$\boxed{1}$

解答　(1)　グラフは [図]，漸近線は

[1]　直線 $x=-3$ と x 軸

[2]　2 直線 $x=2$，$y=-1$

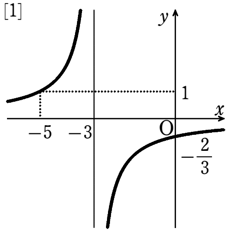
[3]　2 直線 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{3}{2}$

(2)　[1]　$-2\leqq y\leqq -\frac{2}{3}$

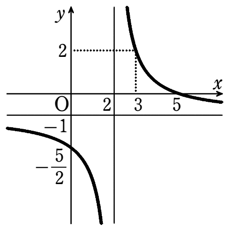
[2]　$-\frac{5}{2}\leqq y\leqq -\frac{7}{4}$

[3]　$\frac{7}{4}\leqq y\leqq \frac{5}{2}$

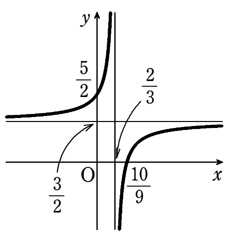
[1]



[2]



[3]

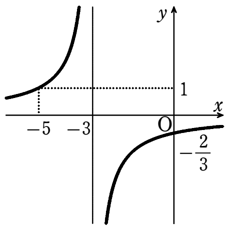


(1)　[1]　グラフは $y=-\frac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したもので 図 [1]。

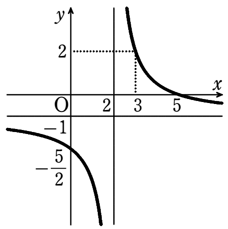
漸近線は 直線 $x=-3$ と x 軸 である。

[2]　グラフは $y=\frac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので 図 [2]。漸近線は 2 直線 $x=2$，$y=-1$ である。

[1]



[2]

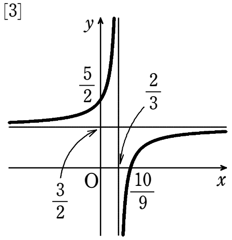


[3]　$\frac{9x-10}{6x-4}=\frac{9x-10}{2(3x-2)}=\frac{3(3x-2)-4}{2(3x-2)}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3x-2}$

よって，$y=-\frac{2}{3x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{2}{3}$，y 軸方向に $\frac{3}{2}$ だけ平行移動したもので 図 [3]。

漸近線は 2 直線 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{3}{2}$ である。

[3]



(2)　[1]　$x=-2$ のとき　$y=-2$

$x=0$ のとき　$y=-\frac{2}{3}$

グラフから，値域は　$-2\leqq y\leqq -\frac{2}{3}$

[2]　$x=-2$ のとき　$y=-\frac{7}{4}$　　$x=0$ のとき　$y=-\frac{5}{2}$

グラフから，値域は　$-\frac{5}{2}\leqq y\leqq -\frac{7}{4}$

[3]　$x=-2$ のとき　$y=\frac{7}{4}$　　$x=0$ のとき　$y=\frac{5}{2}$

グラフから，値域は　$\frac{7}{4}\leqq y\leqq \frac{5}{2}$

$\boxed{2}$

解答　$a=1$，$b=-4$，$c=-3$

漸近線の条件から，求める関数は

$$y=\frac{k}{x-3}+1\quad (k\neq 0)$$

と表される。このグラフが点 (2, 2) を通ることから

$$2=\frac{k}{2-3}+1\qquad ゆえに\quad k=-1$$

よって　$y=\frac{-1}{x-3}+1=\frac{x-4}{x-3}$

これと　$y=\frac{ax+b}{x+c}$ を比較して　$a=1$，$b=-4$，$c=-3$

別解　$\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=a+\frac{-ac+b}{x+c}=\frac{b-ac}{x+c}+a$

と変形できるから，漸近線は　2 直線 $x=-c$，$y=a$

よって，条件から　$-c=3$，$a=1$

すなわち　$a=1$，$c=-3$

このとき，与えられた関数は　$y=\frac{x+b}{x-3}$

このグラフが点 (2, 2) を通ることから　$2=\frac{2+b}{2-3}$

ゆえに　$b=-4$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(-2,\ 2)$，$(-5,\ -1)$　　(2)　$-5<x<-3$，$-2<x$

$y=\frac{2}{x+3}$ ……①，$y=x+4$ ……② とする。

(1)　①，② から　$\frac{2}{x+3}=x+4$

両辺に $x+3$ を掛けて　$2=(x+4)(x+3)$

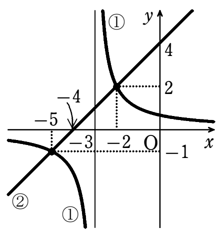
整理して　$x^2+7x+10=0$

ゆえに　$(x+2)(x+5)=0$

よって　$x=-2,\ -5$

② から　$x=-2$ のとき　$y=2$,

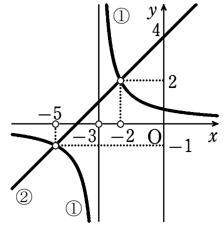
$x=-5$ のとき　$y=-1$



したがって，共有点の座標は　$(-2,\ 2)$，$(-5,\ -1)$

(2)　関数 ① のグラフが直線 ② の下側にあるような x の値の範囲は，右の図から

$-5<x<-3$，$-2<x$

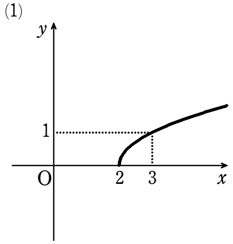


$\boxed{4}$

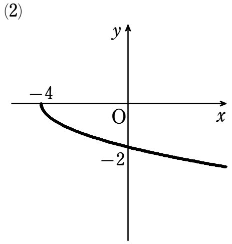
解答　(1)　[図]　定義域 $x\geqq 2$，値域 $y\geqq 0$　　(2)　[図]　定義域 $x\geqq -4$，値域 $y\leqq 0$

(3)　[図]　定義域 $x\leqq \frac{5}{2}$，値域 $y\geqq 0$　　(4)　[図]　定義域 $x\leqq \frac{5}{3}$，値域 $y\leqq 0$

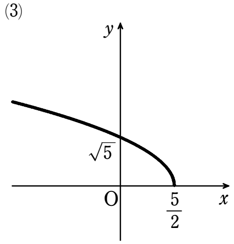
(1)



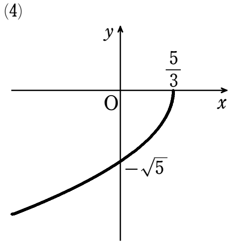
(2)



(3)



(4)



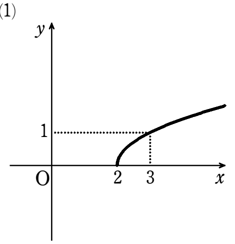
(1)　求めるグラフは，$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，[図] のようになる。

また，この関数の定義域は $x\geqq 2$，値域は $y\geqq 0$

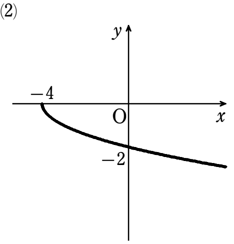
(2)　求めるグラフは，$y=-\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -4 だけ平行移動したもので，[図] のようになる。

また，この関数の定義域は $x\geqq -4$，値域は $y\leqq 0$

(1)



(2)



(3)　$\sqrt{-2x+5}=\sqrt{-2\left(x-\frac{5}{2}\right)}$

よって，求めるグラフは，$y=\sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{5}{2}$ だけ平行移動したもので，[図] のようになる。

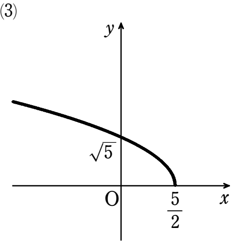
また，この関数の定義域は $x \leqq \frac{5}{2}$，値域は $y \geqq 0$

(4)　$-\sqrt{5-3x}=-\sqrt{-3\left(x-\frac{5}{3}\right)}$

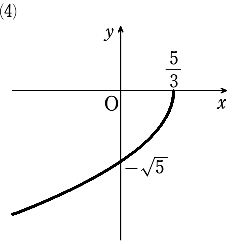
よって，求めるグラフは，$y=-\sqrt{-3x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{5}{3}$ だけ平行移動したもので，[図] のようになる。

また，この関数の定義域は $x \leqq \frac{5}{3}$，値域は $y \leqq 0$

(3)



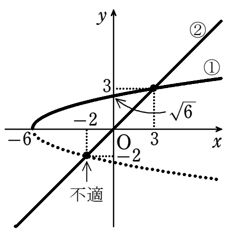
(4)



5

解答　(1)　$x=3$　　(2)　$-6 \leqq x<3$

$y=\sqrt{x+6}$ ……①，$y=x$ ……② のグラフは，右図の実線部分のようになる。



(1)　①，② から

$$\sqrt{x+6}=x \quad \cdots\cdots ③$$

両辺を２乗すると　　$x+6=x^2$

移項して　　$x^2-x-6=0$

ゆえに　　$(x+2)(x-3)=0$

これを解いて　　$x=-2,\ 3$

図から，$x=3$ が ③ の解である。

よって　　$x=3$

(2)　$\sqrt{x+6}>x$ の解は，① のグラフが ② のグラフより上側にある x の値の範囲である。よって，図から求める x の値の範囲は　　$-6 \leqq x<3$

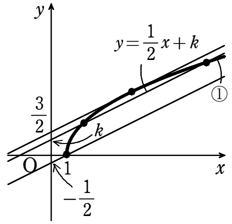
6

解答　$-\frac{1}{2} \leqq k<\frac{3}{2}$ のとき２個；$k<-\frac{1}{2}$，$k=\frac{3}{2}$ のとき１個；

$\frac{3}{2}<k$ のとき０個

$y=2\sqrt{x-1}$ ……①，$y=\frac{1}{2}x+k$ ……②

とすると，① のグラフと直線 ② の共有点の個数が，与えられた方程式の実数解の個数に一致する。



方程式から　　$4\sqrt{x-1}=x+2k$

両辺を平方して　　$16(x-1)=(x+2k)^2$

整理すると　　$x^2+2(2k-8)x+4k^2+16=0$

判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2k-8)^2-(4k^2+16)=-32k+48=-16(2k-3)$$

$D=0$ とすると　　$2k-3=0$　　　ゆえに　　$k=\frac{3}{2}$

このとき，① のグラフと直線 ② は接する。

また，直線 ② が ① のグラフの端の点 $(1,\ 0)$ を通るとき

$$0=\frac{1}{2}+k \quad すなわち \quad k=-\frac{1}{2}$$

したがって，求める実数解の個数は

$-\frac{1}{2} \leqq k<\frac{3}{2}$ のとき　２個；　$k<-\frac{1}{2}$，$k=\frac{3}{2}$ のとき　１個；

$\frac{3}{2}<k$ のとき　０個

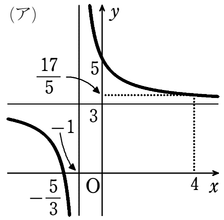
1

解答　(1)（ア）[図]；２直線 $x=-1$，$y=3$　　（イ）[図]；２直線 $x=3$，$y=-2$

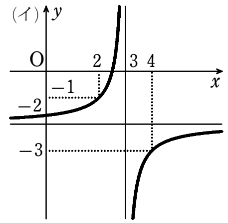
（ウ）[図]；２直線 $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$

(2)（ア）$\frac{17}{5} \leqq y \leqq \frac{11}{3}$　　（イ）$y \leqq -3$，$-1 \leqq y$

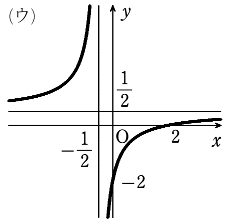
（ア）



（イ）



（ウ）



(1)（ア）$y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+3$

この関数のグラフは $y=\frac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に３だけ平行移動したもので，図 (ア) のようになる。

漸近線は　　２直線 $x=-1$，$y=3$

（イ）$y=\frac{-2x+5}{x-3}=\frac{-2(x-3)-1}{x-3}=-\frac{1}{x-3}-2$

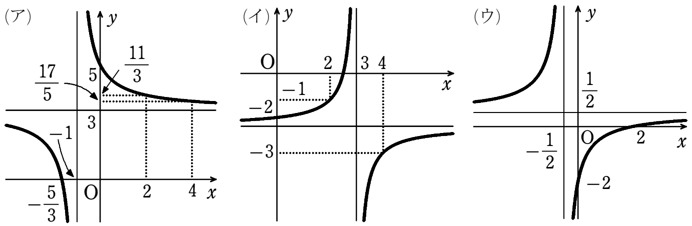
この関数のグラフは $y=-\frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に３，y 軸方向に -2 だけ平行移動したもので，図 (イ) のようになる。

漸近線は　　２直線 $x=3$，$y=-2$

（ウ）$y=\frac{x-2}{2x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)-5}{2x+1}=-\frac{\frac{5}{4}}{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$

この関数のグラフは $y=-\frac{5}{4x}$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{1}{2}$，y 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動したもので，図 (ウ) のようになる。

漸近線は　　２直線 $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$



(2)　（ア）　$x=2$ のとき　$y=\frac{11}{3}$，　$x=4$ のとき　$y=\frac{17}{5}$

(1) の図 (ア) のグラフから，値域は　$\frac{17}{5}\leqq y\leqq\frac{11}{3}$

（イ）　$x=2$ のとき　$y=-1$，　$x=4$ のとき　$y=-3$

(1) の図 (イ) のグラフから，値域は　$y\leqq-3$，$-1\leqq y$

2

解答　$a=2$，$b=-6$，$c=-4$

漸近線の条件から，求める関数は

$$y=\frac{k}{x-2}+1\ (k\neq0)$$

と表される。このグラフが点 (1，2) を通ることから

$2=-k+1$　　よって　$k=-1$

ゆえに　$y=\frac{-1}{x-2}+1=\frac{x-3}{x-2}$

$y=\frac{ax+b}{2x+c}$ と比較するために，$y=\frac{x-3}{x-2}$ の分母と分子を 2 倍すると

$$y=\frac{2x+(-6)}{2x+(-4)}$$

よって　$a=2$，$b=-6$，$c=-4$

別解　$\frac{ax+b}{2x+c}=\frac{b-\frac{ac}{2}}{2x+c}+\frac{a}{2}=\frac{2b-ac}{2(2x+c)}+\frac{a}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2b-ac}{x+\frac{c}{2}}+\frac{a}{2}$

