$\boxed{1}$

次の式を展開せよ。

(1) $(x+3)(x-3)(x^2+9)$　　(2) $(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$

(3) $(a+b)^3(a-b)^3$　　(4) $(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-3x+9)$

$\boxed{2}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3b+16-4ab-4a^2$　　(2) $x^3y+x^2-xyz^2-z^2$

(3) $6x^2-yz+2xz-3xy$　　(4) $3x^2-2z^2+4yz+2xy+5xz$

$\boxed{3}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$

(2) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

$\boxed{4}$

次の式を因数分解せよ。

(1) x^4+3x^2+4　　(2) $x^4-11x^2y^2+y^4$

(3) $x^4-9x^2y^2+16y^4$　　(4) $4x^4+11x^2y^2+9y^4$

$\boxed{5}$

(1) 次の値を求めよ。

(ア) $|-6|$　　(イ) $|\sqrt{2}-1|$　　(ウ) $|2\sqrt{3}-4|$

(2) 数直線上において，次の 2 点間の距離を求めよ。

(ア) P(-2)，Q(5)　　(イ) A(8)，B(3)　　(ウ) C(-4)，D(-1)

(3) $x=2$，3 のとき，$P=|x-1|-2|3-x|$ の値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{6}$

次の式の 2 重根号をはずして簡単にせよ。

(1) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$　　(2) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$　　(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$　　(4) $\sqrt{9-3\sqrt{5}}$

$\boxed{7}$

$2x+\dfrac{1}{2x}=\sqrt{7}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $4x^2+\dfrac{1}{4x^2}$　　(2) $8x^3+\dfrac{1}{8x^3}$　　(3) $64x^6+\dfrac{1}{64x^6}$

$\boxed{8}$

(1) 不等式 $4(x-2)+5(6-x)>7$ を成り立たせる x の値のうち，最も大きい整数を求めよ。

(2) 不等式 $3x+1>2a$ を満たす x の最小の整数値が 4 であるとき，整数 a の値をすべて求めよ。

$\boxed{9}$

(1) 不等式 $ax>x+a^2+a-2$ を解け。ただし，a は定数とする。

(2) 不等式 $2ax\leqq 4x+1\leqq 5$ の解が $-5\leqq x\leqq 1$ であるとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{10}$

$U=\{x \mid x\text{は実数}\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A=\{2,\ 4,\ a^2+1\}$，$B=\{4,\ a+7,\ a^2-4a+5\}$ について，$A\cap\overline{B}=\{2,\ 5\}$ となるとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{11}$

次のことを証明せよ。ただし，Z は整数全体の集合とする。

(1) $A=\{3n-1 \mid n\in Z\}$，$B=\{6n+5 \mid n\in Z\}$ ならば　$A\supset B$

(2) $A=\{2n-1 \mid n\in Z\}$，$B=\{2n+1 \mid n\in Z\}$ ならば　$A=B$

$\boxed{12}$

次の $\boxed{}$ に最も適する語句を (ア)〜(エ) から選べ。a，b，m，x，y は実数とする。

(1) $x=y$ は $x^2=y^2$ であるための $\boxed{}$。

(2) $x=3$ は $x^2-5x+6=0$ であるための $\boxed{}$。

(3) $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ は，$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形であるための $\boxed{}$。

(4) $xy>0$ は $x>0$ であるための $\boxed{}$。

(5) $a\geqq 0$ は $\sqrt{a^2}=a$ であるための $\boxed{}$。

(6) $a=b$ は $ma=mb$ であるための $\boxed{}$。

(7) $x+y>2$ は $x>1$ かつ $y>1$ であるための $\boxed{}$。

(8) A，B を 2 つの集合とする。a が $A\cup B$ の要素であることは，a が A の要素であるための $\boxed{}$。

(ア) 必要十分条件である　　(イ) 必要条件であるが十分条件ではない

(ウ) 十分条件であるが必要条件ではない　　(エ) 必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{13}$

$\sqrt{7}$ は無理数であることを証明せよ。ただし，n を自然数とするとき，n^2 が 7 の倍数ならば，n は 7 の倍数であることを用いてよいものとする。

