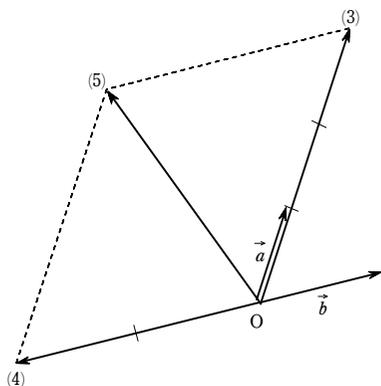
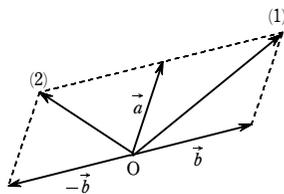


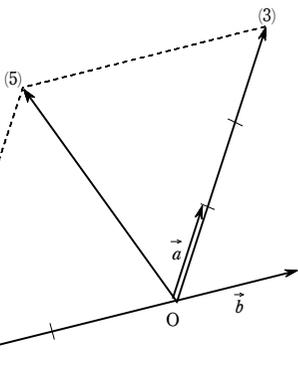
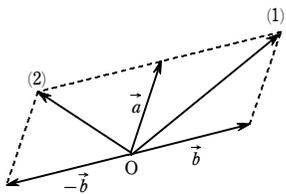
1

解答 (1)～(5) [図]



解説

(1)～(5) [図]



2

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) (左辺) =  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$  (右辺)

(2) (左辺) - (右辺) =  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB})$   
 $= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

よって (左辺) = (右辺)

3

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1)  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2\vec{a} - \vec{b}) - (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 3\vec{b} - 3\vec{a} = 3(\vec{b} - \vec{a})$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

よって  $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{AB}$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  であり,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行でないから  $\overrightarrow{PQ} \neq \vec{0}, \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$

したがって  $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AB}$

(2)  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3\vec{a} - 5\vec{b}) - (\vec{a} - 3\vec{b}) = 2(\vec{a} - \vec{b})$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = -2\vec{b} - (\vec{a} - 3\vec{b}) = -(\vec{a} - \vec{b})$

よって  $\overrightarrow{PQ} = -2\overrightarrow{PR}$

したがって, 3点 P, Q, R は一直線上にある。

4

解答  $\overrightarrow{DF} = -2\vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{OP} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

解説

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = -\vec{b} + (-2\vec{a})$   
 $= -2\vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

$= \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EQ} = 2\vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$

$= 2\vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

5

解答  $\vec{b} = -4\vec{e} + 3\vec{f}, \vec{d} = 6\vec{e} - 3\vec{f}$

解説

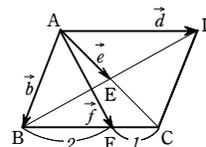
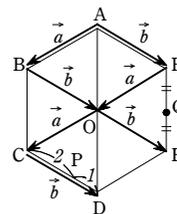
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

よって  $2\vec{e} = \vec{b} + \vec{d} \dots\dots ①$

$3\vec{f} = 3\vec{b} + 2\vec{d} \dots\dots ②$



② - ① × 2 から  $\vec{b} = -4\vec{e} + 3\vec{f}$

① × 3 - ② から  $\vec{d} = 6\vec{e} - 3\vec{f}$

6

解答 (1) ① (3, -6), 3√5 ② (-2, 0), 2 ③ (11, -10), √221

(2) ① (2, 3), √13 ② (8, -6), 10

解説

(1) ①  $3\vec{a} = 3(1, -2) = (3, -6)$

$|3\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$

②  $\vec{a} + \vec{b} = (1, -2) + (-3, 2) = (-2, 0)$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

③  $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(1, -2) - 3(-3, 2) = (2, -4) - (-9, 6)$

$= (2 - (-9), -4 - 6) = (11, -10)$

$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{11^2 + (-10)^2} = \sqrt{221}$

(2) ①  $\overrightarrow{OA} = (2, 3)$

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

②  $\overrightarrow{BC} = (5 - (-3), -2 - 4) = (8, -6)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

7

解答 (1)  $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$  (2) (-6, 8)

解説

(1)  $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

よって  $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}(3, -4) = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

(2)  $\vec{b} = -10\vec{e} = -10(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = (-6, 8)$

8

解答  $\vec{c} = \frac{5}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

解説

$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とおくと  $(3, 7) = s(3, 5) + t(1, -1)$   
 $= (3s + t, 5s - t)$

よって  $3s + t = 3, 5s - t = 7$  これを解いて  $s = \frac{5}{4}, t = -\frac{3}{4}$

したがって  $\vec{c} = \frac{5}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

9

解答 (1)  $t = 6$  (2)  $t = 1$  で最小値  $\sqrt{13}$

解説

$\vec{p} + t\vec{q} = (5, 1) + t(-3, 2) = (5 - 3t, 1 + 2t)$

(1)  $\vec{p} + t\vec{q} \neq \vec{0}, \vec{r} \neq \vec{0}$  であるから,  $\vec{p} + t\vec{q}$  と  $\vec{r}$  が平行になるための必要十分条件は,  
 $\vec{p} + t\vec{q} = k\vec{r}$  となる実数  $k$  が存在することである。

よって  $(5 - 3t, 1 + 2t) = k(1, -1)$

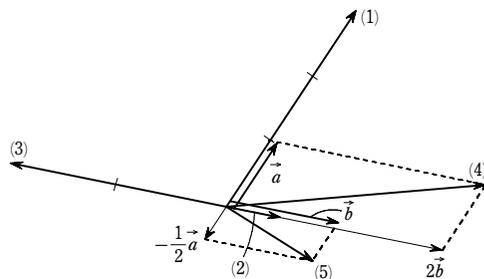
第1講 例題

第1講 例題演習

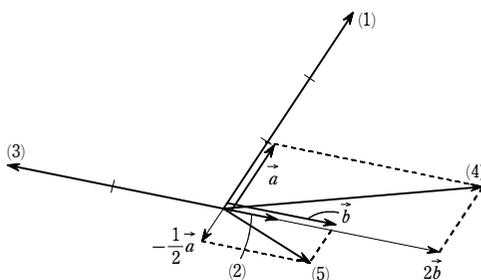
ゆえに  $5-3t=k$  ……①,  $1+2t=-k$  ……②  
 ①, ② から  $k$  を消去して  $1+2t=-(5-3t)$  これを解いて  $t=6$   
 このとき, ① から  $k=-13$  (実数) となり, 適する。  
 したがって, 求める  $t$  の値は  $t=6$   
 (2)  $|\vec{p}+i\vec{q}|^2=(5-3t)^2+(1+2t)^2=13t^2-26t+26$   
 $=13(t^2-2t)+26=13(t-1)^2+13$   
 よって,  $|\vec{p}+i\vec{q}|^2$  は  $t=1$  で最小値  $13$  をとる。  
 $|\vec{p}+i\vec{q}| \geq 0$  であるから, このとき  $|\vec{p}+i\vec{q}|$  も最小となる。  
 したがって,  $|\vec{p}+i\vec{q}|$  は  $t=1$  で最小値  $\sqrt{13}$  をとる。

