$\boxed{1}$

関数 $y=x^2+2(a-1)x$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ の最大値 M と最小値 m を a の式で表せ。

$\boxed{2}$

(1)　$3x-y=2$ のとき，$2x^2-y^2$ の最大値を求めよ。

(2)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+2y=1$ のとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=-2x^4-8x^2$

(2)　$y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$　$(1\leqq x\leqq 5)$

$\boxed{4}$

(1)　グラフが 3 点 $(1,\ 8)$，$(-2,\ 2)$，$(-3,\ 4)$ を通る 2 次関数を求めよ。

(2)　放物線 $y=2x^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると，2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通る。定数 b，c の値を求めよ。

$\boxed{5}$

2 つの 2 次方程式 $2x^2+kx+4=0$，$x^2+x+k=0$ が共通の実数解をもつように定数 k の値を定め，その共通解を求めよ。

$\boxed{6}$

2 次関数 $y=x^2-2x+2k-4$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

$\boxed{7}$

(1) 2 次関数 $y=-3x^2-4x+2$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2-ax+a-1$ が x 軸から切り取る線分の長さが 6 であるとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{8}$

次の不等式を解け。ただし，a は定数とする。

(1) $x^2-ax\leqq 5(a-x)$　(2) $ax^2>x$　(3) $x^2-a(a+1)x+a^3<0$

$\boxed{9}$

(1)　不等式 $x^2-2x \geqq kx-4$ の解がすべての実数であるような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　すべての実数 x に対して，不等式 $a(x^2+x-1)<x^2+x$ が成り立つような，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{10}$

次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=x|x-2|+3$　　(2)　$y=\left|\dfrac{1}{2}x^2+x-4\right|$

$\boxed{11}$

(1)　2 次方程式 $x^2+2x+k=0$ が 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　実数係数の 2 次方程式 $x^2-2ax+3a=0$ が 2 以上の異なる 2 つの実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{12}$

平面上に 2 点 A$(-1,\ 3)$，B$(5,\ 11)$ がある。

(1)　直線 $y=2x$ について，点 A と対称な点 P の座標を求めよ。

(2)　点 Q が直線 $y=2x$ 上にあるとき，QA＋QB を最小にする点 Q の座標を求めよ。

$\boxed{13}$

放物線 $y=-x^2+x+2$ 上の点 P と，直線 $y=-2x+6$ 上の点との距離は，P の座標が $^{ア}\boxed{}$ のとき最小値 $^{イ}\boxed{}$ をとる。

$\boxed{14}$

円 $(x+2)^2+(y-3)^2=2$ と直線 $y=ax+5$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{15}$

(1) 中心が直線 $y=x$ 上にあり，直線 $3x+4y=24$ と両座標軸に接する円の方程式を求めよ。

(2) 円 $x^2+2x+y^2-2y+1=0$ に接し，傾きが -1 の直線の方程式を求めよ。

$\boxed{16}$

放物線 $y=2x^2+a$ と円 $x^2+(y-2)^2=1$ について，次のものを求めよ。

(1) この放物線と円が接するとき，定数 a の値

(2) 異なる 4 個の交点をもつような定数 a の値の範囲

解説

$\boxed{1}$

(解説)

