11x^2y^2+9y^4=(4x^4+12x^2y^2+9y^4)-x^2y^2$
$=(2x^2+3y^2)^2-(xy)^2$
$=\{(2x^2+3y^2)+xy\}\{(2x^2+3y^2)-xy\}$
$=(2x^2+xy+3y^2)(2x^2-xy+3y^2)$

$\boxed{5}$

(解説)

(1) $4a^2-49b^2=(2a)^2-(7b)^2=(2a+7b)(2a-7b)$

(2) $9x^2+42x+49=(3x)^2+2\times 3x\times 7+7^2=(3x+7)^2$

(3) $x^2-9x+18=(x-3)(x-6)$

(4) $a(b-c)-b+c=a(b-c)-(b-c)=(a-1)(b-c)$

(5) $81-30t+t^2=t^2-30t+81=(t-3)(t-27)$

(6) $35x^2-12xy+y^2=y^2-12xy+35x^2=(y-5x)(y-7x)$
$=(5x-y)(7x-y)$

(7) $3a^2b-6ab-9b=3b(a^2-2a-3)=3b(a+1)(a-3)$

(8) $4x^2+16x+16=4(x^2+4x+4)=4(x+2)^2$

(9) $36a^2-4=4(9a^2-1)=4(3a+1)(3a-1)$

(10) $\dfrac{1}{3}x^2-2x+3=\dfrac{1}{3}(x^2-6x+9)=\dfrac{1}{3}(x-3)^2$

(11) $a(a-b+c)+c(b-a-c)=a(a-b+c)-c(a-b+c)$
$=(a-c)(a-b+c)$

(12) $5a^2x^3y+30a^2x^2y^2+45a^2xy^3=5a^2xy(x^2+6xy+9y^2)$
$=5a^2xy(x+3y)^2$

$\boxed{6}$

（解説）

(1)　右の計算から

$$\begin{array}{r|l} 3 & 243 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$243=3\times3\times3\times3\times3$

$=3^5$

よって，243 の正の約数は

$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5$

すなわち　1，3，9，27，81，243

(2)　右の計算から

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$72=2\times2\times2\times3\times3$

$=2^3\times3^2$

72 の正の約数は，素因数 2 の個数に注目して考えると，次のようになる。

0 個のとき　$1,\ 3,\ 3^2$　……1，3，9

1 個のとき　$2,\ 2\times3,\ 2\times3^2$　……2，6，18

2 個のとき　$2^2,\ 2^2\times3,\ 2^2\times3^2$　……4，12，36

3 個のとき　$2^3,\ 2^3\times3,\ 2^3\times3^2$　……8，24，72

答　1，2，3，4，6，8，9，12，18，24，36，72

(3)　右の計算から

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1296 \\ \hline 2 & 648 \\ \hline 2 & 324 \\ \hline 2 & 162 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$1296=2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times3$

$=2^4\times3^4$

1296 の正の約数は，素因数 2 の個数に注目して考えると，次のようになる。

0 個のとき　$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4$　……1，3，9，27，81

1 個のとき　$2,\ 2\times3,\ 2\times3^2,\ 2\times3^3,\ 2\times3^4$

……2，6，18，54，162

2 個のとき　$2^2,\ 2^2\times3,\ 2^2\times3^2,\ 2^2\times3^3,\ 2^2\times3^4$　……4，12，36，108，324

3 個のとき　$2^3,\ 2^3\times3,\ 2^3\times3^2,\ 2^3\times3^3,\ 2^3\times3^4$　……8，24，72，216，648

4 個のとき　$2^4,\ 2^4\times3,\ 2^4\times3^2,\ 2^4\times3^3,\ 2^4\times3^4$　……16，48，144，432，1296

答　1，2，3，4，6，8，9，12，16，18，24，27，36，48，54，
72，81，108，144，162，216，324，432，648，1296

(4)　右の計算から

$$\begin{array}{r|l} 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$90=2\times3\times3\times5$

