1

解答　$\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{2}$

解説

$$\sqrt{9-3\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{18-6\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{18-2\sqrt{3^2\cdot 5}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(15+3)-2\sqrt{15\cdot 3}}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{2}$$

2

解答　(1)　3　　(2)　$2\sqrt{5}$

解説

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(\sqrt{5})^2-2=3$

(2)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

別解　(2)　$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ の両辺を3乗して　　$x^3+3x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}=5\sqrt{5}$

よって　　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=5\sqrt{5}-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

3

解答　(1)　$x=3,\ -1$　　(2)　$-2<x<1$

解説

(1)　$|x-1|=2$ から　　$x-1=\pm 2$

すなわち　　$x=1+2$　または　$x=1-2$

よって　　$x=3,\ -1$

(2)　[1]　$x\geqq -1$ のとき，不等式は　$3(x+1)<x+5$

これを解いて　$x<1$

$x\geqq -1$ との共通範囲は　　$-1\leqq x<1$　……①

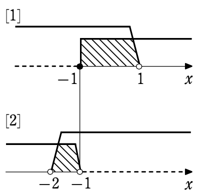
[2]　$x<-1$ のとき，不等式は　$-3(x+1)<x+5$

これを解いて　$x>-2$

$x<-1$ との共通範囲は　　$-2<x<-1$　……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で

$-2<x<1$



4

解答　$\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25\}$

解説

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \cdots\cdots,\ 30\}$，$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30\}$，$C=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$ であるから

$A\cap B=\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30\}$ であるから

$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C=(\overline{A\cap B})\cap C=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25\}$

5

解答　(1)　(ウ)　　(2)　(イ)　　(3)　(ア)

解説

(1)　$x^2-5x+6=0$ ならば $(x-2)(x-3)=0$ であるから

$x=2$ または $x=3$

$x=2\Longrightarrow x=2$ または $x=3$ は　真

$x=2$ または $x=3\Longrightarrow x=2$ は　偽（反例：$x=3$）

ゆえに　(ウ)

(2)　$ac=bc\Longrightarrow a=b$ は　偽（反例：$c=0,\ a\neq b$）

$a=b\Longrightarrow ac=bc$ は　真

ゆえに　(イ)

(3)　$a^2+b^2=2ab$ ならば $a^2-2ab+b^2=0$

すなわち，$(a-b)^2=0$ であるから　$a=b$

ゆえに　(ア)

6

解答　逆：「x，y の少なくとも一方が無理数ならば，xy は無理数である」，偽；

対偶：「x，y がともに有理数ならば，xy は有理数である」，真；

裏：「xy が有理数ならば，x，y はともに有理数である」，偽

解説

逆：「x，y の少なくとも一方が無理数ならば，xy は無理数である」

これは　偽。　(反例)　$x=\sqrt{2}$，$y=0$

対偶：「x，y がともに有理数ならば，xy は有理数である」

これは　真。

(証明)　$x=\dfrac{p}{q}$，$y=\dfrac{r}{s}$（p，q，r，s は整数；$qs\neq 0$）とおくと　$xy=\dfrac{pr}{qs}$

ここで，pr，qs はいずれも整数で，$qs\neq 0$ である。

よって，xy は有理数である。

裏：「xy が有理数ならば，x，y はともに有理数である」

これは　偽。　(反例)　$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$

7

解答　$a=8$，$b=11$

解説

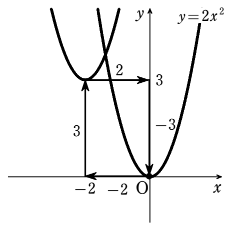
放物線 $y=2x^2$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線の方程式は

$y-3=2\{x-(-2)\}^2$

すなわち　　$y=2x^2+8x+11$

これが放物線 $y=2x^2+ax+b$ であるから

$a=8$，$b=11$



別解　x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動したときに，原点 $(0,\ 0)$ を頂点とする放物線 $y=2x^2$ と重なるグラフは，点 $(-2,\ 3)$ を頂点とする放物線である。その方程式は