1

解答



解説



2

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) 左辺  $=\vec{AB}-(\vec{AD}-\vec{AC})=\vec{AB}-\vec{AD}+\vec{AC}$   
 右辺  $=\vec{AC}-(\vec{AD}-\vec{AB})=\vec{AC}-\vec{AD}+\vec{AB}$   
 よって 左辺=右辺

別解 左辺-右辺  $=(\vec{AB}-\vec{CD})-(\vec{AC}-\vec{BD})$   
 $=(\vec{AB}+\vec{BD})-(\vec{AC}+\vec{CD})=\vec{AD}-\vec{AD}=\vec{0}$   
 よって 左辺=右辺

(2) 左辺  $=\vec{AB}+(\vec{AC}-\vec{AD})+(\vec{AF}-\vec{AE})$   
 $=\vec{AB}+\vec{AC}-\vec{AD}+\vec{AF}-\vec{AE}$   
 右辺  $=(\vec{AB}-\vec{AD})+(\vec{AC}-\vec{AE})+\vec{AF}$   
 $=\vec{AB}-\vec{AD}+\vec{AC}-\vec{AE}+\vec{AF}$   
 よって 左辺=右辺

別解 左辺-右辺  $=(\vec{AB}+\vec{DC}+\vec{EF})-(\vec{DB}+\vec{EC}+\vec{AF})$   
 $=(\vec{AB}-\vec{AF})+(\vec{DC}-\vec{DB})+(\vec{EF}-\vec{EC})$   
 $=\vec{FB}+\vec{BC}+\vec{CF}=\vec{FC}+\vec{CF}=\vec{FF}=\vec{0}$   
 よって 左辺=右辺

3

解答 (1) 略 (2) 略

解説

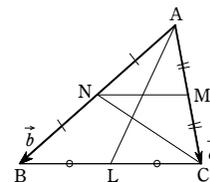
(1)  $\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}=(2\vec{a}+\vec{b})-(6\vec{a}-3\vec{b})$   
 $=-4\vec{a}+4\vec{b}=4(\vec{b}-\vec{a})$   
 $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a}$   
 よって  $\vec{PQ}=4\vec{AB}$   
 ゆえに  $\vec{PQ} \parallel \vec{AB}$   
 (2)  $\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}$   
 $=(3\vec{u}-5\vec{v})-(\vec{u}-3\vec{v})=2(\vec{u}-\vec{v})$  ……①  
 $\vec{PR}=\vec{OR}-\vec{OP}$   
 $=-2\vec{v}-(\vec{u}-3\vec{v})=-(\vec{u}-\vec{v})$  ……②  
 ①, ② から  $\vec{PQ}=-2\vec{PR}$   
 したがって, 3点 P, Q, R は一直線上にある。

4

解答 (1)  $\vec{c}-\vec{b}$  (2)  $\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$  (3)  $\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$  (4)  $\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

解説

(1)  $\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}=\vec{c}-\vec{b}$   
 (2)  $\vec{AL}=\vec{AB}+\vec{BL}=\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}$   
 $=\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$   
 (3)  $\vec{CN}=\vec{AN}-\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{AB}-\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$   
 (4)  $\vec{MN}=\vec{AN}-\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$



5

解答  $\vec{a}=\vec{u}-\vec{v}$ ,  $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$

解説

対角線 AD, BE, CF の交点を O とすると  $\vec{u}=\vec{AD}=2\vec{AO}$   
 $\vec{AO}=\vec{AB}+\vec{BO}=\vec{a}+\vec{b}$  であるから  $\vec{u}=2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$   
 また  $\vec{v}=\vec{BD}=\vec{BC}+\vec{CD}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$   
 よって  $2\vec{a}+2\vec{b}=\vec{u}$  ……①,  $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{v}$  ……②  
 ①-② から  $\vec{a}=\vec{u}-\vec{v}$   
 ①-②×2 から  $-2\vec{b}=\vec{u}-2\vec{v}$  よって  $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$

6

解答 (1) ① (3, 9),  $3\sqrt{10}$  ② (-3, 2),  $\sqrt{13}$  ③ (15, 1),  $\sqrt{226}$   
 ④ (11, -22),  $11\sqrt{5}$   
 (2) ① (12, 5), 13 ② (10, 5),  $5\sqrt{5}$  ③ (-8, -1),  $\sqrt{65}$   
 ④ (-2, 0), 2

解説

(1) ①  $3\vec{a}=3(1, 3)=(3, 9)$

$$|3\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$(2) \quad -\vec{b} = -(3, -2) = (-3, 2)$$

$$|-\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$(3) \quad 3\vec{a} + 4\vec{b} = 3(1, 3) + 4(3, -2) = (3, 9) + (12, -8) \\ = (3+12, 9-8) = (15, 1)$$

$$|3\vec{a} + 4\vec{b}| = \sqrt{15^2 + 1^2} = \sqrt{226}$$

$$(4) \quad 5\vec{b} - 4\vec{a} = 5(3, -2) - 4(1, 3) = (15, -10) - (4, 12) \\ = (15-4, -10-12) = (11, -22)$$

$$|5\vec{b} - 4\vec{a}| = \sqrt{11^2 + (-22)^2} = 11\sqrt{5}$$

$$(2) \quad (1) \quad \vec{OB} = (12, 5)$$

$$|\vec{OB}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$(2) \quad \vec{AB} = (12-2, 5-0) = (10, 5)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

$$(3) \quad \vec{BC} = (4-12, 4-5) = (-8, -1)$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$$

$$(4) \quad \vec{AO} = (0-2, 0-0) = (-2, 0)$$

$$|\vec{AO}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

7

$$\text{解答} \quad (1) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad (2) \quad (-4, 2\sqrt{5})$$