$=2\times3^2\times5$

90 の正の約数は，素因数 2 の個数に注目して考えると，次のようになる。

0 個のとき　$1,\ 3,\ 3^2$　……1，3，9

$5,\ 3\times5,\ 3^2\times5$　……5，15，45

1 個のとき　$2,\ 2\times3,\ 2\times3^2$　……2，6，18

$2\times5,\ 2\times3\times5,\ 2\times3^2\times5$　……10，30，90

答　1，2，3，5，6，9，10，15，18，30，45，90

$\boxed{7}$

（解説）

$P=1\times2\times3\times\cdots\cdots\times60$ とおく。

1 から 60 までの自然数の中に，5 の倍数は 12 個ある。

その中に 5^2 の倍数が 2 個あるから，P の素因数 5 は 14 個ある。

また，P の素因数 2 は 14 個以上ある。

したがって　$P=(2\times5)^{14}\times2^a\times3^b\times7^c\times\cdots\cdots=10^{14}\times Q$

自然数 Q は 5 の倍数を含まないから，10 の倍数にはならない。

よって，P は 10^{14} でわり切れ，10^{15} ではわり切れないから，P は末尾から続けて 0 が 14 個並んでいる。　答　14 個

$\boxed{8}$

（解説）

(1)　$\sqrt{3}(\sqrt{24}-\sqrt{6})=\sqrt{3}(2\sqrt{6}-\sqrt{6})=\sqrt{3}\sqrt{6}=3\sqrt{2}$

(2)　$(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^2+(2-1)\sqrt{2}+2\times(-1)$

$=2+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}$

(3)　$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{5}-\sqrt{2}\sqrt{3}$

$=5-\sqrt{10}+\sqrt{15}-\sqrt{6}$

(4)　$(\sqrt{2}+1)^2=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times1+1^2$

$=2+2\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$

(5)　$(\sqrt{8}-\sqrt{5})^2=(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$

$=(2\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$

$=8-4\sqrt{10}+5=13-4\sqrt{10}$

(6)　$(\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})=3(\sqrt{2})^2+\{1\times\sqrt{3}+(-2\sqrt{3})\times3\}\sqrt{2}+(-2\sqrt{3})\times\sqrt{3}$

$=6-5\sqrt{6}-6=-5\sqrt{6}$

(7)　$(\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{27}-\sqrt{8})$

$=(\sqrt{3}-3\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

$=3(\sqrt{3})^2+\{1\times(-2\sqrt{2})+(-3\sqrt{2})\times3\}\sqrt{3}+(-3\sqrt{2})\times(-2\sqrt{2})$

$=9-11\sqrt{6}+12$

$=21-11\sqrt{6}$

(8)　$(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2$

$=7-2=5$

(9)　$\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2\sqrt{3}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

(10)　$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+\sqrt{3}(4-\sqrt{3})=(\sqrt{6})^2-2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+4\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2$

$=6-4\sqrt{3}+2+4\sqrt{3}-3=5$

(11)　$\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{18})-(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

$=\sqrt{3}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})-\{(2\sqrt{3})^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2\}$

$=6+3\sqrt{6}-(12+4\sqrt{6}+2)$

$=-8-\sqrt{6}$

$\boxed{9}$

（解説）

(1)　$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$

$=2+2\sqrt{6}+3-5=2\sqrt{6}$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

$\boxed{10}$

解説

(1)　$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$，$\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$ であるから　　$3<2\sqrt{3}<4$

各辺に -1 をかけて　　$-4<-2\sqrt{3}<-3$

各辺に 7 をたして　　$3<7-2\sqrt{3}<4$

よって　　$a=3$，　$b=7-2\sqrt{3}-3=4-2\sqrt{3}$

したがって　$3a^2-3ab+b^2=3\times3^2-3\times3(4-2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})^2$

$=27-(36-18\sqrt{3})+(16-16\sqrt{3}+12)$

$=19+2\sqrt{3}$

(2)　$\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$ であるから　　$1<\sqrt{3}<2$

各辺に -1 をかけて　　$-2<-\sqrt{3}<-1$

各辺に 4 をたして　　$2<4-\sqrt{3}<3$

よって　　$a=2$，　$b=4-\sqrt{3}-2=2-\sqrt{3}$

したがって　　$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2a-b}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2\times2-(2-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$　　……(＊)

$=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}$

$=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

別解　$(＊)=\dfrac{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{4}{2^2-(\sqrt{3})^2}=4$

(3)　$\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}=3+\sqrt{2}$

$\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$ であるから　　$1<\sqrt{2}<2$

各辺に 3 をたして　　$4<3+\sqrt{2}<5$

よって　　$a=4$，　$b=3+\sqrt{2}-4=\sqrt{2}-1$

したがって　　$\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{a-b-1}=\dfrac{1}{4+(\sqrt{2}-1)+1}+\dfrac{1}{4-(\sqrt{2}-1)-1}$