$y=2(x+2)^2+3$

すなわち　$y=2x^2+8x+11$

これが放物線 $y=2x^2+ax+b$ であるから

$a=8$，$b=11$

別解　放物線 $y=2x^2+ax+b$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線の方程式は

$y-(-3)=2(x-2)^2+a(x-2)+b$

すなわち　$y=2x^2+(a-8)x+(-2a+b+5)$

これが放物線 $y=2x^2$ と重なるから　　$a-8=0$，　$-2a+b+5=0$

これを解いて　　$a=8$，$b=11$

8

解答　$a=1$，$b=2$；$a=-1$，$b=4$

解説

$y=f(x)=ax^2+2ax+b=a(x^2+2x)+b=a(x^2+2x+1-1)+b=a(x+1)^2-a+b$

軸　$x=-1$ は　$-2\leqq x\leqq 1$ の範囲にあり，端 $x=-2$ に近いから

[1]　$a>0$ のとき，$x=-1$ で最小値 $f(-1)=1$，　$x=1$ で最大値 $f(1)=5$

$f(-1)=a(-1)^2+2a(-1)+b=1$　　から　$-a+b=1$　……①

$f(1)=a\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=5$　　から　　$3a+b=5$　……②

②−① から　$4a=4$　　よって　$a=1$

これを ① に代入すると　$b=2$

[2]　$a<0$ のとき　$x=-1$ で最大値 $f(-1)=5$，$x=1$ で最小値 $f(1)=1$

したがって　$-a+b=5$ ……③，　$3a+b=1$ ……④

④−③ から　$4a=-4$　　よって　$a=-1$

これを ③ に代入すると　$b=4$

したがって　$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (-1,\ 4)$

9

解答　$l=7$

解説

$y=x^2-2lx+l^2-2l$ を変形して

$y=(x-l)^2-2l$

[1]　$0<l\leqq 2$ のとき，$x=l$ で最小値 $-2l$ をとる。

$-2l=11$ とすると　　$l=-\dfrac{11}{2}$　　　これは $0<l\leqq 2$ を満たさない。

[2]　$2<l$ のとき，$x=2$ で最小値 $2^2-2l\cdot 2+l^2-2l$ つまり l^2-6l+4 をとる。

$l^2-6l+4=11$ とすると　　$l^2-6l-7=0$　　　これを解くと　　$l=-1,\ 7$

$2<l$ を満たすものは　　$l=7$

以上から，求める l の値は　　$l=7$

10

解答　(1)　$\dfrac{2}{7}$　　(2)　$\dfrac{9}{35}$

解説

(1)　3回とも赤球が取り出されるとき，2回目，3回目の試行の直前の袋の中の赤球の数は，それぞれ4個，5個となるから，求める確率は　$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{6}\times\dfrac{5}{7}=\dfrac{2}{7}$

(2)　3回の試行後に赤球4個，白球4個となるのは，3回のうち，赤球が1回，白球が2回取り出されるときである。それには，1回目，2回目，3回目の順に

[1]　赤球 → 白球 → 白球　　　[2]　白球 → 赤球 → 白球

[3]　白球 → 白球 → 赤球

と取り出される場合がある。

[1]～[3] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{35}\times 3=\frac{9}{35}$$

11

解答　(ア)　280　(イ)　35　(ウ)　19

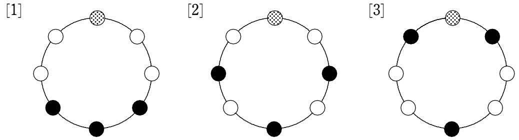
解説

(ア)　$\frac{8!}{4!3!}=280$ (通り)

(イ)　赤玉を固定して考えると，白玉4個，黒玉3個の順列の個数に等しい。

したがって　$\frac{7!}{4!3!}=35$ (通り)