解説

(1)  $\vec{a} = (1, 2)$  と同じ向き単位ベクトルは

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}}(1, 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(2)  $\vec{b} = (2, -\sqrt{5})$  と反対向きで、大きさが6のベクトルは

$$-\frac{6\vec{b}}{|\vec{b}|} = -\frac{6}{\sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2}}(2, -\sqrt{5}) = (-4, 2\sqrt{5})$$

8

$$\text{解答} \quad (1) \quad \vec{p} = 2\vec{a} + 5\vec{b} \quad (2) \quad \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

解説

(1)  $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とおくと

$$(1, -4) = s(-2, 3) + t(1, -2) = (-2s+t, 3s-2t)$$

$$\text{よって} \quad -2s+t=1, \quad 3s-2t=-4$$

$$\text{これを解いて} \quad s=2, \quad t=5$$

$$\text{したがって} \quad \vec{p} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$$

(2)  $\vec{q} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とおくと

$$(0, -1) = s(-2, 3) + t(1, -2) \\ = (-2s+t, 3s-2t)$$

$$\text{よって} \quad -2s+t=0, \quad 3s-2t=-1$$

$$\text{これを解いて} \quad s=1, \quad t=2$$

$$\text{したがって} \quad \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

9

$$\text{解答} \quad (1) \quad x = \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad (1) \quad t = -1 \pm \sqrt{2} \quad (2) \quad t = -1 \text{ のとき最小値 } \sqrt{5}$$

解説

$$(1) \quad \vec{a} + 3\vec{b} = (x, -1) + 3(2, -3) = (x+6, -1-9) = (x+6, -10)$$

$$\vec{b} - \vec{a} = (2, -3) - (x, -1) = (2-x, -3+1) = (2-x, -2)$$

$\vec{a} + 3\vec{b}$  と  $\vec{b} - \vec{a}$  が平行になるとき、 $\vec{a} + 3\vec{b} = k(\vec{b} - \vec{a})$  ( $k$  は実数) と表されるから  
 $(x+6, -10) = k(2-x, -2)$

$$\text{よって} \quad x+6 = k(2-x) \dots\dots ①, \quad -10 = -2k \dots\dots ②$$

$$② \text{ から} \quad k=5 \quad \text{これを} ① \text{ に代入して} \quad x+6 = 5(2-x)$$

$$\text{したがって} \quad x = \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad (1) \quad \vec{c} = (3, 1) + t(1, 2) = (3+t, 1+2t)$$

$$\text{よって} \quad |\vec{c}|^2 = (3+t)^2 + (1+2t)^2 = 5t^2 + 10t + 10$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{15} \quad \text{すなわち} \quad |\vec{c}|^2 = 15 \text{ のとき} \quad 5t^2 + 10t + 10 = 15$$

$$\text{ゆえに} \quad t^2 + 2t - 1 = 0 \quad \text{したがって} \quad t = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$(2) \quad (1) \text{ から} \quad |\vec{c}|^2 = 5(t+1)^2 + 5$$

よって、 $t = -1$  のとき  $|\vec{c}|^2$  は最小値 5 をとる。

$|\vec{c}| \geq 0$  であるから、このとき  $|\vec{c}|$  も最小になる。

したがって、 $|\vec{c}|$  は、 $t = -1$  のとき最小値  $\sqrt{5}$  をとる。

1

$$\text{解答} \quad \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{EF} = -\vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{CE} = -\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{BD} = \vec{a} + 2\vec{b}, \\ \vec{QP} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

解説

$$\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$$

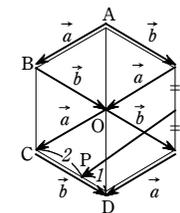
$$\vec{EF} = \vec{EO} + \vec{OF} = -\vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{CE} = \vec{CO} + \vec{OE} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{QP} = \vec{QE} + \vec{ED} + \vec{DP} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} \\ = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$



2

$$\text{解答} \quad (1) \quad \vec{b} = -4\vec{e} + 3\vec{f}, \quad \vec{d} = 6\vec{e} - 3\vec{f} \quad (2) \quad \vec{BG} = \frac{4}{5}(5\vec{e} - 3\vec{f})$$

解説

$$(1) \quad \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})$$

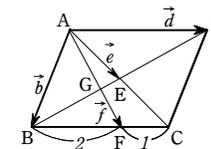
$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}$$

$$\text{よって} \quad \vec{e} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}, \quad \vec{f} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}$$

$$\text{これを解いて} \quad \vec{b} = -4\vec{e} + 3\vec{f}, \quad \vec{d} = 6\vec{e} - 3\vec{f}$$

$$(2) \quad \vec{AD} \parallel \vec{BC} \text{ であるから} \quad \vec{BG} : \vec{DG} = \vec{BF} : \vec{DA} = 2 : 3$$

$$\text{ゆえに} \quad \vec{BG} = \frac{2}{5}\vec{BD} = \frac{2}{5}(\vec{AD} - \vec{AB}) \\ = \frac{2}{5}\{(6\vec{e} - 3\vec{f}) - (-4\vec{e} + 3\vec{f})\} \\ = \frac{4}{5}(5\vec{e} - 3\vec{f})$$



3

$$\text{解答} \quad a = 1 - \sqrt{2}$$

解説

$$\vec{CA} = (a-1, a), \quad \vec{DB} = (2, a+1) \quad \text{よって} \quad \vec{CA} \neq \vec{0}, \quad \vec{DB} \neq \vec{0}$$

$\vec{CA}$  と  $\vec{DB}$  が平行であるための条件は

$$\vec{CA} = k\vec{DB} \quad \dots\dots ①$$

となる実数  $k$  が存在することである。

$$① \text{ から} \quad (a-1, a) = k(2, a+1)$$

$$\text{よって} \quad a-1 = 2k \quad \dots\dots ②, \quad a = k(a+1) \quad \dots\dots ③$$

$$② \text{ から} \quad k = \frac{a-1}{2} \quad \dots\dots ④$$

$$\text{これを} ③ \text{ に代入して} \quad a = \frac{a-1}{2}(a+1)$$

$$\text{整理すると} \quad a^2 - 2a - 1 = 0 \quad \text{これを解くと} \quad a = 1 \pm \sqrt{2}$$

$a < 0$  から  $a = 1 - \sqrt{2}$

このとき、④ から  $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  (実数) となり、適する。

したがって  $a = 1 - \sqrt{2}$

別解  $\vec{CA} = (a-1, a)$ ,  $\vec{DB} = (2, a+1)$  であるから、 $\vec{CA}$  と  $\vec{DB}$  が平行であるための条件は  $(a-1) \cdot (a+1) - a \cdot 2 = 0$