よって，漸近線は　2 直線 $x=-\frac{c}{2}$，$y=\frac{a}{2}$

条件から　$-\frac{c}{2}=2$，$\frac{a}{2}=1$　　ゆえに　$a=2$，$c=-4$

このとき，与えられた関数は　$y=\frac{2x+b}{2x-4}$

このグラフが点 (1，2) を通ることから　$2=\frac{2\cdot1+b}{2\cdot1-4}$

よって　$b=-6$

3

解答　(1)　$x=1\pm\sqrt{2}$

(2)　（ア）　$x<1-\sqrt{2}$，$2<x<1+\sqrt{2}$　　（イ）　$1-\sqrt{2}\leqq x<2$，$1+\sqrt{2}\leqq x$

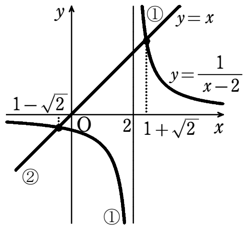
$y=\frac{1}{x-2}$ ……①，$y=x$ ……② とする。

(1)　①，② から　$\frac{1}{x-2}=x$

分母を払うと　$1=x(x-2)$

整理して　$x^2-2x-1=0$

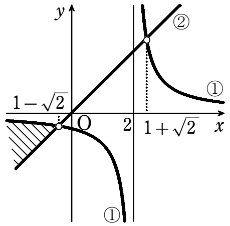
これを解いて　$x=1\pm\sqrt{2}$



(2)　（ア）　$\frac{1}{x-2}>x$ の解は，① のグラフが ② のグラフより上側にある x の値の範囲である。

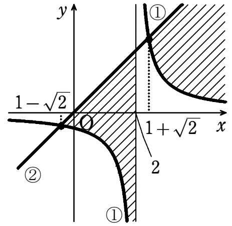
よって，図より求める解は

$$x<1-\sqrt{2},\ 2<x<1+\sqrt{2}$$



（イ）　$\frac{1}{x-2}\leqq x$ の解は，① のグラフが ② のグラフより下側にある，または共有点をもつ x の値の範囲である。よって，図より求める解は

$$1-\sqrt{2}\leqq x<2,\ 1+\sqrt{2}\leqq x$$

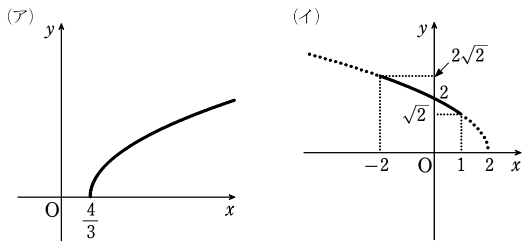


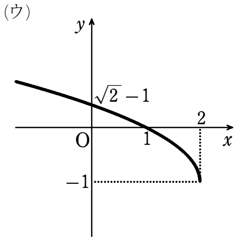
4

解答　(1)　（ア）　[図]；$y\geqq0$　　（イ）　[図] 実線部分；$\sqrt{2}\leqq y\leqq2\sqrt{2}$

（ウ）　[図]；$y\geqq-1$

(2)　$a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{5}{2}$





(1)　（ア）　$y=\sqrt{3x-4}$ から　$y=\sqrt{3\left(x-\frac{4}{3}\right)}$

このグラフは $y=\sqrt{3x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{4}{3}$ だけ平行移動したもので，図 (ア) のようになる。

また，値域は　$y\geqq0$

（イ）　$y=\sqrt{-2x+4}$ から　$y=\sqrt{-2(x-2)}$

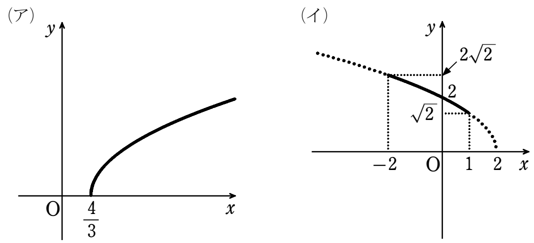
このグラフは $y=\sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，$-2\leqq x\leqq1$ のときのグラフは図 (イ) の実線部分のようになる。

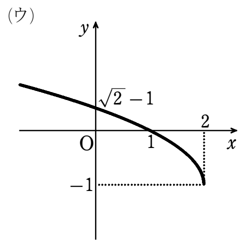
また，値域は　$\sqrt{2}\leqq y\leqq2\sqrt{2}$

（ウ）　$y=\sqrt{2-x}-1$ から　$y=\sqrt{-(x-2)}-1$

このグラフは $y=\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，図 (ウ) のようになる。

また，値域は　$y\geqq-1$





(2)　関数 $y=\sqrt{2x+4}$ $(a\leqq x\leqq b)$ は単調に増加するから，値域は

$$\sqrt{2a+4}\leqq y\leqq\sqrt{2b+4}$$

これが $1\leqq y\leqq3$ であるための条件は　$\sqrt{2a+4}=1$，$\sqrt{2b+4}=3$

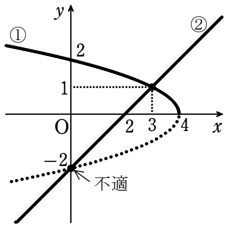
それぞれの両辺を平方して　$2a+4=1$，$2b+4=9$

これを解いて　$a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{5}{2}$

5

解答　(1) $x=3$　(2) $x<3$

$y=\sqrt{4-x}$ ……①，$y=x-2$ ……② のグラフは，右図の実線部分のようになる。



(1) ①，② から　$\sqrt{4-x}=x-2$ ……③

両辺を２乗すると　$4-x=(x-2)^2$

整理して　$x^2-3x=0$

これを解いて　$x=0,\ 3$

図から，$x=3$ が ③ の解である。

よって　$x=3$

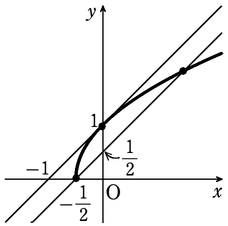
(2) $\sqrt{4-x}>x-2$ の解は，① のグラフが ② のグラフより上側にある x の値の範囲である。

よって，図から求める x の値の範囲は　$x<3$

6

解答　$\frac{1}{2}\leqq k<1$ のとき２個；$k<\frac{1}{2}$，$k=1$ のとき１個；$1<k$ のとき０個

$y=\sqrt{2x+1}$ ……①，$y=x+k$ ……② とすると，① のグラフと直線 ② の共有点の個数が，与えられた方程式の実数解の個数に一致する。



$\sqrt{2x+1}=x+k$ の両辺を平方すると

$2x+1=x^2+2kx+k^2$

整理して　$x^2+2(k-1)x+k^2-1=0$

判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-1\cdot(k^2-1)=-2k+2=-2(k-1)$

$D=0$ とすると　$k-1=0$　　ゆえに　$k=1$

このとき，① のグラフと直線 ② は接する。

また，直線 ② が ① のグラフの端点 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ を通るとき

$0=-\frac{1}{2}+k$　すなわち　$k=\frac{1}{2}$

したがって，求める実数解の個数は

$\frac{1}{2}\leqq k<1$ のとき２個；$k<\frac{1}{2}$，$k=1$ のとき１個；$1<k$ のとき０個

1

解答　(ア) $\frac{3}{2}$　(イ) $\frac{1}{2}$　(ウ) 2　(エ) $x=\frac{1}{2}$，$y=2$

$\frac{4x+1}{2x-1}=\frac{2(2x-1)+3}{2x-1}=\frac{3}{2x-1}+2$ であるから　$y=\frac{3}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+2$

これは直角双曲線 $y=\frac{{}^{ア}\frac{3}{2}}{x}$ を x 軸方向に ${}^{イ}\frac{1}{2}$，y 軸方向に ${}^{ウ}2$ だけ平行移動したものであり，この曲線の漸近線の方程式は ${}^{エ}x=\frac{1}{2}$，$y=2$ である。

2

解答　(1) $a=2$，$b=-2$　(2) $x<-\frac{1}{2}$，$0<x<\frac{5}{2}$

(1) ① は点 $(1,\ 0)$ を通るから　$0=\frac{a+b}{3}$

よって　$b=-a$ ……②

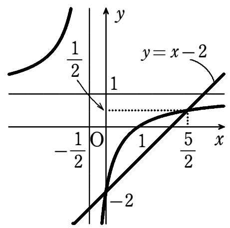
このとき，① は　$y=\frac{ax-a}{2x+1}=\frac{a}{2}-\frac{3a}{2(2x+1)}$

また，① は直線 $y=1$ を漸近線にもつから　$\frac{a}{2}=1$

ゆえに　$a=2$　　② に代入して　$b=-2$

(2) (1) から，① は　$y=\frac{2x-2}{2x+1}=-\frac{3}{2x+1}+1$

グラフは右の図のようになる。



ここで $x-2=\frac{2x-2}{2x+1}$ とおくと

$(2x+1)(x-2)=2x-2$

整理すると　$2x^2-5x=0$

よって　$x(2x-5)=0$

ゆえに　$x=0,\ \frac{5}{2}$

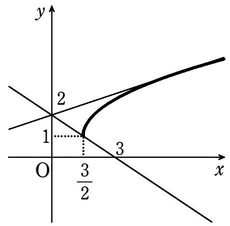
図から，求める不等式の解は　$x<-\frac{1}{2}$，$0<x<\frac{5}{2}$

3

解答　$-\frac{2}{3}\leqq m\leqq\frac{1}{3}$

$y=\sqrt{2x-3}+1$ ……① のグラフは右の図のようになる。

直線 $y=mx+2$ ……② は定点 $(0,\ 2)$ を通り，傾きは m である。



[1] ② が点 $\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$ を通るとき

$1=\frac{3}{2}m+2$

ゆえに　$m=-\frac{2}{3}$

[2] ① と ② が接するとき，図より　$m>0$

①，② から y を消去すると　$\sqrt{2x-3}+1=mx+2$

よって　$\sqrt{2x-3}=mx+1$

両辺を２乗して整理すると　$m^2x^2+2(m-1)x+4=0$

この２次方程式が重解をもつから，判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=(m-1)^2-4m^2=0$

これを解いて　$m=\frac{1}{3}$，-1　　$m>0$ であるから　$m=\frac{1}{3}$

以上から，①，② のグラフが共有点をもつような m の値の範囲は　$-\frac{2}{3}\leqq m\leqq\frac{1}{3}$

4

解答　$a=2$，$b=3$ または $a=-2$，$b=7$

[1] $a>0$ のとき

$y=\sqrt{ax+b}$ は単調に増加するから，条件より

$x=-1$ のとき　$y=1$，　$x=3$ のとき　$y=3$

ゆえに　$\sqrt{-a+b}=1$，$\sqrt{3a+b}=3$

よって　$-a+b=1$，$3a+b=9$

これを解いて　$a=2$，$b=3$　　これは $a>0$ を満たす。

[2] $a=0$ のとき

この関数は $y=\sqrt{b}$ (定数) となり，条件を満たさない。

[3] $a<0$ のとき

$y=\sqrt{ax+b}$ は単調に減少するから，条件より

$x=-1$ のとき　$y=3$，　$x=3$ のとき　$y=1$

ゆえに　$\sqrt{-a+b}=3$，$\sqrt{3a+b}=1$

よって　$-a+b=9$，$3a+b=1$

これを解いて　$a=-2$，$b=7$　　これは $a<0$ を満たす。

[1]〜[3] から　$a=2$，$b=3$ または $a=-2$，$b=7$

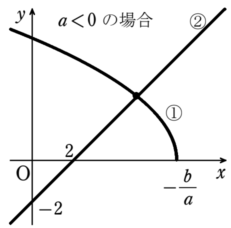
5

解答　9

$y=\sqrt{ax+b}$ ……①，$y=x-2$ ……② とする。

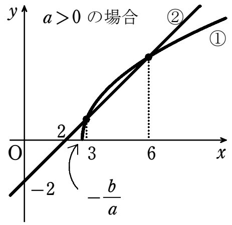
関数 ① のグラフが直線 ② の上側にあるような x の範囲が $3<x<6$ となるような定数 a，b の値を求める。

$a<0$ の場合，関数 ① のグラフと直線 ② の共有点の個数は高々１個であるから，右の図より，関数 ① のグラフが直線 ② の上側にあるような x の範囲が $3<x<6$ になることはない。



よって　$a>0$

このとき，関数 ① のグラフが直線 ② の上側にあるような x の範囲が $3<x<6$ となるための条件は，無理方程式 $\sqrt{ax+b}=x-2$ が $x=3,\ 6$ を解にもつことである。



よって，$\sqrt{3a+b}=1$，$\sqrt{6a+b}=4$ から

$3a+b=1$，$6a+b=16$

これを連立して解くと　$a=5$，$b=-14$

これは $a>0$ を満たす。

したがって　$|a+b|=|5-14|=9$

第１講　レベルB

$\boxed{1}$

解答　$0<a<1$ のとき $y\leqq -\dfrac{1}{a}$，$-a<y$；　$a=1$ のとき $y=-1$；

$a>1$ のとき $y<-a$，$-\dfrac{1}{a}\leqq y$

$$\frac{ax-1}{a-x}=\frac{-a(a-x)+a^2-1}{a-x}=\frac{1-a^2}{x-a}-a$$

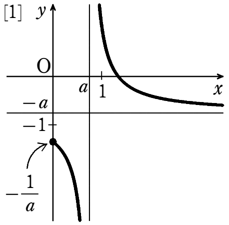
よって　$y=\dfrac{1-a^2}{x-a}-a$

[1]　$0<a<1$ のとき

$1-a^2>0$

y がとりうる値の範囲は，右の図から

$y\leqq -\dfrac{1}{a}$，$-a<y$



[2]　$a=1$ のとき

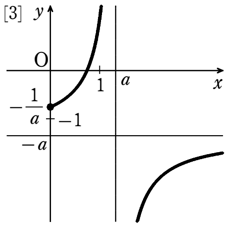
$y=-1$

[3]　$a>1$ のとき

$1-a^2<0$

y がとりうる値の範囲は，右の図から

$y<-a$，$-\dfrac{1}{a}\leqq y$

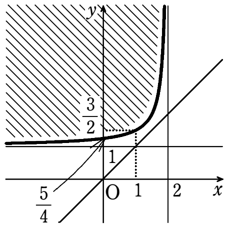


以上をまとめると

$$\begin{cases} 0<a<1 \text{ のとき} & y\leqq -\dfrac{1}{a},\ -a<y \\ a=1 \text{ のとき} & y=-1 \\ a>1 \text{ のとき} & y<-a,\ -\dfrac{1}{a}\leqq y \end{cases}$$