関数の式を変形すると　　$y=x^2+2(a-1)x=\{x+(a-1)\}^2-(a-1)^2$

$f(x)=x^2+2(a-1)x$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線

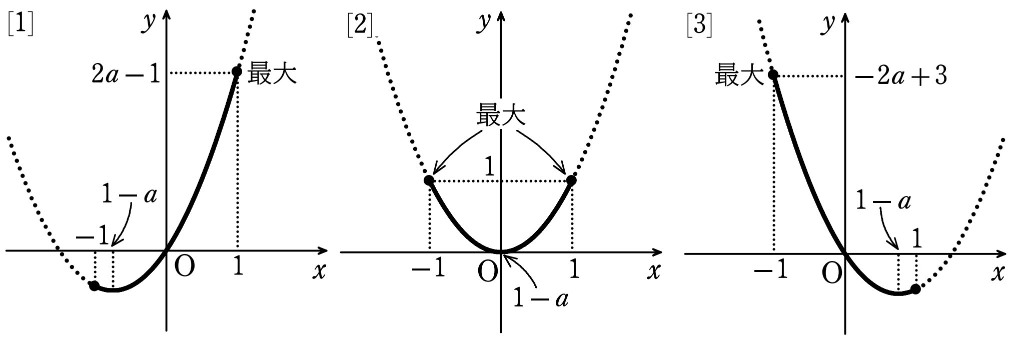
$x=1-a$，頂点は点 $(1-a,\ -(a-1)^2)$

また，区間の中央の値は 0，$f(-1)=-2a+3$，$f(1)=2a-1$

最大値は　[1]　$1-a<0$　すなわち　$a>1$ のとき　　$M=f(1)=2a-1$

　　　　　[2]　$1-a=0$　すなわち　$a=1$ のとき　　$M=f(-1)=f(1)=1$

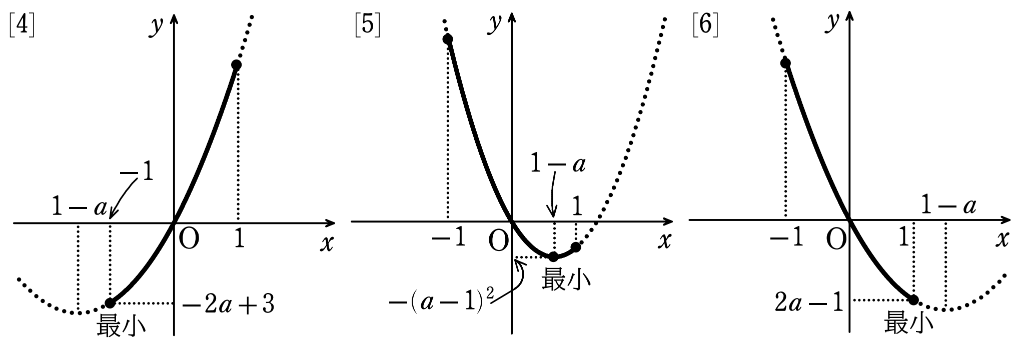
　　　　　[3]　$1-a>0$　すなわち　$a<1$ のとき　　$M=f(-1)=-2a+3$



最小値は　[4]　$1-a<-1$　　すなわち　$a>2$ のとき　　$m=f(-1)=-2a+3$

　　　　　[5]　$-1\leqq 1-a\leqq 1$　すなわち　$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$m=f(1-a)=-(a-1)^2$

　　　　　[6]　$1-a>1$　　すなわち　$a<0$ のとき　　$m=f(1)=2a-1$



以上から　　$M=\begin{cases}2a-1 & (a\geqq 1)\\ -2a+3 & (a<1)\end{cases}$，　$m=\begin{cases}-2a+3 & (a>2)\\ -(a-1)^2 & (0\leqq a\leqq 2)\\ 2a-1 & (a<0)\end{cases}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$3x-y=2$ から　　$y=3x-2$　…… ①

　ゆえに　　$2x^2-y^2=2x^2-(3x-2)^2=-7x^2+12x-4$

$$=-7\left\{x^2-\frac{12}{7}x+\left(\frac{6}{7}\right)^2\right\}+7\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^2-4$$

$$=-7\left(x-\frac{6}{7}\right)^2+\frac{8}{7}$$

　したがって，$x=\dfrac{6}{7}$ で最大値 $\dfrac{8}{7}$ をとる。

　このとき，① から　　$y=3\cdot\dfrac{6}{7}-2=\dfrac{4}{7}$

　よって　　$(x,\ y)=\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{4}{7}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{8}{7}$