整理すると  $a^2 - 2a - 1 = 0$  これを解くと  $a = 1 \pm \sqrt{2}$

$a < 0$  から  $a = 1 - \sqrt{2}$

4

解答 (1)  $a=2, b=1; \sqrt{34}, \sqrt{5}$  (2)  $E(4, 6), 7\sqrt{2}$

解説

(1) 四角形 ABCD が平行四辺形であるための必要十分

条件は  $\vec{AB} = \vec{DC}$

$\vec{AB} = (a+3, 3)$ ,  $\vec{DC} = (5, 4-b)$  であるから

$a+3=5, 3=4-b$

これを解いて  $a=2, b=1$

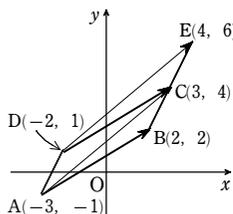
平行四辺形 ABCD の隣合う2辺の長さは

$|\vec{AB}|, |\vec{AD}|$  である。

$\vec{AB} = (5, 3)$ ,  $\vec{AD} = (1, 2)$  であるから

$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$|\vec{AD}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$



(2) 四角形 ACED が平行四辺形であるための必要十分条件は  $\vec{AC} = \vec{DE}$

$\vec{AC} = (6, 5)$  であり、 $E(x, y)$  とすると  $\vec{DE} = (x+2, y-1)$

よって  $6=x+2, 5=y-1$  ゆえに  $x=4, y=6$

したがって  $E(4, 6)$

このとき、 $\vec{AE} = (7, 7)$  であるから、対角線 AE の長さ  $|\vec{AE}|$  は

$|\vec{AE}| = 7\sqrt{1^2 + 1^2} = 7\sqrt{2}$

5

解答 (1)  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  (2)  $t=-1, -\frac{1}{5}$  (3)  $t=-8$

解説

(1)  $\vec{a} + \vec{b} = (-3, 4) + (1, -2) = (-2, 2)$  であるから

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

よって、 $\vec{a} + \vec{b}$  と同じ向きに単位ベクトルは

$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-2, 2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

(2)  $t\vec{a} + \vec{b} = t(1, 2) + (1, 1) = (t+1, 2t+1)$

$|t\vec{a} + \vec{b}| = 1$  となるための条件は  $|t\vec{a} + \vec{b}|^2 = 1$

よって  $(t+1)^2 + (2t+1)^2 = 1$  すなわち  $5t^2 + 6t + 1 = 0$

ゆえに  $(t+1)(5t+1) = 0$  したがって  $t = -1, -\frac{1}{5}$

(3)  $\vec{a} - \vec{c} = (-6, 4-t)$ ,  $\vec{b} - \vec{c} = (6, -(t+5))$

$|\vec{a} - \vec{c}| = 2|\vec{b} - \vec{c}|$  であるから  $|\vec{a} - \vec{c}|^2 = 4|\vec{b} - \vec{c}|^2$

ゆえに  $(-6)^2 + (4-t)^2 = 4\{6^2 + (t+5)^2\}$

よって  $t^2 + 16t + 64 = 0$  ゆえに  $(t+8)^2 = 0$

よって  $t = -8$

1

解答 平行四辺形

解説

$2\vec{BP} = \vec{BC}$  から  $\vec{BP} = \frac{1}{2}\vec{BC}$  ……①

$2\vec{AQ} + \vec{AB} = \vec{AC}$  から  $2\vec{AQ} = \vec{AC} - \vec{AB}$

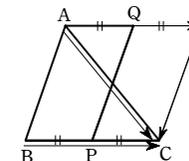
よって  $2\vec{AQ} = \vec{BC}$

ゆえに  $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$  ……②

①, ② から  $\vec{BP} = \vec{AQ}$

よって  $BP \parallel AQ, BP = AQ$

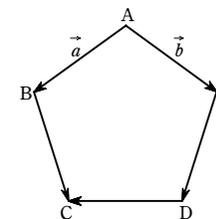
したがって、四角形 ABPQ は平行四辺形である。



2

(1)  $\triangle ABC$  において、辺 BC 上に点 D を、辺 AC 上に点 E をとり、 $BD : DC = 1 : 2$ ,  $AE : EC = 1 : 2$  とする。BE と AD の交点を P とするとき、 $\vec{AP}$  を  $\vec{AB}$  と  $\vec{AC}$  で表せ。

(2) 正五角形 ABCDE において、 $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AE} = \vec{b}$  とおくと、3つのベクトル  $\vec{BC}, \vec{DC}, \vec{ED}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表せ。ただし、必要ならば  $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$  を用いてもよい。



解答 (1)  $\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{AC}$

(2)  $\vec{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{DC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$ ,  $\vec{ED} = \vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{b}$

解説

(1)  $BD : DC = AE : EC$  であるから  $AB \parallel ED$

よって  $BP : PE = AB : DE = AC : EC = 3 : 2$

ゆえに  $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BE}$  ……①

ここで  $\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AC} - \vec{AB}$

これを①に代入して

$\vec{AP} = \vec{AB} + \frac{3}{5}(\frac{1}{3}\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{AC}$

(2) 正五角形 ABCDE において、

$\angle BAE = 108^\circ$  であるから

$\angle ABE = \angle AEB = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$

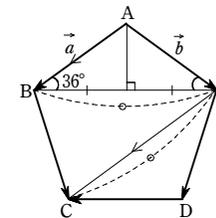
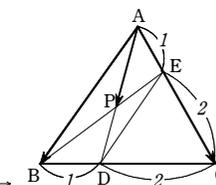
よって、 $AB = a$  とすると

$BE = 2a \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}a$

ゆえに  $AB : BE = 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$AB \parallel EC$  であるから

$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{AE} + \vec{EC} - \vec{AB}$



$$= \vec{b} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a} - \vec{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{a} + \vec{b}$$

また、 $CD : BE = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  から  $CD = \frac{2}{1+\sqrt{5}} BE = \frac{\sqrt{5}-1}{2} BE$

ゆえに  $\vec{DC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{EB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} (\vec{a} - \vec{b})$

更に  $\vec{ED} = \vec{AD} - \vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BD} - \vec{AE}$   
 $= \vec{a} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{b} - \vec{b} = \vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{b}$

1

解答 (1) 3 (2) 2 (3) -2 (4) 0

解説

$$|\vec{AM}| = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

(1)  $\vec{AB}$  と  $\vec{AM}$  のなす角は  $30^\circ$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{AB} \cdot \vec{AM} &= |\vec{AB}| |\vec{AM}| \cos 30^\circ \\ &= 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \end{aligned}$$

