【定期試験対策講習】

２学期
中間考査
対策教材①

中２六甲数学

【注意事項】

２学期中間試験範囲は

数学１：２次方程式の応用～関数 $y=ax^2$
数学２：円と諸定理

と予想されます。
本日(9/29)は２次方程式の応用，関数 $y=ax^2$ の値域，円周角の定理の範囲から重要度の高い問題を集めています。

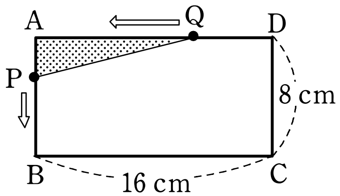
間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

中２六甲数学　２学期中間試験対策講習①

1

右の図のように，縦が 8 cm，横が 16 cm の長方形 ABCD がある。点 P は点 A を出発して，辺 AB 上を毎秒 1 cm の速さで図の矢印の向きに，点 B まで動く。また，点 Q は点 P と同時に点 D を出発して，辺 DA 上を毎秒 2 cm の速さで図の矢印の向きに，点 A まで動く。次の問いに答えなさい。



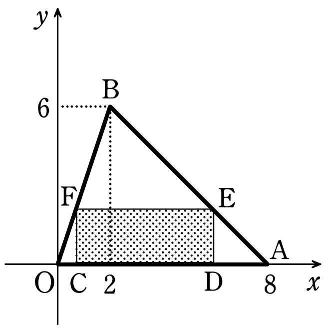
(1)　点 P が点 A を出発してから x 秒後の AQ の長さを求めなさい。

(2)　△APQ の面積が 8 cm^2 になるのは，点 P が点 A を出発してから何秒後であるか求めなさい。

2

右の図のように，3 点 O (0，0)，A (8，0)，B (2，6) をとる。長方形 CDEF は △OAB に内接している。また，2 点 C，D は辺 OA 上に，2 点 E，F は，それぞれ辺 AB，OB 上にある。

点 C の x 座標を a とするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　2 点 A，B を通る直線の式を求めなさい。

(2)　点 E の座標を，a を用いて表しなさい。

(3)　長方形 CDEF の面積が 6 となるような a の値を求めなさい。

3

濃度 x % の食塩水 200 g を入れた容器から x g の食塩水をくみ出し，この容器に同量の水を加えた。さらにこの容器に，濃度 15 % の食塩水 $2x$ g を加えてよくかき混ぜたら，濃度 17.5 % の食塩水になった。このとき，x の値を求めなさい。

4

y は x^2 に比例する関数で，$x=-2$ のとき $y=-6$ となる。

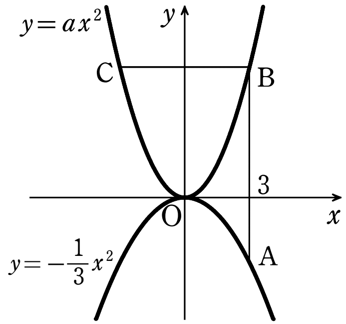
(1)　y を x の式で表しなさい。

(2)　$x=4$ のときの y の値を求めなさい。

(3)　$y=-12$ となる x の値を求めなさい。

5

右の図のように，関数 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ のグラフ上に点 A があり，関数 $y=ax^2\,(a>0)$ のグラフ上に 2 点 B，C がある。A と B の x 座標はどちらも 3 で，B と C の y 座標は等しくなっている。



(1)　点 A の y 座標を求めなさい。

(2)　AB：BC＝3：2 のとき，関数 $y=ax^2$ の a の値を求めなさい。

6

次の関数の値域を求めなさい。

(1)　$y=2x^2\ (-1\leqq x\leqq 2)$　　　(2)　$y=-\dfrac{2}{3}x^2\ (1\leqq x\leqq 3)$

7

(1)　関数 $y=-4x^2$ について，定義域が $a\leqq x\leqq 2$ のとき，値域が $-36\leqq y\leqq b$ となる。定数 a，b の値を求めなさい。

(2)　関数 $y=ax^2$ について，定義域が $-3\leqq x\leqq 8$ のとき，値域が $b\leqq y\leqq 48$ となる。定数 a，b の値を求めなさい。