$\boxed{2}$

解答　[図]　境界線を含まない



P$(x,\ y)$ とおく。

BP－AP>2 であるから　$\sqrt{(x-3)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}>2$

よって　$\sqrt{(x-3)^2+y^2}>2+\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

両辺を２乗して整理すると　$y-x>\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$　……①

よって　$y-x>0$　……②

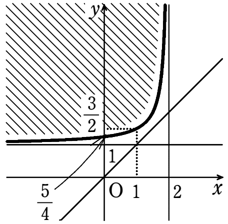
① の両辺を２乗して整理すると　$xy-x-2y<-\dfrac{5}{2}$

よって　$(x-2)(y-1)<-\dfrac{1}{2}$

$x>2$ のとき　$y<\dfrac{-1}{2(x-2)}+1$　……③

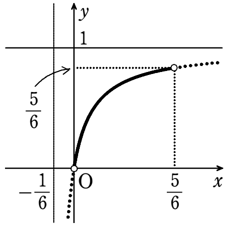
$x<2$ のとき　$y>\dfrac{-1}{2(x-2)}+1$　……④

②，③，④ から，点 P の存在範囲は図の斜線部分である。
ただし，境界線を含まない。



$\boxed{3}$

解答　曲線 $y=\dfrac{6x}{6x+1}$ の $0<x<\dfrac{5}{6}$ の部分，[図]

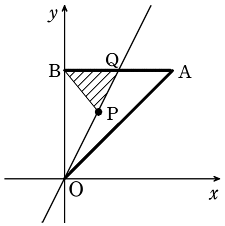


点 P は △OAB の内部にあるから，P$(s,\ t)$ $(s>0,\ t<1,\ t>s)$ とおける。

直線 OP の方程式は　$y=\dfrac{t}{s}x$

点 Q の x 座標は $\dfrac{t}{s}x=1$ を解いて　$x=\dfrac{s}{t}$

よって　Q$\left(\dfrac{s}{t},\ 1\right)$



条件より，$\triangle\mathrm{PQB}=\dfrac{1}{6}\triangle\mathrm{OAB}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{t}(1-t)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$$

よって　$(6s+1)t=6s$

$6s+1\neq0$ であるから　$t=\dfrac{6s}{6s+1}$　（この式から，$s>0$ なら $t<1$ が成り立つ）

また，$t>s$ から　$\dfrac{6s}{6s+1}>s$　　両辺を $s\ (>0)$ で割って　$\dfrac{6}{6s+1}>1$

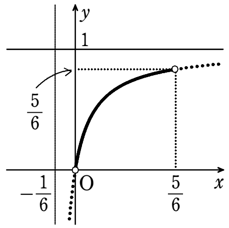
両辺に $6s+1\ (>0)$ を掛けて　$6>6s+1$　　ゆえに　$s<\dfrac{5}{6}$

$s>0$ と合わせて　$0<s<\dfrac{5}{6}$

よって，点 P は，曲線 $y=\dfrac{6x}{6x+1}$ の $0<x<\dfrac{5}{6}$ の部分にある。
逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。
したがって，点 P の軌跡は

曲線 $y=\dfrac{6x}{6x+1}$ の $0<x<\dfrac{5}{6}$ の部分

$\dfrac{6x}{6x+1}=-\dfrac{1}{6x+1}+1$ であり，点 P の軌跡は右の図のようになる。



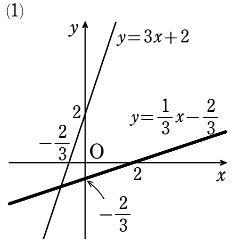
第２講　例題

$\boxed{1}$

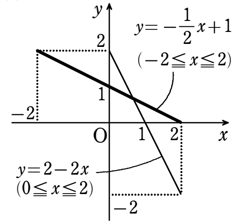
解答　(1)　$y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$，[図]　　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x+1$ $(-2\leqq x\leqq2)$，[図]

(3)　$y=\sqrt{x-1}$，[図]　　(4)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$ $(x\geqq0)$，[図]

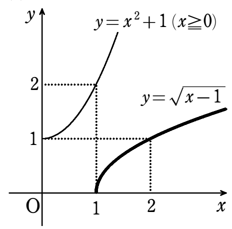
(1)



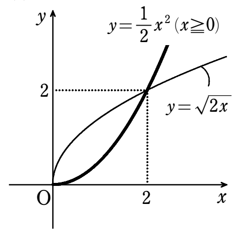
(2)



(3)



(4)



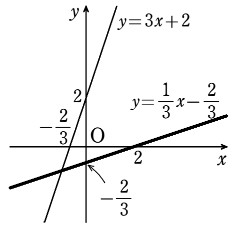
(1)　$y=3x+2$ を x について解くと

$x=\dfrac{1}{3}y-\dfrac{2}{3}$

よって，逆関数は，x と y を入れ替えて

$y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$

グラフは [図]



(2)　この関数の値域は　$-2\leqq y\leqq2$

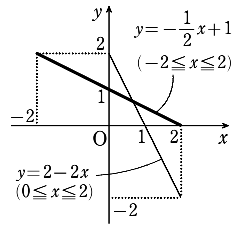
$y=2-2x$ を x について解くと

$x=-\dfrac{1}{2}y+1$　$(-2\leqq y\leqq2)$

よって，逆関数は，x と y を入れ替えて

$y=-\dfrac{1}{2}x+1$　$(-2\leqq x\leqq2)$

グラフは [図]



(3)　この関数の値域は　$y \geqq 1$

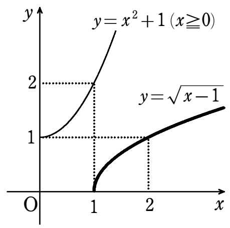
$y=x^2+1$ を x について解くと，$x \geqq 0$ であるから

$x=\sqrt{y-1}$　$(y \geqq 1)$

よって，逆関数は，x と y を入れ替えて

$y=\sqrt{x-1}$

グラフは[図]



(4)　この関数の定義域は　$x \geqq 0$，値域は　$y \geqq 0$

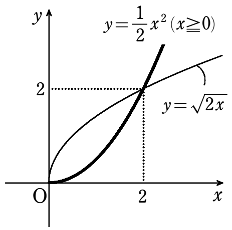
$y=\sqrt{2x}$ を x について解くと

$x=\dfrac{1}{2}y^2$　$(y \geqq 0)$

よって，逆関数は，x と y を入れ替えて

$y=\dfrac{1}{2}x^2$　$(x \geqq 0)$

グラフは[図]



$\boxed{2}$

$\boxed{解答}$　$p=-2$

① の右辺を変形すると　$\dfrac{2x+1}{x+p}=\dfrac{2(x+p)-2p+1}{x+p}=\dfrac{1-2p}{x+p}+2$

$1-2p=0$ すなわち $p=\dfrac{1}{2}$ のとき，① は定数関数となり，逆関数は存在しない。

$p \neq \dfrac{1}{2}$ のとき，① の値域は　$y \neq 2$

① の分母を払って　$y(x+p)=2x+1$

整理して　$(y-2)x=1-py$

$y \neq 2$ であるから　$x=\dfrac{1-py}{y-2}$

よって，① の逆関数は　$y=\dfrac{1-px}{x-2}$　…… ②

① と ② が一致するから，$\dfrac{2x+1}{x+p}=\dfrac{1-px}{x-2}$ は x についての恒等式である。

分母を払って整理すると　$(p+2)x^2+(p^2-4)x-p-2=0$

これが x についての恒等式であるから　$p+2=0$，$p^2-4=0$，$-p-2=0$

これを解いて　$p=-2$

このとき，$p \neq \dfrac{1}{2}$ を満たし，定義域は一致する。

$\boxed{3}$

$\boxed{解答}$　$a=1$，$b=8$

$f(1)=3$ から　$\dfrac{a+b}{1+2}=3$

よって　$a+b=9$　…… ①

$f^{-1}(2)=4$ から　$f(4)=2$　ゆえに　$\dfrac{4a+b}{4+2}=2$

よって　$4a+b=12$　…… ②

①，② を解いて　$a=1$，$b=8$

$\boxed{4}$

$\boxed{解答}$　(1)　$8x+7$　(2)　$8x+7$　(3)　$4\sin x+3$

(1)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=4(2x+1)+3=8x+7$

(2)　$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x+3)=2(4x+3)+1=8x+7$

(3)　$(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(\sin x)=4\sin x+3$

$\boxed{5}$

$\boxed{解答}$　$f(x)=-x-7$

$f(x)=ax+b$ とすると

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+(a+1)b$

よって，$(f\circ f)(x)=x$ から　$a^2x+(a+1)b=x$

これが x についての恒等式であるから

$a^2=1$　…… ①，　$(a+1)b=0$　…… ②

また，$f(-2)=-5$ から　$-2a+b=-5$　…… ③

① から　$a=\pm 1$

[1]　$a=1$ のとき　③ から　$b=-3$

$a=1$，$b=-3$ は ② を満たさないから不適。

[2]　$a=-1$ のとき　③ から　$b=-7$

$a=-1$，$b=-7$ は ② を満たす。

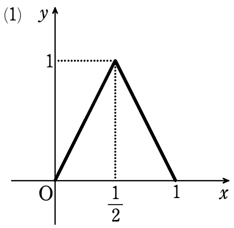
よって　$a=-1$，$b=-7$　したがって　$f(x)=-x-7$

$\boxed{6}$

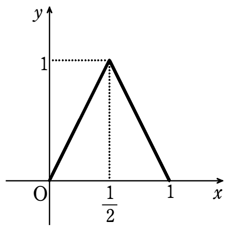
$\boxed{解答}$　(1)　[図]　(2)　$\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{3}{4}$

(3)　$x=\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{8},\dfrac{5}{8},\dfrac{7}{8}$

(1)



(1)



(2)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ の交点の x 座標は　$x=\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}$

よって，不等式 $f(x)>\dfrac{1}{2}$ の解は　$\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{3}{4}$

(3)　$0 \leqq f(x)<\dfrac{1}{2}$ の解は　$0 \leqq x<\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}<x \leqq 1$

$\dfrac{1}{2} \leqq f(x) \leqq 1$ の解は　$\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$　であるから

[1]　$0 \leqq x<\dfrac{1}{4}$ のとき　$g(x)=2f(x)=2\cdot 2x=4x$

[2]　$\dfrac{1}{4} \leqq x<\dfrac{1}{2}$ のとき　$g(x)=2-2f(x)=2-2\cdot 2x=2-4x$

[3]　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき　$g(x)=2-2f(x)=2-2(2-2x)=4x-2$

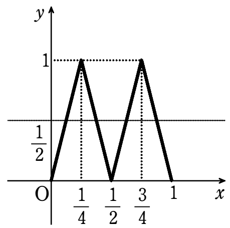
[4]　$\dfrac{3}{4}<x \leqq 1$ のとき　$g(x)=2f(x)=2(2-2x)=-4x+4$

ゆえに，$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる．

よって，$g(x)=\dfrac{1}{2}$ の解は，$y=g(x)$ のグラフと

直線 $y=\dfrac{1}{2}$ の交点の x 座標を求めることにより

$x=\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{8},\dfrac{5}{8},\dfrac{7}{8}$



1

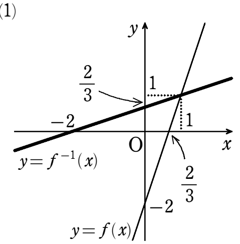
解答　(1)　$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$，[図]　　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ $(-1\leqq x\leqq 3)$，[図]

(3)　$y=-\sqrt{x-1}$ $(x\geqq 1)$，[図]　　(4)　$y=-x^2+2$ $(x\geqq 0)$，[図]

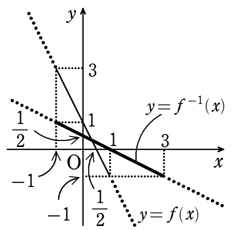
(5)　$y=\log_4 x$ $(x>0)$，[図]　　(6)　$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$，[図]

（グラフはもとの関数を $y=f(x)$，その逆関数を $y=f^{-1}(x)$ とする）

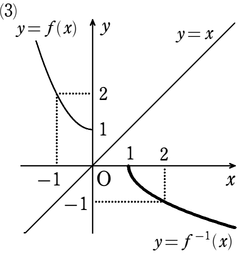
(1)



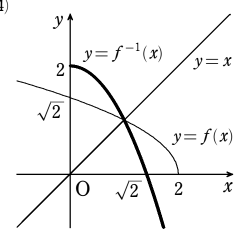
(2)



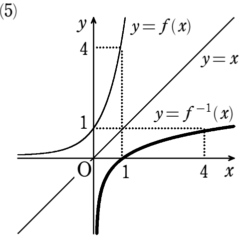
(3)



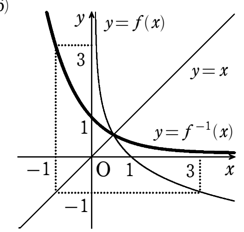
(4)



(5)



(6)



グラフは，もとの関数を $y=f(x)$，その逆関数を $y=f^{-1}(x)$ とする。

(1)　$y=3x-2$ を x について解くと　　$x=\dfrac{1}{3}y+\dfrac{2}{3}$

よって，逆関数は，x と y を入れかえて　　$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

グラフは[図]

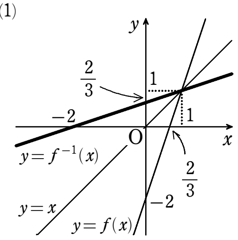
(2)　この関数の値域は　　$-1\leqq y\leqq 3$

$y=-2x+1$ を x について解くと　　$x=-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}$　$(-1\leqq y\leqq 3)$

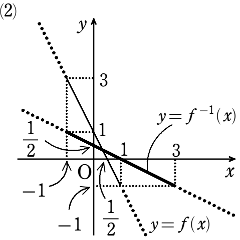
よって，逆関数は，x と y を入れかえて　　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$　$(-1\leqq x\leqq 3)$

グラフは[図]

(1)



(2)



(3)　この関数の値域は　　$y\geqq 1$

$y=x^2+1$ を x について解くと，$x\leqq 0$ であるから　　$x=-\sqrt{y-1}$　$(y\geqq 1)$

よって，逆関数は，x と y を入れかえて　　$y=-\sqrt{x-1}$　$(x\geqq 1)$

グラフは[図]