(2)  $\vec{AM}$  と  $\vec{BC}$  のなす角は  $90^\circ$

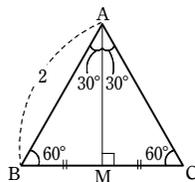
$$\text{よって } \vec{AM} \cdot \vec{BC} = |\vec{AM}| |\vec{BC}| \cos 90^\circ = 0$$

(3)  $\vec{BA}$  と  $\vec{BC}$  のなす角は  $60^\circ$

$$\text{よって } \vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| |\vec{BC}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

(4)  $\vec{AC}$  と  $\vec{CB}$  のなす角は  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$\text{よって } \vec{AC} \cdot \vec{CB} = |\vec{AC}| |\vec{CB}| \cos 120^\circ = 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$



2

解答  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\sqrt{3}$ ,  $\theta = 150^\circ$

解説

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \times (-1) + 1 \times (-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 150^\circ$

3

$$\text{解答 } \vec{e} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

解説

$\vec{e} = (x, y)$  とする。

$$\vec{a} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \text{ すなわち } x - \sqrt{3}y = 0$$

$$\text{よって } x = \sqrt{3}y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } |\vec{e}|^2 = 1^2 \text{ から } x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ から } y^2 = \frac{1}{4} \text{ したがって } y = \pm \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から, } y = \frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} \text{ のとき } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって } \vec{e} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

4

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$$\begin{aligned} (1) \text{ (左辺)} &= (\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{c} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - (2\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{(右辺)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ (右辺)} &= (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b}) + 3(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (3\vec{a}) \cdot (3\vec{a}) + (3\vec{a}) \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot (3\vec{a}) + \vec{b} \cdot \vec{b} + 3(\vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a}) \\ &= 9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + 3(|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2) \\ &= 12|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 = \text{(左辺)} \end{aligned}$$

5

解答 (1)  $\sqrt{23}$  (2)  $\sqrt{7}$

解説

$$(1) |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2 + 2(-1) + 4^2 = 23$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{23}$$

$$\begin{aligned} (2) |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ |\vec{a}| &= 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} - \vec{b}| = 1 \text{ であるから } 1^2 = 2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\sqrt{3})^2 \\ \text{したがって } \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{ここで } |2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \text{ であるから}$$

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = 4 \times 2^2 - 12 \times 3 + 9 \times (\sqrt{3})^2 = 7$$

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$$

6

解答 (ア)  $-\frac{3}{5}$  (イ)  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

解説

$$\triangle ABC \text{ は半径 } 1 \text{ の円 } O \text{ に内接するから } |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1$$

$$5\vec{OA} + 3\vec{OB} + 4\vec{OC} = \vec{0} \text{ であるから } 5\vec{OA} + 3\vec{OB} = -4\vec{OC}$$

$$\text{よって } |5\vec{OA} + 3\vec{OB}| = |-4\vec{OC}|$$

$$\text{ここで } |5\vec{OA} + 3\vec{OB}|^2 = 25|\vec{OA}|^2 + 30\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 9|\vec{OB}|^2 = 30\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 34$$

$$|-4\vec{OC}|^2 = 16|\vec{OC}|^2 = 16$$

$$\text{よって } 30\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 34 = 16 \quad \text{ゆえに } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \text{ であるから } |\vec{AB}|^2 &= |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 = |\vec{OB}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OA}|^2 \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 1 = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

$$\text{したがって, 辺 } AB \text{ の長さは } |\vec{AB}| = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

7

解答 24

解説

$$\vec{AB} = (-2, -10), \vec{AC} = (4, -4) \text{ であるから}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-10)^2} = 2\sqrt{26}, |\vec{AC}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times 4 + (-10) \times (-4) = 32$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{(2\sqrt{26})^2 \times (4\sqrt{2})^2 - 32^2} = 24$$

別解  $\triangle ABC = \frac{1}{2} |(-2) \times (-4) - (-10) \times 4| = 24$

1

解答 (1) 12 (2) 0 (3) -4 (4) -12

解説

$$AB = 2\sqrt{3}, BC = 2$$

$$(1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

$$(2) \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos 90^\circ = 0$$

(3)  $\overrightarrow{BC}$  と  $\overrightarrow{CA}$  のなす角は  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  であるから

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{CA}| \cos 120^\circ = 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

(4)  $\overrightarrow{AC}$  と  $\overrightarrow{BA}$  のなす角は  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$  であるから

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BA}| \cos 150^\circ = 4 \times 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -12$$

2

解答 (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2, \theta = 60^\circ$  (2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5, \theta = 135^\circ$

解説

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \times (\sqrt{3} - 1) + 1 \times (\sqrt{3} + 1) = 2$$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 60^\circ$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 2 \times (-3) = -5$$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 135^\circ$

3

解答  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

解説

求める単位ベクトルを  $\vec{e} = (x, y)$  とする。

$$|\vec{e}| = 1 \text{ であるから } |\vec{e}|^2 = 1 \text{ よって } x^2 + y^2 = 1 \text{ ……①}$$

$$\vec{a} \perp \vec{e} \text{ であるから } (-1) \times x + \sqrt{3} \times y = 0 \text{ よって } x = \sqrt{3}y \text{ ……②}$$

$$\text{これを①に代入して } (\sqrt{3}y)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{ゆえに } y^2 = \frac{1}{4} \text{ よって } y = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{②から } y = \frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2} \text{ のとき } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって、 $\vec{a}$  に垂直な単位ベクトルは  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

4

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$$(1) \text{ (左辺)} = \vec{p} \cdot (\vec{p} + 2\vec{b}) - \vec{a} \cdot (\vec{p} + 2\vec{b}) \\ = \vec{p} \cdot \vec{p} + 2\vec{b} \cdot \vec{p} - \vec{a} \cdot \vec{p} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ = |\vec{p}|^2 - (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{p} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{(右辺)}$$

よって、等式は成り立つ。

$$(2) \text{ (左辺)} = (\vec{a} - 6\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 6\vec{b}) + (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) \\ = (|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 36|\vec{b}|^2) + (4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2) \\ = 5|\vec{a}|^2 + 45|\vec{b}|^2 = 5(|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2) = \text{(右辺)}$$