$\boxed{14}$

2000 の正の約数の個数と，約数の和を求めよ。

$\boxed{15}$

男子 4 人，女子 3 人がいる。次の並び方は何通りあるか。

(1)　男子が両端にくるように 7 人が 1 列に並ぶ。

(2)　男子が隣り合わないように 7 人が 1 列に並ぶ。

(3)　女子のうち 2 人だけが隣り合うように 7 人が 1 列に並ぶ。

$\boxed{16}$

(1)　異なる色のガラス玉 8 個を輪にしてブレスレットを作る。玉の並び方の異なるものは何通りできるか。

(2)　7 人から 5 人を選んで円卓に座らせる方法は何通りあるか。

$\boxed{17}$

(1)　7 人を 2 つの部屋 A，B に分けるとき，どの部屋も 1 人以上になる分け方は全部で何通りあるか。

(2)　4 人を 3 つの部屋 A，B，C に分けるとき，どの部屋も 1 人以上になる分け方は全部で何通りあるか。

(3)　大人 4 人，子ども 3 人の計 7 人を 3 つの部屋 A，B，C に分けるとき，どの部屋も大人が 1 人以上になる分け方は全部で何通りあるか。

$\boxed{18}$

(1)　$x+y+z=9$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ を満たす整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ は，全部で何組あるか。

(2)　$x+y+z=12$ を満たす正の整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ は，全部で何組あるか。

$\boxed{19}$

(1)　5 枚のカード A，B，C，D，E を横 1 列に並べるとき，B が A の隣にならない確率を求めよ。

(2)　赤球 4 個と白球 6 個が入っている袋から同時に 4 個の球を取り出すとき，取り出した 4 個のうち少なくとも 2 個が赤球である確率を求めよ。

$\boxed{20}$

1 個のさいころを 4 回投げるとき，3 の目が 2 回出る確率は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，5 以上の目が 3 回以上出る確率は ${}^{イ}\boxed{}$ である。また，少なくとも 1 回 3 の倍数の目が出る確率は ${}^{ウ}\boxed{}$ である。

$\boxed{21}$

さいころを振る操作を繰り返し，1 の目が 3 回出たらこの操作を終了する。3 以上の自然数 n に対し，n 回目にこの操作が終了する確率を p_n とするとき，p_n の値が最大となる n の値を求めよ。

$\boxed{22}$

2 個のさいころを同時に 1 回投げる。出る目の和を 5 で割った余りを X，出る目の積を 5 で割った余りを Y とするとき，次の確率を求めよ。

(1)　$X=2$ である条件のもとで $Y=2$ である確率

(2)　$Y=2$ である条件のもとで $X=2$ である確率

解説

1

(解説)

(1) $(x+3)(x-3)(x^2+9)=(x^2-9)(x^2+9)$

$=(x^2)^2-9^2$

$=x^4-81$

(2) $(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)=(x-1)(x+1)\times(x-2)(x+2)$

$=(x^2-1)\times(x^2-4)$

$=(x^2)^2-5x^2+4$

$=x^4-5x^2+4$

(3) $(a+b)^3(a-b)^3=\{(a+b)(a-b)\}^3=(a^2-b^2)^3$

$=(a^2)^3-3(a^2)^2b^2+3a^2(b^2)^2-(b^2)^3$

$=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$

(4) $(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-3x+9)$

$=(x-1)(x^2+x+1)\times(x+3)(x^2-3x+9)$

$=(x^3-1)(x^3+27)$

$=(x^3)^2+26x^3-27$

$=x^6+26x^3-27$

2

(解説)

(1) $a^3b+16-4ab-4a^2=(a^3-4a)b+16-4a^2$

$=a(a^2-4)b-4(a^2-4)$

$=(a^2-4)(ab-4)$

$=(a+2)(a-2)(ab-4)$

(2) $x^3y+x^2-xyz^2-z^2=(x^3-xz^2)y+x^2-z^2$

$=x(x^2-z^2)y+x^2-z^2$

$=(x^2-z^2)(xy+1)$

$=(x+z)(x-z)(xy+1)$

(3) $6x^2-yz+2xz-3xy=(2x-y)z+6x^2-3xy$

$=(2x-y)z+3x(2x-y)$

$=(2x-y)(3x+z)$

(4) $3x^2-2z^2+4yz+2xy+5xz=(2x+4z)y+3x^2+5xz-2z^2$

$=2(x+2z)y+(x+2z)(3x-z)$

$=(x+2z)(2y+3x-z)$

$=(x+2z)(3x+2y-z)$

3

(解説)

