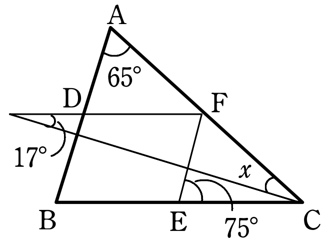
1

右の図において，点 D，E，F はそれぞれ △ABC の辺 AB，BC，CA の中点である。
このとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

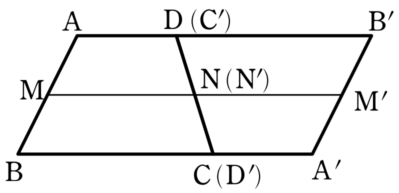


2

AD∥BC である台形 ABCD の辺 AB，DC の中点をそれぞれ M，N とする。

MN∥BC，MN$=\frac{1}{2}$(AD＋BC) であることを，次の手順で証明しなさい。

台形 ABCD に合同な台形 A′B′C′D′ を右の図のような位置に作る。



(1)　3 点 B，C，A′ と M，N，M′ はそれぞれ一直線上にあることを証明しなさい。

(2)　四角形 MBA′M′ は平行四辺形であることを証明しなさい。

(3)　MN∥BC，MN$=\frac{1}{2}$(AD＋BC) であることを証明しなさい。

3

次の場合について，$a:b:c$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

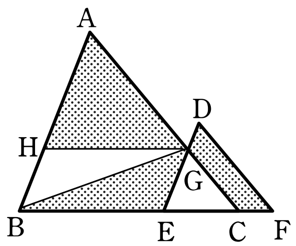
(1)　$a:b=5:6$，$b:c=8:3$　　　(2)　$a:b=2:5$，$a:c=6:7$

4

右の図において，△ABC∽△DEF であり，相似比は 2：1 である。また，HG∥BF であり，BE＝4 cm，CF＝1 cm である。

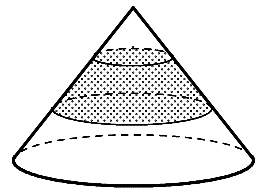
(1)　線分 CE の長さを求めなさい。

(2)　△AHG：△GBE：(四角形 DGCF の面積) を求めなさい。



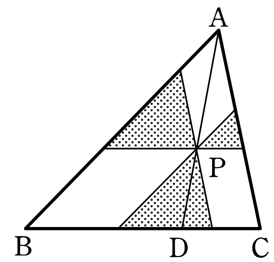
5

体積が 54π cm^3 の円錐を，底面に平行な平面で，高さが 3 等分されるように 3 つの立体に分けた。
このとき，真ん中の立体の体積を求めなさい。



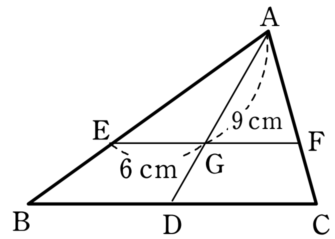
6

△ABC の辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 3：2 に内分する点を P とする。点 P を通り，△ABC の各辺に平行な直線を引く。△ABC の面積が 100 cm^2 であるとき，右の図の影をつけた部分の面積の和を求めなさい。



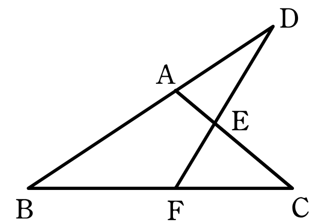
7

右の図において，点 G は △ABC の重心であり，EF∥BC である。このとき，線分 GD，BC の長さをそれぞれ求めなさい。



8

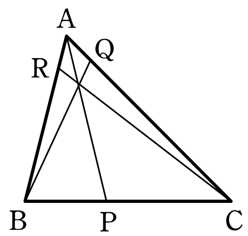
右の図において，AE：EC＝1：2，DE：EF＝3：2 である。
このとき，面積比 △EAD：△EFC を求めなさい。