(2)　$x+2y=1$ から　　$x=-2y+1$　…… ①

　$x\geqq 0$ であるから　　$-2y+1\geqq 0$　　ゆえに　　$y\leqq\dfrac{1}{2}$

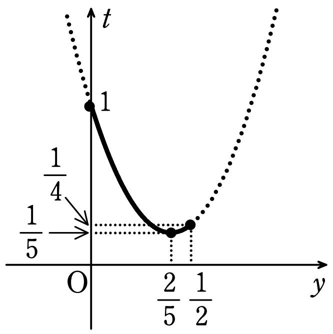
　$y\geqq 0$ との共通範囲は　　$0\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}$　…… ②

　$x^2+y^2=t$ とおくと

　　$t=(-2y+1)^2+y^2$

　　　$=5y^2-4y+1$

　　　$=5\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}$



　② の範囲において，t は

　$y=0$ で最大値 1 をとり，$y=\dfrac{2}{5}$ で最小値 $\dfrac{1}{5}$ をとる。

　① から　　$y=0$ のとき　$x=1$；$y=\dfrac{2}{5}$ のとき　$x=-2\cdot\dfrac{2}{5}+1=\dfrac{1}{5}$

　したがって　　$(x,\ y)=(1,\ 0)$ のとき最大値 1，

　　　　　　　$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{1}{5}$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$x^2=t$ とおくと　　$t\geqq 0$

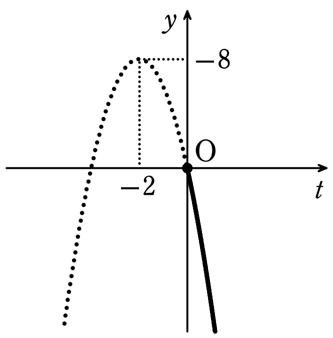
y を t の式で表すと

$$y=-2t^2-8t$$
$$=-2(t+2)^2+8$$

$t\geqq 0$ の範囲において，y は $t=0$ のとき最大となり，最小値はない。

よって　　$x=0$ のとき最大値 0，

最小値はない。



(2)　$x^2-6x=t$ とおくと　　$t=(x-3)^2-9$

$1\leqq x\leqq 5$ であるから　　$-9\leqq t\leqq -5$　……①

y を t の式で表すと

$$y=t^2+12t+30$$
$$=(t+6)^2-6$$

① の範囲において，y は $t=-9$ で最大値 3，$t=-6$ で最小値 -6 をとる。

$t=-9$ のとき　　$(x-3)^2-9=-9$

ゆえに　　$(x-3)^2=0$

よって　　$x=3$

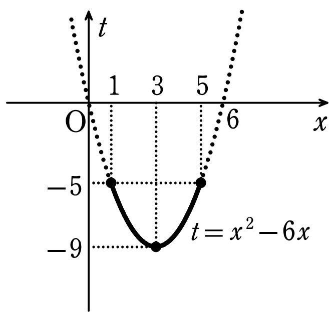
$t=-6$ のとき　　$(x-3)^2-9=-6$

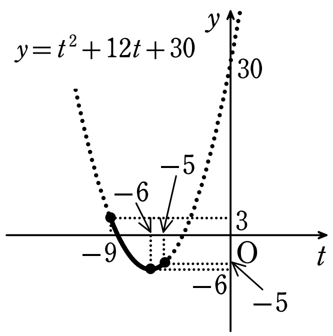
ゆえに　　$(x-3)^2=3$

よって　　$x=3\pm\sqrt{3}$

以上から　　$x=3$ のとき最大値 3，

$x=3\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 -6





$\boxed{4}$

(解説)

(1)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが 3 点 $(1,\ 8)$，$(-2,\ 2)$，$(-3,\ 4)$ を通るから

$$\begin{cases} a+b+c=8 & \cdots\cdots ① \\ 4a-2b+c=2 & \cdots\cdots ② \\ 9a-3b+c=4 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　　$3a-3b=-6$　すなわち　$a-b=-2$　……④