(1) (与式)$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & b+c & \longrightarrow & b^2+2bc+c^2 \\ b+c & & bc & \longrightarrow & bc \\ \hline b+c & & bc(b+c) & & b^2+3bc+c^2 \end{array}$$

別解 (与式)$=ab(a+b+c)-abc+bc(a+b+c)-abc+ca(a+b+c)-abc+3abc$

$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

(2) (与式)$=(b-c)^3a+b(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)+c(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

$=-(b-c)a^3+\{(b-c)^3+3bc(b-c)\}a-bc(b^2-c^2)$

$=-(b-c)a^3+(b-c)\{(b-c)^2+3bc\}a-bc(b+c)(b-c)$

$=-(b-c)a^3+(b-c)(b^2+bc+c^2)a-bc(b+c)(b-c)$

$=-(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}$

$=-(b-c)\{(c-a)b^2+(c^2-ca)b+a(a^2-c^2)\}$

$=-(b-c)\{(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c+a)(c-a)\}$

$=-(b-c)(c-a)\{b^2+cb-a(c+a)\}$

$=-(b-c)(c-a)\{c(b-a)+b^2-a^2\}$

$=-(b-c)(c-a)(b-a)\{c+(b+a)\}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

4

(解説)

(1) $x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$

$=(x^2+2)^2-x^2$

$=\{(x^2+2)+x\}\{(x^2+2)-x\}$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

(2) $x^4-11x^2y^2+y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2$

$=(x^2-y^2)^2-(3xy)^2$

$=\{(x^2-y^2)+3xy\}\{(x^2-y^2)-3xy\}$

$=(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$

(3) $x^4-9x^2y^2+16y^4=\{x^4-8x^2y^2+(4y^2)^2\}-x^2y^2$

$=(x^2-4y^2)^2-(xy)^2$

$=\{(x^2-4y^2)+xy\}\{(x^2-4y^2)-xy\}$

$=(x^2+xy-4y^2)(x^2-xy-4y^2)$

(4) $4x^4+11x^2y^2+9y^4=\{(2x^2)^2+12x^2y^2+(3y^2)^2\}-x^2y^2$

$=(2x^2+3y^2)^2-(xy)^2$

$=\{(2x^2+3y^2)+xy\}\{(2x^2+3y^2)-xy\}$

$=(2x^2+xy+3y^2)(2x^2-xy+3y^2)$

5

(解説)

(1) (ア) $-6<0$ であるから　$|-6|=-(-6)=6$

(イ) $\sqrt{2}>1$ から　$\sqrt{2}-1>0$　よって　$|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$

(ウ) $2\sqrt{3}=\sqrt{12}<4$ から　$2\sqrt{3}-4<0$

よって　$|2\sqrt{3}-4|=-(2\sqrt{3}-4)=4-2\sqrt{3}$

(2) (ア) P，Q 間の距離は　$|5-(-2)|=|7|=7$

(イ) A，B 間の距離は　$|3-8|=|-5|=5$

(ウ) C，D 間の距離は　$|-1-(-4)|=|3|=3$

(3) $x=2$ のとき　$P=|2-1|-2|3-2|=|1|-2|1|=1-2\cdot1=-1$

$x=3$ のとき　$P=|3-1|-2|3-3|=|2|-2|0|=2-2\cdot0=2$

6

(解説)

(1) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\sqrt{2^2\cdot2}}=\sqrt{(4+2)+2\sqrt{4\cdot2}}$

$=\sqrt{4}+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{8-\sqrt{48}}=\sqrt{8-\sqrt{2^2\cdot12}}=\sqrt{(6+2)-2\sqrt{6\cdot2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot1}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

(4) $\sqrt{9-3\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{18-6\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{18-2\sqrt{3^2\cdot5}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{(15+3)-2\sqrt{15\cdot3}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{2}$

7

(解説)

(1) $4x^2+\dfrac{1}{4x^2}=\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^2-2=(\sqrt{7})^2-2=5$

(2) $8x^3+\dfrac{1}{8x^3}=\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^3-3\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)$

$=(\sqrt{7})^3-3\sqrt{7}=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

(3) $64x^6+\dfrac{1}{64x^6}=(8x^3)^2+\dfrac{1}{(8x^3)^2}=\left(8x^3+\dfrac{1}{8x^3}\right)^2-2$

$=(4\sqrt{7})^2-2=112-2=110$

別解 $64x^6+\dfrac{1}{64x^6}=(4x^2)^3+\dfrac{1}{(4x^2)^3}$

$=\left(4x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)^3-3\left(4x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)$