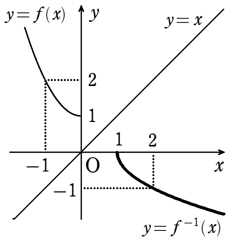
(4)　この関数の値域は　　$y\geqq 0$

$y=\sqrt{2-x}$ を x について解くと　　$x=-y^2+2$　$(y\geqq 0)$

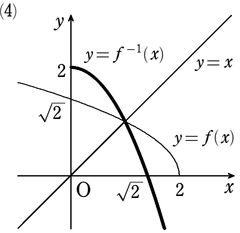
よって，逆関数は，x と y を入れかえて　　$y=-x^2+2$　$(x\geqq 0)$

グラフは[図]

(3)



(4)



(5)　この関数の値域は　　$y>0$

$y=4^x$ を x について解くと　　$x=\log_4 y$　$(y>0)$

よって，逆関数は，x と y を入れかえて　　$y=\log_4 x$　$(x>0)$

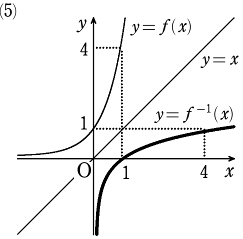
グラフは[図]

(6)　$y=\log_{\frac{1}{3}} x$ から　　$x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^y$

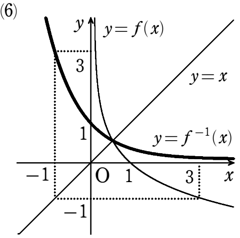
よって，逆関数は，x と y を入れかえて　　$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

グラフは[図]

(5)



(6)



2

解答　(1)　$p=-1$　　(2)　$p=-2$

(1)　$y=px+3$　　$p=0$ のとき逆関数は存在しない。

$p\neq 0$ のとき　$x=\dfrac{y-3}{p}$ となるから，逆関数は　$y=\dfrac{1}{p}x-\dfrac{3}{p}$

これがもとの関数と一致するとき　$p=\dfrac{1}{p}$，$3=-\dfrac{3}{p}$

よって　$p=-1$

(2)　$y=\dfrac{2x-3}{x+p}$ の分母を払って整理すると　　$(y-2)x=-py-3$

$y=2$ すなわち $p=-\dfrac{3}{2}$ のとき，逆関数は存在しない。

$p\neq-\dfrac{3}{2}$ のとき $x=\dfrac{-py-3}{y-2}$ となるから，逆関数は　　$y=\dfrac{-px-3}{x-2}$

これがもとの関数と一致するとき，$\dfrac{2x-3}{x+p}=\dfrac{-px-3}{x-2}$ が x についての恒等式となる。

分母の x の係数が両辺とも 1 で等しいから他の係数も一致する。

よって　$p=-2$，$2=-p$　　ゆえに　$p=-2$

3

解答　$a=3$，$b=-1$

$f(1)=2$ から　　$a+b=2$　……①

$f^{-1}(5)=2$ から　　$f(2)=5$　　　よって　　$2a+b=5$　……②

①，② を解いて　　$a=3$，$b=-1$

4

解答　(1)　$(f\circ g)(x)=-2x^2+5$　　(2)　$(g\circ f)(x)=-4x^2-12x-8$

(3)　$((f\circ g)\circ h)(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}+5$　　(4)　$(f\circ(g\circ h))(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}+5$

(1)　$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(-x^2+1)+3=-2x^2+5$

(2)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-(2x+3)^2+1=-4x^2-12x-8$

(3)　$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=(f\circ g)\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=-2\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2+5=-\dfrac{2}{(x-1)^2}+5$

(4)　$(g\circ h)(x)=g(h(x))=-\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2+1=-\dfrac{1}{(x-1)^2}+1$

よって

$$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))=f\left(-\dfrac{1}{(x-1)^2}+1\right)$$

$$=2\left\{-\dfrac{1}{(x-1)^2}+1\right\}+3=-\dfrac{2}{(x-1)^2}+5$$

5

解答　$a=\dfrac{2}{5}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-5)$

$\quad=a(2x-5)+3=2ax-5a+3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+3)$

$\quad=2(ax+3)-5=2ax+1$

$(f\circ g)(x)$ と $(g\circ f)(x)$ が一致するから

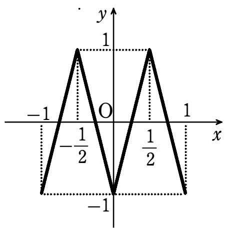
$$2ax-5a+3=2ax+1$$

が x についての恒等式となる。

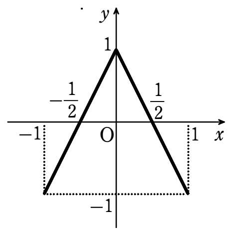
ゆえに　$-5a+3=1$　　よって　$a=\frac{2}{5}$

6

解答　(1) [図]　(2) $a=\pm1,\ \pm\frac{1}{3}$



(1) $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



また，$-1\leqq f(x)\leqq 0$ のとき

$(f\circ f)(x)=2f(x)+1$，

$0\leqq f(x)\leqq 1$ のとき

$(f\circ f)(x)=-2f(x)+1$

したがって，$y=(f\circ f)(x)$ は

$-1\leqq x\leqq -\frac{1}{2}$ のとき

$y=2(2x+1)+1=4x+3$

$-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 0$ のとき

$y=-2(2x+1)+1=-4x-1$

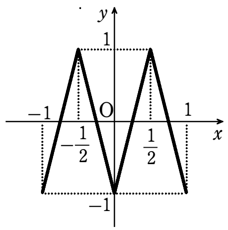
$0\leqq x\leqq \frac{1}{2}$ のとき

$y=-2(-2x+1)+1=4x-1$

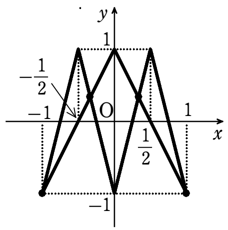
$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき

$y=2(-2x+1)+1=-4x+3$

よって，$y=(f\circ f)(x)$ のグラフは，右の図のようになる。



(2) (1) で求めたグラフと $y=f(x)$ のグラフの共有点の x 座標が，求める a の値である。
両者のグラフを重ね合わせると，右のようになり，共有点は 4 個ある。



$-4x-1=2x+1$ とすると　$x=-\frac{1}{3}$

$4x-1=-2x+1$ とすると　$x=\frac{1}{3}$

よって，4 個の共有点の x 座標は　$x=\pm1,\ \pm\frac{1}{3}$

したがって　$a=\pm1,\ \pm\frac{1}{3}$

1

解答　$f^{-1}(x)=-\frac{x}{x-3}$，$g^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$，$(f\circ g)^{-1}(x)=-\frac{3}{2(x-3)}$

$$\frac{3x}{x+1}=\frac{3(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+3$$

よって，$y=\frac{3x}{x+1}$ の値域は $y\neq3$ である。

$y=\frac{3x}{x+1}$ の両辺に $x+1$ を掛けると　$(x+1)y=3x$　　ゆえに　$(y-3)x=-y$

$y\neq3$ から　$x=-\frac{y}{y-3}$

したがって　$f^{-1}(x)=-\frac{x}{x-3}$

$g(x)=2x-1$ において $y=2x-1$ とすると　$x=\frac{y+1}{2}$

よって　$g^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$

次に　$(f\circ g)^{-1}(x)=(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{x-3}+1\right)=-\frac{3}{2(x-3)}$

2

解答　$h(x)=x^2-2$

$f(x)=x+2$，$g(x)=x^2$ に対して，$(f\circ h)(x)=g(x)$ から　$h(x)+2=x^2$

したがって　$h(x)=x^2-2$

3

解答　$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$y=\sqrt{x+1}$ とその逆関数のグラフは直線 $y=x$ に関して対称であるから，$y=\sqrt{x+1}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めればよい。

$\sqrt{x+1}=x$ ……① とおいて，両辺を 2 乗すると　$x+1=x^2$

よって　$x^2-x-1=0$

これを解いて　$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

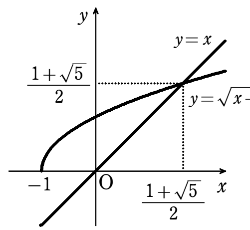
このうち，① を満たすのは　$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

共有点は直線 $y=x$ 上にあるから

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき　$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

したがって，求める共有点の座標は

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$



4

解答　$f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-3}$ $(x\leqq0,\ 5\leqq x)$，値域 $-\frac{2}{3}\leqq y<1,\ 1<y\leqq\frac{7}{2}$

$y=\frac{3x+2}{x-1}$ の両辺に $x-1$ を掛けて　$(x-1)y=3x+2$

よって　$(y-3)x=y+2$

条件 $y\leqq0,\ 5\leqq y$ より $y\neq3$ であるから

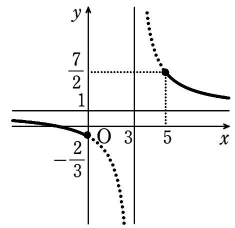
$x=\frac{y+2}{y-3}$

ゆえに　$f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-3}$　$(x\leqq0,\ 5\leqq x)$

ここで　$\frac{x+2}{x-3}=\frac{(x-3)+5}{x-3}=\frac{5}{x-3}+1$

よって，$y=f^{-1}(x)$ のグラフは右の図のようになり，

値域は　$-\frac{2}{3}\leqq y<1,\ 1<y\leqq\frac{7}{2}$



5

解答　順に　$y=4^x+2^{x+1}$，$y=\log_2(\sqrt{x+1}-1)$

$$y=\frac{(2^x)^3+4(2^x)^2+4\cdot2^x}{2^x+2}=\frac{2^x(2^x+2)^2}{2^x+2}=4^x+2^{x+1}$$

よって，$2^x=t$ $(t>0)$ とおくと　$y=t^2+2t$

$t>0$ より，この関数の値域は　$y>0$

整理すると　$t^2+2t-y=0$

これを t について解くと，$t>0$ から　$t=-1+\sqrt{y+1}$

よって　$2^x=\sqrt{y+1}-1$　　ゆえに　$x=\log_2(\sqrt{y+1}-1)$

したがって，逆関数は，x と y を入れ替えて　$y=\log_2(\sqrt{x+1}-1)$　$(x>0)$

注意　逆関数について，真数条件 $\sqrt{x+1}-1>0$ と $x>0$ は同値であるから，定義域 $x>0$ は書かなくてもよい。

6

解答　(ア) 3　(イ) 1　(ウ) 2

$$f(g(x))=f\left(\frac{3x+b}{x+c}\right)=\frac{2\left(\frac{3x+b}{x+c}\right)+a}{\frac{3x+b}{x+c}+1}=\frac{(a+6)x+(2b+ac)}{4x+b+c}$$

$f(g(x))=\frac{9x+8}{4x+3}$ を満たすとき　$\frac{(a+6)x+(2b+ac)}{4x+b+c}=\frac{9x+8}{4x+3}$ ……(A)

(A) の両辺を比較すると，両辺の分母の x の係数がともに 4 で等しいので，(A) が恒等式となるためには対応するそれぞれの係数が等しくなればよい。

よって　$a+6=9$ ……①，$2b+ac=8$ ……②，$b+c=3$ ……③

①，②，③ を解いて　$a={}^{ア}3$，$b={}^{イ}1$，$c={}^{ウ}2$

$\boxed{1}$

解答 (1) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}-4 & (x<0)\\ 2x-4 & (x\geqq 0)\end{cases}$　(2) $(g\circ f)(x)=\begin{cases}0 & (x<2)\\ 2x-4 & (x\geqq 2)\end{cases}$

(3) $(h\circ g)(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ x-1 & (0\leqq x<1)\\ x^2-1 & (1\leqq x)\end{cases}$

(1) $x<0$ のとき　$(f\circ g)(x)=f(0)=2\cdot 0-4=-4$

$x\geqq 0$ のとき　$(f\circ g)(x)=f(x)=2x-4$

よって　$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-4 & (x<0)\\ 2x-4 & (x\geqq 0)\end{cases}$

(2) $x<2$ のとき　$f(x)<0$

$x\geqq 2$ のとき　$f(x)\geqq 0$

よって　$(g\circ f)(x)=\begin{cases}0 & (x<2)\\ 2x-4 & (x\geqq 2)\end{cases}$

(3) $x<1$ のとき　$g(x)<1$

$x\geqq 1$ のとき　$g(x)\geqq 1$

よって，$x<0$ のとき　$(h\circ g)(x)=h(0)=0-1=-1$

$0\leqq x<1$ のとき　$(h\circ g)(x)=h(x)=x-1$

$1\leqq x$ のとき　$(h\circ g)(x)=h(x)=x^2-1$

したがって　$(h\circ g)(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ x-1 & (0\leqq x<1)\\ x^2-1 & (1\leqq x)\end{cases}$

$\boxed{2}$

解答 (1) $\dfrac{1}{7}(x^2+2x+4)$ $(x\geqq -1)$　(2) $(1,\ 1)$，$(4,\ 4)$　(3) $1\leqq x\leqq 4$

(1) 関数 $y=\sqrt{7x-3}-1$ の定義域は　$x\geqq\dfrac{3}{7}$

値域は　$y\geqq -1$

また，$y=\sqrt{7x-3}-1$ から　$y+1=\sqrt{7x-3}$

両辺を２乗して　$(y+1)^2=7x-3$　　よって　$x=\dfrac{1}{7}(y^2+2y+4)$

したがって，$f(x)$ の逆関数は　$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{7}(x^2+2x+4)$　$(x\geqq -1)$

(2) $\sqrt{7x-3}-1=x$ ……① とすると　$\sqrt{7x-3}=x+1$

両辺を２乗して整理すると　$x^2-5x+4=0$

すなわち　$(x-1)(x-4)=0$　　よって　$x=1,\ 4$

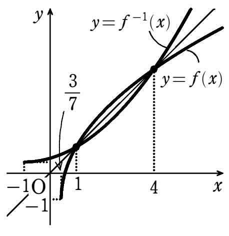
これらは，ともに①を満たす。

したがって，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ の交点の座標は

$(1,\ 1)$，$(4,\ 4)$

(3) 曲線 $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ は直線 $y=x$ に関して対称であり，(2)より，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ は２点 $(1,\ 1)$，$(4,\ 4)$ で交わるから，２つの曲線 $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$ の位置関係は右の図のようになる。

したがって，求める不等式の解は　$1\leqq x\leqq 4$



$\boxed{3}$

解答 (1) (ア) 2　(2) (イ) 13　(ウ) 7

(1) $f(x)=-f(-x)$ において $x=0$ とすると　$f(0)=-f(0)$

よって　$f(0)=0$ ……①

$f(2x)=\dfrac{a\cdot 4^x+a-4}{4^x+1}$ において $x=0$ とすると　$f(0)=\dfrac{2a-4}{2}$ ……②

①，②から　$a={}^{ア}2$

(2) $f(2x)=\dfrac{2\cdot 4^x-2}{4^x+1}=\dfrac{2\cdot 2^{2x}-2}{2^{2x}+1}$ から　$f(x)=\dfrac{2\cdot 2^x-2}{2^x+1}$