$=\dfrac{1}{4+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{4-\sqrt{2}}$　　……(＊)

$=\dfrac{4-\sqrt{2}}{(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})}+\dfrac{4+\sqrt{2}}{(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{4-\sqrt{2}}{4^2-(\sqrt{2})^2}+\dfrac{4+\sqrt{2}}{4^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{4-\sqrt{2}}{16-2}+\dfrac{4+\sqrt{2}}{16-2}$

$=\dfrac{4-\sqrt{2}}{14}+\dfrac{4+\sqrt{2}}{14}$

$=\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}$

別解　$(＊)=\dfrac{(4-\sqrt{2})+(4+\sqrt{2})}{(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})}=\dfrac{8}{4^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}$

$\boxed{11}$

解説

△ABC と △ADB において

仮定から　　∠DBC＝∠ACB,　　∠DBC＝∠ABD

よって　　∠ACB＝∠ABD

また　　∠BAC＝∠DAB　(共通)

2 組の角がそれぞれ等しいから　　△ABC∽△ADB

したがって　　AB：AD＝AC：AB

AD＝x cm とすると　　6：x＝8：6

よって　　$6\times6=x\times8$

これを解くと　　$x=\dfrac{9}{2}$

したがって　　$\text{CD}=8-\dfrac{9}{2}=\dfrac{7}{2}$ (cm)

∠DBC＝∠DCB であるから　BD＝CD

よって　　$\text{BD}=\dfrac{7}{2}$ cm

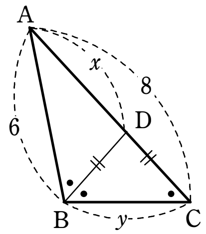
△ABC∽△ADB であるから　BC：DB＝AC：AB

BC＝y cm とすると　　$y:\dfrac{7}{2}=8:6$

したがって　　$y\times6=\dfrac{7}{2}\times8$

これを解くと　　$y=\dfrac{14}{3}$

よって　　$\text{BC}=\dfrac{14}{3}$ cm



$\boxed{12}$

解説

証明　△ABE と △CBD において

仮定から　　AB：CB＝1：2

BE：BD＝1：2

∠ABE＝∠CBD

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABE∽△CBD

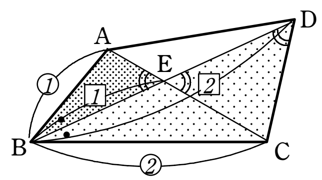
ゆえに　　∠AEB＝∠CDB

対頂角は等しいから　　∠AEB＝∠CED

よって　　∠CDB＝∠CED

したがって，△CDE は二等辺三角形であるから

CD＝CE　　終



$\boxed{13}$

解説

(1)　BE∥CF であるから　　BE：CF＝AE：AF

よって　　x：2＝AE：AF　　……①

AD∥CF であるから　　AE：EF＝AD：FC

よって　　AE：EF＝4：2＝2：1　……②

①，② から　　$x:2=2:(2+1)$

これを解くと　$x=\dfrac{4}{3}$

(2)　DE∥BC であるから

EF：BF＝DE：BC

よって　　3：x＝DE：BC　……①

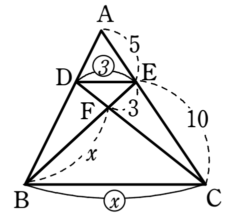
DE∥BC であるから

DE：BC＝AE：AC

＝5：(5＋10)＝1：3　……②

①，② から　　3：x＝1：3

これを解くと　$x=9$



(3)　AC∥ED であるから

BD：DC＝BE：EA

よって　　(9＋6)：x＝BE：EA　　……①

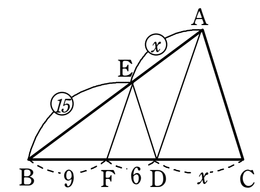
AD∥EF であるから

BE：EA＝BF：FD

よって　　BE：EA＝9：6＝3：2　……②

①，② から　　15：x＝3：2

これを解くと　$x=10$



$\boxed{14}$

解説

(1)　AD は ∠BAC の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC

よって　　$x:(5.5-x)=6:5$

これを解くと　$x=3$

(2)　CD は ∠ACB の外角の二等分線であるから

BD：DA＝CB：CA

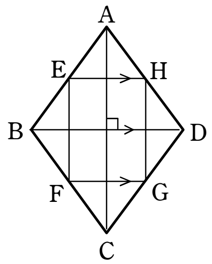
よって　　$(3+x):x=6:4$

これを解くと　$x=6$

$\boxed{15}$

(解説)