$=5^3-3\times5=110$

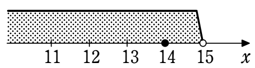
8

(解説)

(1) 不等式から　$4x-8+30-5x>7$

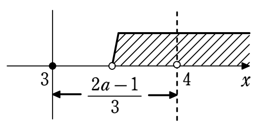
ゆえに　$-x>-15$　よって　$x<15$

したがって，求める最も大きい整数は　14



(2) $3x+1>2a$ を x について解くと　$x>\dfrac{2a-1}{3}$

この不等式を満たす x の最小の整数値が 4 であるから　$3\leqq\dfrac{2a-1}{3}<4$

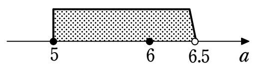


各辺に 3 を掛けて　$9\leqq2a-1<12$

各辺に 1 を加えて　$10\leqq2a<13$

よって　$5\leqq a<6.5$

これを満たす整数 a の値は　$a=5，6$



9

解説

(1) 与式から　$(a-1)x>(a-1)(a+2)$　……①

[1]　$a-1>0$　すなわち　$a>1$ のとき　$x>a+2$

[2]　$a-1=0$　すなわち　$a=1$ のとき　①は　$0\cdot x>0$

これを満たす x の値はない。

[3]　$a-1<0$　すなわち　$a<1$ のとき　$x<a+2$

よって　$\begin{cases} a>1 \text{ のとき } x>a+2 \\ a=1 \text{ のとき 解はない} \\ a<1 \text{ のとき } x<a+2 \end{cases}$

(2) $4x+1\leqq 5$ から　$4x\leqq 4$　よって　$x\leqq 1$

ゆえに，解が $-5\leqq x\leqq 1$ となるための条件は，$2ax\leqq 4x+1$ ……① の解が $x\geqq -5$ となることである。

① から　$2(a-2)x\leqq 1$　……②

[1]　$a-2>0$　すなわち　$a>2$ のとき，② から　$x\leqq \dfrac{1}{2(a-2)}$

このとき条件は満たされない。

[2]　$a-2=0$　すなわち　$a=2$ のとき，② は　$0\cdot x\leqq 1$

よって，解はすべての実数であるから，条件は満たされない。

[3]　$a-2<0$　すなわち　$a<2$ のとき，② から　$x\geqq \dfrac{1}{2(a-2)}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2(a-2)}=-5$　よって　$1=-10(a-2)$

ゆえに　$a=\dfrac{19}{10}$　これは $a<2$ を満たす。

[1]～[3] から　$a=\dfrac{19}{10}$

10

解説

$A\cap\overline{B}=\{2,\ 5\}$ であるから　$5\in A$

よって　$a^2+1=5$　ゆえに　$a=\pm 2$

[1]　$a=2$ のとき　$a+7=9$，$a^2-4a+5=1$

よって　$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{4,\ 9,\ 1\}$

このとき，$A\cap\overline{B}=\{2,\ 5\}$ となり，条件に適する。

[2]　$a=-2$ のとき　$a+7=5$，$a^2-4a+5=17$

よって　$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{4,\ 5,\ 17\}$

このとき，$A\cap\overline{B}=\{2\}$ となり，条件に適さない。

以上から　$a=2$

11

解説

(1) $x\in B$ とすると，$x=6n+5$ (n は整数) と書くことができる。

このとき　$x=6(n+1)-1=3\cdot 2(n+1)-1$

$2(n+1)=m$ とおくと，m は整数で　$x=3m-1$

ゆえに　$x\in A$

よって，$x\in B$ ならば $x\in A$ であるから　$A\supset B$

(2) [1]　$x\in A$ とすると，$x=2n-1$ (n は整数) と書くことができる。

このとき　$x=2(n-1)+1$

$n-1=k$ とおくと，k は整数で　$x=2k+1$

ゆえに　$x\in B$

よって，$x\in A$ ならば $x\in B$ であるから　$A\subset B$

[2]　$x\in B$ とすると，$x=2n+1$ (n は整数) と書くことができる。

このとき　$x=2(n+1)-1$

$n+1=l$ とおくと，l は整数で　$x=2l-1$

ゆえに　$x\in A$

よって，$x\in B$ ならば $x\in A$ であるから　$A\supset B$

[1], [2] から　$A=B$

12

解説

(1) 「$x=y \Longrightarrow x^2=y^2$」は明らかに真。

「$x^2=y^2 \Longrightarrow x=y$」は偽。　(反例)　$x=1$，$y=-1$

よって　(ウ)