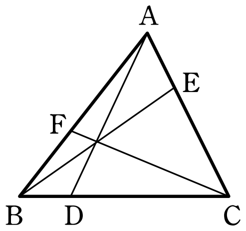
9

下の図において，次の比を求めなさい。

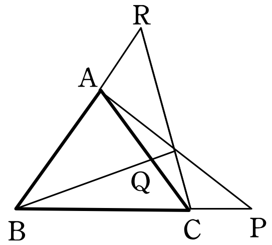
(1)　AQ：QC　　(2)　BD：DC　　(3)　AQ：QC



AR：RB＝1：4
BP：PC＝2：3



AF：FB＝3：2
AE：EC＝1：2

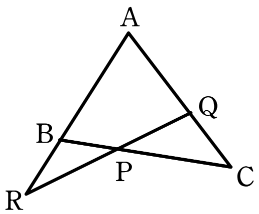


BC：CP＝3：1
BA：AR＝2：1

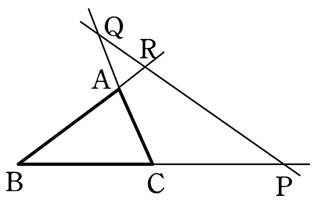
10

下の図において，次の比を求めなさい。

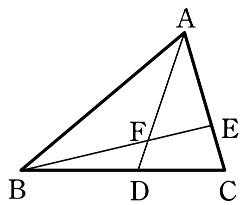
(1)　BP：PC　　(2)　RA：AB　　(3)　EF：FB



AB：BR＝2：1
AQ：QC＝3：2



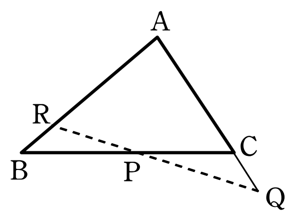
BC：CP＝1：1
QA：AC＝2：3



BD：DC＝4：3
AE：EC＝2：1

11

右の図の △ABC において，点 P は辺 BC を 6：5 に内分，点 Q は辺 AC を 4：1 に外分，点 R は辺 AB を 10：3 に内分している。
このとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明しなさい。



1

解説

△CBA において，点 E，F はそれぞれ辺 CB，CA の中点であるから，中点連結定理により　$EF /\!/ BA$

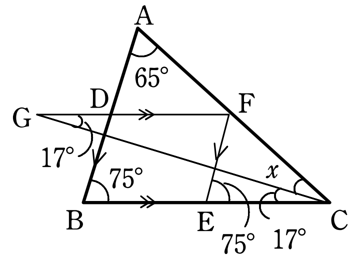
よって　$\angle ABC=\angle FEC=75^\circ$ ……①

△ABC において，点 D，F はそれぞれ辺 AB，AC の中点であるから，中点連結定理により

$DF /\!/ BC$

よって，右の図のように点 G をとると

$\angle BCG=\angle FGC=17^\circ$ ……②



①，② から，△ABC において

$\angle x=180^\circ-(\angle CAB+\angle ABC+\angle BCG)$

$=180^\circ-(65^\circ+75^\circ+17^\circ)=23^\circ$

2

解説

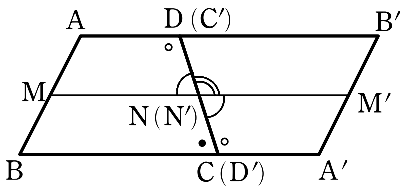
(1) 証明　$AD /\!/ BC$ であるから

$\angle ADC+\angle BCD=180^\circ$

台形 ABCD，A′B′C′D′ は合同であるから

$\angle ADC=\angle A'D'C'$

したがって，$\angle A'D'C'+\angle BCD=180^\circ$ であるから，3 点 B，C(D′)，A′ は一直線上にある。



また　$\angle D'N'M'+\angle C'N'M'=180^\circ$

四角形 AMND，A′M′N′D′ は合同であるから

$\angle D'N'M'=\angle DNM$

したがって，$\angle DNM+\angle C'N'M'=180^\circ$ であるから，3 点 M，N(N′)，M′ は一直線上にある。　終

(2) 証明　(1) と同様に

$\angle ADC+\angle B'C'D'=\angle ADC+\angle BCD=180^\circ$

よって，3 点 A，D(C′)，B′ は一直線上にある。

したがって　$AB' /\!/ BA'$ ……①

また　$AB'=AD+C'B'$,　$BA'=A'D'+CB$

よって　$AB'=BA'$ ……②

①，② より，四角形 ABA′B′ は，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，平行四辺形である。

よって　$MB /\!/ M'A'$

また，$AB=A'B'$ であるから　$MB=M'A'$

したがって，四角形 MBA′M′ は，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，平行四辺形である。　終