③−② から　　$5a-b=2$　……⑤

⑤−④ から　　$4a=4$　　　　ゆえに　　$a=1$

このとき，④ から　　$b=3$　　　　更に，① から　　$c=4$

したがって　　　$y=x^2+3x+4$

(2)　放物線 $y=2x^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線の方程式は　　$y-1=2(x+2)^2+b(x+2)+c$

すなわち　　$y=2(x+2)^2+b(x+2)+c+1$

この放物線が 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから

$$2\cdot 1^2+b\cdot 1+c+1=0,\ 2\cdot 4^2+b\cdot 4+c+1=0$$

すなわち　　$b+c=-3$，$4b+c=-33$

この連立方程式を解いて　　$b=-10$，$c=7$

$\boxed{5}$

(解説)

共通解を $x=\alpha$ とおいて，方程式にそれぞれ代入すると

$$2\alpha^2+k\alpha+4=0\ \cdots\cdots ①,\ \alpha^2+\alpha+k=0\ \cdots\cdots ②$$

①−②×2 から　　$(k-2)\alpha+4-2k=0$　　　ゆえに　　$(k-2)(\alpha-2)=0$

よって　　$k=2$　または　$\alpha=2$

[1]　$k=2$ のとき

2 つの方程式はともに $x^2+x+2=0$ で，同じ方程式になる。

ところが，判別式を D とすると $D=1^2-4\cdot 1\cdot 2=-7<0$ であるから，実数解をもたない。

[2]　$\alpha=2$ のとき

② から　　$2^2+2+k=0$　　　　よって　　$k=-6$

このとき，2 つの方程式は $2x^2-6x+4=0$，$x^2+x-6=0$ となり，$x=2$ は共通解である。

以上から　　$k=-6$，共通解は $x=2$

$\boxed{6}$

(解説)

2 次関数 $y=x^2-2x+2k-4$ の係数について

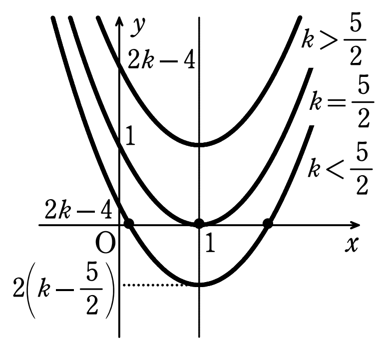
$$\frac{D}{4}=(-1)^2-(2k-4)=-2\left(k-\frac{5}{2}\right)\quad とする。$$

グラフと x 軸の共有点の個数は

$D>0$　すなわち　$k<\dfrac{5}{2}$ のとき　2 個

$D=0$　すなわち　$k=\dfrac{5}{2}$ のとき　1 個

$D<0$　すなわち　$k>\dfrac{5}{2}$ のとき　0 個



$\boxed{7}$

(解説)

(1)　$-3x^2-4x+2=0$ とすると　$3x^2+4x-2=0$

ゆえに　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot(-2)}}{3}=\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$

よって，放物線が x 軸から切り取る線分の長さは

$$\frac{-2+\sqrt{10}}{3}-\frac{-2-\sqrt{10}}{3}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

(2)　$x^2-ax+a-1=0$ とすると　$(x-1)(x+1-a)=0$　ゆえに　$x=1,\ a-1$

よって，放物線が x 軸から切り取る線分の長さは　$|(a-1)-1|=|a-2|$

ゆえに　$|a-2|=6$　よって　$a-2=\pm6$

したがって　$a=8,\ -4$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　不等式から　$x(x-a)-5(a-x)\leqq0$　よって　$(x-a)(x+5)\leqq0$