(2) $x=3$ のとき　$x^2-5x+6=3^2-5\cdot 3+6=0$

ゆえに，「$x=3 \Longrightarrow x^2-5x+6=0$」は真。

「$x^2-5x+6=0 \Longrightarrow x=3$」は偽。　(反例)　$x=2$

よって　(ウ)

(3) 「$\angle \mathrm{A}=90° \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形」は真。

「$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形 $\Longrightarrow \angle\mathrm{A}=90°$」は偽。

(反例)　$\angle\mathrm{A}=30°$，$\angle\mathrm{B}=90°$，$\angle\mathrm{C}=60°$

よって　(ウ)

(4) 「$xy>0 \Longrightarrow x>0$」は偽。　(反例)　$x=-1$，$y=-2$

「$x>0 \Longrightarrow xy>0$」は偽。　(反例)　$x=1$，$y=-2$

よって　(エ)

(5) 「$a\geqq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{a^2}=a$」は真。

よって　(ア)

(6) $a=b$ の両辺に m を掛けると　$ma=mb$

ゆえに，「$a=b \Longrightarrow ma=mb$」は真。

「$ma=mb \Longrightarrow a=b$」は偽。　(反例)　$m=0$，$a=1$，$b=2$

よって　(ウ)

(7) 「$x+y>2 \Longrightarrow x>1$ かつ $y>1$」は偽。　(反例)　$x=5$，$y=-1$

$x>1$ かつ $y>1$ のとき　$x+y>1+y>2$

ゆえに，「$x>1$ かつ $y>1 \Longrightarrow x+y>2$」は真。

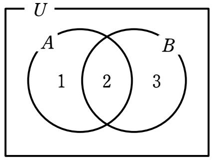
よって　(イ)

(8) 「$a\in A\cup B \Longrightarrow a\in A$」は偽。

(反例)　$A=\{1,\ 2\}$，$B=\{2,\ 3\}$，$a=3$

また，$A\subset A\cup B$ であるから，「$a\in A \Longrightarrow a\in A\cup B$」は真。

よって　(イ)



13

解説

$\sqrt{7}$ が無理数でないと仮定すると，1 以外に正の公約数をもたない自然数 a，b を用いて，$\sqrt{7}=\dfrac{a}{b}$ と表される。

このとき　$a=\sqrt{7}\,b$　両辺を 2 乗すると　$a^2=7b^2$　……①

よって，a^2 は 7 の倍数であるから，a も 7 の倍数である。

ゆえに，c を自然数として，$a=7c$ と表される。

この両辺を 2 乗すると　$a^2=49c^2$　……②

①，② から　$7b^2=49c^2$　すなわち　$b^2=7c^2$

よって，b^2 は 7 の倍数であるから，b も 7 の倍数である。

ゆえに，a と b は公約数 7 をもつ。

これは，a と b が 1 以外に公約数をもたないことに矛盾する。

したがって，$\sqrt{7}$ は無理数である。

14

解説

$2000=2^4\cdot 5^3$ であるから，2000 の正の約数は

$2^a\cdot 5^b$ ($a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$；$b=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

と表すことができる。

a の定め方は 5 通りあり，そのおのおのについて，b の定め方は 4 通りある。

よって，求める約数の個数は　$5\times 4=20$ (個)

また，2000 の正の約数は，$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+5+5^2+5^3)$ を展開した項にすべて現れる。

よって，求める約数の和は　$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+5+5^2+5^3)=31\times 156=4836$

15

解説

(1) 男子が両端に並ぶ並び方は　${}_4\mathrm{P}_2=4\cdot 3=12$ (通り)

残り 5 人がその間に並ぶ並び方は　$5!=120$ (通り)

したがって，求める並び方は　$12\times 120=1440$ (通り)

(2) まず，女子 3 人の並び方は　$3!=6$ (通り)

女子 3 人の間または両端の 4 か所に男子 4 人を入れる方法は　$4!=24$ (通り)

したがって，求める並び方は　$6\times 24=144$ (通り)

