【定期試験対策講習】

２学期
中間考査
対策教材①

中３六甲数学

【注意事項】

２学期中間試験範囲は

数学１：領域～三角比前半
数学２：整数

と予想されます。
本日(9/29)は領域，三角比の基礎，整数（最大公約数など）の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

中３六甲数学　２学期中間試験対策講習①

1

不等式 $(x-y+1)(x^2+y^2-4)<0$ の表す領域を図示せよ。

2

$x^2+y^2\leqq 1$，$x\geqq 0$ のとき，$-2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

3

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2\leqq x+y\leqq 3$ のとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

4

a がすべての実数値をとって変化するとき，直線

$$y=2ax-a^2+1 \quad \cdots\cdots ①$$

が通りうる点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

5

$\angle \mathrm{C}=90^\circ$ である直角三角形 ABC において，$\angle \mathrm{A}=\theta$，$\mathrm{AB}=k$ とする。頂点 C から辺 AB に下ろした垂線を CD とするとき，次の線分の長さを k，θ を用いて表せ。

(1)　AC　　(2)　CD　　(3)　BD

6

θ は鋭角とする。次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$ のとき　$\cos\theta$，$\tan\theta$　　(2)　$\tan\theta=\sqrt{15}$ のとき　$\sin\theta$，$\cos\theta$

7

次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin^2 25^\circ+\sin^2 65^\circ$　　(2)　$\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\cos 20^\circ\sin 70^\circ$

(3)　$\tan 55^\circ\tan 35^\circ+\tan 10^\circ\tan 80^\circ$

8

$\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるような自然数 n をすべて求めよ。

9

20 の倍数で，正の約数の個数が 15 個である自然数 n をすべて求めよ。

10

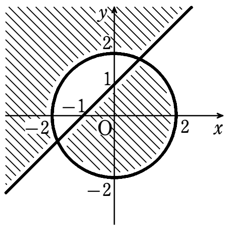
次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　和が 160，最大公約数が 8　　(2)　積が 300，最小公倍数が 60

中３六甲数学　２学期中間試験対策講習①【解答＆解説】

1

解答　[図] 境界線を含まない



解説

$(x-y+1)(x^2+y^2-4)<0$ を連立不等式で表すと

$$\begin{cases} x-y+1>0 \\ x^2+y^2-4<0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x-y+1<0 \\ x^2+y^2-4>0 \end{cases}$$

すなわち

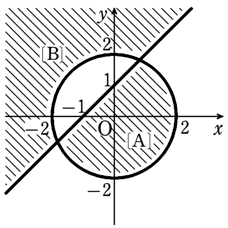
$$\begin{cases} y<x+1 \\ x^2+y^2<2^2 \end{cases} \cdots\cdots[\mathrm{A}] \quad \text{または}$$

$$\begin{cases} y>x+1 \\ x^2+y^2>2^2 \end{cases} \cdots\cdots[\mathrm{B}]$$

求める領域は，[A] の表す領域と [B] の表す領域の和集合である。

よって，求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



2

解答　$x=0$，$y=1$ のとき最大値 1，　$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$y=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$

解説

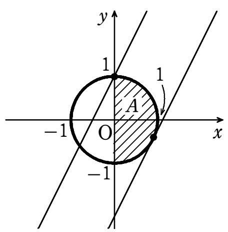
与えられた連立不等式の表す領域 A は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$-2x+y=k$ ……① とおくと，① は傾きが 2，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線 ① が点 $(0,\ 1)$ を通るとき，k の値は最大となる。

このとき　　$k=-2\cdot0+1=1$

また，直線 ① が領域 A 上で円 $x^2+y^2=1$ に接するとき，k の値は最小となる。



① から　　$y=2x+k$　……②

これを $x^2+y^2=1$ に代入して　　$x^2+(2x+k)^2=1$

よって　　$5x^2+4kx+k^2-1=0$　……③

この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-1)=-k^2+5$

直線 ① と円が接するとき，$D=0$ であるから　　$-k^2+5=0$

ゆえに　　$k=\pm\sqrt{5}$　　　　接点が領域 A 上にあるとき　　$k=-\sqrt{5}$

このとき，③ から　　$x=-\dfrac{2k}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

② から　　$y=2\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+k=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

