2024/08/29 数A　対策問題

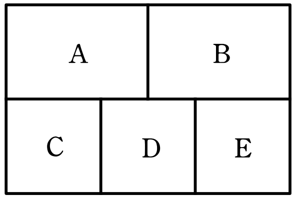
1

男子 4 人，女子 5 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1)　男子 4 人が皆隣り合う　　(2)　男子どうしが隣り合わない

2

右の図の A，B，C，D，E 各領域を色分けしたい。隣り合った領域には異なる色を用い，指定された数だけの色は全部用いなければならない。塗り分け方はそれぞれ何通りか。



(1)　5 色を用いる場合　　(2)　4 色を用いる場合

(3)　3 色を用いる場合

3

(1)　HGAKUEN の 7 文字から 6 文字を選んで文字列を作り，それを辞書式に配列するとき，GAKUEN は初めから数えて何番目の文字列か。ただし，同じ文字は繰り返して用いないものとする。

(2)　異なる 5 つの文字 A，B，C，D，E を 1 つずつ，すべてを使ってできる順列を，辞書式配列法によって順に並べるとき，63 番目にある順列は何か。

4

3 人の男子：松男，竹男，梅男と，3 人の女子：雪美，月美，花美の計 6 人全員が手をつないで輪を作る。このとき，次のような輪の作り方は何通りあるか。

(1)　松男と雪美が手をつなぐ。　　(2)　男女が交互に手をつなぐ。

(3)　男子，女子ともに 3 人続けて手をつなぐ。

5

a，a，a，a，b，b，b，c，c の 9 個の文字全部を使って作られる順列の総数を求めよ。

6

正八角形について，次の数を求めよ。

(1)　4 個の頂点を結んでできる四角形の個数。

(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，正八角形と辺を共有する三角形の個数。

$\boxed{7}$

20 本のくじの中に当たりくじが 4 本ある。このくじを a，b，c 3 人がこの順に，1 本ずつ 1 回だけ引くとき，次の確率を求めよ。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。

(1)　a が当たり，c も当たる確率

(2)　a がはずれ，c が当たる確率

$\boxed{8}$

2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の最小値が 3 となるか，または，出る目の最大値が 4 となる確率を求めよ。

$\boxed{9}$

カードが 7 枚ある。4 枚にはそれぞれ赤色で 1，2，3，4 の数字が，残りの 3 枚にはそれぞれ黒色で 0，1，2 の数字が 1 つずつ書かれている。
これらのカードをよく混ぜてから横に 1 列に並べたとき

(1)　赤，黒 2 色が交互に並んでいる確率を求めよ。

(2)　同じ数字はすべて隣り合っている確率を求めよ。

(3)　同じ数字はどれも隣り合っていない確率を求めよ。

$\boxed{10}$

A，B，C の 3 人がある大学の入学試験を受けるとき，A，B，C の合格する確率はそれぞれ $\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{5}$ である。

(1)　A，B，C のうち，A だけが合格する確率を求めよ。

(2)　A，B，C のうち，A を含めた 2 人だけが合格する確率を求めよ。

$\boxed{11}$

1 個のさいころを 5 回投げるとき

(1)　1 の目がちょうど 3 回出る確率を求めよ。

(2)　1 の目が 2 回以上出る確率を求めよ。

$\boxed{12}$

赤玉 5 個と白玉 10 個が入っている袋の中から無作為に 1 個ずつ取り出す操作を続ける。ただし，取り出した玉は袋には戻さないものとする。このとき，次の確率を求めよ。