(3) まず男子 4 人を 1 列に並べて，その間または両端の 5 か所のうち 1 か所に女子 2 人を並べる。

次に，残りの 4 か所のうち 1 か所に残りの女子 1 人を入れるとよい。

男子 4 人の並び方は　${}_4\mathrm{P}_4$ 通り

そのおのおのについて，女子 3 人の並び方は　$(5\times {}_3\mathrm{P}_2)\times 4$ 通り

したがって，求める並び方は　${}_4\mathrm{P}_4\times(5\times {}_3\mathrm{P}_2)\times 4=4!\times(5\times 3\cdot 2)\times 4=2880$ (通り)

16

解説

(1) 異なる 8 個のものの円順列は　$(8-1)!=7!$ (通り)

このうち，裏返して同じになるものが 2 つずつあるから

$7!\div 2=5040\div 2=2520$ (通り)

(2) 7 人から 5 人を選んで並べる順列 ${}_7\mathrm{P}_5$ には，円順列としては同じものが 5 通りずつあるから　${}_7\mathrm{P}_5\div 5=7\cdot 6\cdot 4\cdot 3=504$ (通り)

$\boxed{17}$

(解説)

(1) 空室ができてもよいとすると，A，B 2部屋に7人を分ける方法は

$2^7=128$（通り）

どの部屋も1人以上になる分け方は，この128通りのうちA，Bのどちらかが空室になる場合を除いて　$128-2=126$（通り）

(2) 空室ができてもよいとすると，A，B，C 3部屋に4人を分ける方法は

$3^4=81$（通り）

このうち，空室が2部屋できる場合は，空室でない残りの1部屋を選ぶと考えて

3通り

空室が1部屋できる場合は，空室の選び方が3通りあり，そのおのおのについて，残りの2部屋に4人が入る方法が 2^4-2 通りずつあるから　$3\times(2^4-2)=42$（通り）

よって，求める場合の数は　$81-(3+42)=36$（通り）

(3) まず，大人4人を，どの部屋も大人が1人以上になるように分ける方法は，(2)から

36通り

そのおのおのについて，子ども3人をA，B，Cの3部屋に分ける方法は

$3^3=27$（通り）

よって，どの部屋も大人が1人以上になる分け方は　$36\times27=972$（通り）

$\boxed{18}$

(解説)

(1) 異なる3種類のものから，重複を許して9個取る組合せの総数であるから

${}_3\mathrm{H}_9={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$（組）

(2) $x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおくと　$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$

このとき，$x+y+z=12$ から　$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=12$

よって　$X+Y+Z=9$，$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$　……[A]

求める正の整数解の組の個数は，[A]を満たす0以上の整数解 X，Y，Z の組の個数に等しいから，(1)の結果より　55組

別解　12個の○を並べる：○○○○○○○○○○○○

このとき，○と○の間の11か所から2つを選んで仕切りを入れ　A｜B｜C

としたときの，A，B，Cの部分にある○の数をそれぞれ x，y，z とすると，解が1つ決まるから　${}_{11}\mathrm{C}_2=55$（組）

$\boxed{19}$

(解説)

(1)「BがAの隣にならない」という事象は，「BがAの隣になる」という事象の余事象である。

5枚のカードの並べ方の総数は　5! 通り

このうち，BがAの隣になる場合は　$4!\times2$ 通り

よって，BがAの隣になる確率は　$\dfrac{4!\times2}{5!}=\dfrac{2}{5}$

したがって，求める確率は　$1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$

別解　5枚のカードの並べ方の総数は　5! 通り

C，D，Eの3枚のカードの並べ方は　3! 通り

この3枚の間および両端の4か所にA，Bを並べる方法は　${}_4\mathrm{P}_2$ 通り

よって，BがAの隣にならない並べ方は　$3!\times{}_4\mathrm{P}_2$ 通り

したがって，求める確率は　$\dfrac{3!\times{}_4\mathrm{P}_2}{5!}=\dfrac{3}{5}$

(2) 球の取り出し方の総数は　${}_{10}\mathrm{C}_4$ 通り

少なくとも2個が赤球である場合の余事象，すなわち赤球が1個以下となる場合の確率を調べる。

[1] 白球4個となる確率は　$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\dfrac{15}{210}$

[2] 赤球1個，白球3個となる確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\dfrac{4\times20}{210}$

したがって，求める確率は　$1-\left(\dfrac{15}{210}+\dfrac{80}{210}\right)=1-\dfrac{19}{42}=\dfrac{23}{42}$