よって　　$x=0$，$y=1$ のとき最大値 1，　$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$y=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$

3

解答　$x=3$，$y=0$ または $x=0$，$y=3$ のとき最大値 9，　$x=1$，$y=1$ のとき最小値 2

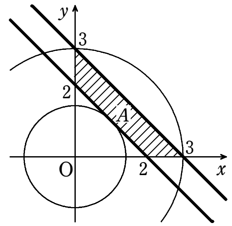
解説

与えられた連立不等式の表す領域 A は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$x^2+y^2=k^2\ (k>0)$ ……① とおくと，① は原点を中心とし，半径 k の円を表す。

図から，円 ① が点 $(3,\ 0)$，$(0,\ 3)$ を通るとき，k^2 の値は最大となる。

このとき　　$k^2=3^2+0^2=9$



また，円 ① が直線 $x+y=2$ ……② に接するとき，k^2 の値は最小となる。

このとき，円 ① の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ② の距離が，円の半径 k に等しいから

$$k=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2} \qquad \text{よって} \quad k^2=2$$

また，接点は，原点から直線 ② に下ろした垂線 $y=x$ と直線 ② の交点である。

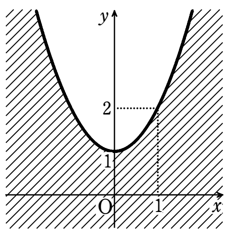
その座標は　$(1,\ 1)$

したがって　　$x=3$，$y=0$ または $x=0$，$y=3$ のとき最大値 9，

$x=1$，$y=1$ のとき最小値 2

4

解答　[図] 境界線を含む



解説

① を a について整理すると　　$a^2-2xa+y-1=0$　……②

直線 ① が点 $(x,\ y)$ を通るための必要十分条件は，② を満たす実数 a が存在することである。

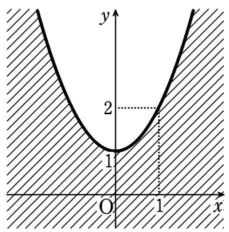
よって，a の 2 次方程式 ② の判別式 D について

$D\geqq0$

ここで　　$\dfrac{D}{4}=(-x)^2-(y-1)=x^2-y+1$

ゆえに　　$x^2-y+1\geqq0$　　　よって　　$y\leqq x^2+1$

したがって，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



5

解答　(1)　$k\cos\theta$　　(2)　$k\sin\theta\cos\theta$

(3)　$k\sin^2\theta$　（$k\sin\theta\cos\theta\tan\theta$ または $k(1-\cos^2\theta)$ でもよい）

解説

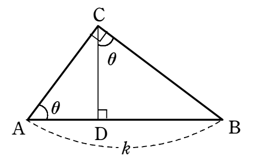
(1)　△ABC において

$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}\cos\theta=k\cos\theta$

(2)　△ADC において

$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\sin\theta=(k\cos\theta)\sin\theta$

$=k\sin\theta\cos\theta$



(3)　(解 1)　△ABC において

$\mathrm{BC}=\mathrm{AB}\sin\theta=k\sin\theta$

また　　$\angle\mathrm{BCD}=90°-\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{CAD}=\theta$

よって，△BCD において

$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\sin\theta=(k\sin\theta)\sin\theta=k\sin^2\theta$

(解 2)　$\angle\mathrm{BCD}=\theta$ から，△BCD において

$\mathrm{BD}=\mathrm{CD}\tan\theta=(k\sin\theta\cos\theta)\tan\theta=k\sin\theta\cos\theta\tan\theta$

(解 3)　△ADC において

$\mathrm{AD}=\mathrm{AC}\cos\theta=(k\cos\theta)\cos\theta=k\cos^2\theta$

よって　　$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}-\mathrm{AD}=k-k\cos^2\theta=k(1-\cos^2\theta)$

