夏期講習会オプション講座

中１数学 幾何編

～合同証明～

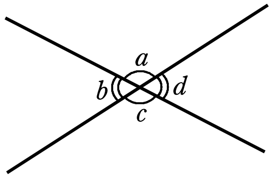
氏名

1　平行線と角

対頂角

2 直線が交わるとき，その交点の周りに 4 つの角ができる。このうち，隣り合っていない 2 つの角を **対頂角** (**たいちょうかく**) という。

たとえば，右の図で，$\angle a$ と $\angle c$ は対頂角であり，$\angle b$ と $\angle d$ は対頂角である。



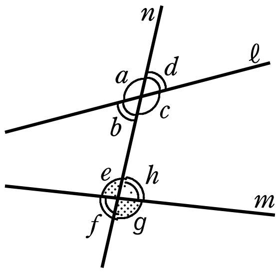
対頂角の性質

対頂角は等しい。

同位角と錯角

右の図のように，2 直線 ℓ ，m に直線 n が交わるとき，$\angle a$ と $\angle e$，$\angle b$ と $\angle f$，$\angle c$ と $\angle g$，$\angle d$ と $\angle h$ のような位置関係にある角を，それぞれ **同位角** (**どういかく**) という。

また，$\angle b$ と $\angle h$，$\angle c$ と $\angle e$ のような位置関係にある角を，それぞれ **錯角** (**さっかく**) という。



平行線である条件

2 直線 ℓ ，m に他の直線が交わるとき，次のことが成り立つ。

[1]　同位角が等しいならば，ℓ ，m は平行である。

[2]　錯角が等しいならば，ℓ ，m は平行である。

平行な 2 直線に他の直線が交わるときは，次のことがいえる。

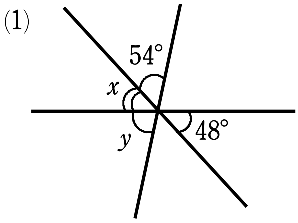
平行線の性質

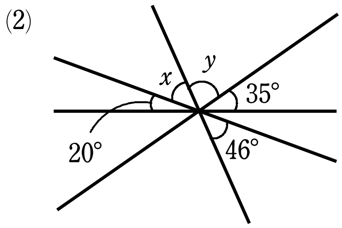
平行な 2 直線が他の直線と交わるとき，次のことが成り立つ。

[1]　同位角は等しい。　　　[2]　錯角は等しい。

$\boxed{1}$

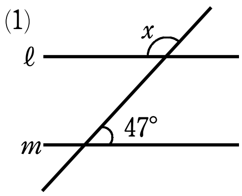
右の図のように，直線が1点で交わっている。
$\angle x$ と $\angle y$ の大きさを求めなさい。

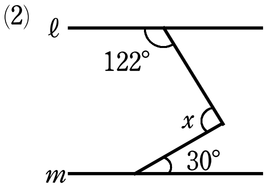




$\boxed{2}$

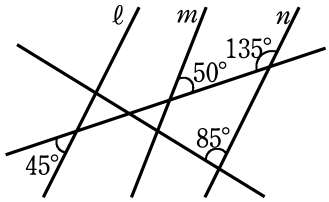
右の図で，$\ell \parallel m$ である。
このとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。





$\boxed{3}$

右の図のように直線が交わっている。
直線 ℓ，m，n のうち，平行な直線の組を答えなさい。

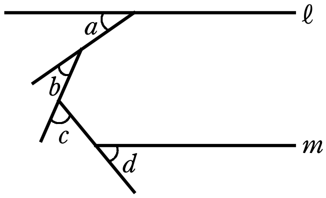


$\boxed{4}$ ＜発展＞

右の図で，$\ell \parallel m$ のとき，

$$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d$$

の大きさを求めなさい。

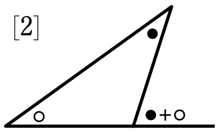


2　多角形の内角と外角

三角形の内角と外角の性質

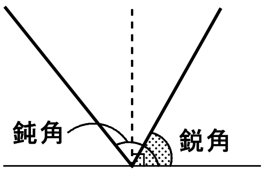
[1]　三角形の3つの内角の和は180°である。

[2]　三角形の外角は，それと隣り合わない2つの内角の和に等しい。



0°より大きく90°より小さい角を **鋭角** (**えいかく**) といい，90°より大きく180°より小さい角を **鈍角** (**どんかく**) という。