(1)　赤玉が先に袋の中からなくなる確率

(2)　ちょうど赤玉が袋の中からなくなって，かつ，袋の中に白玉 5 個だけが残っている確率

$\boxed{1}$

解答　(1)　17280 通り　(2)　43200 通り

$\boxed{2}$

解答　(1)　120 通り　(2)　72 通り　(3)　6 通り

$\boxed{3}$

解答　(1)　1508 番目　(2)　CDBAE

$\boxed{4}$

解答　(1)　48 通り　(2)　12 通り　(3)　36 通り

$\boxed{5}$

解答　1260

$\boxed{6}$

解答　(1)　70　(2)　40

$\boxed{7}$

解答　(1)　$\frac{3}{95}$　(2)　$\frac{16}{95}$

$\boxed{8}$

解答　$\frac{1}{3}$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$\frac{1}{35}$　(2)　$\frac{2}{21}$　(3)　$\frac{11}{21}$

$\boxed{10}$

解答　(1)　$\frac{3}{20}$　(2)　$\frac{2}{5}$

$\boxed{11}$

解答　(1)　$\frac{125}{3888}$　(2)　$\frac{763}{3888}$

$\boxed{12}$

解答　(1)　$\frac{2}{3}$　(2)　$\frac{6}{143}$

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　隣り合う男子 4 人をまとめて 1 組と考えると，この 1 組と女子 5 人が並ぶ方法は

$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ (通り)

そのおのおのに対して，隣り合う男子 4 人の並び方は

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ (通り)

ゆえに，求める並び方の総数は

$720\times24=17280$ (通り)

(2)　まず，女子 5 人が並ぶ方法は

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ (通り)

次に，女子と女子の間および両端の 6 個の場所に，男子 4 人が並ぶ方法は

${}_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$ (通り)

ゆえに，求める並び方の総数は

$120\times360=43200$ (通り)

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　5 色を用いる場合，塗り分け方の数は，異なる 5 色を 1 列に並べる方法の数に等しい。

よって　　$5!=120$ (通り)

(2)　5 つの領域のうち，2 つの領域に同じ色を塗る場合で

A と E，B と C，C と E　の 3 通り

[1]　A と E が同じ色で，その他は色が異なる場合

A－E，B，C，D を異なる 4 色で塗り分ける方法の数に等しいから

$4!=24$ (通り)

[2]　B と C，C と E に同じ色を塗る場合もそれぞれ 24 通り

よって，求める塗り分け方の総数は

$24\times3=72$ (通り)

(3)　3 色のうちの 2 色をそれぞれ 2 つの領域に，他の 1 色を残りの 1 つの領域に塗ればよい。

同じ色を塗る 2 つの領域は

A と E，B と C

よって，求める塗り方の総数は，A－E，B－C，D を異なる 3 色で塗り分ける方法の数に等しく　　$3!=6$ (通り)

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　GAKUEN より前に並んでいる順列のうち

[1]　A□□□□□，E□□□□□ のものは　　${}_6P_5\times2$ 個

[2]　GAE□□□，GAH□□□ のものは　　${}_4P_3\times2$ 個

[3]　GAKE□□，GAKH□□，GAKN□□ のものは　　${}_3P_2\times3$ 個

[4]　GAKUE□ のものは　　GAKUEH

したがって

$${}_6P_5\times2+{}_4P_3\times2+{}_3P_2\times3+1+1=1440+48+18+1+1$$
$$=1508\text{(番目)}$$

(2)　A□□□□ のものは　$4!=24$ (個)

B□□□□ のものは　$4!=24$ (個)　[計 48 個]

CA □□□ のものは　$3!=6$　(個)　[計 54 個]

CB □□□ のものは　$3!=6$　(個)　[計 60 個]

CDA □□ のものは　$2!=2$　(個)　[計 62 個]

よって，63 番目は　　CDBAE

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　松男と雪美をまとめて 1 組と考えると，この 1 組と残り 4 人が輪を作る方法は

$(5-1)!$ 通り

松男と雪美の並び方は　$2!$ 通り

よって，求める輪の作り方は　$(5-1)!\times2!=48$ (通り)