$f^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)=t$ とすると　$f(t)=\dfrac{3}{5}$

すなわち　$\dfrac{2\cdot 2^t-2}{2^t+1}=\dfrac{3}{5}$

$10(2^t-1)=3(2^t+1)$

よって　$2^t=\dfrac{13}{7}$

ゆえに　$t=\log_2\dfrac{13}{7}=\log_2{}^{イ}13-\log_2{}^{ウ}7$

$\boxed{4}$

解答 (1) 略　(2) $x=1\pm\sqrt{3}$，$\pm\sqrt{2}$

(1) $f(a)=a$ のとき，$f(f(x))-x$ に $x=a$ を代入すると

$f(f(a))-a=f(a)-a=0$

よって，$f(f(x))-x$ は $x-a$ で割り切れる。

(2) $f(a)=a$ すなわち $a^2-a-2=a$ とすると

$a^2-2a-2=0$

これを解いて　$a=1\pm\sqrt{3}$

(1)により，この a の値に対して，$f(f(x))-x$ は $x-a$ で割り切れる。

したがって，$f(f(x))-x$ は $\{x-(1+\sqrt{3})\}\{x-(1-\sqrt{3})\}$ すなわち $(x^2-x-2)-x$ で割り切れる。

$$\begin{aligned}f(f(x))-x&=(x^2-x-2)^2-(x^2-x-2)-2-x\\&=(x^2-x-2)^2-x^2\\&=\{(x^2-x-2)-x\}(x^2-2)\end{aligned}$$

これから，求める x の値は　$x=1\pm\sqrt{3}$，$\pm\sqrt{2}$

$\boxed{5}$

解答 (1) a は -1 以外の任意の実数，$b=-1$　(2) $a=1$

(1) $(f\circ f)(x)=\dfrac{\dfrac{x+1}{ax+b}+1}{a\cdot\dfrac{x+1}{ax+b}+b}=\dfrac{(a+1)x+b+1}{(a+ab)x+a+b^2}$

$(f\circ f)(x)=x$ から　$\dfrac{(a+1)x+b+1}{(a+ab)x+a+b^2}=x$

分母を払うと　$(a+1)x+b+1=(a+ab)x^2+(a+b^2)x$

これが x についての恒等式であるから

$a+ab=0$，$a+1=a+b^2$，$b+1=0$

また，$(f\circ f)(x)$ の分母は 0 でないから　$a+b^2\neq 0$

これらを解いて　$b=-1$，a は -1 以外の任意の実数。

(2) $(f\circ f)(x)=\dfrac{a\cdot\dfrac{ax+1}{-ax}+1}{-a\cdot\dfrac{ax+1}{-ax}}=\dfrac{(a-1)x+1}{-ax-1}$

$(f\circ(f\circ f))(x)=f((f\circ f)(x))=\dfrac{a\cdot\dfrac{(a-1)x+1}{-ax-1}+1}{-a\cdot\dfrac{(a-1)x+1}{-ax-1}}=\dfrac{(a^2-2a)x+a-1}{(-a^2+a)x-a}$

$(f\circ(f\circ f))(x)=x$ から　$\dfrac{(a^2-2a)x+a-1}{(-a^2+a)x-a}=x$ ……①

分母を払うと　$(a^2-2a)x+a-1=(-a^2+a)x^2-ax$

これが x についての恒等式であるから

$-a^2+a=0$，$a^2-2a=-a$，$a-1=0$

これを解いて　$a=1$　（①の分母 $\neq 0$ を満たす）

1

解答　(ア)　$\dfrac{3x-1}{2x+1}$　　(イ)　$\dfrac{3x+1}{2x-1}$　　(ウ)　$-\dfrac{3x+1}{2x-1}$

(ア)　C_1 の方程式は

$$y=-\frac{5}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2(2x+1)}+\frac{3}{2}=\frac{6x-2}{2(2x+1)}=\frac{3x-1}{2x+1}$$

(イ)　C_2 の方程式は　$y=\dfrac{3(-x)-1}{2(-x)+1}=\dfrac{3x+1}{2x-1}$

(ウ)　C_3 の方程式は，$-y=\dfrac{3(-x)-1}{2(-x)+1}$ から　$y=-\dfrac{3x+1}{2x-1}$

別解　C_3 は C_2 を x 軸に関して対称に移動した曲線であるから，その方程式は

$-y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$　すなわち　$y=-\dfrac{3x+1}{2x-1}$

2

解答　$k \geqq 3$

$y=-|x|+k=\begin{cases}-x+k & (x\geqq 0)\\ x+k & (x<0)\end{cases}$　であるから

$-x+k=\dfrac{1}{x-1}$ とおくと

$x^2-(k+1)x+k+1=0$

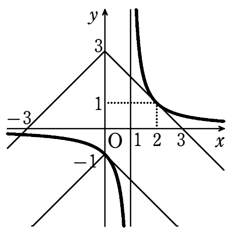
判別式 $D=(k+1)^2-4(k+1)=(k+1)(k-3)$

$D=0$ とすると　$k=-1, 3$

2つの関数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ と $y=-|x|+k$ のグラフが

2個以上の点を共有する k の値の範囲は，

右図から　$k\geqq 3$



3

解答　(1)　$(b-1,\ a+1)$　　(2)　$y=\dfrac{4x+3}{x-1}$

(1)　直線 l に関して，点 A$(a,\ b)$ と対称な点を B$(X,\ Y)$ とすると，AB の中点 M の座標は $\left(\dfrac{a+X}{2},\ \dfrac{b+Y}{2}\right)$ となる.

点 M は直線 l 上にあるから　$\dfrac{b+Y}{2}=\dfrac{a+X}{2}+1$

ゆえに　$X-Y=-a+b-2$ ……①

また，AB$\perp l$ であるから　$\dfrac{Y-b}{X-a}\times 1=-1$

ゆえに　$X+Y=a+b$ ……②

①，② から　$X=b-1,\ Y=a+1$

よって，求める点の座標は　$(b-1,\ a+1)$

(2)　点 P が曲線 $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ 上を動くから，P$\left(t,\ \dfrac{2t+1}{t-3}\right)$ とおける.

点 Q$(x,\ y)$ とすると，(1) から　$\begin{cases}x=\dfrac{2t+1}{t-3}-1=\dfrac{t+4}{t-3}\\ y=t+1\end{cases}$

これらから t を消去して　$x=\dfrac{y+3}{y-4}$

$x=1+\dfrac{7}{t-3}\neq 1$ から　$y=\dfrac{4x+3}{x-1}$

4

解答　(1)　(ア)　9　　(イ)　0　　(2)　(ア)　0　　(イ)　1

(1)　$y=\sqrt{a-4x}+b$ は減少関数であるから

$x=-4$ のとき最大となり　$\sqrt{a+16}+b=5$

$x=0$ のとき最小となり　$\sqrt{a}+b=3$

ゆえに　$\sqrt{a+16}=\sqrt{a}+2$

両辺を2乗すると　$a+16=a+4+4\sqrt{a}$

よって　$\sqrt{a}=3$　　したがって　$a=9,\ b=0$

(2)　$y=\sqrt{9-4x}+b$ は減少関数であるから

$x=-4$ のとき最大となり　$\sqrt{9+16}+b=6$　……①

$x=a$　のとき最小となり　$\sqrt{9-4a}+b=4$　……②

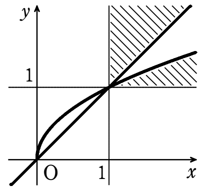
① から　$b=1$　　② に代入して　$\sqrt{9-4a}=3$

両辺を平方して　$9-4a=9$　　よって　$a=0$

したがって　$a={}^{ア}0,\ b={}^{イ}1$

5

解答　[図]，境界線上の点を含まない.



$2\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}>3,\ x>1$ であるから

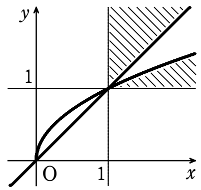
[1]　$y>1$ のとき $\log_x y>0$ から

$2(\log_x y)^2-3\log_x y+1>0$

$(2\log_x y-1)(\log_x y-1)>0$

ゆえに　$\log_x y<\dfrac{1}{2},\ 1<\log_x y$

よって　$y<\sqrt{x},\ x<y$



[2]　$0<y<1$ のとき $\log_x y<0$ から $2\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}<0$ となり不適

6

解答　$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

図で，A$(x, 0)$ とし，長方形 ABCD の面積を S とすると

$S^2=\{2(1-x)\times\sqrt{x}\}^2=4(x^3-2x^2+x)$

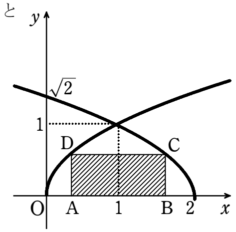
ただし　$0<x<1$

$\dfrac{dS^2}{dx}=4(3x^2-4x+1)=4(x-1)(3x-1)$

よって，増減表から，$x=\dfrac{1}{3}$ のとき S^2 は最大となる.

したがって，S の最大値は

$S=2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$



7

解答　(1)　$\dfrac{3}{2}$　　(2)　$\dfrac{3+2x}{3-2x}$

(1)　$f(-x)=a-\dfrac{3}{2^{-x}+1}=a-\dfrac{3\cdot 2^x}{2^x+1}$

$f(-x)=-f(x)$ とすると　$a-\dfrac{3\cdot 2^x}{2^x+1}=-a+\dfrac{3}{2^x+1}$

よって　$2a=\dfrac{3(2^x+1)}{2^x+1}$　　ゆえに，$2a=3$ から　$a=\dfrac{3}{2}$

(2)　$a=\dfrac{3}{2}$ のとき　$f(x)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2^x+1}$

$y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2^x+1}$ とおくと　$\dfrac{3}{2^x+1}=\dfrac{3}{2}-y$

この式から，$y\neq\dfrac{3}{2}$ であり　$\dfrac{2^x+1}{3}=\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}-y}$

よって　$2^x+1=\dfrac{3\cdot 2}{3-2y}$　　ゆえに　$2^x=\dfrac{6}{3-2y}-1$

よって　$2^x=\dfrac{3+2y}{3-2y}$　　ゆえに　$x=\log_2\dfrac{3+2y}{3-2y}$

したがって，$f(x)$ の逆関数は　$f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{3+2x}{3-2x}$

8

解答　(1)　$g(y)=\dfrac{1}{2}(a^y-a^{-y})$　　(2)　$-1<y<1,\ h(y)=\dfrac{1}{2}\log_a\dfrac{1+y}{1-y}$

(1)　$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1}) \Longleftrightarrow a^y=x+\sqrt{x^2+1}$

ゆえに　$(a^y-x)^2=(\sqrt{x^2+1})^2$ から　$x=\dfrac{a^{2y}-1}{2a^y}$

よって　$g(y)=\dfrac{a^{2y}-1}{2a^y}=\dfrac{1}{2}(a^y-a^{-y})$

(2)　$y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=1-\dfrac{2a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=1-\dfrac{2}{a^{2x}+1}$

$a^{2x}>0$ であるから　$-1<y<1$

また $a^{2x}+1=\dfrac{2}{1-y}$ から　$a^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}$

ゆえに　$2x=\log_a\dfrac{1+y}{1-y}$ から　$h(y)=\dfrac{1}{2}\log_a\dfrac{1+y}{1-y}$

9

解答 （ア） -3 （イ） 2 （ウ） -4 （エ） 1

$f(x)=x^2+2x-6$ について $f(x)=x$ より $x^2+2x-6=x$ ゆえに $x^2+x-6=0$

よって $(x+3)(x-2)=0$ したがって $x=-3,\ 2$

さらに，$f(f(x))=f(x)$ のとき $f(x)=-3,\ 2$ ゆえに $\{f(x)+3\}\{f(x)-2\}=0$

よって $(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)=0$ したがって $(x+3)(x-1)(x+4)(x-2)=0$

ゆえに $x=-3,\ 2,\ -4,\ 1$

10

解答 $a=1,\ b=-2,\ c=3$

$(f\circ g)(x)=x$ から，$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数である。

$$f(x)=\frac{3x-1}{2x+1}=-\frac{5}{2(2x+1)}+\frac{3}{2}$$

よって，関数 $y=f(x)$ の値域は $y\fallingdotseq\frac{3}{2}$

$y=\frac{3x-1}{2x+1}$ の両辺に $2x+1$ を掛けると $(2x+1)y=3x-1$

ゆえに $(2y-3)x=-y-1$

$y\fallingdotseq\frac{3}{2}$ であるから $x=\frac{-y-1}{2y-3}$

よって $f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{2x-3}$

ゆえに，$\frac{-x-1}{2x-3}=\frac{ax+1}{bx+c}$ が x についての恒等式となる。

分母を払って $(-x-1)(bx+c)=(ax+1)(2x-3)$

よって $-bx^2-(b+c)x-c=2ax^2-(3a-2)x-3$

これが x についての恒等式であるから

$-b=2a,\ b+c=3a-2,\ -c=-3$

これを解いて $a=1,\ b=-2,\ c=3$

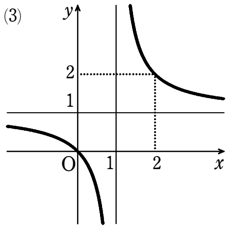
1

解答 (1) $y=mx-2m+2$

(2) $u=\frac{m-1}{m},\ v=1-m$

(3) $y=\frac{1}{x-1}+1$，［図］

(3)



(1) $y-2=m(x-2)$ すなわち $y=mx-2m+2$

(2) $mx-2m+2=\frac{1}{x}$ とすると

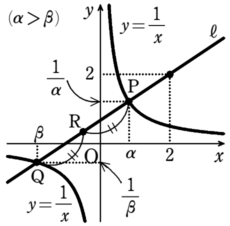
$mx^2-2(m-1)x-1=0$ ……①

$m\neq0$ であるから，① は x の 2 次方程式である。

① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-(m-1)\}^2-m\cdot(-1)=m^2-m+1$$

$$=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$



よって，① は異なる 2 つの実数解をもつから，直線 ℓ と曲線 $y=\frac{1}{x}$ は異なる 2 点 P，Q で交わる。

α，β は ① の解であるから，解と係数の関係により $\alpha+\beta=\frac{2(m-1)}{m}$，$\alpha\beta=-\frac{1}{m}$