三角形の1つの内角は180°より小さいから，鋭角，直角，鈍角のいずれかである。



三角形は，内角の大きさによって，次のように分類される。

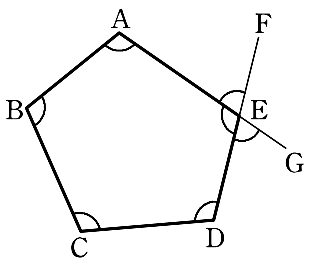
鋭角三角形　3つの内角がすべて鋭角である三角形

直角三角形　1つの内角が直角である三角形

鈍角三角形　1つの内角が鈍角である三角形

多角形の内角と外角

多角形の内角と外角も，三角形の場合と同じように定める。たとえば，右の図の五角形において，∠A，∠B，∠C，∠D，∠AED は，この五角形の内角であり，∠AEF と ∠DEG は，ともに頂点Eにおける外角である。



n 角形を $(n-2)$ 個の三角形に分けたとき，すべての三角形の内角の和は，もとの n 角形の内角の和に等しいから，次のことがいえる。

多角形の内角の和

n 角形の内角の和は，$180° \times (n-2)$ である。

多角形の外角の和

多角形の外角の和は，360°である。

5

次のような正多角形は，正何角形であるか答えなさい。

(1)　１つの内角の大きさが $156°$ であるような正多角形

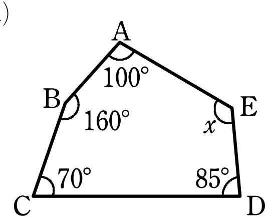
(2)　１つの内角の大きさが，その外角の大きさより $140°$ 大きい正多角形

(3)　１つの内角の大きさがその外角の大きさの 7.5 倍である正多角形

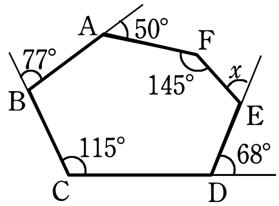
6

右の図において，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)

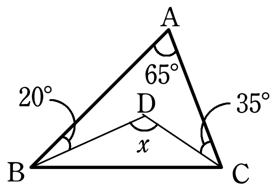


(2)



7

右の図のような $\triangle ABC$ において，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

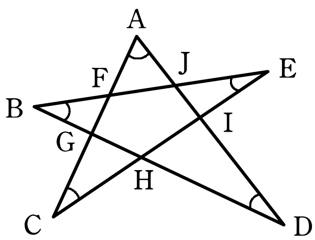


8 ＜発展＞

右の図のような星形の図形で

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$$

となるわけを説明しなさい。



1　三角形の合同条件

合同な図形

2 つの合同な図形は，その一方を移動して，他方にぴったりと重ねることができる。このとき，ぴったりと重なる点，辺，角を，それぞれ**対応する点，対応する辺，対応する角** という。