$\boxed{20}$

(解説)

(ア) ${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=6\times\dfrac{25}{6^4}=\dfrac{25}{216}$

(イ) 5以上の目が3回以上出るのは，「5または6の目」が3回または4回出る場合である。

したがって，求める確率は　${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{2}{6}\right)^3\left(\dfrac{4}{6}\right)^1+\left(\dfrac{2}{6}\right)^4=\dfrac{8}{81}+\dfrac{1}{81}=\dfrac{1}{9}$

(ウ) 3の倍数の目は3と6であるから，4回投げて3の倍数の目が1回も出ない確率は

$\left(\dfrac{4}{6}\right)^4=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$

ゆえに，4回投げて少なくとも1回3の倍数の目が出る確率は　$1-\dfrac{16}{81}=\dfrac{65}{81}$

$\boxed{21}$

(解説)

p_n は，$(n-1)$ 回までに1の目が2回，他の目が $(n-3)$ 回出て，n 回目に1の目が出る確率であるから　$p_n={}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\dfrac{5^{n-3}}{6^n}$

したがって　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot\dfrac{5^{n-2}}{6^{n+1}}\times\dfrac{2}{(n-1)(n-2)}\cdot\dfrac{6^n}{5^{n-3}}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{n}{n-2}$

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}<1$ とすると　$\dfrac{5n}{6(n-2)}<1$

$6(n-2)>0$ であるから　$5n<6(n-2)$　　ゆえに　$n>12$

よって，$n\geqq13$ のとき　$p_n>p_{n+1}$

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}>1$ とすると　$5n>6(n-2)$　　ゆえに　$n<12$

よって，$3\leqq n\leqq11$ のとき　$p_n<p_{n+1}$

なお，$n=12$ のとき，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=1$ となるから　$p_n=p_{n+1}$

ゆえに　$p_3<p_4<\cdots\cdots<p_{12}$，$p_{12}=p_{13}$，$p_{13}>p_{14}>\cdots\cdots$

よって，p_n の値が最大となるのは $n=12$，13のときである。

別解　[$p_{n+1}-p_n$ の符号を調べる方針]

$$p_{n+1}-p_n=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{5^{n-2}}{6^{n+1}}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{5^{n-3}}{6^n}$$

$$=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{5^{n-3}}{6^{n+1}}\{5n-6(n-2)\}=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{5^{n-3}}{6^{n+1}}(12-n)$$

ここで，$\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{5^{n-3}}{6^{n+1}}>0$ であるから，$p_{n+1}-p_n$ の符号は $12-n$ の符号と一致する。

$3\leqq n\leqq11$ のとき　$p_{n+1}-p_n>0$ から　$p_n<p_{n+1}$

$n=12$ のとき　$p_{n+1}-p_n=0$ から　$p_n=p_{n+1}$

$n\geqq13$ のとき　$p_{n+1}-p_n<0$ から　$p_n>p_{n+1}$

ゆえに　$p_3<p_4<\cdots\cdots<p_{12}$，$p_{12}=p_{13}$，$p_{13}>p_{14}>\cdots\cdots$

よって，p_n の値が最大となるのは $n=12$，13のときである。

$\boxed{22}$

(解説)

$X=2$ であるという事象を A，$Y=2$ であるという事象を B とし，2個のさいころの出た目を x，y とする。

(1) $X=2$ となるのは，和が2，7，12のときである。

[1] $x+y=2$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 1)$　の1通り

[2] $x+y=7$ のとき　次の 6通り

$(x,\ y)=(1,\ 6)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(5,\ 2)$，$(6,\ 1)$

[3] $x+y=12$ のとき　$(x,\ y)=(6,\ 6)$　の1通り

ゆえに，$X=2$ となる場合の数は　$n(A)=1+6+1=8$

また，[1]～[3]の8通りの $(x,\ y)$ のうち，積 xy を5で割ると2余るものは，

$(x,\ y)=(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$ の2通りであるから　$n(A\cap B)=2$

したがって，求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

(2) $Y=2$ となるのは，積が2，12のときである。

[1] $xy=2$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$　の2通り

[2] $xy=12$ のとき

$(x,\ y)=(2,\ 6)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(6,\ 2)$　の4通り

ゆえに，$Y=2$ となる場合の数は　$n(B)=2+4=6$

したがって，求める確率は　$P_B(A)=\dfrac{n(B\cap A)}{n(B)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$