R は線分 PQ の中点であるから

$$u=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m-1}{m}\quad\cdots\cdots ②,$$

$$v=\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{2(m-1)}{-2}=1-m\quad\cdots\cdots ③$$

(3) ② から $(u-1)m=-1$ ……④

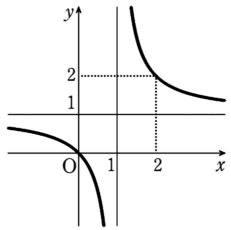
ここで，$u=1-\frac{1}{m}$ であるから $u\neq1$

よって，④ から $m=-\frac{1}{u-1}$

これを ③ に代入して $v=\frac{1}{u-1}+1$

ゆえに，C の方程式は $y=\frac{1}{x-1}+1$

また，C の概形は右図。



2

解答 $a=3,\ b=11,\ c=2$

$\frac{ax+b}{x+c}=x+1$ ……① の分母を払って整理すると

$x^2-(a-c-1)x-b+c=0$ ……①′

(A) より，この方程式の 2 つの解の絶対値が等しいから

$a-c-1=0,\ -b+c<0$ ……②

直線 $y=\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$ と x 軸，y 軸との交点は $\left(-\frac{11}{3},\ 0\right)$，$\left(0,\ \frac{11}{2}\right)$

(B) より，曲線 $y=f(x)$ もこの 2 点を通るから

$$\frac{-\frac{11}{3}a+b}{-\frac{11}{3}+c}=0,\quad \frac{b}{c}=\frac{11}{2}\quad\cdots\cdots ③$$

②，③ を解くと $a=3,\ b=11,\ c=2$

このとき，①′ は $x^2-9=0$ となり，その解は $x=\pm3$

これらは ① の分母を 0 にしないから適する。

したがって $a=3,\ b=11,\ c=2$

3

解答 (1) ［略］ (2) 点 $(1, 3)$ のとき最大値 17

G は $y\leqq-x^2+4,\ y\geqq x^2-2x$ …… ①

(1) 放物線 C_1, C_2 の頂点 $(0, 4), (1, -1)$ を結ぶ線分の中点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ が P である．

すなわち，$Q(x, y)$ に対し $Q'(X, Y)$ とするとき $x+X=1,\ y+Y=3$

よって $x=1-X,\ y=3-Y$ …… ②

② を ① に代入すると $3-Y\leqq-(1-X)^2+4,\ 3-Y\geqq(1-X)^2-2(1-X)$

ゆえに $Y\geqq X^2-2X,\ Y\leqq-X^2+4$ すなわち，Q' も G 上を動く．

(2) $xy+5x+3y$ に対し $(x+3)(y+5)=k$ …… ③ とおく．

点 (x, y) が G 上を動くとき $x+3>0,\ y+5>0$

よって，曲線 ③ は直角双曲線で，y 軸と点 $\left(0, \frac{k}{3}-5\right)$ で交わる．

ゆえに，曲線 ③ が C_1 に接するとき $\frac{k}{3}-5$ すなわち k は最大になる．

$y=-x^2+4$ を ③ に代入して整理すると $x^3+3x^2-9x+k-27=0$

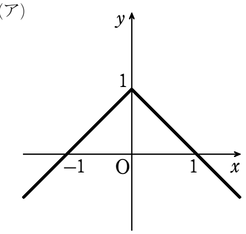
これが重解をもつから，$3x^2+6x-9=0$ より $x=1, -3$

$x>-3$ から $x=1$ このとき $k=32$

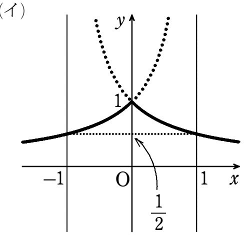
よって，$xy+5x+3y$ は $x=1,\ y=3$ のとき最大値 17 をとる．

4

解答 (1) （ア）



（イ）



(2) $b-a\leqq\frac{1}{2}$ かつ $b+a\leqq\frac{1}{2}$

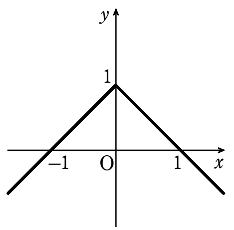
(1) （ア） $x\geqq0$ のとき $y=1-x$， $x<0$ のとき $y=1+x$

よって，グラフの概形は図 [1]。

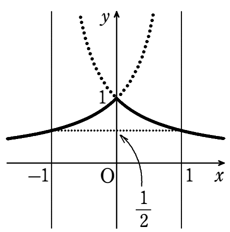
（イ） $x\geqq0$ のとき $y=\frac{1}{1+x}$， $x<0$ のとき $y=\frac{1}{1-x}$

よって，グラフの概形は図 [2]。

[1]



[2]



(2) $|x|^2=x^2$ であるから，不等式は

$(ax+b)(1-|x|^2)\leqq 1-|x|$

よって　$(ax+b)(1+|x|)(1-|x|)\leqq 1-|x|$　……①

[1] $|x|=1$ すなわち $x=\pm 1$ のとき，① が成り立つ。

[2] $-1<x<1$ のとき

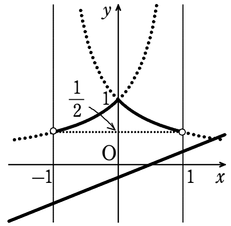
$(1+|x|)(1-|x|)>0$ であるから，① は

$$ax+b\leqq\frac{1}{1+|x|}$$

よって，① が成り立つとき，直線 $y=ax+b$ が曲線 $y=\frac{1}{1+|x|}$ の下側にある。

すなわち，$f(x)=ax+b$ とおくと

$f(-1)\leqq\frac{1}{2}$ かつ $f(1)\leqq\frac{1}{2}$ が成り立つ。



[1]，[2] から求める条件は　$b-a\leqq\frac{1}{2}$ かつ $b+a\leqq\frac{1}{2}$

5

解答 (1) 順に　$x\geqq-\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}a+\frac{7}{4}$，$f^{-1}(x)=x^2+(3-a)x+4$，$x\geqq\frac{a-3}{2}$

(2) $a=-2$，6；

$a=-2$ のとき接点の座標は $(-2,\ -2)$　　$a=6$　のとき接点の座標は $(2,\ 2)$

(1) $4x+a^2-6a-7\geqq 0$ から $y=f(x)$ の定義域は　$x\geqq-\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}a+\frac{7}{4}$

$y=f(x)$ の値域は $y\geqq-\frac{3-a}{2}$ であるから，$y=f^{-1}(x)$ の定義域は　$x\geqq\frac{a-3}{2}$

また，$y=\frac{1}{2}\sqrt{4x+a^2-6a-7}-\frac{3-a}{2}$ とすると　$2y+3-a=\sqrt{4x+a^2-6a-7}$

両辺を2乗して，xについて解くと　$x=y^2+(3-a)y+4$

よって　$f^{-1}(x)=x^2+(3-a)x+4$

(2) $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフが接するとき，$y=f^{-1}(x)$ のグラフと直線 $y=x$ も接する。

よって，$x=x^2+(3-a)x+4$　すなわち　$x^2+(2-a)x+4=0$　……① は重解をもつ。

① の判別式 D について　$D=0$　　よって　$(2-a)^2-4\cdot 1\cdot 4=0$ から　$a=-2$，6

$a=-2$ のとき　① から　$(x+2)^2=0$　　接点の座標は　$(-2,\ -2)$

$a=6$　のとき　① から　$(x-2)^2=0$　　接点の座標は　$(2,\ 2)$

6

解答 (1) 直線 $y=x$　(2) $-\frac{33}{8}<a\leqq-4$，$0\leqq a<2$

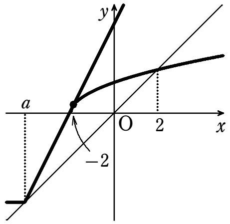
(1) $x=a$ のとき，$y=a+|a-a|=a$ であるから，点Pの座標は　$(a,\ a)$

よって，実数 a の値が変化するとき，点Pの軌跡は　直線 $y=x$

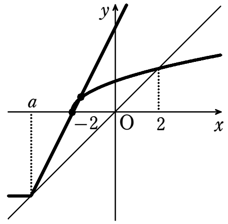
(2) $y=x+|x-a|=\begin{cases}x+(x-a)=2x-a & (x\geqq a)\\ x-(x-a)=a & (x<a)\end{cases}$

この関数のグラフと，$y=\sqrt{x+2}$ のグラフの共有点は，a の値が増加するにつれて，次のようになる。

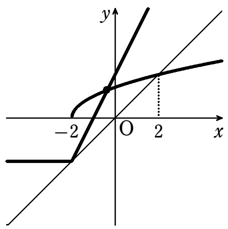
[1] 1点で接する



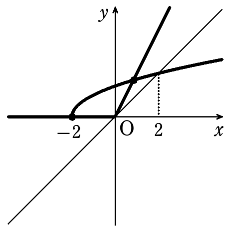
[2] 点 $(-2,\ 0)$ を通る



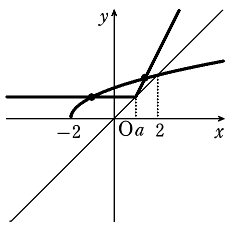
[3]



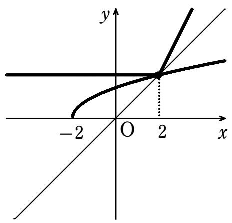
[4]



[5]



[6]



[1] のとき $2x-a=\sqrt{x+2}$ とおき，両辺を2乗すると

$4x^2-4ax+a^2=x+2$

すなわち　$4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0$

判別式を D とすると　$D=(4a+1)^2-4\cdot 4(a^2-2)=16a^2+8a+1-16a^2+32$

$=8a+33$

$D=0$ であるから　$a=-\frac{33}{8}$

[2] のとき　半直線 $y=2x-a$ は点 $(-2,\ 0)$ を通るから　$0=-4-a$

ゆえに　$a=-4$

以上から，求める a の値の範囲は　$-\frac{33}{8}<a\leqq-4$，$0\leqq a<2$

7

解答 (1) $g(x)=\sqrt{x-1}$，定義域 $x\geqq 1$　(2) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

(1) $y=x^2+1$ $(x\geqq 0)$ ……① の値域は　$y\geqq 1$

① を x について解くと　$x=\sqrt{y-1}$ $(y\geqq 1)$

よって，求める逆関数は　$y=g(x)=\sqrt{x-1}$，定義域は $x\geqq 1$

(2) 2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は直線 $y=x$ に関して対称であるから，求める2点間の距離の最小値は，曲線 $y=f(x)$ 上の点と直線 $y=x$ の最短距離の2倍である。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(p,\ p^2+1)$ と直線 $y=x$ すなわち直線 $x-y=0$ との距離は

$$\frac{|p-(p^2+1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|p^2-p+1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|$$

これは $p=\frac{1}{2}$ のとき最短距離 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ をとる。

よって，求める最小値は　$\frac{3\sqrt{2}}{8}\times 2=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

8

解答 (ア) x^2-2x+2 $(x\geqq 1)$　(イ) b　(ウ) $2b$　(エ) $-2<\frac{b}{a}<0$

(オ) 2　(カ) -1　(キ) $\frac{17}{16}$

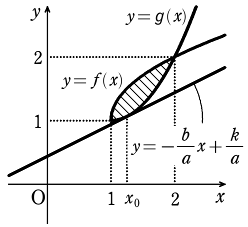
$y=\sqrt{x-1}+1$ から　$(y-1)^2=x-1$

よって　$x=y^2-2y+2$ $(y\geqq 1)$

ゆえに，逆関数は

$g(x)={}^{ア}x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ $(x\geqq 1)$

よって，領域 M は図の斜線部分。ただし，境界線を含む。



また，$k=ay+bx$ とおく。

(1) $a=0$，$b>0$ のとき

$x=\frac{k}{b}$ を $1\leqq x\leqq 2$ に代入すると　$1\leqq\frac{k}{b}\leqq 2$

ゆえに　$b\leqq k\leqq 2b$

よって，最小値は　${}^{イ}b$ $(x=y=1)$

$a=0$，$b<0$ のとき，同様にして　$b\geqq k\geqq 2b$

よって，最小値は　${}^{ウ}2b$ $(x=y=2)$

(2) $a>0$ のとき　直線 $y=-\frac{b}{a}x+\frac{k}{a}$ の傾き $-\frac{b}{a}$ が $0<-\frac{b}{a}<g'(2)=2$ すなわち

${}^{エ}-2<\frac{b}{a}<0$ を満たすとき $x=x_0$ $(1<x_0<2)$ に対して k は最小値をとる。

ここで　$g\left(\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{5}{4}-1\right)^2+1=\frac{17}{16}$

$x=\frac{5}{4}$，$y={}^{キ}\frac{17}{16}$ において最小値 $\frac{7}{8}$ をとるとすると，直線 $ay+bx=\frac{7}{8}$ ……① は

$y=g(x)$ のグラフと点 $\left(\frac{5}{4},\ \frac{17}{16}\right)$ で接する。接点が直線 ① 上にあるから

$\frac{17}{16}a+\frac{5}{4}b=\frac{7}{8}$　　よって　$17a+20b=14$ ……②

$g'\left(\frac{5}{4}\right)=2\cdot\frac{5}{4}-2=\frac{1}{2}$ が直線 ① の傾きと等しいから

$-\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$　　　　よって　$a=-2b$ ……③

②，③を解くと　　$a={}^{オ}2$，$b={}^{カ}-1$

9

解答　(1)　$f_5^{-1}(x)=\frac{x}{x-1}$，$f_6^{-1}(x)=\frac{1}{1-x}$　　(2)　$a=6$，$b=6$

(1)　$y=\frac{x}{x-1}$ とおき，x について解くと　　$x=\frac{y}{y-1}$

$y=\frac{x-1}{x}$ とおき，x について解くと　　$x=\frac{1}{1-y}$

よって　　$f_5^{-1}(x)=\frac{x}{x-1}$，$f_6^{-1}(x)=\frac{1}{1-x}$

(2)　f_5^{-1} が存在して $f_5\circ f_a=f_3$ であるから　　$f_a=f_5^{-1}\circ f_3$

よって　　$f_a(x)=(f_5^{-1}\circ f_3)(x)=f_5^{-1}(f_3(x))$

$$=\frac{1-x}{(1-x)-1}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}=f_6(x)$$

また　　$f_b(x)=(f_4\circ f_6^{-1})(x)=f_4(f_6^{-1}(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$

$$=\frac{1-x}{(1-x)-1}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}=f_6(x)$$

したがって　　$a=6$，$b=6$

別解　$f_5(f_1(x))$，$f_5(f_2(x))$，……，$f_5(f_6(x))$ を計算すると，$f_3(x)$ となるのは $f_5(f_6(x))$ だけとわかる。よって　$a=6$