$a<-5$ のとき　解は　$a\leqq x\leqq-5$

$a=-5$ のとき　不等式は　$(x+5)^2\leqq0$　よって，解は　$x=-5$

$-5<a$ のとき　解は　$-5\leqq x\leqq a$

(2)　不等式から　$ax^2-x>0$　よって　$x(ax-1)>0$　……①

$a>0$ のとき　① の両辺を正の数 a で割って　$x\left(x-\dfrac{1}{a}\right)>0$

$\dfrac{1}{a}>0$ であるから，解は　$x<0,\ \dfrac{1}{a}<x$

$a=0$ のとき　不等式は　$0>x$　よって，解は　$x<0$

$a<0$ のとき　① の両辺を負の数 a で割って　$x\left(x-\dfrac{1}{a}\right)<0$

$\dfrac{1}{a}<0$ であるから，解は　$\dfrac{1}{a}<x<0$

(3)　不等式から　$(x-a)(x-a^2)<0$

[1]　$a<a^2$ すなわち $a(a-1)>0$ から　$a<0,\ 1<a$ のとき

解は　$a<x<a^2$

[2]　$a=a^2$ すなわち $a(a-1)=0$ から　$a=0,\ 1$

$a=0$ のとき，不等式は $x^2<0$ となり，解はない。

$a=1$ のとき，不等式は $(x-1)^2<0$ となり，解はない。

[3]　$a>a^2$ すなわち $a(a-1)<0$ から　$0<a<1$ のとき

解は　$a^2<x<a$

$\boxed{9}$

(解説)

(1)　不等式を変形すると　$x^2-(k+2)x+4\geqq0$

x^2 の係数が 1 で正であるから，常に不等式が成り立つための必要十分条件は，係数について　$\{-(k+2)\}^2-4\cdot1\cdot4\leqq0$

ゆえに　$k^2+4k-12\leqq0$　よって　$(k+6)(k-2)\leqq0$

これを解いて　$-6\leqq k\leqq2$

(2)　不等式を変形すると　$(a-1)x^2+(a-1)x-a<0$　……①

[1]　$a-1=0$　すなわち　$a=1$ のとき

① は　$0\cdot x^2+0\cdot x-1<0$ となり，これはすべての実数 x について成り立つ。

[2]　$a-1\fallingdotseq0$　すなわち　$a\fallingdotseq1$ のとき

$(a-1)x^2+(a-1)x-a=0$ の判別式を D とすると，常に ① が成り立つための必要十分条件は

$$a-1<0\quad かつ\quad D=(a-1)^2-4(a-1)(-a)<0\quad ……②$$

② から　$5a^2-6a+1<0$　ゆえに　$(5a-1)(a-1)<0$

よって，② の解は　$\dfrac{1}{5}<a<1$

$a-1<0$ すなわち $a<1$ との共通範囲は　$\dfrac{1}{5}<a<1$

[1]，[2] から，求める a の値の範囲は　$\dfrac{1}{5}<a\leqq1$

$\boxed{10}$

(解説)

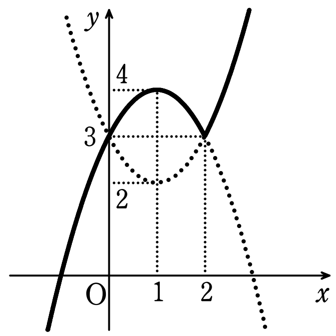
(1)　$x \geqq 2$ のとき

$$y=x(x-2)+3=x^2-2x+3$$
$$=(x-1)^2+2$$

$x<2$ のとき

$$y=x\{-(x-2)\}+3=-x^2+2x+3$$
$$=-(x-1)^2+4$$

グラフは右の図の実線部分。



(2)　$\frac{1}{2}x^2+x-4=\frac{1}{2}(x^2+2x-8)=\frac{1}{2}(x+4)(x-2)$ であるから

$\frac{1}{2}x^2+x-4 \geqq 0$ の解は　　$x \leqq -4,\ 2 \leqq x$

$\frac{1}{2}x^2+x-4<0$ の解は　　$-4<x<2$

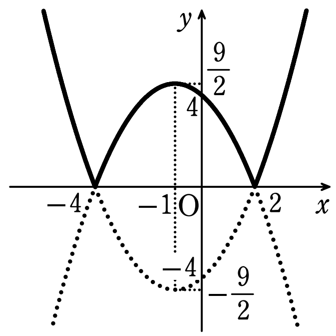
ゆえに，$x \leqq -4,\ 2 \leqq x$ のとき

$$y=\frac{1}{2}x^2+x-4=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{9}{2}$$