合同な図形

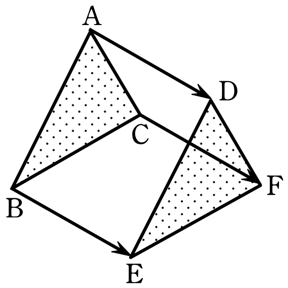
合同な図形の対応する辺の長さは等しく，対応する角の大きさは等しい。

2 つの図形 P，Q が合同であるとき，記号 ≡ を用いて，$\boldsymbol{P \equiv Q}$ と表す。

たとえば，右の図のように，△ABC を平行移動して △DEF にぴったりと重ねることができるとき，2 つの三角形は合同で，

△ABC≡△DEF

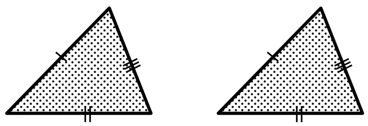
と表される。このように，記号 ≡ を用いるときは，対応する点を同じ順に書く。



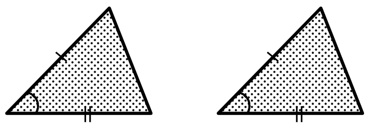
三角形の合同条件

2 つの三角形は，次のいずれかが成り立つとき合同である。

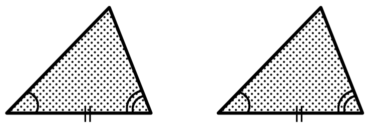
[1]　**3 辺**
がそれぞれ等しい。



[2]　**2 辺とその間の角**
がそれぞれ等しい。



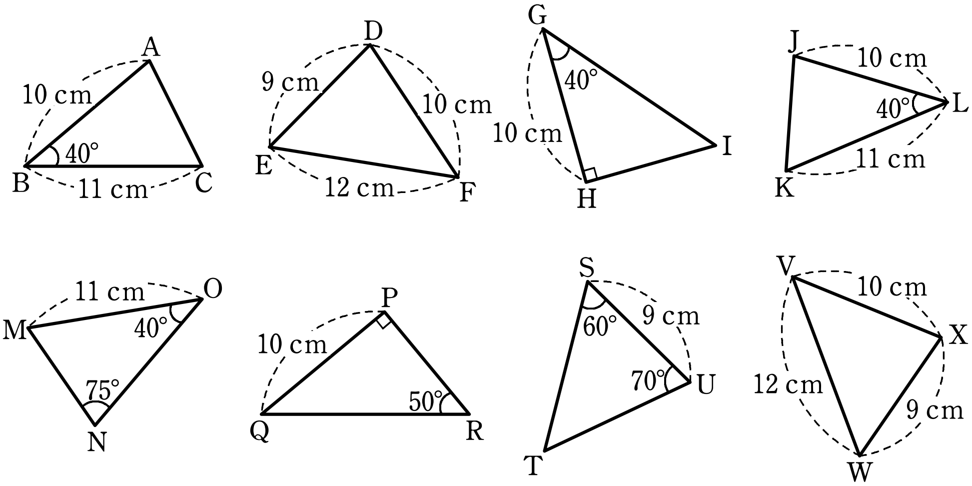
[3]　**1 辺とその両端の角**
がそれぞれ等しい。



※　上記 [1] は「三辺相等」，[2] は「二辺夾角相等」，
[3] は「一辺両端角相等」または「二角夾辺相等」ともいう。

9

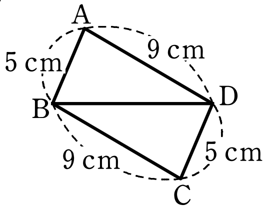
次の図において，合同であるといえる三角形を選び，記号 ≡ を用いて答えなさい。
また，そのときに使った合同条件をいいなさい。



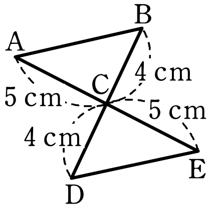
10

次の図において，合同な２つの三角形を記号 ≡ を用いて答えなさい。
また，そのときに使った合同条件をいいなさい。ただし，(3) では，$\ell \mathbin{/\!/} m$ である。

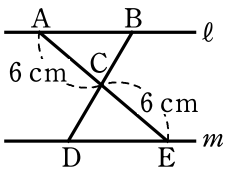
(1)



(2)



(3)



2　証明のすすめ方

仮定と結論

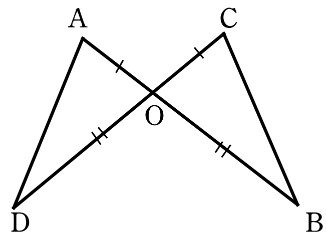
○○○　ならば　**□□□**

という文において○○○ にあたる部分を **仮定，□□□** にあたる部分を **結論** という。

一般に，ある事柄を証明するには，仮定から出発して，すでに正しいことが明らかにされた事柄を根拠に，結論を導けばよい。

証明のすすめ方

例 1　右の図のように，線分 AB と CD が点 O で交わっている。
このとき，OA＝OC，OD＝OB ならば，△AOD≡△COB であることを証明しなさい。