$f_1(f_6(x))$，$f_2(f_6(x))$，……，$f_6(f_6(x))$ を計算すると，$f_4(x)$ となるのは $f_6(f_6(x))$ だけとわかる。よって　$b=6$

10

解答　(1)　略　　(2)　$-\frac{1}{a}<x<-\frac{1}{a(a+1)}$，$0\leqq x\leqq\frac{a-1}{a}$

(1)　$y=f(x)$ とすると　$y=\frac{ax}{1+ax}=-\frac{1}{1+ax}+1$

よって，値域は　　$y\neq 1$

$y=\frac{ax}{1+ax}$ から　　$a(y-1)x=-y$

$y\neq 1$ であるから　　$x=\frac{-y}{a(y-1)}$

よって　　$f^{-1}(x)=\frac{-x}{a(x-1)}$

$f^{-1}(x)$ が存在するから，$f(f(t))=f(t)$ が成り立つ t に対して

$f^{-1}(f(f(t)))=f^{-1}(f(t))$

したがって，$f(t)=t$ が成り立つ。

(2)　$f(f(x))=\frac{a\cdot\frac{ax}{1+ax}}{1+a\cdot\frac{ax}{1+ax}}=\frac{a^2x}{1+a(a+1)x}=-\frac{\frac{a}{a+1}}{1+a(a+1)x}+\frac{a}{a+1}$

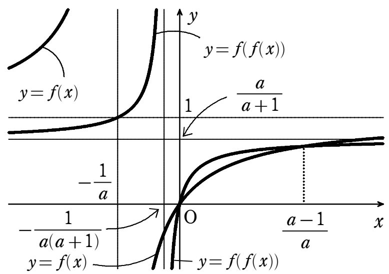
$y=f(x)$ と $y=f(f(x))$ のグラフの交点の x 座標は (1) の結果から $f(x)=x$ の解である。

$\frac{ax}{1+ax}=x$　から　$ax=x(1+ax)$

整理すると　$x(ax+1-a)=0$

よって　　$x=0$，$\frac{a-1}{a}$

$y=f(x)$ と $y=f(f(x))$ のグラフをかくと次の図のようになる。



よって，グラフより $f(f(x))\geqq f(x)$ となるのは

$$-\frac{1}{a}<x<-\frac{1}{a(a+1)},\ 0\leqq x\leqq\frac{a-1}{a}$$

別解　$f(f(x))=\frac{a\cdot\frac{ax}{1+ax}}{1+a\cdot\frac{ax}{1+ax}}=\frac{a^2x}{1+a(a+1)x}$

よって　　$f(f(x))\geqq f(x)\iff\frac{a^2x}{1+(a^2+a)x}\geqq\frac{ax}{1+ax}$

$$\iff\frac{a^2x}{1+(a^2+a)x}-\frac{ax}{1+ax}\geqq 0$$

$$\iff\frac{-ax(ax+1-a)}{\{1+a(a+1)x\}(1+ax)}\geqq 0$$

よって，$x\neq-\frac{1}{a}$，$-\frac{1}{a(a+1)}$ として，この両辺に $-\{1+a(a+1)x\}^2(1+ax)^2$ を掛けて得られる x の4次不等式 $ax(ax+1-a)\{a(a+1)x+1\}(ax+1)\leqq 0$ を解けばよい。

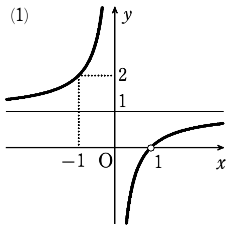
$a>1$ のとき　$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{a(a+1)}<0<\frac{a-1}{a}$

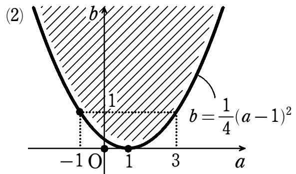
よって，不等式の解は　　$-\frac{1}{a}<x<-\frac{1}{a(a+1)}$，$0\leqq x\leqq\frac{a-1}{a}$

11

解答　(1)　$f(f(x))=-\frac{1}{x}+1$ $(x\neq 1)$，[図]

(2)　[図] 境界線は含まない。ただし，点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 0)$，$(-1,\ 1)$ は含む





(1)　$f(x)=\frac{1}{1-x}$ の定義域は　$x\neq 1$，

値域は　　$y\neq 0$

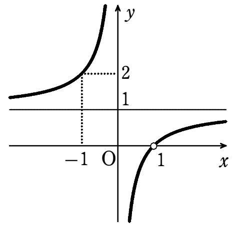
$f(x)=1$ とすると　　$x=0$

よって，$f(f(x))$ の定義域は　　$x\neq 0$，$x\neq 1$

このとき　　$f(f(x))=\frac{1}{1-f(x)}$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$$

$$=-\frac{1}{x}+1\ (x\neq 1)$$



したがって，グラフは [図] のようになる。

(2)　$y=bx+a$　……①，$y=-\frac{1}{x}+1$　……②　とおく。

直線①と曲線 $y=f(f(x))$ が共有点をもたないのは次の3つの場合である。

[1]　直線①と双曲線②が共有点をもたない

[2]　直線①が点 $(1,\ 0)$ を通り，x 軸に平行

[3]　直線①が点 $(1,\ 0)$ において，双曲線②に接する

[1] のとき

直線①と双曲線②が共有点をもたないから，

$bx+a=-\frac{1}{x}+1$ すなわち $bx^2+(a-1)x+1=0$　……③

が実数解をもたない。

よって

(i)　$b\neq 0$ のとき

③の判別式を D とすると　　$D<0$

すなわち　　$(a-1)^2-4b<0$

ゆえに　　$b>\frac{1}{4}(a-1)^2$

(ii)　$b=0$ のとき

1次方程式 $(a-1)x+1=0$ が解をもたない条件は

$a-1=0$　　ゆえに　　$a=1$

[2] のとき

点 $(1,\ 0)$ を通り，x 軸に平行な直線の方程式は $y=0$ であるから

$b=0$，$a=0$

[3] のとき

直線 $y=bx+a$ が，点 $(1,\ 0)$ を通るから　　$b+a=0$　……④

また，直線①と双曲線②が接することから，③の判別式 D について　　$D=0$

よって　　$(a-1)^2-4b=0$　……⑤

④から　　$b=-a$

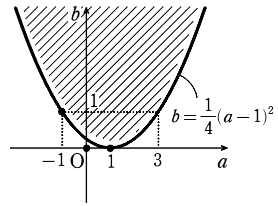
これを⑤に代入して整理すると

$(a+1)^2=0$

ゆえに　　$a=-1$　　　④から　　$b=1$

以上から，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は [図] のようになる。境界線は含まない。

ただし，点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 0)$，$(-1,\ 1)$ は含む。



12

解答 $f_n(x)=a^nx+\dfrac{1-a^n}{1-a}$

$f_1(x)=ax+1$ から

$$f_2(x)=f(f_1(x))=a(ax+1)+1=a^2x+a+1$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=a(a^2x+a+1)+1=a^3x+a^2+a+1$$

したがって，自然数 n について

$$f_n(x)=a^nx+a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots\cdots+a+1 \quad \cdots\cdots ①$$

であると推測される。これを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき　$f_1(x)=ax+1$ であるから，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき　① が成り立つと仮定する，すなわち

$f_k(x)=a^kx+a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots\cdots+a+1$ と仮定すると

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=af_k(x)+1$$
$$=a^{k+1}x+a^k+a^{k-1}+\cdots\cdots+a+1$$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

したがって　$f_n(x)=a^nx+a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots\cdots+a+1$

$$=a^nx+\frac{1-a^n}{1-a}$$

1

解答 (1)　$a^3-4ab+8c=0$　(2)　略

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフが y 軸と平行な直線 $x=k$ に関して対称であるとする。

$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-k$ だけ平行移動して得られる曲線の方程式は

$y=f(x+k)$

この曲線は y 軸に関して対称であるから，$f(x+k)=f(-x+k)$ が成り立つ。

よって　$(x+k)^4+a(x+k)^3+b(x+k^2)+c(x+k)+d$

$=(-x+k)^4+a(-x+k)^3+b(-x+k^2)+c(-x+k)+d$

展開して整理すると　$(4k+a)x^3+(4k^3+3ak^2+2bk+c)x=0$

これが x の恒等式であるから　$4k+a=0$　$\cdots\cdots ①$

$4k^3+3ak^2+2bk+c=0$　$\cdots\cdots ②$

① から　$k=-\dfrac{a}{4}$

これを ② に代入して整理すると　$a^3-4ab+8c=0$

(2)　(1) の結果より，$c=\dfrac{4ab-a^3}{8}$ であるから

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+\frac{4ab-a^3}{8}x+d=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2-\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2+\frac{4ab-a^3}{8}x+d$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2-\frac{a^2-4b}{4}\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)+d$$

よって　$g(x)=x^2+\dfrac{a}{2}x$，$h(x)=x^2-\dfrac{a^2-4b}{4}x+d$ とおくと，$f(x)=h(g(x))$ となり，

$y=f(x)$ は 2 つの 2 次関数 $y=g(x)$ と $y=h(x)$ の合成関数である。

2

解答 (1)　$k=-\dfrac{m+1}{m-1}$　(2)　$2-\sqrt{3}\leqq k\leqq 2+\sqrt{3}$

(1)　A $(a,\ b)$，P $(p,\ q)$，$a\neq p$ であるから　$m=\dfrac{q-b}{p-a}$

よって　$k=\dfrac{-(p-a)-(q-b)}{-(p-a)+(q-b)}=\dfrac{-(p-a)-m(p-a)}{-(p-a)+m(p-a)}=\dfrac{-(p-a)(m+1)}{(p-a)(m-1)}=-\dfrac{m+1}{m-1}$

(2)　図 [1] から　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq m\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\cdots\cdots ①$

また，(1) から　$k=\dfrac{-2}{m-1}-1$　$\cdots\cdots ②$

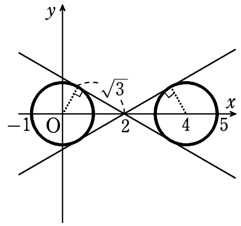
図 [2] より，① の範囲では ② は単調に増加するから

$$-\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}-1}\leqq k\leqq -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}$$

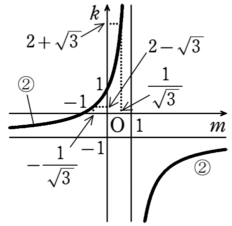
よって　$\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

ゆえに　$2-\sqrt{3}\leqq k\leqq 2+\sqrt{3}$

[1]



[2]



3

解答 (ア)　-1　(イ)　1　(ウ)　x　(エ)　$\dfrac{st-1}{-s+t}$　(オ)　1　(カ)　$\dfrac{st-1}{-s+t}$

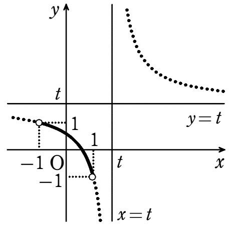
(キ)　$\dfrac{1-R^{n+1}}{1+R^{n+1}}$　(ク)　1　(ケ)　-1

$$f_t(x)=\frac{tx-1}{x-t}=\frac{t(x-t)+t^2-1}{x-t}=\frac{t^2-1}{x-t}+t$$

$f_t(x)=\dfrac{tx-1}{x-t}$ に $x=1$，$x=-1$ をそれぞれ代入すると

$$f_t(1)=\frac{t\cdot 1-1}{1-t}=-1$$

$$f_t(-1)=\frac{t\cdot(-1)-1}{-1-t}=1$$



よって，$y=f_t(x)$ のグラフは右の図の実線部分であり，

$f_t(x)$ の値域は　${}^{ア}-1<f_t(x)<{}^{イ}1$

また　$f_t(f_t(x))=\dfrac{tf_t(x)-1}{f_t(x)-t}=\dfrac{t\cdot\frac{tx-1}{x-t}-1}{\frac{tx-1}{x-t}-t}=\dfrac{t(tx-1)-(x-t)}{(tx-1)-t(x-t)}$

$$=\frac{(t^2-1)x}{t^2-1}={}^{ウ}x$$

$$g(x)=f_s(f_t(x))=\frac{sf_t(x)-1}{f_t(x)-s}=\frac{s\cdot\frac{tx-1}{x-t}-1}{\frac{tx-1}{x-t}-s}=\frac{s(tx-1)-(x-t)}{(tx-1)-s(x-t)}$$

$$=\frac{(st-1)x-s+t}{(-s+t)x+st-1}=\frac{{}^{エ}\frac{st-1}{-s+t}x+{}^{オ}1}{x+{}^{カ}\frac{st-1}{-s+t}}$$

$R=\dfrac{\frac{st-1}{-s+t}-1}{\frac{st-1}{-s+t}+1}$ から　$\left(\dfrac{st-1}{-s+t}+1\right)R=\dfrac{st-1}{-s+t}-1$

よって，$(R-1)\dfrac{st-1}{-s+t}=-1-R$ であり，$R\neq 1$ であるから　$\dfrac{st-1}{-s+t}=\dfrac{1+R}{1-R}$

ゆえに，$g(x)=\dfrac{\frac{1+R}{1-R}x+1}{x+\frac{1+R}{1-R}}$ であるから

$$g\left(\frac{1-R^n}{1+R^n}\right)=\frac{\dfrac{1+R}{1-R}\cdot\dfrac{1-R^n}{1+R^n}+1}{\dfrac{1-R^n}{1+R^n}+\dfrac{1+R}{1-R}}=\frac{(1+R)(1-R^n)+(1+R^n)(1-R)}{(1-R^n)(1-R)+(1+R)(1+R^n)}$$

$$=\frac{2(1-R^{n+1})}{2(1+R^{n+1})}={}^{キ}\frac{1-R^{n+1}}{1+R^{n+1}}\quad\cdots\cdots ①$$

$a_1=\dfrac{1-R}{1+R}$，$a_{n+1}=g(a_n)$ と ① から

$$a_2=g(a_1)=g\left(\frac{1-R}{1+R}\right)=\frac{1-R^2}{1+R^2}$$

$$a_3=g(a_2)=g\left(\frac{1-R^2}{1+R^2}\right)=\frac{1-R^3}{1+R^3}$$

以下同様にして，$a_n=\dfrac{1-R^n}{1+R^n}$ がわかる。

また，$\dfrac{st-1}{-s+t}=\dfrac{1+R}{1-R}$，$t>1$，$s>1$ であるから，$s<t$ のとき

$$\frac{1+R}{1-R}>0\quad\cdots\cdots ②$$

$R\fallingdotseq 1$ であるから $(1-R)^2>0$ であり，② の両辺に $(1-R)^2$ を掛けると

$$(1+R)(1-R)>0$$

すなわち，$(R+1)(R-1)<0$ であるから　　$-1<R<1$

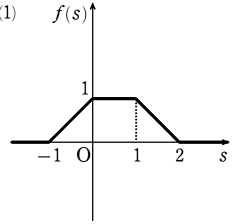
よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-R^n}{1+R^n}={}^{ク}1$