よって、等式は成り立つ。

5

解答 (1)  $3\sqrt{7}$  (2)  $\sqrt{37}$

解説

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$\text{よって } |3\vec{a} - \vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 \times 2^2 - 6 \times (-3) + 3^2 = 63$$

$$|3\vec{a} - \vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |3\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{7}$$

$$(2) |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2 \text{ であるから } 2^2 = 2^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 1^2$$

$$\text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$\text{ゆえに } |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 4 \times 2^2 + 12 \times 1 + 9 \times 1^2 = 37$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{37}$$

6

解答 (1)  $-\frac{3}{2}$  (2)  $\frac{\sqrt{7}}{4}$

解説

$$(1) \text{ 条件から } |\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 1, |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{2} \text{ ……①}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ から } \overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\text{よって } |\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2$$

$$\text{ゆえに } |\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2$$

$$\text{①を代入して } (\sqrt{2})^2 = 2^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 1^2$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{3}{2}$$

$$(2) \triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \times 1^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

参考  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  を求めた後に、次のようにして  $\triangle OAB$  の面積を求めることもできる。

$$\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-\frac{3}{2}}{2 \times 1} = -\frac{3}{4}$$

$\sin \angle AOB > 0$  であるから

$$\sin \angle AOB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOB} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって  $\triangle OAB = \frac{1}{2}OA \times OB \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

7

【解答】 (1) 5 (2)  $\frac{19}{2}$

【解説】

(1)  $S = \frac{1}{2}|3 \cdot 4 - 1 \cdot 2| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

(2) 3点A(-2, 1), B(3, 0), C(2, 4)を、点Bが原点Oにくるように平行移動するとき、A, CがそれぞれA', C'に移るとすると、A'(-5, 1), C'(-1, 4)となる。このとき、 $S = \triangle A'OC'$ であるから

$$S = \frac{1}{2}|(-5) \cdot 4 - 1 \cdot (-1)| = \frac{19}{2}$$

1

【解答】  $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

【解説】

求める単位ベクトルを  $\vec{e} = (x, y)$  とすると  $x^2 + y^2 = 1 \dots \dots \textcircled{1}$

また、 $\vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}| |\vec{e}| \cos 60^\circ$  から  $x - y = \sqrt{2} \times 1 \times \frac{1}{2}$  よって  $x - y = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$  から  $x$  を消去して  $y^2 + \sqrt{2}y + \frac{1}{2} + y^2 = 1$  すなわち  $2y^2 + \sqrt{2}y - \frac{1}{2} = 0$

これを解いて  $y = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4}$

$y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$  のとき、 $\textcircled{2}$  から  $x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$y = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$  のとき、 $\textcircled{2}$  から  $x = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ゆえに  $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$  または  $\left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

2

【解答】  $t = -1$

【解説】

$|\vec{a} + \vec{b}| = 2$  から  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4$  よって  $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4$

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2$  を代入して  $2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 4$

ゆえに  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$

$\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} + t\vec{b}$  が垂直になるから  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = 0$

よって  $|\vec{a}|^2 + (t+1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = -2$  を代入して  $2^2 + (t+1) \times (-2) + t \times 2^2 = 0$

ゆえに  $2t + 2 = 0$  したがって  $t = -1$

3

【解答】  $t = -\frac{2}{5}$  で最小値  $2\sqrt{3}$

【解説】

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{21}$  から  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 21$  よって  $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 21$

$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5$  を代入して  $4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 5^2 = 21$  ゆえに  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$

したがって  $|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 = 4^2 + 2t \times 10 + t^2 \times 5^2$   
 $= 25t^2 + 20t + 16 = 25\left(t + \frac{2}{5}\right)^2 + 12$

よって、 $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$  は  $t = -\frac{2}{5}$  で最小値 12 をとる。

$|\vec{a} + t\vec{b}| \geq 0$  であるから、このとき  $|\vec{a} + t\vec{b}|$  も最小になる。

したがって、 $|\vec{a} + t\vec{b}|$  は  $t = -\frac{2}{5}$  で最小値  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  をとる。

4

【解答】 略

【解説】

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OC} = \vec{c}$  とすると

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{c} \quad \vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c}$$

$\vec{OA} \perp \vec{OC}$  から  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

これと  $|\vec{a}| = 3, |\vec{c}| = 2$  から

$$\vec{CD} \cdot \vec{OE} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 - \frac{3}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{3}{4}|\vec{c}|^2$$

$$= \frac{1}{3} \times 3^2 - \frac{3}{4} \times 0 - \frac{3}{4} \times 2^2 = 0$$

$\vec{CD} \neq \vec{0}, \vec{OE} \neq \vec{0}$  であるから  $\vec{CD} \perp \vec{OE}$  したがって  $CD \perp OE$

5

【解答】 (1) 証明は略、等号成立は  $\vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{b} = \vec{0}$  または  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の向きが同じとき

(2) 略

【解説】

(1) [1]  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  のとき、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 - |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$$= 2(|\vec{a}||\vec{b}| - \vec{a} \cdot \vec{b}) = 2(|\vec{a}||\vec{b}| - |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)$$

$$= 2|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$|\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0, 1 - \cos\theta \geq 0$  であるから  $2|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \geq 0$

すなわち  $(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 - |\vec{a} + \vec{b}|^2 \geq 0$

よって  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$

$|\vec{a}| + |\vec{b}| > 0, |\vec{a} + \vec{b}| \geq 0$  であるから  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

等号が成り立つのは  $1 - \cos\theta = 0$  すなわち  $\cos\theta = 1$  のときである。

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから、 $\cos\theta = 1$  より  $\theta = 0^\circ$

このとき、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の向きは同じである。

[2]  $\vec{a} = \vec{0}$  のとき  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}|, |\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{b}|$

よって  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

[3]  $\vec{b} = \vec{0}$  のとき  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}|, |\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a}|$

よって  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

以上から、 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$  が成り立つ。

等号が成り立つのは、 $\vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{b} = \vec{0}$  または  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の向きが同じときである。

(2) (1) の不等式から  $|\vec{3a} + 4b| \leq |3a| + |4b|$

したがって  $|\vec{3a} + 4b| \leq |3a| + |4b|$

1

解答 (1)  $|\vec{a}| = \sqrt{7}, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$  (2)  $k \leq -\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2} \leq k$

解説

(1)  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 = 4^2$  から  $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$  …… ①

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{q}|^2 = 2^2$  から  $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4$  …… ②

①-② から  $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$  よって  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

①+② から  $2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = 20$  ゆえに  $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 10$  …… ③

また  $\vec{p} \cdot \vec{q} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ ,

$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos 60^\circ = 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4$