8

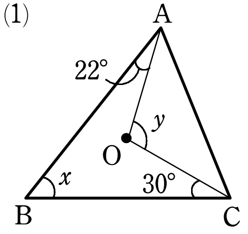
(1)　定義域が $-4\leqq x\leqq 2$ である 2 つの関数 $y=3x^2$，$y=ax+b$ $(a<0)$ の値域が一致するような定数 a，b の値を求めなさい。

(2)　定義域が $-\dfrac{4}{3}\leqq x\leqq 4$ である 2 つの関数 $y=ax^2$ $(a>0)$，$y=6x+b$ の値域が一致するような定数 a，b の値を求めなさい。

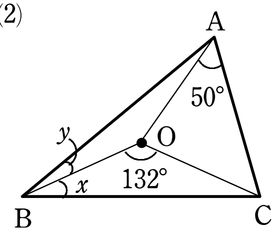
9

右の図において，点 O は △ABC の外心である。
$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい。

(1)



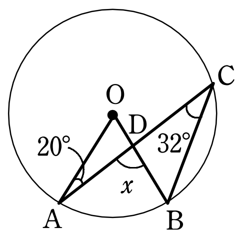
(2)



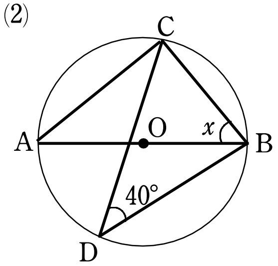
10

右の図において，$\angle x$ の大きさを求めなさい。
O は円の中心である。

(1)

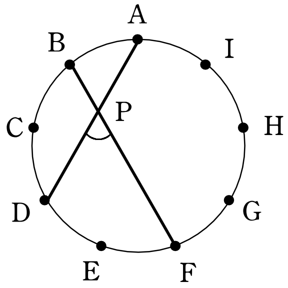


(2)



11

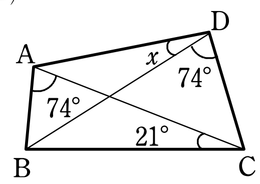
右の図において，A，B，……，I は円周を 9 等分する点である。弦 AD，BF の交点を P とするとき，$\angle$DPF の大きさを求めなさい。



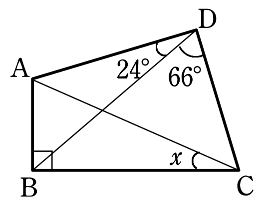
12

右の図において，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)



(2)

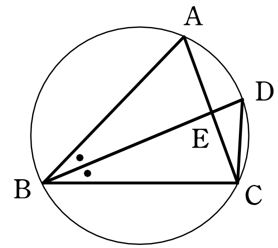


13

右の図において，$\angle$ABD＝$\angle$CBD である。

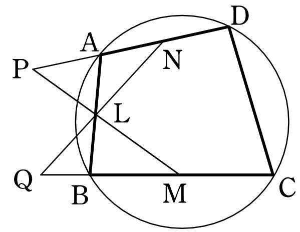
(1)　△ABE∽△DBC であることを証明しなさい。

(2)　AB＝17 cm，BC＝16 cm，BD＝18 cm のとき，線分 BE の長さを求めなさい。



14

右の図で，L，M，N はそれぞれ四角形 ABCD の辺 AB，BC，AD の中点である。
このとき，4 点 M，N，P，Q は 1 つの円周上にあることを証明しなさい。



中２六甲数学　２学期中間試験対策講習①【解答＆解説】

1

解答　(1)　$(16-2x)$ cm　　(2)　$(4+2\sqrt{2})$ 秒後，$(4-2\sqrt{2})$ 秒後

解説

(1)　$AQ=AD-QD=16-2x$　　　答　$(16-2x)$ cm

(2)　点 P が点 A を出発してから x 秒後に △APQ の面積が 8 cm^2 になるとする。

$AP=x$(cm)，$AQ=16-2x$(cm)　であるから

$$\frac{1}{2}\times x\times(16-2x)=8$$

$$x^2-8x+8=0$$

これを解いて　$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\times8}}{1}=4\pm2\sqrt{2}$

これらは，ともに問題に適している。

答　$(4+2\sqrt{2})$ 秒後，$(4-2\sqrt{2})$ 秒後

2

解答　(1)　$y=-x+8$　　(2)　$(8-3a,\ 3a)$　　(3)　$a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