$-4<x<2$ のとき

$$y=-\left(\frac{1}{2}x^2+x-4\right)$$
$$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{9}{2}$$

グラフは右の図の実線部分。



$\boxed{11}$

(解説)

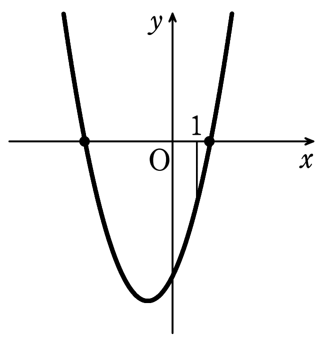
(1)　$f(x)=x^2+2x+k$ とする。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，題意を満たすための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる2点で交わり，交点の x 座標が，一方が1より大きく，もう一方は1より小さいことである。

よって，図から

$$f(1)=1+2+k<0$$

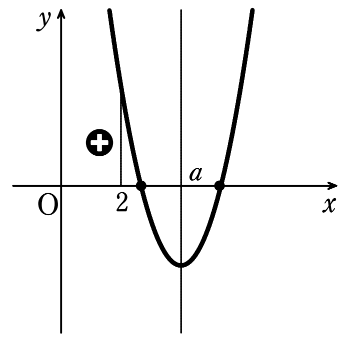
これを解いて　　$k<-3$



(2)　判別式を D とし，$f(x)=x^2-2ax+3a$ とする。

題意を満たすための条件は，$y=f(x)$ のグラフが $x \geqq 2$ の部分と，異なる2点で交わることである。

したがって，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つ。



[1]　$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot 3a=a(a-3)>0$

よって　　$a<0,\ 3<a$　……①

[2]　放物線 $y=f(x)$ の軸は直線 $x=a$ で，この軸について　　$a>2$　……②

[3]　$f(2) \geqq 0$ から　　$2^2-2a\cdot 2+3a=-a+4 \geqq 0$

よって　　$a \leqq 4$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて　　$3<a \leqq 4$

$\boxed{12}$

(解説)

(1)　直線 $y=2x$ を ℓ とし，点Pの座標を $(p,\ q)$ とする。

直線APは ℓ に垂直であるから　　$\frac{q-3}{p+1}\cdot 2=-1$

ゆえに　　$p+2q=5$　……①

また，線分APの中点 $\left(\frac{p-1}{2},\ \frac{q+3}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{q+3}{2}=2\cdot\frac{p-1}{2}$$

ゆえに　　$2p-q=5$　……②

①，②を解いて　　$p=3,\ q=1$

よって，点Pの座標は　　$(3,\ 1)$

(2)　右の図のように，2点A，Bは，直線 ℓ に関して同じ側にある。

ここで　　$QA+QB=QP+QB \geqq PB$

であるから，3点P，Q，Bが同じ直線上にあるとき，$QA+QB$ は最小になる。

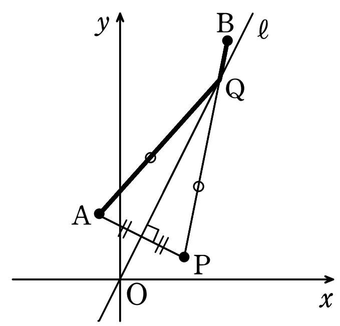
また，直線PBの方程式は

$$y-1=\frac{11-1}{5-3}(x-3)$$

すなわち　　$y=5x-14$　……③

③と $y=2x$ を連立して解くと　　$x=\frac{14}{3},\ y=\frac{28}{3}$

よって，求める点Qの座標は　　$\left(\frac{14}{3},\ \frac{28}{3}\right)$



$\boxed{13}$

(解説)