(ウ)　(イ)の35通りのうち，裏返して自分自身と一致するものは，次の[1]~[3]の3通り



残りの32通りの円順列1つ1つに対して，裏返すと一致するものが他に必ず1つずつあるから，輪を作る方法は全部で　$3+\frac{32}{2}=19$ (通り)

12

解答　(1)　286通り　(2)　84通り　(3)　15通り

解説

A，B，C，Dを買う個数を，それぞれ a，b，c，d とすると，$a\geqq 0$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$，$d\geqq 0$ であり，合わせて10個買うから

$$a+b+c+d=10 \quad \cdots\cdots ①$$

(1)　A，B，C，Dの4種類から重複を許して10個取る組合せの総数であるから

$${}_4H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286 \text{ (通り)}$$

(2)　$a-1=A$，$b-1=B$，$c-1=C$，$d-1=D$ とおくと

$$a=A+1,\ b=B+1,\ c=C+1,\ d=D+1$$

①に代入して　$(A+1)+(B+1)+(C+1)+(D+1)=10$

ゆえに　$A+B+C+D=6$，$A\geqq 0$，$B\geqq 0$，$C\geqq 0$，$D\geqq 0$

求める買い方の総数は，A，B，C，Dの4種類から重複を許して6個取る組合せの総数に等しい。

よって　${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$ (通り)

(3)　$a=3$ のとき，①から　$b+c+d=7$

$b-1=B$，$c-1=C$，$d-1=D$ を代入して　$(B+1)+(C+1)+(D+1)=7$

よって　$B+C+D=4$，$B\geqq 0$，$C\geqq 0$，$D\geqq 0$

求める買い方の総数は，(2)と同様に考えて　${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$ (通り)

別解　(1)　10個の○で商品を表し，3つの｜で仕切りを表す。

このとき，10個の○と3つの｜の順列の総数が求める場合の数となるから

$${}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286 \text{ (通り)}$$

(2)　10個の○を並べる：○○○○○○○○○○

求める買い方の総数は，○と○の間の9個の場所から仕切り｜を入れる3個の場所を選ぶ方法の数と同じである。

したがって　${}_9C_3=84$ (通り)

(3)　7個の○を並べ，○と○の間の6個の場所から仕切り｜を入れる2個の場所を選ぶ方法の数と同じである。

したがって　${}_6C_2=15$ (通り)

13

解答　(1)　56個　(2)　56個

解説

(1)　条件を満たす整数の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ の個数は，1，2，3，4の4個の数字から重複を許して5個取る組合せの数であるから

$${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56 \text{ (個)}$$

(2)　$b_1=a_1$，$b_2=a_1+a_2$，$b_3=a_1+a_2+a_3$，$b_4=a_1+a_2+a_3+a_4$，$b_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ とおくと

$$1\leqq b_1\leqq b_2\leqq b_3\leqq b_4\leqq b_5\leqq 4$$

よって，この不等式を満たす整数の組 $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)$ の個数は，(1)から

56個

ここで，$(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)$ の1つの組に対して，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ の組はただ1つに決まる。

したがって，求める組の個数は　56個

別解　$a_1-1=A$，$A+a_2+a_3+a_4+a_5=S$ とおく。

求める個数は，$S=0$，1，2，3をそれぞれ満たす0以上の整数の組 $(A,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ の総数に等しい。

$S=3$ のとき，異なる5種類のものから，重複を許して3個取る組合せの数を求めて

$${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35 \text{ (個)}$$

$S=2$ のとき，同様に考えて　${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=15$ (個)

$S=1$ のとき5個，$S=0$ のとき1個。　以上から　56個

14

解答　(1)　$\frac{1}{12}$　(2)　$\frac{27}{40}$　(3)　$\frac{8}{15}$

解説

A：最大の番号が7以下，B：最小の番号が3以上　とする。

(1)　求める確率は $P(A\cap B)$ であり，3，4，5，6，7の番号札の中から3枚を取り出す確率に等しいから　$\frac{{}_5C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{12}$

(2)　$P(A)=\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}$，$P(B)=\frac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3}$，(1)から　$P(A\cap B)=\frac{1}{12}$