解説

(1)　2 点 A，B を通る直線の式を　$y=mx+n$　とおく。

2 点 A，B の座標は，それぞれ $(8,\ 0)$，$(2,\ 6)$ であるから

$$0=8m+n,\quad 6=2m+n$$

よって　　$m=-1,\quad n=8$

したがって，求める直線の式は　　$y=-x+8$

(2)　直線 OB を表す式は　$y=3x$　である。

点 F の x 座標は a であるから，F の y 座標は　$3a$

よって，点 E の y 座標は $3a$ となる。

E の x 座標は　$3a=-x+8$　を解いて　　$x=8-3a$

したがって，E の座標は　　$(8-3a,\ 3a)$

(3)　CD の長さは　(D の x 座標)$-$(C の x 座標)　となる。

また，(D の x 座標)$=$(E の x 座標)　であるから

$CD=(8-3a)-a=8-4a$

CF の長さは，F の y 座標であるから　$3a$

よって，長方形 CDEF の面積は　$3a(8-4a)$

したがって　　$3a(8-4a)=6$

$$2a^2-4a+1=0$$

これを解いて　　$a=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\times1}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

これらは，ともに問題に適している。　　　答　$a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

3

解答　$x=20$

解説

はじめの操作を行ったあと，食塩水 200 g に含まれる食塩の量は

$$(200-x)\times\frac{x}{100}=2x-\frac{x^2}{100}\ \text{(g)}$$

この容器に濃度 15%の食塩水 $2x$ g を加えると，食塩水は $(200+2x)$ g となり，その中に含まれる食塩の量は

$$\left(2x-\frac{x^2}{100}\right)+2x\times\frac{15}{100}=\frac{23}{10}x-\frac{x^2}{100}\ \text{(g)}$$

この食塩水が濃度 17.5 % になるから

$$(200+2x)\times\frac{17.5}{100}=\frac{23}{10}x-\frac{x^2}{100}$$

$$3500+35x=230x-x^2$$

$$x^2-195x+3500=0$$

$$(x-20)(x-175)=0$$

よって　　$x=20,\ 175$

$0<x<100$ であるから　$x=20$

$x=175$ は，この問題には適さない。

答　$x=20$

4

解答　(1)　$y=-\frac{3}{2}x^2$　　(2)　$y=-24$　　(3)　$x=\pm2\sqrt{2}$

解説

(1)　y は x^2 に比例する関数であるから，$y=ax^2$ とおくことができる。

$x=-2$，$y=-6$ を代入すると　$-6=a\times(-2)^2$

よって　　$a=-\frac{3}{2}$

したがって　$y=-\frac{3}{2}x^2$　答

(2)　$x=4$ のとき　$y=-\frac{3}{2}\times4^2=-24$　答

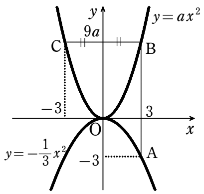
(3)　$-12=-\frac{3}{2}x^2$ より　$x^2=8$

よって　　$x=\pm2\sqrt{2}$　答

5

解答　(1)　$y=-3$　　(2)　$a=\frac{2}{3}$

解説



(1)　点 A の x 座標は 3 であるから，y 座標は

$$y=-\frac{1}{3}\times3^2=-3$$

(2)　点 B の x 座標は 3 であるから，y 座標は

$$y=a\times3^2=9a$$

よって　　$AB=9a-(-3)=9a+3$

また，B と C は y 軸について対称であるから，点 C の x 座標は -3 である。

よって　　$BC=3-(-3)=6$

$AB:BC=3:2$ のとき　　$(9a+3):6=3:2$

したがって　　$2(9a+3)=18$

これを解いて　　$a=\frac{2}{3}$

6

解答　(1)　$0\leqq y\leqq8$　　(2)　$-6\leqq y\leqq-\frac{2}{3}$

解説

(1)　$x=-1$ のとき $y=2$，$x=2$ のとき $y=8$

$y=2x^2\ (-1\leqq x\leqq2)$ のグラフは，図 (1) のようになる。

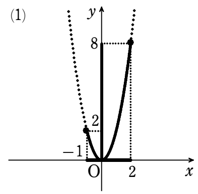
よって，求める値域は　　$0\leqq y\leqq8$　答

(2)　$x=1$ のとき $y=-\frac{2}{3}$，$x=3$ のとき $y=-6$

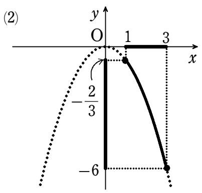
$y=-\frac{2}{3}x^2\ (1\leqq x\leqq3)$ のグラフは，図 (2) のようになる。