(3) 証明　(2) より，四角形 MBA′M′ が平行四辺形であるから

$MM' /\!/ BA'$,　$MM'=BA'$

よって　$MN /\!/ BC$,　$MN=\frac{1}{2}BA'=\frac{1}{2}(AD+BC)$　終

3

解説

(1) $a:b=5:6$ から　$a:b=\frac{5}{6}:1$

$b:c=8:3$ から　$b:c=1:\frac{3}{8}$

したがって　$a:b:c=\frac{5}{6}:1:\frac{3}{8}=20:24:9$

別解　$a:b=5:6$ から　$a:b=20:24$

$b:c=8:3$ から　$b:c=24:9$

したがって　$a:b:c=20:24:9$

(2) $a:b=2:5$ から　$a:b=1:\frac{5}{2}$

$a:c=6:7$ から　$a:c=1:\frac{7}{6}$

したがって　$a:b:c=1:\frac{5}{2}:\frac{7}{6}=6:15:7$

別解　$a:b=2:5$ から　$a:b=6:15$

これと $a:c=6:7$ から　$a:b:c=6:15:7$

4

解説

(1)　CE$=x$ cm とすると　BC$=4+x$，　EF$=x+1$

△ABC と △DEF の相似比が 2：1 であるから

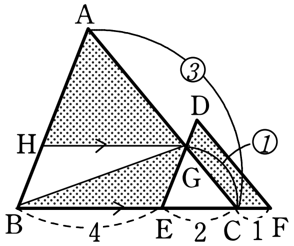
BC：EF$=2:1$

よって　$(4+x):(x+1)=2:1$

これを解いて　$x=2$

したがって　CE$=2$ cm

(2)　△ABC の面積を S とする。



△ABC と △GEC において，△ABC∽△DEF から

∠ABC＝∠GEC

また　∠ACB＝∠GCE

よって　△ABC∽△GEC

相似比は　BC：EC$=(4+2):2=3:1$

ゆえに，面積比は

△ABC：△GEC$=3^2:1^2=9:1$

したがって　△GEC$=\frac{1}{9}S$

HG∥BC であるから　△AHG∽△ABC

相似比は　AG：AC＝(AC−GC)：AC$=(3-1):3=2:3$

よって，面積比は　△AHG：△ABC$=2^2:3^2=4:9$

したがって　△AHG$=\frac{4}{9}S$

ここで，△BGC：△ABC＝CG：CA$=1:3$，BC：BE$=3:2$ であるから

△GBE$=\frac{2}{3}$△BGC$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}S=\frac{2}{9}S$

さらに　△ABC：△DEF$=2^2:1^2=4:1$

したがって　△DEF$=\frac{1}{4}S$

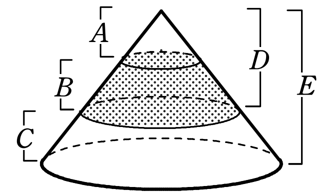
よって　(四角形 DGCF の面積)＝△DEF−△GEC$=\frac{1}{4}S-\frac{1}{9}S=\frac{5}{36}S$

以上より　△AHG：△GBE：(四角形 DGCF の面積)$=\frac{4}{9}S:\frac{2}{9}S:\frac{5}{36}S$

$=16:8:5$

5

解説



3 等分された立体を，上から順に A，B，C とする。
また，A と B を合わせた円錐を D，もとの円錐を E とする。

A∽D で，相似比は $1:2$ であるから

(A の体積)：(D の体積)$=1^3:2^3=1:8$　……①

A∽E で，相似比は $1:3$ であるから

(A の体積)：(E の体積)$=1^3:3^3=1:27$

E の体積が 54π cm^3 であるから

(A の体積)$=\frac{1}{27}\times$(E の体積)$=\frac{1}{27}\times54\pi=2\pi$ (cm^3)

よって，① から

(D の体積)$=8\times$(A の体積)$=8\times2\pi=16\pi$ (cm^3)

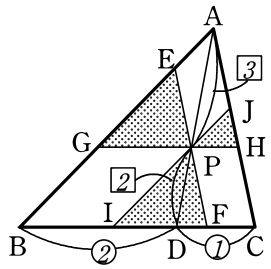
したがって　(B の体積)＝(D の体積)−(A の体積)

$=16\pi-2\pi=14\pi$ (cm^3)

$\boxed{6}$

（解説）

点 P を通り，△ABC の各辺に平行な直線と各辺の交点 E，F，G，H，I，J を右の図のようにとる。
GH∥BC，EF∥AC，IJ∥BA であるから，△EGP，△PIF，△JPH はすべて △ABC と相似である。



[1]　△ABC と △PIF の相似比は

$$AD:PD=(3+2):2=5:2$$

したがって，面積比は

$$\triangle ABC:\triangle PIF=5^2:2^2=25:4$$

よって　$\triangle PIF=\frac{4}{25}\triangle ABC=\frac{4}{25}\times 100=16$

[2]　GP∥BD であるから　　GP：BD＝AP：AD＝3：5

よって　$GP=\frac{3}{5}BD=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}BC=\frac{2}{5}BC$

ゆえに，△ABC と △EGP の相似比は　　BC：GP＝5：2

したがって，面積比は　　$5^2:2^2=25:4$

よって　$\triangle EGP=\frac{4}{25}\triangle ABC=\frac{4}{25}\times 100=16$

[3]　PH∥DC であるから　　PH：DC＝AP：AD＝3：5

よって　$PH=\frac{3}{5}DC=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}BC=\frac{1}{5}BC$