よって，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3}-\frac{1}{12}=\frac{35}{120}+\frac{56}{120}-\frac{10}{120}=\frac{27}{40}$$

(3)　C：1の番号札を取り出す，D：2の番号札を取り出す

とすると　$P(C)=\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}$，$P(D)=\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}$，$P(C\cap D)=\frac{{}_8C_1}{{}_{10}C_3}$

よって，求める確率は

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)$$
$$=\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}-\frac{{}_8C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{36}{120}\times 2-\frac{8}{120}=\frac{8}{15}$$

別解　1または2を取り出す事象の余事象は，最小の番号が3以上になることであるから，求める確率は，(2)より　$1-P(B)=1-\frac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3}=1-\frac{56}{120}=\frac{8}{15}$

15

解答　(ア)　$\frac{25}{216}$　(イ)　$\frac{1}{9}$　(ウ)　$\frac{65}{81}$

解説

(ア)　${}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=6\times\frac{25}{6^4}=\frac{25}{216}$

(イ)　5以上の目が3回以上出るのは，「5または6の目」が3回または4回出る場合である。

したがって，求める確率は　${}_4C_3\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^1+\left(\frac{2}{6}\right)^4=\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{1}{9}$

(ウ)　3の倍数の目は3と6であるから，4回投げて3の倍数の目が1回も出ない確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

ゆえに，4回投げて少なくとも1回3の倍数の目が出る確率は　$1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$

16

解答　(1)　$\frac{16}{81}$　(2)　$\frac{175}{1296}$　(3)　$\frac{65}{1296}$

解説

(1)　さいころを1回投げるとき，出る目が3以上である確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ であるから，求める確率は　${}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{16}{81}$

(2)　出る目の最小値が3であるという事象は，出る目がすべて3以上であるという事象から，出る目がすべて4以上であるという事象を除いたものと考えられる。

さいころを1回投げるとき，出る目が4以上である確率は　$\frac{3}{6}$

したがって，求める確率は

$$\frac{16}{81}-{}_4C_4\left(\frac{3}{6}\right)^4\left(\frac{3}{6}\right)^0=\left(\frac{4}{6}\right)^4-\left(\frac{3}{6}\right)^4=\frac{4^4-3^4}{6^4}=\frac{175}{1296}$$

(3)　出る目の最大値が3であるという事象は，出る目がすべて3以下であるという事象から，出る目がすべて2以下であるという事象を除いたものと考えられる。

さいころを1回投げるとき，出る目が3以下である確率は $\frac{3}{6}$，2以下である確率は $\frac{2}{6}$ であるから，求める確率は　$\left(\frac{3}{6}\right)^4-\left(\frac{2}{6}\right)^4=\frac{3^4-2^4}{6^4}=\frac{65}{1296}$

17

解答　$\frac{21}{4}$

解説

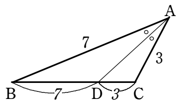
AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC

すなわち　(5－DC) : DC＝7 : 3

ゆえに　7DC＝3(5－DC)

これを解いて　$DC=\frac{3}{2}$



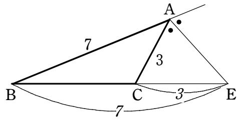
また，AE は ∠A の外角の二等分線であるから

BE : EC＝AB : AC

すなわち　(EC＋5) : EC＝7 : 3

ゆえに　7EC＝3(EC＋5)

これを解いて　$EC=\frac{15}{4}$



よって　$DE=DC+CE=\frac{3}{2}+\frac{15}{4}=\frac{21}{4}$

$\boxed{18}$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　M は辺 BC の中点，O は線分 DC の中点であるから，中点連結定理により

DB＝2OM　……①

(2)　線分 CD は外接円の直径であるから，

DB⊥BC，AH⊥BC より　DB∥AH

DA⊥AC，BH⊥AC より　DA∥BH

ゆえに，四角形 ADBH は平行四辺形である。

(3)　(2) から　AH＝DB　……②

①，② から　AH＝2OM