よって，求める値域は　　$-6\leqq y\leqq-\frac{2}{3}$　答

(1)



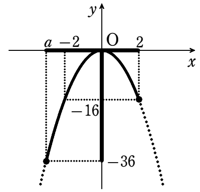
(2)



7

解答　(1)　$a=-3,\ b=0$　　(2)　$a=\frac{3}{4},\ b=0$

解説



(1)　$y=-4x^2$ について

$x=a$ のとき　$y=-4a^2$

$x=2$ のとき　$y=-16$

$-16\neq-36$ であるから，$a<-2$ で $x=a$ のとき $y=-36$ となる。

よって　　$-4a^2=-36$

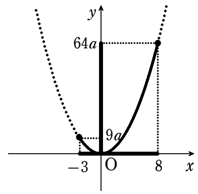
したがって　　$a^2=9$

$a<-2$ であるから　$a=-3$

また，グラフから　$b=0$

答　$a=-3,\ b=0$

(2)　関数 $y=ax^2$ の値域は，$a>0$ のとき 0 以上，$a<0$ のとき 0 以下となり，正と負にまたがることはない。



この関数の値域は $b\leqq y\leqq48$ であるから　$a>0$

$y=ax^2$ について

$x=-3$ のとき　$y=9a$

$x=8$　のとき　$y=64a$

グラフから，値域は　$0\leqq y\leqq64a$

これが $b\leqq y\leqq48$ と等しいから

$0=b,\ 64a=48$

よって　　$a=\frac{3}{4},\ b=0$

8

解答　(1)　$a=-8,\ b=16$　　(2)　$a=2,\ b=8$

解説

(1)　$y=3x^2$ について　　$x=-4$ のとき　$y=48$

$x=2$　のとき　$y=12$

グラフから，$y=3x^2\ (-4\leqq x\leqq 2)$ の値域は　　$0\leqq y\leqq 48$

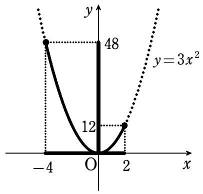
$a<0$ であるから，$y=ax+b$ のグラフは右下がりの直線で

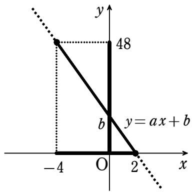
$x=-4$ のとき　$y=-4a+b$

$x=2$　のとき　$y=2a+b$

よって，条件から　　$-4a+b=48,\ 2a+b=0$

これを解いて　　$a=-8,\ b=16$





(2)　$y=6x+b$ のグラフは右上がりの直線で

$x=-\frac{4}{3}$ のとき　$y=-8+b$

$x=4$　のとき　$y=24+b$

よって，$y=6x+b\ \left(-\frac{4}{3}\leqq x\leqq 4\right)$ の値域は　　$-8+b\leqq y\leqq 24+b$

$y=ax^2$ について

$x=-\frac{4}{3}$ のとき　$y=\frac{16}{9}a$

$x=4$　のとき　$y=16a$

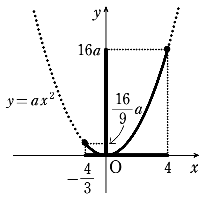
$a>0$ であるから，$y=ax^2\ \left(-\frac{4}{3}\leqq x\leqq 4\right)$ の