点Pの座標は $(a,\ -a^2+a+2)$ と表される。

点Pと直線 $y=-2x+6$ すなわち $2x+y-6=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|2a-a^2+a+2-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-a^2+3a-4|}{\sqrt{5}}$$

ここで，$-a^2+3a-4=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$ であるから

$$|-a^2+3a-4|=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

ゆえに　$d=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right\}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7\sqrt{5}}{20}$

よって，d は $a=\frac{3}{2}$ のとき最小値 $\frac{7\sqrt{5}}{20}$ をとる。

すなわち，P $^{ア}\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{4}\right)$ のとき最小値 $^{イ}\ \frac{7\sqrt{5}}{20}$

$\boxed{14}$

(解説)

[解法 1]　$y=ax+5$ を円の方程式に代入して

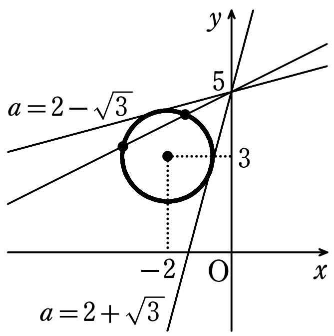
$$(x+2)^2+(ax+2)^2=2$$

整理すると　$(a^2+1)x^2+4(a+1)x+6=0$

判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=\{2(a+1)\}^2-6(a^2+1)$

$\quad=-2a^2+8a-2=-2(a^2-4a+1)$



円と直線が異なる2点で交わるための条件は　$D>0$

ゆえに　$a^2-4a+1<0$

よって　$2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

[解法 2]　円の半径は $\sqrt{2}$ である。円の中心 $(-2,\ 3)$ と直線 $y=ax+5$ の距離を d とすると，円と直線が異なる2点で交わるための条件は　$d<\sqrt{2}$

$d=\frac{|a\cdot(-2)-3+5|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}$ であるから　$\frac{|-2a+2|}{\sqrt{a^2+1}}<\sqrt{2}$

両辺に正の数 $\sqrt{a^2+1}$ を掛けて　$|-2a+2|<\sqrt{2(a^2+1)}$

両辺は負でないから平方して　$(-2a+2)^2<2(a^2+1)$

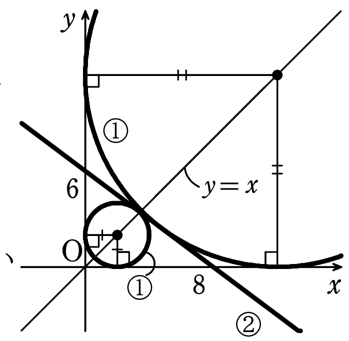
整理して　$a^2-4a+1<0$

よって　$2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

$\boxed{15}$

(解説)

(1)　中心は直線 $y=x$ 上にあるから，その座標を $(t,\ t)$ とおくことができる。また，円は両座標軸に接するから，半径は $|t|$ であり，求める円の方程式は，次のように表される。



$$(x-t)^2+(y-t)^2=|t|^2 \quad \cdots\cdots ①$$

円①が直線 $3x+4y=24$ ……②に接するための条件は，円の中心 $(t,\ t)$ と直線②との距離が円の半径 $|t|$ に等しいことであるから　$\frac{|3t+4t-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=|t|$