証明　$\triangle ABD$ において，点 E，H はそれぞれ辺 AB，AD の中点であるから，中点連結定理により



$EH /\!/ BD$，　$EH=\dfrac{1}{2}BD$　……①

同様にして

$FE /\!/ CA$，　$FE=\dfrac{1}{2}CA$　……②

$GF /\!/ DB$，　$GF=\dfrac{1}{2}DB$　……③

四角形 EFGH において，①，③ から

$EH /\!/ FG$，　$EH=FG$

よって，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 EFGH は平行四辺形である。

また，線分 AC，BD はひし形の対角線であるから垂直である。

このことと ①，② から，辺 EH と EF は垂直である。

したがって，四角形 EFGH は，$\angle FEH$ が直角の平行四辺形，すなわち長方形である。

終

$\boxed{16}$

(解説)

(1)　$CE=x$ cm とすると　　$BC=4+x$，　$EF=x+1$

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比が $2:1$ であるから

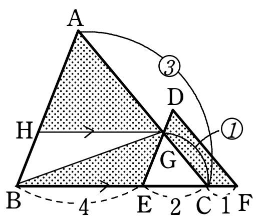
$BC:EF=2:1$

よって　　$(4+x):(x+1)=2:1$

これを解いて　$x=2$

したがって　$CE=2$ cm

(2)　$\triangle ABC$ の面積を S とする。



$\triangle ABC$ と $\triangle GEC$ において，$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ から

$\angle ABC=\angle GEC$

また　　$\angle ACB=\angle GCE$

よって　　$\triangle ABC \backsim \triangle GEC$

相似比は　　$BC:EC=(4+2):2=3:1$

ゆえに，面積比は

$\triangle ABC:\triangle GEC=3^2:1^2=9:1$

したがって　$\triangle GEC=\dfrac{1}{9}S$

$HG /\!/ BC$ であるから　　$\triangle AHG \backsim \triangle ABC$

相似比は　　$AG:AC=(AC-GC):AC=(3-1):3=2:3$

よって，面積比は　　$\triangle AHG:\triangle ABC=2^2:3^2=4:9$

したがって　　　$\triangle AHG=\dfrac{4}{9}S$

ここで，$\triangle BGC:\triangle ABC=CG:CA=1:3$，$BC:BE=3:2$ であるから

$\triangle GBE=\dfrac{2}{3}\triangle BGC=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}S=\dfrac{2}{9}S$

さらに　　$\triangle ABC:\triangle DEF=2^2:1^2=4:1$

したがって　$\triangle DEF=\dfrac{1}{4}S$

よって　　(四角形 DGCF の面積)$=\triangle DEF-\triangle GEC=\dfrac{1}{4}S-\dfrac{1}{9}S=\dfrac{5}{36}S$

以上より　　$\triangle AHG:\triangle GBE:$(四角形 DGCF の面積)$=\dfrac{4}{9}S:\dfrac{2}{9}S:\dfrac{5}{36}S$

$=16:8:5$

$\boxed{17}$

(解説)

$A \backsim B$ で，相似比は $2:3$ であるから

(A の表面積)$:$(B の表面積)$=2^2:3^2=4:9$

(A の体積)$:$(B の体積)$=2^3:3^3=8:27$

B の表面積が 54π cm^2 のとき

(A の表面積)$=\dfrac{4}{9}\times$(B の表面積)$=\dfrac{4}{9}\times 54\pi=24\pi$ (cm^2)

A の体積が 12π cm^3 のとき

(B の体積)$=\dfrac{27}{8}\times$(A の体積)$=\dfrac{27}{8}\times 12\pi=\dfrac{81}{2}\pi$ (cm^3)

$\boxed{18}$

(解説)

G は $\triangle ABC$ の重心であるから　$AG:GD=2:1$，$BD=DC$

よって　　　$9:GD=2:1$

これを解いて　$GD=\dfrac{9}{2}$ cm

$EF /\!/ BC$ であるから　　$EG:BD=AG:AD=2:(2+1)=2:3$

よって　　　$6:BD=2:3$

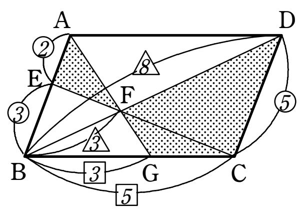
これを解いて　$BD=9$ cm

$BD=DC$ であるから　　$BC=BD+DC=9+9=18$ (cm)