[仮定]　OA＝OC，OD＝OB

[結論]　△AOD≡△COB

証明　△AOD と △COB において

仮定より　　OA＝OC　　…… ①

　　　　　　OD＝OB　　…… ②

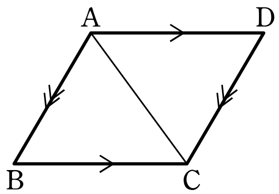
対頂角は等しいから

∠AOD＝∠COB　　…… ③

①，②，③ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△AOD≡△COB　終

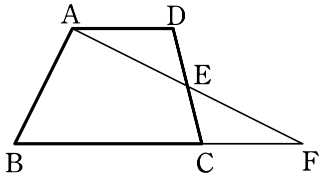
例２　右の図のように，AB∥DC，AD∥BC
である四角形 ABCD がある。
次のことを証明しなさい。
AB＝CD，BC＝DA



［仮定］ AB∥DC，AD∥BC
［結論］ AB＝CD，BC＝DA
証明　△ABC と △CDA において
共通であるから　AC＝CA　…… ①
仮定より AB∥DC であり，平行線の錯角は等しいから
∠BAC＝∠DCA　…… ②
仮定より AD∥BC であり，平行線の錯角は等しいから
∠BCA＝∠DAC　…… ③
①，②，③ より，１辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABC≡△CDA
合同な図形の対応する辺は等しいから
AB＝CD，　BC＝DA　終

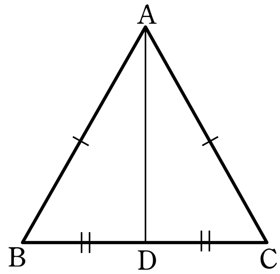
11 ＜例題＞

右の図のAD∥BCである台形ABCDで，辺DCの中点をEとし，線分AEの延長と辺BCの延長との交点をFとする。
このとき，△ADE≡△FCEであることを証明しなさい。



12 ～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

右の図の△ABCにおいて，AB＝AC，BD＝CD　ならば∠BAD＝∠CADであることを証明しなさい。

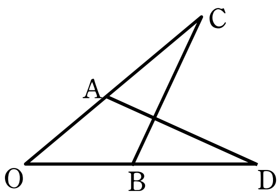


13 ～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

右の図において，

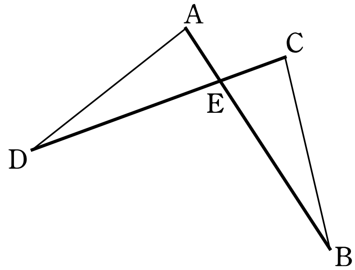
OA＝OB，∠OAD＝∠OBC

であるとき，AD＝BCであることを証明しなさい。



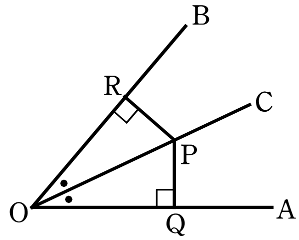
14 ～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

長さの等しい２つの線分AB，CDが，右の図のように交わっている。線分AB，CDの交点をEとするとき，AE＝CEならばAD＝CBであることを証明しなさい。



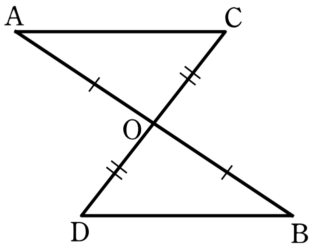
15 ～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

右の図のように，半直線 OC 上に点 P があり，辺 OA，OB 上にそれぞれ点 Q，R がある。OC が ∠AOB の二等分線で，OA⊥PQ，OB⊥PR ならば PQ＝PR であることを証明しなさい。