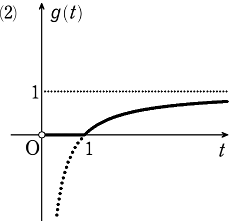
$s>t$ のときは，$|R|>1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{R^n}-1}{\dfrac{1}{R^n}+1}={}^{ケ}-1$

4

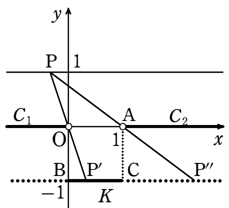
解答　(1)　$s\leqq -1$ のとき 0，$-1<s<0$ のとき $s+1$，$0\leqq s\leqq 1$ のとき 1，$1<s<2$ のとき $2-s$，$2\leqq s$ のとき 0，［図］

(2)　$0<t\leqq 1$ のとき 0，$1<t$ のとき $1-\dfrac{1}{t}$，［図］

(1)


(2)


O $(0,\ 0)$，A $(1,\ 0)$，B $(0,\ -1)$，C $(1,\ -1)$ とする。



(1)　P $(s,\ 1)$ とする。点 P は直線 $y=1$ 上を動く。

直線 PO，直線 PA と直線 $y=-1$ との交点をそれぞれ P′，P″ とする。このとき，K と線分 P′P″ の共通部分の長さが $f(s)$ である。

P′ は O に関して P と対称であるから　　P′ $(-s,\ -1)$

中点連結定理より，P′P″$=2$OA$=2$ であるから

P″ $(2-s,\ -1)$

［1］　$1\leqq -s$ すなわち $s\leqq -1$ のとき

K と線分 P′P″ の共通部分は存在しないから

$f(s)=0$

［2］　$0<-s<1$ すなわち $-1<s<0$ のとき

K と線分 P′P″ の共通部分は線分 P′C であるから

$f(s)=1-(-s)=s+1$

［3］　$-s\leqq 0$ かつ $1\leqq 2-s$ すなわち $0\leqq s\leqq 1$ のとき

K と線分 P′P″ の共通部分は K であるから

$f(s)=1$

［4］　$0<2-s<1$ すなわち $1<s<2$ のとき

K と線分 P′P″ の共通部分は線分 BP″ であるから

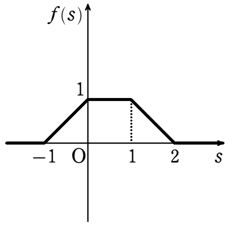
$f(s)=2-s$

［5］　$2-s\leqq 0$ すなわち $2\leqq s$ のとき

K と線分 P′P″ の共通部分は存在しないから

$f(s)=0$

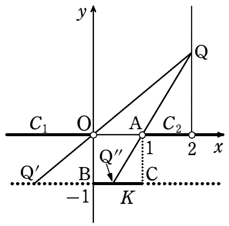
［1］～［5］から，$f(s)$ のグラフは右の図のようになる。



(2)　Q $(2,\ t)$ とする。点 Q は直線 $x=2$ の $y>0$ の部分を動く。

直線 QO，直線 QA と直線 $y=-1$ との交点をそれぞれ Q′，Q″ とする。

このとき，K と線分 Q′Q″ の共通部分の長さが $g(t)$ である。



直線 QO の方程式は　　$y=\dfrac{t}{2}x$

$y=-1$ とすると　　$x=-\dfrac{2}{t}$　(<0)

ゆえに，Q′ $\left(-\dfrac{2}{t},\ -1\right)$ は常に $x<0$ の部分にある。

直線 QA の方程式は　　$y=t(x-1)$　　　$y=-1$ とすると　　$x=1-\dfrac{1}{t}$

ゆえに，Q″ の座標は　　$\left(1-\dfrac{1}{t},\ -1\right)$

［1］　$1-\dfrac{1}{t}\leqq 0$ すなわち $0<t\leqq 1$ のとき

K と線分 Q′Q″ の共通部分は存在しないから

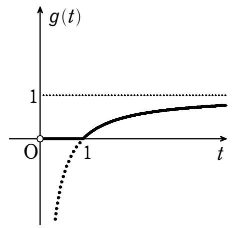
$g(t)=0$

［2］　$0<1-\dfrac{1}{t}$ すなわち $1<t$ のとき

K と線分 Q′Q″ の共通部分は線分 BQ″ であるから

$g(t)=1-\dfrac{1}{t}$

［1］，［2］から，$g(t)$ のグラフは右の図のようになる。



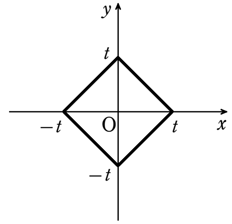
5

解答　(1)　［図］

(2)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$\dfrac{2}{2-a}$，

$1<a$ のとき　$\dfrac{2}{a}$

(3)　2

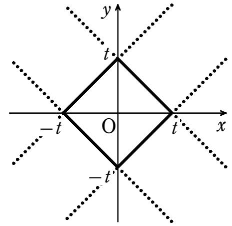


(1)　$|-x|=|x|$，$|-y|=|y|$ であるから，

$|x|+|y|=t$ の表す図形は x 軸，y 軸に関して対称である。

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき　　$x+y=t$

したがって，xy 平面に図示すると，右の図の実線部分のようになる。



(2)　連立不等式 $ax+(2-a)y\geqq 2$，$y\geqq 0$ の表す領域と $|x|+|y|=t$ ……① の表す図形が共有点をもつような t の最小値 m を求める。

$ax+(2-a)y\geqq 2$ は，$0\leqq a<2$ のとき　　$y\geqq -\dfrac{a}{2-a}x+\dfrac{2}{2-a}$

$a=2$ のとき　　$x\geqq 1$

$2<a$ のとき　　$y\leqq \dfrac{a}{a-2}x-\dfrac{2}{a-2}$

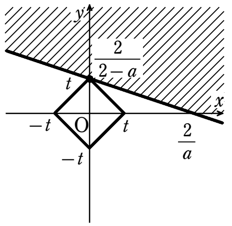
［1］　$0\leqq a<2$ かつ $-\dfrac{a}{2-a}\geqq -1$，すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

① が点 $\left(0,\ \dfrac{2}{2-a}\right)$ を通るとき，t は最小となるから　　$m=|0|+\left|\dfrac{2}{2-a}\right|=\dfrac{2}{2-a}$

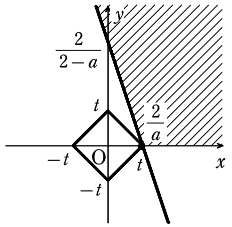
［2］　$0\leqq a<2$ かつ $-\dfrac{a}{2-a}<-1$，すなわち $1<a<2$ のとき

① が点 $\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ を通るとき，t は最小となるから　　$m=\left|\dfrac{2}{a}\right|+|0|=\dfrac{2}{a}$

[1]



[2]



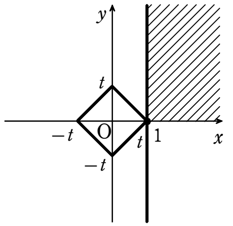
[3]　$a=2$ のとき

① が点 $(1,\ 0)$ を通るとき，t は最小となるから　　$m=|1|+|0|=1$

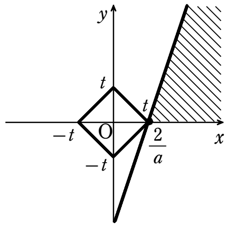
[4]　$2<a$ のとき

① が点 $\left(\frac{2}{a},\ 0\right)$ を通るとき，t は最小となるから　　$m=\left|\frac{2}{a}\right|+|0|=\frac{2}{a}$

[3]



[4]



[1]〜[4] より，$0\leqq a\leqq 1$ のとき　　$m=\frac{2}{2-a}$

$1<a$ のとき　　$m=\frac{2}{a}$

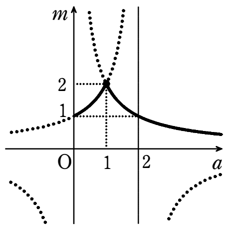
(3)　横軸を a，縦軸を m として

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　　$m=\frac{2}{2-a}$

$1<a$ のとき　　$m=\frac{2}{a}$

のグラフをかくと，右の図の実線部分のようになる。

したがって，m は $a=1$ のとき最大値 2 をとる。



$\boxed{6}$

解答　(1) 略　　(2) 略　　(3) 略　　(4) $r=\frac{717}{271}$ $\left(\text{または } r=\frac{590}{223} \text{ など}\right)$

(1)　$f(\sqrt{7})=\frac{8\sqrt{7}+21}{3\sqrt{7}+8}=\frac{\sqrt{7}(8+3\sqrt{7})}{3\sqrt{7}+8}=\sqrt{7}$

(2)　$f(x)-2=\frac{8x+21}{3x+8}-2=\frac{2x+5}{3x+8}$

$x\geqq 0$ のとき，$2x+5>0$，$3x+8>0$ であるから　　$\frac{2x+5}{3x+8}>0$

よって，$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 2$ である。

(3)　$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{8x+21}{3x+8}-\frac{8y+21}{3y+8}\right|=\left|\frac{(8x+21)(3y+8)-(8y+21)(3x+8)}{(3x+8)(3y+8)}\right|$

$=\frac{|x-y|}{|3x+8||3y+8|}$

$x\geqq 2$，$y\geqq 2$ のとき　　$|3x+8|\geqq 14$，$|3y+8|\geqq 14$

よって　　$|f(x)-f(y)|=\frac{|x-y|}{|3x+8||3y+8|}\leqq\frac{|x-y|}{14\times 14}\leqq\frac{|x-y|}{100}$

別解　[1]　$x=y$ のとき　　(左辺)$=0$，(右辺)$=0$ から成り立つ。

[2]　$x\fallingdotseq y$ のとき

$$f(x)=\frac{8x+21}{3x+8}=\frac{\frac{8}{3}(3x+8)-\frac{1}{3}}{3x+8}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3(3x+8)},\qquad f'(x)=\frac{1}{(3x+8)^2}$$

$x\geqq 2$ において，$f(x)$ は連続かつ微分可能であるから，平均値の定理により

$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)=\frac{1}{(3c+8)^2}$ を満たす実数 c が x と y の間に存在する。

$c>2$ であるから　　$3c+8>14>10$　　　ゆえに　　$\frac{1}{(3c+8)^2}<\frac{1}{10^2}$

よって，$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<\frac{1}{10^2}$ から　　$|f(x)-f(y)|<\frac{|x-y|}{100}$

[1]，[2] から，$x\geqq 2$，$y\geqq 2$ ならば $|f(x)-f(y)|\leqq\frac{|x-y|}{100}$ である。

(4)　$|f(f(x))-\sqrt{7}|=|f(f(x))-f(f(\sqrt{7}))|$

$x\geqq 2$ ならば，(2) から　　$f(x)\geqq 2$，$f(\sqrt{7})=\sqrt{7}\geqq 2$

(3) から　　$|f(f(x))-f(f(\sqrt{7}))|\leqq\frac{|f(x)-f(\sqrt{7})|}{100}$

$x\geqq 2$，$\sqrt{7}\geqq 2$ であるから (3) より　　$\frac{|f(x)-f(\sqrt{7})|}{100}\leqq\frac{|x-\sqrt{7}|}{100^2}$

ゆえに，$x\geqq 2$ のとき　　$|f(f(x))-\sqrt{7}|\leqq\frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$

また，$|3-\sqrt{7}|<1$ であるから　　$\frac{|3-\sqrt{7}|}{10000}<\frac{1}{10000}$

よって，有理数 r の 1 つは　　$r=f(f(3))=f\left(\frac{45}{17}\right)=\frac{717}{271}$

注意　$|2-\sqrt{7}|<1$ から　$r=f(f(2))=\frac{590}{223}$ でもよい。

$\boxed{7}$

解答　曲線 $y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}$ の $\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$ の部分

$G(X,\ Y)$ は $\triangle$PQR の重心であるから

$$X=\frac{\frac{1}{2}+\alpha+\beta}{3},\quad Y=\frac{\frac{1}{4}+\alpha^2+\beta^2}{3}$$

よって　　$\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2}$　　……①,

$\alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}$　　……②

3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすから，線分 QR の中点を M とすると　　PM$\perp$QR

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$　……③

$\mathrm{M}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$

③ より　$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\right)(\beta-\alpha)+\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)(\beta^2-\alpha^2)=0$

2 点 P，Q は異なるので　　$\beta-\alpha\fallingdotseq 0$

よって　　$2(\alpha+\beta-1)+\{2(\alpha^2+\beta^2)-1\}(\alpha+\beta)=0$

ゆえに　　$(\alpha+\beta)\{2(\alpha^2+\beta^2)+1\}=2$

①，② を代入して　　$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left\{2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)+1\right\}=2$

よって　　$\left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$

ゆえに　　$Y=\frac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}$　　……④

ここで $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ であるから

$\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)\}$

①，② を代入して　　$\alpha\beta=\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}$

よって，α，β は 2 次方程式

$t^2-\left(3X-\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$　……⑤

の 2 つの解である。

α，β は異なる 2 つの実数であるから，⑤ の判別式を D とすると　　$D>0$

よって　　$\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}>0$

ゆえに　　$-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)>0$

整理して　　$Y>\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$

④ を代入して　　$\frac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}>\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$

よって　　$\frac{1}{X-\frac{1}{6}}>\frac{27}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3}{2}$

両辺に $2\left(X-\frac{1}{6}\right)^2$ を掛けて　　$2\left(X-\frac{1}{6}\right)>27\left(X-\frac{1}{6}\right)^4+3\left(X-\frac{1}{6}\right)^2$

ゆえに　　$\left(X-\frac{1}{6}\right)\left\{3\left(X-\frac{1}{6}\right)-1\right\}\left\{9\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+3\left(X-\frac{1}{6}\right)+2\right\}<0$

$9\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+3\left(X-\frac{1}{6}\right)+2>0$ であるから　　$\frac{1}{6}<X<\frac{1}{2}$

よって，求める軌跡は

曲線 $y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}$ の $\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$ の部分