よって  $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 4$  …… ④

③, ④ から  $|\vec{a}|^2 = 7, |\vec{b}|^2 = 3$

$|\vec{a}| \geq 0, |\vec{b}| \geq 0$  であるから  $|\vec{a}| = \sqrt{7}, |\vec{b}| = \sqrt{3}$

(2)  $|\vec{a} + k\vec{b}| \geq |\vec{b}|$  は  $|\vec{a} + k\vec{b}|^2 \geq |\vec{b}|^2$  …… ① と同値である。

① を変形すると  $t^2|\vec{a}|^2 + 2kt\vec{a} \cdot \vec{b} + (k^2 - 1)|\vec{b}|^2 \geq 0$

(1) から  $7t^2 + 6kt + 3(k^2 - 1) \geq 0$  …… ②

求める条件は、すべての実数  $t$  に対して②が成り立つための条件であり、 $t$  の2次方程式  $7t^2 + 6kt + 3(k^2 - 1) = 0$  の判別式を  $D$  とすると、 $t^2$  の係数が正であるから

$D \leq 0$  ゆえに  $\frac{D}{4} = (3k)^2 - 7 \times 3(k^2 - 1) \leq 0$

よって  $4k^2 - 7 \geq 0$  ゆえに  $\left(k + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(k - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \geq 0$

したがって  $k \leq -\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2} \leq k$

2

解答 (1)  $\sqrt{k^2 + 4}$  (2)  $k = -4 + 2\sqrt{3}$

解説

(1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は直交するから  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

また、 $\vec{c} + \vec{d} = 2\vec{a} + k\vec{b}$  であるから

$|\vec{c} + \vec{d}|^2 = |2\vec{a} + k\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 4k\vec{a} \cdot \vec{b} + k^2|\vec{b}|^2 = k^2 + 4$

$|\vec{c} + \vec{d}| \geq 0$  であるから  $|\vec{c} + \vec{d}| = \sqrt{k^2 + 4}$

(2)  $\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{c} + \vec{d}$  のなす角が  $60^\circ$  であるとき

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = |\vec{a} + \vec{b}||\vec{c} + \vec{d}|\cos 60^\circ$  …… ①

ここで  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + k\vec{b})$

$= 2|\vec{a}|^2 + (k+2)\vec{a} \cdot \vec{b} + k|\vec{b}|^2$   
 $= k+2$

また  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2$

$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0$  であるから  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}$

ゆえに、① から  $k+2 = \sqrt{2} \times \sqrt{k^2 + 4} \times \frac{1}{2}$

すなわち  $\sqrt{2}(k+2) = \sqrt{k^2 + 4}$  …… ②

右辺の  $\sqrt{k^2 + 4}$  は正であるから  $k+2 > 0$  よって  $k > -2$  …… ③

このとき、②の両辺を2乗して整理すると  $k^2 + 8k + 4 = 0$

これを解くと  $k = -4 \pm 2\sqrt{3}$

このうち、③を満たすのは  $k = -4 + 2\sqrt{3}$

3

解答 (1)  $\theta = 120^\circ$  (2)  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき最小値  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

解説

(1)  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$  であるから  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$

よって  $|\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2 = 0$

$|\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0$  であるから  $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$  …… ①

また、 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2|\vec{b}|$  から  $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 4|\vec{b}|^2$

よって  $|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4|\vec{b}|^2$  ゆえに  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$  …… ②

よって  $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = -\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$  ①を代入して  $2|\vec{b}|^2\cos\theta = -|\vec{b}|^2$

$|\vec{b}| > 0$  であるから  $\cos\theta = -\frac{1}{2}$   $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 120^\circ$

(2)  $|\vec{a}| = 1$  のとき、①, ②から  $|\vec{b}| = \frac{1}{2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{4}$

よって  $\left|\vec{t}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}\right|^2 = t^2|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{t^2}|\vec{b}|^2$   
 $= t^2 \times 1^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{t^2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(t^2 + \frac{1}{4t^2}\right) - \frac{1}{2}$   
 $\geq 2\sqrt{t^2 \times \frac{1}{4t^2}} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$t > 0$  であるから、 $\left|\vec{t}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}\right|^2$  は  $t^2 = \frac{1}{4t^2}$  すなわち  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき最小値  $\frac{1}{2}$  ととる。

$\left|\vec{t}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}\right| \geq 0$  であるから、このとき  $\left|\vec{t}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}\right|$  も最小となる。

ゆえに、 $\left|\vec{t}\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}\right|$  は  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき最小値  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ととる。

4

解答  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

解説

$(\vec{a} + t\vec{b}) \perp (\vec{a} + 3t\vec{b})$  であるから  $(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3t\vec{b}) = 0$

よって  $3|\vec{b}|^2 t^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} t + |\vec{a}|^2 = 0$  …… ①

$|\vec{b}| \neq 0$  であるから、 $(\vec{a} + t\vec{b}) \perp (\vec{a} + 3t\vec{b})$  であるような実数  $t$  がただ1つ存在するための条件は、 $t$  についての2次方程式①の判別式を  $D$  とすると  $D = 0$

ここで  $\frac{D}{4} = (2\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - 3|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(4\cos^2\theta - 3)$

よって、 $D = 0$  から  $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(4\cos^2\theta - 3) = 0$

$|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$  であるから、 $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$  より  $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

1

解答 (1)  $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$  (2)  $\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

解説

(1)  $\frac{3\vec{a} + \vec{b}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

(2)  $\frac{-3\vec{a} + \vec{b}}{1-3} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

2

解答 (1) 辺 BC を 3 : 4 に内分する点を D とすると、線分 AD を 7 : 5 に内分する点 P (2) 5 : 4 : 3

解説

(1)  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AP} = \vec{p}$  とする。

等式から  $5\overrightarrow{AP} + 4(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

よって  $5\vec{p} + 4(\vec{p} - \vec{b}) + 3(\vec{p} - \vec{c}) = \vec{0}$

ゆえに  $\vec{p} = \frac{4\vec{b} + 3\vec{c}}{12} = \frac{7}{12} \times \frac{4\vec{b} + 3\vec{c}}{7} = \frac{7}{12} \times \frac{4\vec{b} + 3\vec{c}}{3+4}$

したがって、辺 BC を 3 : 4 に内分する点を D とすると、点 P は線分 AD を 7 : 5 に内分する点である。

(2)  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

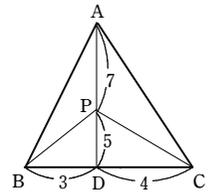
$\triangle PBC = \frac{5}{12}S$

$\triangle PCA = \frac{7}{12}\triangle ADC = \frac{7}{12} \times \frac{4}{7}S = \frac{1}{3}S$