ゆえに　$|7t-24|=5|t|$　　よって　$7t-24=\pm5t$

$7t-24=5t$ から　$t=12$，　$7t-24=-5t$ から　$t=2$

これを①に代入して，求める円の方程式は

$$(x-12)^2+(y-12)^2=144,\ (x-2)^2+(y-2)^2=4$$

(2)　求める直線の方程式を $y=-x+k$ ……①とし，$x^2+2x+y^2-2y+1=0$ ……②とする。

①から　$x+y-k=0$

②から　$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

直線①と円②が接するための条件は，円の中心 $(-1,\ 1)$ と直線①の距離が円の半径1に等しいことである。

したがって　$\frac{|-1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$　すなわち　$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=1$

ゆえに　$|k|=\sqrt{2}$　　よって　$k=\pm\sqrt{2}$

これを①に代入して，求める直線の方程式は　$y=-x\pm\sqrt{2}$

別解　①を②に代入すると　$x^2+2x+(-x+k)^2-2(-x+k)+1=0$

整理して　$2x^2+2(2-k)x+k^2-2k+1=0$

直線①と円②が接するための条件は，この2次方程式の判別式 D について

$$\frac{D}{4}=(2-k)^2-2(k^2-2k+1)=2-k^2=0$$

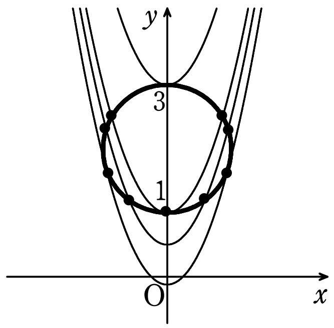
ゆえに　$k^2=2$　　よって　$k=\pm\sqrt{2}$

これを①に代入して，求める直線の方程式は　$y=-x\pm\sqrt{2}$

$\boxed{16}$

(解説)

(1)　$y=2x^2+a$ から　$x^2=\dfrac{1}{2}(y-a)$



これを $x^2+(y-2)^2=1$ に代入して

$$\frac{1}{2}(y-a)+(y-2)^2=1$$

よって

$$2y^2-7y-a+6=0 \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　放物線と円が 2 点で接する場合

① の判別式を D とすると

$$D=(-7)^2-4\cdot2(-a+6)=8a+1=0$$

ゆえに　$a=-\dfrac{1}{8}$

[2]　放物線と円が 1 点で接する場合

図から，点 $(0,\ 1)$，$(0,\ 3)$ で接する場合で　$a=1,\ 3$

以上から，求める a の値は　$a=-\dfrac{1}{8},\ 1,\ 3$

(2)　放物線と円が 4 個の共有点をもつのは，(1) の図から，放物線の頂点が，点 $\left(0,\ -\dfrac{1}{8}\right)$ と点 $(0,\ 1)$ を結ぶ線分上 (端点を除く) にあるときである。

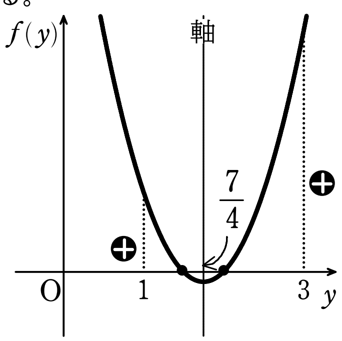
したがって　$-\dfrac{1}{8}<a<1$

別解　$x^2=1-(y-2)^2\geqq0$ であるから　$-1\leqq y-2\leqq1$

よって　$1\leqq y\leqq3$

$1<y<3$　……② の y の 1 つの値に対して，x の値は 2 つあり，$y=1,\ 3$ なら $x=0$ だけであるから，放物線と円が 4 個の共有点をもつための条件は，2 次方程式 ① が，② の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことである。

判別式 $D=8a+1>0$ から　$a>-\dfrac{1}{8}$　……③



$f(y)=2y^2-7y-a+6$ とする。

軸について　$1<\dfrac{7}{4}<3$

$f(3)=3-a>0$ から　$a<3$　……④

$f(1)=1-a>0$ から　$a<1$　……⑤

③ ～ ⑤ の共通範囲を求めて　$-\dfrac{1}{8}<a<1$