16 ～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

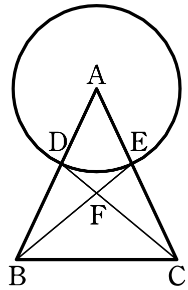
右の図のように，2 つの線分 AB，CD が点 O で交わっている。このとき，AO＝BO，CO＝DO　ならば AC // DB であることを証明しなさい。



17 ～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

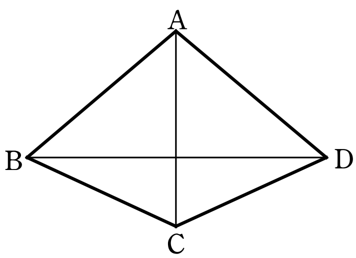
右の図のように，△ABC と，頂点 A を中心とする円がある。辺 AB，AC と円との交点をそれぞれ D，E とし，線分 BE と CD の交点を F とする。AB＝AC であるとき，次のことを証明しなさい。

(1)　∠ABE＝∠ACD　　(2)　DF＝EF



18 ＜発展＞～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

AB＝AD，CB＝CD である四角形 ABCD がある。
このとき，直線 AC は線分 BD の垂直二等分線であることを証明しなさい。

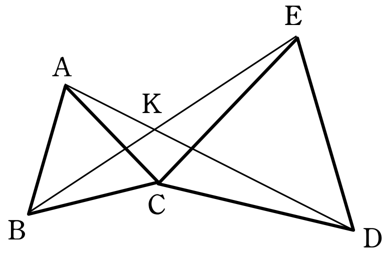


19 ＜発展＞～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

右の図において，△ABC と △DCE は正三角形である。AD と BE の交点を K とする。
次のことを証明しなさい。

(1)　△BCE≡△ACD

(2)　∠DKE＝60°

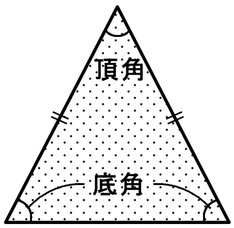


1　二等辺三角形

二等辺三角形

定義　2 辺が等しい三角形を二等辺三角形という。

二等辺三角形の等しい辺にはさまれた角を **頂角** といい，頂角に対する辺を **底辺** という。また，底辺の両端の角を **底角** という。



二等辺三角形の底角

定理　二等辺三角形の 2 つの底角は等しい。

二等辺三角形の頂角の二等分線

定理　二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に 2 等分する。

2 つの角が等しい三角形

定理　2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形である。

正三角形

定義　3 辺が等しい三角形を正三角形という。

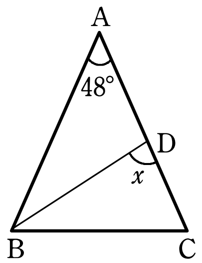
正三角形の性質

定理　正三角形の 3 つの角は等しく，すべて 60° である。
また，3 つの角が等しい三角形は正三角形である。

$\boxed{20}$

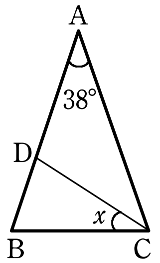
次の図において，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形である。∠x の大きさを求めなさい。

(1)



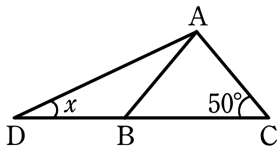
∠ABD＝∠CBD

(2)



DA＝DC

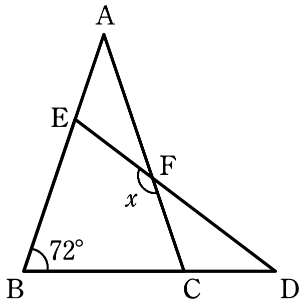
(3)