(2)　男子 3 人が輪を作る方法は　$(3-1)!$ 通り

男子 3 人の間の 3 か所に女子 3 人を並べる方法は　$3!$ 通り

ゆえに，求める輪の作り方は　$(3-1)!\times3!=12$ (通り)

(3)　男子 3 人，女子 3 人をそれぞれひとまとめにして輪を作る方法は　$(2-1)!$ 通り

男子 3 人，女子 3 人の並び方はそれぞれ　$3!$ 通り

よって，求める輪の作り方は　$(2-1)!\times3!\times3!=36$ (通り)

$\boxed{5}$

(解説)

9 個の文字のうち，a が 4 個，b が 3 個，c が 2 個ある。

よって　$\dfrac{9!}{4!3!2!}=1260$

別解　4 個の同じ文字 a の位置の定め方は，9 個の場所から 4 個の場所を選ぶ方法の数で，${}_9C_4$ 通りある。

そのおのおのに対して，3 個の同じ文字 b の位置の定め方は，残り 5 個の場所から 3 個の場所を選ぶ方法の数で，${}_5C_3$ 通りある。

そして，2 個の同じ文字 c は残りの 2 個の場所におく。

ゆえに

$$\begin{aligned}{}_9C_4\times{}_5C_3\times{}_2C_2&={}_9C_4\times{}_5C_2\times1\\&=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\\&=1260\end{aligned}$$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　4 個の頂点で四角形が 1 個できるから

$${}_8C_4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70\ (個)$$

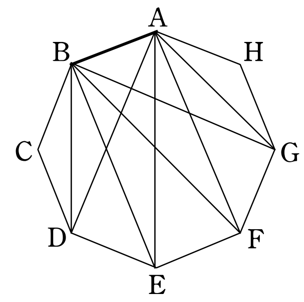
(2)　正八角形の頂点を右の図のようにおく。

[1]　正八角形と 1 辺だけを共有する場合

辺 AB だけを共有する三角形の第 3 の頂点の選び方は 4 通り。

他の 1 辺だけを共有する場合も同様であるから，できる三角形の個数は

$$4\times8=32\ (個)$$

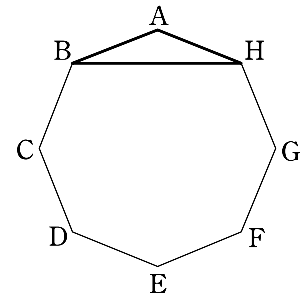


[2]　正八角形と 2 辺を共有する場合

2 辺 HA，AB を共有する三角形は △HAB の 1 つだけである。

よって，できる三角形の個数は

$$1\times8=8\ (個)$$



したがって，正八角形と辺を共有する三角形の個数は

$$32+8=40\ (個)$$

7

解説

(1)　a，b，c がこの順に続いて引くとき，起こりうる場合の数は

$${}_{20}\mathrm{P}_3=6840\ (\text{通り})$$

a が当たり，c も当たるには，次の 2 つの場合がある。

A：a が当たり，b が当たり，c が当たる場合

B：a が当たり，b がはずれ，c が当たる場合

事象 A が起こる場合の数は　${}_{4}\mathrm{P}_3=24$ (通り)

事象 B が起こる場合の数は　$4\times16\times3=192$ (通り)

事象 A，B は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{24}{6840}+\frac{192}{6840}=\frac{216}{6840}=\frac{3}{95}$$

(2)　a がはずれ，c が当たるには，次の 2 つの場合がある。

C：a がはずれ，b が当たり，c が当たる場合

D：a がはずれ，b がはずれ，c が当たる場合

事象 C が起こる場合の数は　$16\times{}_{4}\mathrm{P}_2=192$ (通り)

事象 D が起こる場合の数は　${}_{16}\mathrm{P}_2\times4=960$ (通り)

事象 C，D は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{192}{6840}+\frac{960}{6840}=\frac{1152}{6840}=\frac{16}{95}$$

8

解説

目の出方は，全部で　$6^2=36$ (通り)