値域は　　$0\leqq y\leqq 16a$

よって，条件から

$-8+b=0,\ 24+b=16a$

これを解いて　　$a=2,\ b=8$



9

解答　(1)　$\angle x=52°,\ \angle y=104°$　　(2)　$\angle x=24°,\ \angle y=16°$

解説

(1)　2点O，Bを結ぶ。

△OABにおいて，OA＝OBであるから

$\angle OBA=\angle OAB=22°$

△OBCにおいて，OB＝OCであるから

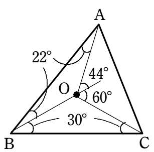
$\angle OBC=\angle OCB=30°$

よって　　$\angle x=\angle OBA+\angle OBC=22°+30°=52°$

また，△OAB，△OBCの内角と外角の関係により

$\angle y=(\angle OAB+\angle OBA)+(\angle OCB+\angle OBC)$

$=(22°+22°)+(30°+30°)=104°$



(2)　△OBCにおいて，OB＝OCであるから

$\angle OCB=\angle OBC=\angle x$

よって　　$2\angle x=180°-\angle BOC$

$=180°-132°=48°$

したがって　　$\angle x=24°$

△OACにおいて，OA＝OCであるから

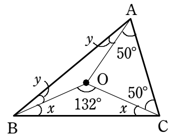
$\angle OCA=\angle OAC=50°$

△ABCにおいて

$2\angle y=180°-(\angle OBC+\angle BCA+\angle OAC)$

$=180°-(24°+24°+50°+50°)=32°$

したがって　　$\angle y=16°$



10

解答　(1)　$\angle x=84°$　　(2)　$\angle x=50°$

解説

(1)　∠AOBは $\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角であるから

$\angle AOB=2\angle ACB=2\times 32°=64°$

△OADの内角と外角の関係から

$\angle x=\angle DOA+\angle DAO=64°+20°=84°$　答

(2)　∠ACBは半円の弧に対する円周角であるから　　$\angle ACB=90°$

∠CABは $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角であるから

$\angle CAB=\angle CDB=40°$

△ABCにおいて

$\angle x=180°-(\angle ACB+\angle CAB)=180°-(90°+40°)=50°$　答

11

解答　60°

解説

2点A，Fを結ぶ。∠AFBは $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であるから

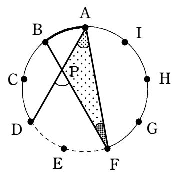
$\angle AFB=180°\times\frac{1}{9}=20°$

∠DAFは $\overset{\frown}{DF}$ に対する円周角であるから

$\angle DAF=180°\times\frac{2}{9}=40°$

△PAFの内角と外角の関係により

$\angle DPF=20°+40°=60°$　答



12

解答　(1)　$\angle x=21°$　　(2)　$\angle x=24°$

解説

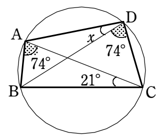
(1)　2点A，Dは直線BCの同じ側にあり，

$\angle BAC=\angle BDC$ であるから，円周角の定理の逆により，

4点A，B，C，Dは1つの円周上にある。

その円において，∠xは $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であるから

$\angle x=\angle ACB=21°$　答



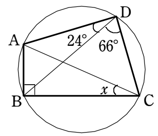
(2)　∠ABCは直角であるから，3点A，B，CはACを直径とする円周上にある。

また，$\angle ADC=24°+66°=90°$ であるから，3点A，D，CはACを直径とする円周上にある。

よって，4点A，B，C，DはACを直径とする円周上にある。

その円において，∠xは $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であるから

$\angle x=\angle ADB=24°$　答



13

解答　(1)　略　　(2)　$\frac{136}{9}$ cm

解説

(1)　証明　△ABEと△DBCにおいて

仮定から　　$\angle ABE=\angle DBC$

$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角より

$\angle BAC=\angle BDC$

すなわち　　$\angle BAE=\angle BDC$

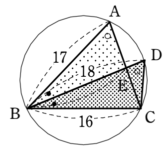
よって，2組の角がそれぞれ等しいから

△ABE∽△DBC　答

(2)　△ABE∽△DBCであるから　　AB：DB＝BE：BC

すなわち　　17：18＝BE：16

これを解いて　　$BE=\frac{136}{9}$ cm



14

解答　略

解説

証明　△ABDにおいて，点L，Nはそれぞれ辺AB，ADの中点であるから，中点連結定理により

LN∥BD

よって　　$\angle ANL=\angle ADB$　……①

また，△BCAにおいて，点M，Lはそれぞれ辺BC，BAの中点であるから，中点連結定理により

ML∥CA

よって　　$\angle BML=\angle BCA$　……②

また，∠ADBと∠BCAは $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であるから

$\angle ADB=\angle BCA$　……③

①，②，③から　　$\angle ANL=\angle BML$

したがって，2点N，Mは直線PQの同じ側にあり，$\angle PNQ=\angle PMQ$ である。

よって，円周角の定理の逆により，4点M，N，P，Qは1つの円周上にある。　終