AB＝BD

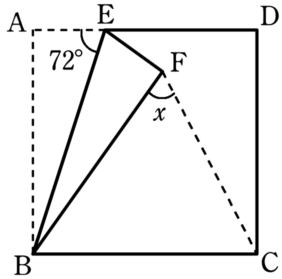
$\boxed{21}$

右の図において，△ABC は AB=AC の二等辺三角形，
△DEB は △ABC と合同である。
∠ABC=72° のとき，∠x の大きさを求めなさい。



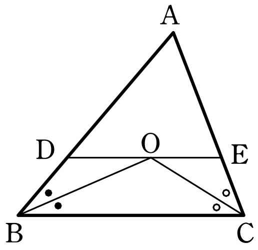
$\boxed{22}$

右の図は正方形 ABCD を BE を折り目として折り返したもので，頂点 A が移った点を F とする。
∠AEB＝72° のとき，∠x の大きさを求めなさい。



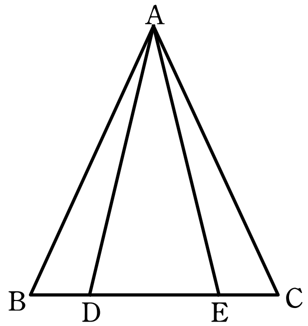
$\boxed{23}$～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

△ABCにおいて，∠Bと∠Cの二等分線の交点をOとする。
また，Oを通って辺BCに平行な直線を引き，辺AB，AC
との交点をそれぞれD，Eとする。
このとき，△BODと△CEOはどちらも二等辺三角形で
あることを証明しなさい。



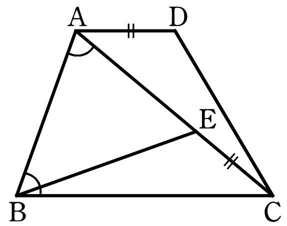
$\boxed{24}$～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

右の図において，△ABCはAB＝ACの二等辺三角形であり，点D，Eは辺BC上の点で，BD＝CEである。
このとき，△ABE≡△ACDであることを証明しなさい。



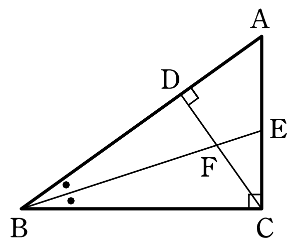
$\boxed{25}$～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

右の図は，AD∥BCの台形ABCDで，∠CAB＝∠CBA
である。対角線AC上にAD＝CEとなるように点Eを
とるとき，CD＝BEとなることを証明しなさい。



$\boxed{26}$＜発展＞～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

∠C＝90°の直角三角形ABCで，Cから辺ABに
引いた垂線をCD，∠Bの二等分線がAC，DCと
交わる点をそれぞれE，Fとする。
このとき，△CEFは二等辺三角形であることを
証明しなさい。



