【定期試験対策講習】

２学期
中間考査
対策教材①

中２甲陽数学

【注意事項】

２学期中間試験範囲は

数学Ｋ：２次関数の決定～２次関数の最後(2 次不等式)まで
数学Ｒ：図形の性質（円）～整数「合同式」

と予想されます。
本日(9/29)は２次関数の決定，図形の性質　の範囲から
重要度の高い問題(これができるかどうかで平均点を取れるかどうかが
決まる問題)を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しを
してください。

STUDY-COLLABO

1

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(1)　$x=3$ で最小値 2 をとり，$x=5$ のとき $y=10$ となる

(2)　3 点 $(-1,\ -6)$，$(1,\ -2)$，$(3,\ 10)$ を通る。

2

放物線 $y=x^2+2ax+b$ が点 $(1,\ 1)$ を通り，頂点が直線 $y=-x-4$ 上にあるとき，定数 a，b の値を求めよ。

3

2 次方程式 $x^2-6x+2m+1=0$ の実数解の個数は，定数 m の値によってどのように変わるか。

4

2 つの 2 次方程式 $x^2-2x+k=0$，$x^2-5x+2k=0$ が共通な解をもつように，定数 k の値を定めよ。また，その共通な解を求めよ。

5

放物線 $y=x^2$ について

(1)　直線 $y=3x-2$ との共有点の座標を求めよ。

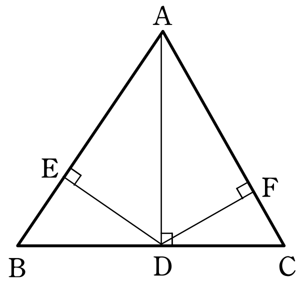
(2)　直線 $y=3x+k$ と共有点をもたないような定数 k の値の範囲を求めよ。

6

右の図の △ABC において，頂点 A から辺 BC へ垂線 AD を引き，点 D から辺 AB，AC へそれぞれ垂線 DE，DF を引く。このとき，次のことを証明せよ。

(1)　四角形 AEDF は円に内接する。

(2)　四角形 BCFE は円に内接する。

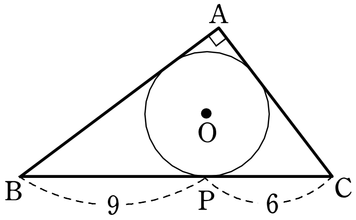


7

右の図において，円 O は，∠A＝90° の直角三角形 ABC の内接円であり，点 P は辺 BC の接点である。

(1)　円 O の半径を r として，辺 AB，AC の長さを r で表せ。

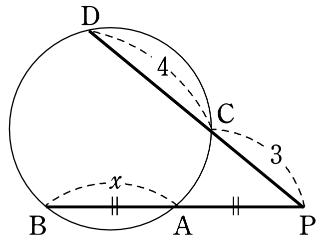
(2)　円 O の半径を求めよ。



8

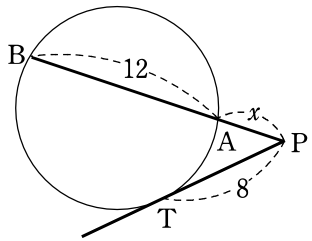
下の図において，x の値を求めよ。

(1)



PA＝AB

(2)



PT は円の接線

9

空間内の異なる３直線 ℓ ，m，n と異なる２平面 α，β について，次の記述は常に正しいか。

(1)　$\ell \parallel \alpha$，$m \parallel \alpha$ ならば，$\ell \parallel m$ である。

(2)　$\ell \perp \alpha$，$\ell \perp \beta$ ならば，$\alpha \parallel \beta$ である。

(3)　$\ell \parallel \alpha$，$m \perp \alpha$ ならば，ℓ と平行で m と垂直な直線がある。

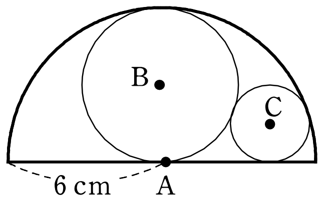
(4)　ℓ と m がねじれの位置にあり，m と n がねじれの位置にあるとき，ℓ と n もねじれの位置にある。

10

交わる２平面 α，β の交線を ℓ とする。α，β 上にない点 O から α，β に垂線を下ろし，その交点をそれぞれ A，B とする。このとき，$\ell \perp$ AB であることを証明せよ。

11

右の図のように，半径 6 cm の半円 A に円 B が内接し，その接点の１つは点 A である。円 C が半円 A に内接し，円 B に外接しているとき，円 C の半径を求めなさい。



