STUDY COLLABO
ENGLISH PRIVATE SCHOOL
スタディ・コラボ

【夏期】
―中学生模試―
中3[発展]
（60分）

解答上の注意

1　オンライン上での解答となります。各自解答ページで解答を入力してください。

2　マイナスは「m」（アルファベットの半角小文字）で入力してください。
　入力対象は「0～9」の半角数字および「m」です。

例　(1)　$12+34=\boxed{\text{アイ}}$　⇒　46　と入力

　　(2)　$1-3=\boxed{\text{ウエ}}$　⇒　m2　と入力

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例　$\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{\mathrm{m}4}{5}$ として答えること。

　すなわち，「m45」と入力すること。
　また，分数は既約分数で答えること。

メールアドレス入力欄にはご家庭のメールアドレスを入力してください。
分からない場合は以下を入力してください。

test@test.com

※分量が多いので分からない問題はいったん後回しにして解ける問題から解きましょう！

$\boxed{1}$

(1)　次の x の 2 次関数 $y=-2x^2+ax+b$　……① のグラフを考える。

① のグラフが 2 点 $(1,\ 1)$, $(4,\ -5)$ を通るとする。

$a=\boxed{\text{ア}}$, $b=\boxed{\text{イウ}}$ であるから，① のグラフの頂点の座標は $\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ である。また，① のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 5 だけ平行移動し，さらに，x 軸に関して対称移動したグラフの方程式は $y=\boxed{\text{カ}}x^2-\boxed{\text{キ}}x-\boxed{\text{ク}}$ である。

(2)　a を定数とし，x の 2 次関数

$$y=x^2-(2a-6)x+4a-7 \quad \cdots\cdots ②$$

のグラフを G とする。

G の頂点の座標は $\left(a-\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}a^2+\boxed{\text{サシ}}a-\boxed{\text{スセ}}\right)$ である。

2 次関数 ② の $-1 \leqq x \leqq 5$ における最大値を M とすると，

$a<\boxed{\text{ソ}}$ のとき，$M=\boxed{\text{タチ}}a+\boxed{\text{ツテ}}$,

$\boxed{\text{ソ}} \leqq a$ のとき，$M=\boxed{\text{ト}}a-\boxed{\text{ナニ}}$ である。

G が直線 $y=6x-3$ と接するのは，$a=\boxed{\text{ヌ}}$ のときであり，接点の座標は $\left(\boxed{\text{ネ}},\ \boxed{\text{ノ}}\right)$ である。また，G が x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}<a<\boxed{\text{フ}}$ である。

$\boxed{2}$

(1)　$\sin 30^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

また，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ において，$\sin\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の範囲は

$\boxed{\text{ウ}}^\circ < \theta < \boxed{\text{エオ}}^\circ$，$\boxed{\text{カキク}}^\circ < \theta < \boxed{\text{ケコサ}}^\circ$ である。

(2)　△ABC が円 O に内接している。頂点 B を含まない弧 AC 上に点 D があるとする。また，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{CD}=5$，$\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ であり，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ が成り立っているとする。$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=x$ とおく。△ABC に余弦定理を適用すると

$\mathrm{AC}^2 = x^2 + \boxed{\text{シ}}\,x + \boxed{\text{ス}}$ となる。また，△ACD に余弦定理を適用すると

$\mathrm{AC}^2 = x^2 - \boxed{\text{セ}}\,x + \boxed{\text{ソタ}}$ となる。これより，$x = \boxed{\text{チ}}$ であり，

$\mathrm{AC} = \sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。また，△ACD の面積は △ABC の

面積の $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ 倍である。

$\sin\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ノハ}}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ である。また，円 O の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヘホ}}}}{\boxed{\text{マ}}}$ である。

(3)　底面の半径が 2，高さが $\sqrt{5}$ の直円錐がある。この直円錐の頂点を O，底面の直径の両端を A，B とし，線分 OB の中点を P とするとき，側面上で A から P に至る

最短距離は $\dfrac{\boxed{\text{ミ}}\sqrt{\boxed{\text{ム}}}}{\boxed{\text{メ}}}$ である。

$\boxed{3}$

(1)　$(3x+2y)^5$ を展開したとき，x^2y^3 の係数は $\boxed{アイウ}$ であり，

$(x-3y-7z)^6$ を展開したとき，x^2y^3z の係数は $\boxed{エオカキク}$ である。

(2)　等式 $(k+2)x+(3k-1)y+7=0$ が，k のどのような値に対しても成り立つとき，

$x=\boxed{ケコ}$，$y=\boxed{サ}$ である。

(3)　$\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}=\dfrac{\boxed{シ}}{\left(x+\boxed{ス}\right)\left(x-\boxed{セ}\right)}$ である。

(4)　x，y を実数とする。

$(x^2+5y^2)-(4xy+2y-1)=\left(x-\boxed{ソ}y\right)^2+\left(y-\boxed{タ}\right)^2\geqq 0$