ゆえに，△ABC と △JPH の相似比は　　BC：PH＝5：1

したがって，面積比は　　$5^2:1^2=25:1$

よって　$\triangle JPH=\frac{1}{25}\triangle ABC=\frac{1}{25}\times 100=4$

以上から，求める面積の和は　　$16+16+4=36\ (\mathrm{cm}^2)$

$\boxed{7}$

（解説）

G は △ABC の重心であるから　AG：GD＝2：1，BD＝DC

よって　　9：GD＝2：1

これを解いて　$GD=\frac{9}{2}$ cm

EF∥BC であるから　　EG：BD＝AG：AD＝2：(2＋1)＝2：3

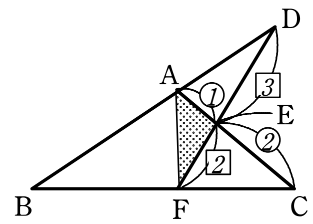
よって　　6：BD＝2：3

これを解いて　BD＝9 cm

BD＝DC であるから　　BC＝BD＋DC＝9＋9＝18 (cm)

$\boxed{8}$

（解説）



△EAD：△EAF＝DE：EF＝3：2

△EFC：△EAF＝CE：EA＝2：1

すなわち　$\triangle EAD=\frac{3}{2}\triangle EAF$

$\triangle EFC=2\triangle EAF$

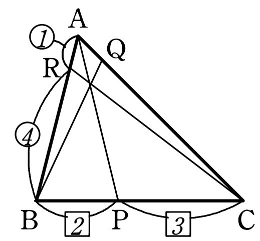
よって　$\triangle EAD:\triangle EFC=\frac{3}{2}\triangle EAF:2\triangle EAF$

$=3:4$

$\boxed{9}$

（解説）

(1)　△ABC において，チェバの定理により



$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1$$

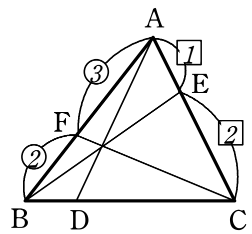
AR：RB＝1：4，BP：PC＝2：3 であるから

$$\frac{2}{3}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{1}{4}=1$$

よって　$\frac{CQ}{QA}=6$

したがって　　AQ：QC＝1：6

(2)　△ABC において，チェバの定理により



$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

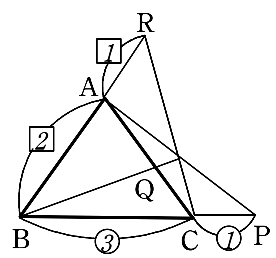
AF：FB＝3：2，AE：EC＝1：2 であるから

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}=1$$

よって　$\frac{BD}{DC}=\frac{1}{3}$

したがって　　BD：DC＝1：3

(3)　△ABC において，チェバの定理により



$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1$$

BP：PC＝(3＋1)：1＝4：1，

AR：RB＝1：(1＋2)＝1：3 であるから

$$\frac{4}{1}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{1}{3}=1$$

よって　$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{4}$

したがって　　AQ：QC＝4：3

10

解説

(1)　△ABC と直線 QR において，メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1$$

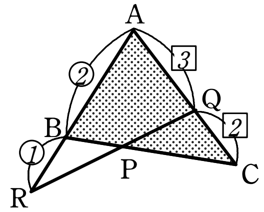
CQ：QA＝2：3，AR：RB＝(2＋1)：1＝3：1

であるから

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{1}=1$$

よって　$\frac{BP}{PC}=\frac{1}{2}$

したがって　BP：PC＝1：2



(2)　△ABC と直線 PQ において，メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1$$

BP：PC＝(1＋1)：1＝2：1，

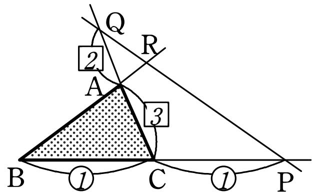
CQ：QA＝(3＋2)：2＝5：2 であるから

$$\frac{2}{1}\times\frac{5}{2}\times\frac{AR}{RB}=1$$

よって　$\frac{AR}{RB}=\frac{1}{5}$

ゆえに　AR：RB＝1：5

したがって　RA：AB＝1：(5−1)＝1：4



(3)　△BCE と直線 AD において，メネラウスの定理により

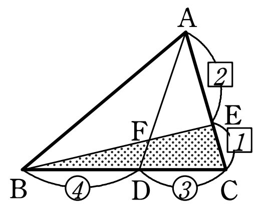
$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CA}{AE}\times\frac{EF}{FB}=1$$

BD：DC＝4：3，CA：AE＝(1＋2)：2＝3：2 である

から　$\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{EF}{FB}=1$

よって　$\frac{EF}{FB}=\frac{1}{2}$

したがって　EF：FB＝1：2



11

解説

証明　BP：PC＝6：5，　CQ：QA＝1：4，

AR：RB＝10：3

よって

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=\frac{6}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{10}{3}=1$$

したがって，メネラウスの定理の逆により，3 点 P，Q，R は一直線上にある。　終