$\boxed{19}$

(解説)

平行四辺形 ABCD の面積を S とする。



$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ であるから

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}S$

$EB /\!/ DC$ であるから

$BF:FD=EB:DC=3:5$

よって　　$\triangle ABD:\triangle ABF=BD:BF$

$=(3+5):3=8:3$

また　　　$\triangle ABF:\triangle AEF=AB:AE=(2+3):2=5:2$

したがって　　$\triangle AEF=\dfrac{2}{5}\triangle ABF=\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{3}{8}\triangle ABD\right)$

$=\dfrac{3}{20}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{3}{40}S$

$AD /\!/ BG$ であるから　　$BG:AD=BF:FD=3:5$

よって　　$BG:BC=3:5$

ゆえに　　$\triangle BGF=\dfrac{BG}{BC}\times\dfrac{BF}{BD}\times\triangle BCD=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{9}{80}S$

よって　　(四角形 DFGC の面積)$=\triangle BCD-\triangle BGF=\dfrac{1}{2}S-\dfrac{9}{80}S=\dfrac{31}{80}S$

したがって　　($\triangle AEF$ の面積)$:$(四角形 DFGC の面積)$=\dfrac{3}{40}S:\dfrac{31}{80}S=6:31$

$\boxed{20}$

(解説)

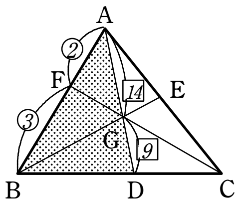
(1)　△ABD と直線 FC において，メネラウスの定理により

$$\frac{BC}{CD}\times\frac{DG}{GA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

DG：GA＝9：14，AF：FB＝2：3 であるから

$$\frac{BC}{CD}\times\frac{9}{14}\times\frac{2}{3}=1$$

よって　$\frac{BC}{CD}=\frac{7}{3}$　　したがって　BC：CD＝7：3



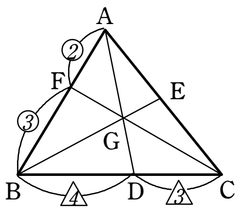
△ABC において，チェバの定理により

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

BD：DC＝(7−3)：3＝4：3，AF：FB＝2：3 であるから

$$\frac{4}{3}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{2}{3}=1$$

よって　$\frac{CE}{EA}=\frac{9}{8}$　　したがって　AE：EC＝8：9



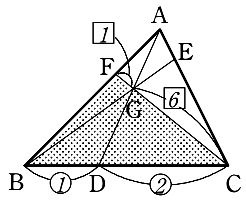
(2)　△CBF と直線 DA において，メネラウスの定理により

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CG}{GF}\times\frac{FA}{AB}=1$$

BD：DC＝1：2，CG：GF＝6：1 であるから

$$\frac{1}{2}\times\frac{6}{1}\times\frac{FA}{AB}=1$$

よって　$\frac{FA}{AB}=\frac{1}{3}$　　したがって　FA：AB＝1：3



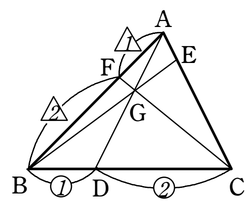
△ABC において，チェバの定理により

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

BD：DC＝1：2，AF：FB＝1：(3−1)＝1：2 であるから

$$\frac{1}{2}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{1}{2}=1$$

よって　$\frac{CE}{EA}=4$　　したがって　AE：EC＝1：4



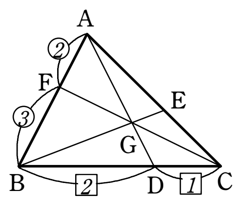
(3)　△ABC において，チェバの定理により

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

BD：DC＝2：1，AF：FB＝2：3 であるから

$$\frac{2}{1}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{2}{3}=1$$

よって　$\frac{CE}{EA}=\frac{3}{4}$　　したがって　CE：EA＝3：4



△BCE と直線 AD において，メネラウスの定理により

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CA}{AE}\times\frac{EG}{GB}=1$$

BD：DC＝2：1，CA：AE＝(3＋4)：4＝7：4 であるから

$$\frac{2}{1}\times\frac{7}{4}\times\frac{EG}{GB}=1$$

よって　$\frac{EG}{GB}=\frac{2}{7}$　　したがって　BG：GE＝7：2