1

解答　(1)　$y=2(x-3)^2+2$　$(y=2x^2-12x+20)$　(2)　$y=x^2+2x-5$

(1)　$x=3$ で最小値 2 をとるから，求める 2 次関数は $y=a(x-3)^2+2$ $(a>0)$ と表される。
$x=5$ のとき $y=10$ となるから

$10=a(5-3)^2+2$　ゆえに　$a=2$　これは $a>0$ を満たす。

よって，求める 2 次関数は

$y=2(x-3)^2+2$　(または $y=2x^2-12x+20$)

(2)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。
このグラフが 3 点 $(-1,\ -6)$，$(1,\ -2)$，$(3,\ 10)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=-6 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=-2 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=10 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　$2b=4$　よって　$b=2$

③−② から　$8a+2b=12$　よって　$4a+b=6$　……④

$b=2$ を ④ に代入して　$4a+2=6$　ゆえに　$a=1$

$a=1$，$b=2$ を ② に代入して　$1+2+c=-2$　ゆえに　$c=-5$

よって，求める 2 次関数は　$y=x^2+2x-5$

2

解答　$a=-4$，$b=8$ または $a=1$，$b=-2$

放物線 $y=x^2+2ax+b$ が点 $(1,\ 1)$ を通るから

$1=1+2a+b$　すなわち　$b=-2a$　……①

よって，放物線の方程式は

$y=x^2+2ax-2a=(x+a)^2-a^2-2a$

と変形できるから，頂点は

点 $(-a,\ -a^2-2a)$

頂点が直線 $y=-x-4$ 上にあるとき

$-a^2-2a=-(-a)-4$　よって　$a^2+3a-4=0$

ゆえに　$(a+4)(a-1)=0$　したがって　$a=-4,\ 1$

① から　$a=-4$ のとき　$b=8$，　$a=1$ のとき　$b=-2$

以上から　$a=-4$，$b=8$　または　$a=1$，$b=-2$

3

解答　$m<4$ のとき 2 個，　$m=4$ のとき 1 個，　$m>4$ のとき 0 個

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot(2m+1)=32-8m=8(4-m)$

$m<4$ のとき　$D>0$
　このとき，実数解の個数は　2 個

$m=4$ のとき　$D=0$
　このとき，実数解の個数は　1 個

$m>4$ のとき　$D<0$
　このとき，実数解の個数は　0 個

4

解答　$k=0$ のとき共通な解 0，$k=-3$ のとき共通な解 -1

共通な解を α とすると　$\alpha^2-2\alpha+k=0$　……①

$\alpha^2-5\alpha+2k=0$　……②

① から　$k=-\alpha^2+2\alpha$　……③

これを ② に代入して　$\alpha^2-5\alpha+2(-\alpha^2+2\alpha)=0$

よって　$\alpha^2+\alpha=0$　これを解くと　$\alpha=0,\ -1$

③ から　$\alpha=0$ のとき　$k=0$，　$\alpha=-1$ のとき　$k=-3$

したがって　$k=0$ のとき共通な解 0，$k=-3$ のとき共通な解 -1

別解　①，② は α^2 を消去する方針で解くこともできる。

②−① から　$-3\alpha+k=0$　よって　$k=3\alpha$　……④

これを ① に代入して　$\alpha^2-2\alpha+3\alpha=0$

よって　$\alpha^2+\alpha=0$　これを解くと　$\alpha=0,\ -1$

④ から　$\alpha=0$ のとき　$k=0$，　$\alpha=-1$ のとき　$k=-3$

5

解答　(1)　$(1,\ 1)$，$(2,\ 4)$　(2)　$k<-\dfrac{9}{4}$

$y=x^2$　……①

(1)　$y=3x-2$　……②
放物線 ① と直線 ② の共有点の x 座標は，①，② から y を消去して得られる方程式
$x^2=3x-2$ すなわち $x^2-3x+2=0$ の実数解である。
左辺を因数分解すると　$(x-1)(x-2)=0$　ゆえに　$x=1,\ 2$
② から　$x=1$ のとき　$y=1$，　$x=2$ のとき　$y=4$
よって，共有点の座標は　$(1,\ 1)$，$(2,\ 4)$

(2)　$y=3x+k$　……③
①，③ から y を消去すると　$x^2=3x+k$
よって　$x^2-3x-k=0$
この 2 次方程式の判別式を D とすると，放物線 ① と直線 ③ が共有点をもたないための必要十分条件は

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-k)<0$　すなわち　$9+4k<0$

これを解いて　$k<-\dfrac{9}{4}$

6

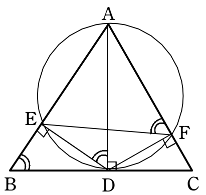
解答　(1)　略　(2)　略

(1)　$\angle\mathrm{AED}=90^\circ$，$\angle\mathrm{DFA}=90^\circ$ であるから

$\angle\mathrm{AED}+\angle\mathrm{DFA}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