注意　$(\sin\theta)^2$，$(\cos\theta)^2$ は，それぞれ $\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$ と書く。

参考　次の項目で学ぶ三角比の相互関係 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を用いると，

(3) で求めた 3 つの解

$k\sin^2\theta$，　$k\sin\theta\cos\theta\tan\theta$，　$k(1-\cos^2\theta)$

はどれも同じ形になる。

6

解答　(1)　$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$，$\tan\theta=\dfrac{5}{12}$　　(2)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

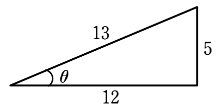
解説

(1)　等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$$

$\cos\theta>0$ であるから　　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{144}{169}}=\dfrac{12}{13}$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{5}{13}\div\dfrac{12}{13}=\dfrac{5}{12}$

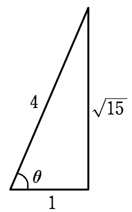


(2)　等式 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+(\sqrt{15})^2=16$

よって　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{16}$

$\cos\theta>0$ であるから　　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{1}{4}$

また　　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\sqrt{15}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$



$\boxed{7}$

解答　(1)　1　　(2)　1　　(3)　2

解説

(1)　(与式)$=\sin^2 25^\circ+\sin^2(90^\circ-25^\circ)=\sin^2 25^\circ+\cos^2 25^\circ=1$

(2)　(与式)$=\sin 20^\circ\cos(90^\circ-20^\circ)+\cos 20^\circ\sin(90^\circ-20^\circ)$

$=\sin 20^\circ\sin 20^\circ+\cos 20^\circ\cos 20^\circ$

$=\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ=1$

(3)　(与式)$=\tan(90^\circ-35^\circ)\tan 35^\circ+\tan 10^\circ\tan(90^\circ-10^\circ)$

$=\dfrac{1}{\tan 35^\circ}\cdot\tan 35^\circ+\tan 10^\circ\cdot\dfrac{1}{\tan 10^\circ}=1+1=2$

$\boxed{8}$

解答　$n=21$，84，189，756

解説

$\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{756}{n}$ がある自然数の2乗になるときである。

756を素因数分解すると　$756=2^2\cdot3^3\cdot7$

$2^2\cdot3^3\cdot7$ を $3\cdot7=21$ で割ると　$2^2\cdot3^2$ すなわち $(2\cdot3)^2$

$3^3\cdot7=189$ で割ると　2^2

$2^2\cdot3\cdot7=84$ で割ると　3^2

756で割ると　1^2

よって，求める自然数 n は　$n=21$，84，189，756

$\boxed{9}$

解答　$n=400$，2500

解説

15を素因数分解すると　$15=3\cdot5$

よって，正の約数の個数が15個である自然数 n を素因数分解すると，

p^{14}，p^2q^4　(p，q は異なる素数)

のどちらかの形で表される。

n は20の倍数であり，$20=2^2\cdot5$ であるから，n は p^2q^4 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は

$n=2^2\cdot5^4$，$5^2\cdot2^4$　すなわち　$n=400$，2500

$\boxed{10}$

解答　(1)　$(a,\ b)=(8,\ 152),\ (24,\ 136),\ (56,\ 104),\ (72,\ 88)$

(2)　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$

解説

(1)　最大公約数が8であるから，a，b は

$a=8a'$，$b=8b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

$a+b=160$ であるから

$8a'+8b'=160$　すなわち　$a'+b'=20$

$a'+b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 19),\ (3,\ 17),\ (7,\ 13),\ (9,\ 11)$

よって　$(a,\ b)=(8,\ 152),\ (24,\ 136),\ (56,\ 104),\ (72,\ 88)$

(2)　最大公約数を g とすると，a，b は

$a=ga'$，$b=gb'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積と最大公約数，最小公倍数の積は等しいから

$300=g\cdot60$　　よって　$g=5$

最小公倍数が60であるから

$ga'b'=60$　すなわち　$5a'b'=60$

よって　$a'b'=12$

$a'b'=12$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 12),\ (3,\ 4)$

したがって　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$