となるので，不等式 $x^2+5y^2\geqq 4xy+2y-1$ が成立する。

また，この不等式の等号が成立するとき，$x=\boxed{チ}$ かつ $y=\boxed{ツ}$ である。

(5)　$x>0$，$y>0$ のとき，$\dfrac{5y}{3x}+\dfrac{3x}{5y}+1$ は，$y=\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}x$ のとき最小値 $\boxed{ナ}$ をとる。

(6)　正の実数 x，y，z が $\dfrac{yz}{x}=\dfrac{zx}{4y}=\dfrac{xy}{9z}$ を満たすとき，$\dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}$

である。

$\boxed{4}$

(1) $\dfrac{1-3i}{3-i}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\,i}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\sqrt{-2}\sqrt{-12}=\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(2) $4x^2+4\sqrt{5}\,x+7=0$　が成り立つとき，$x=\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\,i}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(3) 2 次方程式 $x^2-5x+2=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，
$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\boxed{\text{サシ}}$，$(\alpha-\beta)^2=\boxed{\text{スセ}}$ である。

(4) 3 次方程式 $x^3-3x^2+ax+b=0$ が $2-\sqrt{3}\,i$ を解にもつとする。このとき，
$a=\boxed{\text{ソ}}$，$b=\boxed{\text{タ}}$ であり，他の解は $x=\boxed{\text{チツ}}$，$\boxed{\text{テ}}+\sqrt{\boxed{\text{ト}}}\,i$ である。

(5) 1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，
$\omega^2+1+\dfrac{1}{\omega^2}=\boxed{\text{ナ}}$，$\omega^{14}+\omega^7=\boxed{\text{ニヌ}}$，$(\omega^{200}+1)^{100}+(\omega^{100}+1)^{10}=\boxed{\text{ネノ}}$
である。

(6) 整式 $P(x)$ は $(x-1)^2$ で割ると $2x+3$ 余り，$x-3$ で割ると 1 余る。この $P(x)$ を $(x-1)^2(x-3)$ で割ったときの余りを求めたい。
まず，$P(x)$ を $(x-1)^2(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とおく。また，余りは 2 次以下の整式であるから，ax^2+bx+c とおける。
よって，$P(x)=(x-1)^2(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$　……① とかける。
$(x-1)^2(x-3)Q(x)$ は $(x-1)^2$ で割りきれることから，$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは ax^2+bx+c を $(x-1)^2$ で割った余りに等しい。このことから
$ax^2+bx+c=a\left(x-\boxed{\text{ハ}}\right)^2+\boxed{\text{ヒ}}\,x+\boxed{\text{フ}}$ とおけるので ① は次のように表せる。
$P(x)=(x-1)^2(x-3)Q(x)+a\left(x-\boxed{\text{ハ}}\right)^2+\boxed{\text{ヒ}}\,x+\boxed{\text{フ}}$　……②
② および，$P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りが 1 であることから $a=\boxed{\text{ヘホ}}$ と求まる。
したがって，求める余りは $\boxed{\text{マミ}}\,x^2+\boxed{\text{ム}}\,x+\boxed{\text{メ}}$ である。

$\boxed{5}$

(1)　3 点 A (4，5)，B (−4，−2)，C (2，−5) に対して，線分 AB を 2：1 に内分する点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}},\ \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\right)$ であり，三角形 ABC の重心の座標は $\left(\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}},\ \dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}\right)$ である。

(2)　円 $x^2+y^2-4x-10y-20=0$ の中心は $(\boxed{サ},\ \boxed{シ})$，半径は $\boxed{ス}$ である。

(3)　xy 平面において，直線 $y=kx+(5-4k)$ は，実数 k の値にかかわらず，常に点 $(\boxed{セ},\ \boxed{ソ})$ を通る。また，この直線が円 $x^2+y^2=1$ と接するのは

$k=\dfrac{\boxed{タチ}\pm\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テト}}}{\boxed{ナニ}}$ のときである。

(4)　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 (−4，−3) における接線の方程式は $\boxed{ヌ}x+\boxed{ネ}y=\boxed{ノハヒ}$ である。また，点 (1，3) から円 $x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式は $\boxed{フ}x+y=\boxed{ヘホ}$，$x-y=\boxed{マミ}$ である。

(5)　連立不等式 $y\leqq 2x+2$，$y\geqq -\dfrac{1}{2}x$，$x\leqq 0$ の表す領域の面積は $\dfrac{\boxed{ム}}{\boxed{メ}}$ である。

(6)　平面上の定点 A (0，0) と B (6，0) に対して $AP^2+BP^2=50$ の関係にある点 P の軌跡の方程式は 中心を $(\boxed{モ},\ \boxed{ヤ})$ とする半径 $\boxed{ユ}$ の円である。