よって，四角形 AEDF は円に内接する。

(2)　(1) から，右のような円がかける。



円周角の定理により

$\angle\mathrm{AFE}=\angle\mathrm{ADE}$　……①

△ABD において

$\angle\mathrm{ABD}=180^\circ-(90^\circ+\angle\mathrm{BAD})=90^\circ-\angle\mathrm{BAD}$

△ADE において

$\angle\mathrm{ADE}=180^\circ-(90^\circ+\angle\mathrm{EAD})=90^\circ-\angle\mathrm{BAD}$

よって　$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ADE}$　……②

①，② から　$\angle\mathrm{AFE}=\angle\mathrm{ABD}$

したがって，四角形 BCFE は円に内接する。

7

解答　(1)　$\mathrm{AB}=r+9$，$\mathrm{AC}=r+6$　(2)　3

(1)　AB，AC と円との接点を Q，R とすると　$\mathrm{AQ}=\mathrm{AR}=r$
$\mathrm{BQ}=9$，$\mathrm{CR}=6$ であるから　$\mathrm{AB}=r+9$，$\mathrm{AC}=r+6$

(2)　$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ により，三平方の定理から

$(r+9)^2+(r+6)^2=(9+6)^2$

$2r^2+30r-108=0$

$r^2+15r-54=0$

$(r+18)(r-3)=0$

$r>0$ により　$r=3$

8

解答　(1)　$x=\dfrac{\sqrt{42}}{2}$　(2)　$x=4$

(1)　方べきの定理から　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$　すなわち　$x\cdot2x=3\cdot(3+4)$

よって　$x^2=\dfrac{21}{2}$　$x>0$ であるから　$x=\sqrt{\dfrac{21}{2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{2}$

(2)　方べきの定理から　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$　すなわち　$x(x+12)=8^2$

よって　$x^2+12x-64=0$　ゆえに　$(x+16)(x-4)=0$

$x>0$ であるから　$x=4$

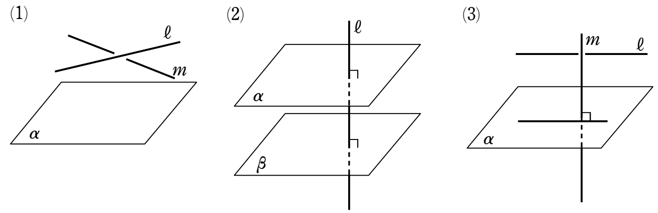
9

解答　(1)　正しくない　(2)　正しい　(3)　正しい　(4)　正しくない

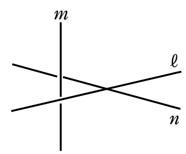
(1)　$\ell\,/\!/\,\alpha$，$m\,/\!/\,\alpha$ であっても，ℓ と m がねじれの位置にあることがある。
よって，正しくない。

(2)　正しい

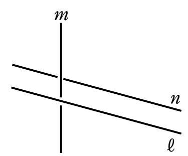
(3)　正しい



(4)　ℓ と m がねじれの位置にあり，m と n がねじれの位置にあっても，ℓ と n が 1 点で交わることがある。
よって，正しくない。

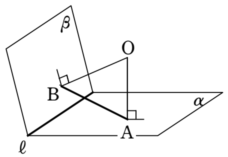


別解　ℓ と n が平行になる例をあげてもよい。



10

解答　略



OA⊥α であり，ℓ は α 上にあるから

　　OA⊥ℓ　……①

OB⊥β であり，ℓ は β 上にあるから

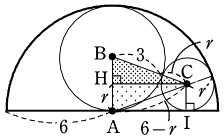
　　OB⊥ℓ　……②

①，② から，ℓ は平面 OAB に垂直である。

よって，ℓ ⊥AB が成り立つ。

11

解答　$\frac{3}{2}$ cm



円 B の半径は 3 cm である。

点 C から線分 AB に垂線 CH を引く。

円 C の半径を r cm とすると円 B，C は外接しているから

　　$BC=3+r$

円 C は半円 A に内接しているから　$AC=6-r$

また，点 C から半円 A の半径に垂線 CI を引くと

　　$BH=AB-HA=3-CI=3-r$

直角三角形 BHC において，三平方の定理により

　　$CH^2=(3+r)^2-(3-r)^2=12r$

よって，直角三角形 HAC において，三平方の定理により　$r^2+12r=(6-r)^2$

よって　$24r=36$

したがって　$r=\frac{3}{2}$　　答　$\frac{3}{2}$ cm