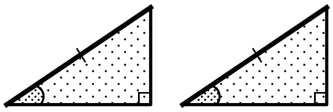
2　直角三角形の合同

直角三角形の直角に対する辺を **斜辺** という。
直角三角形の１つの内角は直角であり，他の内角は鋭角である。

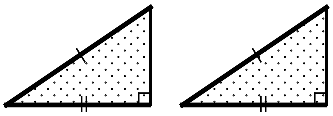
直角三角形の合同条件

定理　２つの直角三角形は，次のいずれかが成り立つとき合同である。

[1]　**斜辺と１つの鋭角**
がそれぞれ等しい。

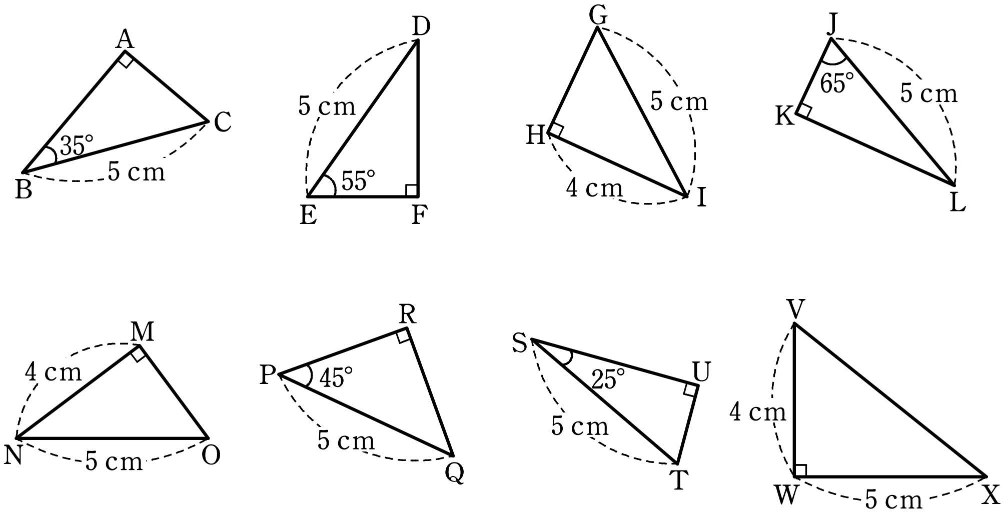


[2]　**斜辺と他の１辺**
がそれぞれ等しい。



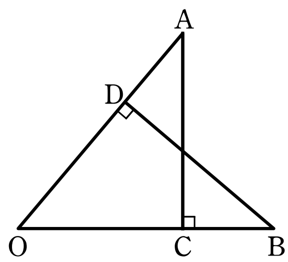
27

次の図において，合同な直角三角形を選び，記号 ≡ を用いて答えなさい。また，そのときに使った合同条件をいいなさい。



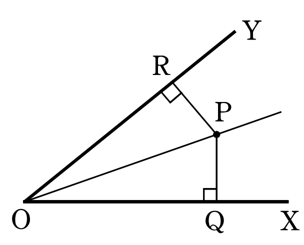
28 ＜例題＞

右の図において，OA＝OB，∠ACO＝90°，∠BDO＝90°である。
このとき，△OAC≡△OBD であることを証明しなさい。



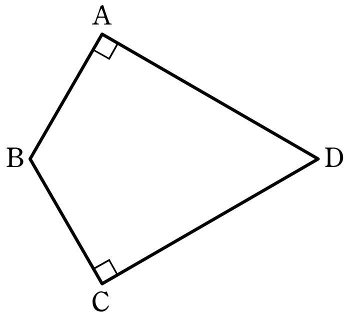
29 ～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

∠XOY の二等分線上の１点を P とし，P から２辺 OX，OY に引いた垂線を，それぞれ PQ，PR とする。
このとき，PQ＝PR であることを証明しなさい。



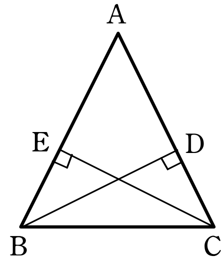
$\boxed{30}$～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

右の図において，$\angle BAD = 90°$，$\angle BCD = 90°$，
$AB = CB$ である。
このとき，$AD = CD$ であることを証明しなさい。



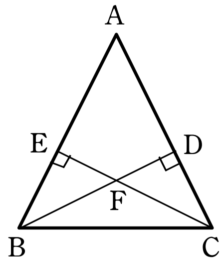
$\boxed{31}$～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

右の図の $\triangle ABC$ において，点 B，C から辺 AC，AB に
それぞれ垂線 BD，CE を引く。
このとき，$BD = CE$ ならば，$\triangle ABC$ は二等辺三角形で
あることを証明しなさい。



$\boxed{32}$～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

$AB = AC$ の二等辺三角形 ABC がある。
頂点 B，C から，それぞれ辺 AC，AB に垂線 BD，
CE を引き，BD と CE の交点を F とする。
このとき，$FD = FE$ であることを証明しなさい。



$\boxed{33}$＜発展＞～添削問題～　※解答用紙に記述してください。

右の図の $\triangle ABC$ は，$\angle A = 90°$ の直角二等辺三角形である。頂点 A を通り，辺 BC に交わる直線 ℓ に，頂点 B，C から垂線を引き，ℓ との交点をそれぞれ D，E とする。
このとき，次のことを証明しなさい。

(1)　$\triangle ABD \equiv \triangle CAE$　　　(2)　$BD - CE = DE$