出る目の最小値が 3 となる事象を A

出る目の最大値が 4 となる事象を B とする。

2 個のさいころの出る目の数を，x，y とする。

事象 A が起こるのは，$(x,\ y)$ が

$(3,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(3,\ 5)$，$(3,\ 6)$，$(4,\ 3)$，$(5,\ 3)$，$(6,\ 3)$

のときで，その場合の数は　7 通り

事象 B が起こるのは，$(x,\ y)$ が

$(1,\ 4)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$

のときで，その場合の数は　7 通り

事象 $A\cap B$ が起こるのは，$(x,\ y)$ が

$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$

のときで，その場合の数は　2 通り

ゆえに，求める確率 $P(A\cup B)$ は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{7}{36}+\frac{7}{36}-\frac{2}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

9

解説

7 枚のカードを 1 列に並べる方法は　$7!$ 通り

(1)　赤，黒のカードを交互に並べる方法は　$4!\times3!$ 通り

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{4!\times3!}{7!}=\dfrac{3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5}=\dfrac{1}{35}$

(2)　赤の 1 と黒の 1，赤の 2 と黒の 2 がいずれも隣り合う並べ方は $5!\times2!\times2!$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{5!\times2!\times2!}{7!}=\frac{2\cdot1\times2\cdot1}{7\cdot6}=\frac{2}{21}$$

(3)　全事象を U，赤の 1 と黒の 1 が隣り合うという事象を A，赤の 2 と黒の 2 が隣り合うという事象を B とする。

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$$

ここで　$n(A)=n(B)=6!\times2!$

また，(2) から　$n(A\cap B)=5!\times2!\times2!$

ゆえに　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=7!-(2\times6!\times2!-5!\times2!\times2!)=22\cdot5!$

よって，求める確率は　$\dfrac{n(\overline{A}\cap\overline{B})}{n(U)}=\dfrac{22\cdot5!}{7!}=\dfrac{11}{21}$

$\boxed{10}$

(解説)

(1)　A だけが合格するとき，B，C は不合格となるから，求める確率は

$$\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$$

(2)　A を含めた 2 人だけが合格となるには

[1]　A，B が合格で，C が不合格

[2]　A，C が合格で，B が不合格

の場合がある。

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$$

$\boxed{11}$

(解説)

1 個のさいころを 1 回投げて

1 の目が出る確率は　$\frac{1}{6}$

1 の目が出ない確率は　$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

(1)　5 回のうち 3 回 1 の目が出る確率は

$${}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=10\times\frac{5^2}{6^5}=\frac{125}{3888}$$

(2)　1 の目が 2 回以上出るという事象の余事象は，

「1 の目が 1 回も出ないか，または 1 回だけ出る」

という事象であり，これらは互いに排反である。

よって

1 の目が 1 回も出ない確率は　$\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{5^5}{6^5}$

1 の目が 1 回だけ出る確率は　${}_5C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{5^5}{6^5}$

ゆえに，求める確率は　$1-\left(\frac{5^5}{6^5}+\frac{5^5}{6^5}\right)=1-\frac{3125}{3888}=\frac{763}{3888}$

$\boxed{12}$

(解説)

(1)　先に赤玉がなくなるには，最後の 1 個が白玉であればよい。すなわち，14 回目までに赤玉 5 個と白玉 9 個を取り出せばよいから，求める確率は

$$\frac{{}_5C_5\cdot{}_{10}C_9}{{}_{15}C_{14}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

(2)　9 回目までに，赤玉 4 個と白玉 5 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_5C_4\cdot{}_{10}C_5}{{}_{15}C_9}=\frac{36}{143}$$

残りの赤玉 1 個と白玉 5 個の中から赤玉 1 個を取り出す確率は $\frac{1}{6}$ であるから，求める確率は　$\frac{36}{143}\cdot\frac{1}{6}=\frac{6}{143}$