$\triangle PAB = \frac{7}{12}\triangle ABD = \frac{7}{12} \times \frac{3}{7}S = \frac{1}{4}S$

よって

$\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = \frac{5}{12}S : \frac{1}{3}S : \frac{1}{4}S = 5 : 4 : 3$



3

解答 証明略、19 : 6

解説

$\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$  とすると  $\overrightarrow{DL} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{c}}{5}$  …… ①

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c}$  であるから

$\overrightarrow{DN} = \frac{15\overrightarrow{DM} + 4\overrightarrow{DC}}{19} = \frac{15\left(\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c}\right) + 4\vec{c}}{19}$

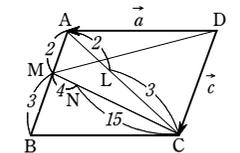
$= \frac{15\vec{a} + 10\vec{c}}{19} = \frac{5}{19}(3\vec{a} + 2\vec{c})$  …… ②

①, ②から  $\overrightarrow{DN} = \frac{25}{19}\overrightarrow{DL}$

したがって、3点 D, L, N は一直線上にあり、DL : LN = 19 : 6

4

解答 (1)  $\overrightarrow{AP} = \frac{8}{23}\vec{b} + \frac{9}{23}\vec{c}$  (2)  $\overrightarrow{AQ} = \frac{8}{17}\vec{b} + \frac{9}{17}\vec{c}$



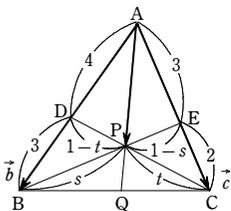
第3講 例題

【解説】

(1)  $BP : PE = s : (1-s)$ ,  $CP : PD = t : (1-t)$  とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AE} \\ &= (1-s)\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{4}{7}t\vec{b} + (1-t)\vec{c} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$



①, ② から  $(1-s)\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c} = \frac{4}{7}t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$

$\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{c} \neq \vec{0}$  で,  $\vec{b}$  と  $\vec{c}$  は平行でないから  $1-s = \frac{4}{7}t$ ,  $\frac{3}{5}s = 1-t$

よって  $7s+4t=7$ ,  $3s+5t=5$  これを解いて  $s = \frac{15}{23}$ ,  $t = \frac{14}{23}$

$s = \frac{15}{23}$  を①に代入して  $\overrightarrow{AP} = \frac{8}{23}\vec{b} + \frac{9}{23}\vec{c}$

(2)  $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP}$  ( $k$  は実数) とすると

$$\overrightarrow{AQ} = k\left(\frac{8}{23}\vec{b} + \frac{9}{23}\vec{c}\right) = \frac{8}{23}k\vec{b} + \frac{9}{23}k\vec{c} \quad \dots\dots ③$$

$BQ : QC = u : (1-u)$  とすると  $\overrightarrow{AQ} = (1-u)\vec{b} + u\vec{c} \quad \dots\dots ④$

③, ④ から  $\frac{8}{23}k\vec{b} + \frac{9}{23}k\vec{c} = (1-u)\vec{b} + u\vec{c}$

$\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{c} \neq \vec{0}$  で,  $\vec{b}$  と  $\vec{c}$  は平行でないから  $\frac{8}{23}k = 1-u$ ,  $\frac{9}{23}k = u$

これを解いて  $k = \frac{23}{17}$ ,  $u = \frac{9}{17}$

$u = \frac{9}{17}$  を④に代入して  $\overrightarrow{AQ} = \frac{8}{17}\vec{b} + \frac{9}{17}\vec{c}$

【参考1】 後の項目「ベクトル方程式」で次のことを学習する。

点  $P(\vec{p})$  が 2 点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  を通る直線上にある

$$\iff \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s+t=1$$

このことを利用すると, ③ から直ちに  $k$  の値を求めることができる。

(別解) 点  $Q$  は辺  $BC$  上にあるから, ③ より

$$\frac{8}{23}k + \frac{9}{23}k = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{23}{17}$$

【参考2】 (1) の  $\overrightarrow{AP}$  を求めるのにメネラウスの定理, (2) の  $\overrightarrow{AQ}$  を求めるのにチェバの定理を利用してよい。

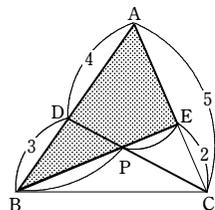
(1)  $\triangle ABE$  と直線  $CD$  について, メネラウスの定理から

$$\frac{BP}{PE} \cdot \frac{EC}{CA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$$

すなわち  $\frac{BP}{PE} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = 1$

よって,  $BP : PE = 15 : 8$  であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{8\overrightarrow{AB} + 15\overrightarrow{AE}}{15+8} = \frac{1}{23}\left(8\vec{b} + 15 \times \frac{3}{5}\vec{c}\right) \\ &= \frac{8}{23}\vec{b} + \frac{9}{23}\vec{c} \end{aligned}$$



(2) チェバの定理から  $\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$

すなわち  $\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = 1$

よって,  $BQ : QC = 9 : 8$  であるから

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{8\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AC}}{9+8} = \frac{8}{17}\vec{b} + \frac{9}{17}\vec{c}$$

【5】

【解答】  $\overrightarrow{OH} = \frac{5}{24}\vec{a} + \frac{19}{144}\vec{b}$

【解説】

余弦定理から  $\cos \angle AOB = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

よって  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \angle AOB = 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{5} = 6$

$H$  は垂心であるから  $OH \perp AB$ ,  $AH \perp OB$

$\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$  ( $s, t$  は実数) とする。

$OH \perp AB$  より  $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  であるから

$$(s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

よって  $-s|\vec{a}|^2 + (s-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$

ゆえに  $-25s + 6(s-t) + 36t = 0$

すなわち  $-19s + 30t = 0 \quad \dots\dots ①$

また,  $AH \perp OB$  より  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  であるから

$$\{(s-1)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot \vec{b} = 0$$

よって  $(s-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$

ゆえに  $6(s-1) + 36t = 0$  すなわち  $s+6t=1 \quad \dots\dots ②$

①, ② から  $s = \frac{5}{24}$ ,  $t = \frac{19}{144}$

したがって  $\overrightarrow{OH} = \frac{5}{24}\vec{a} + \frac{19}{144}\vec{b}$

【6】

【解答】  $\overrightarrow{AO} = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$

【解説】

条件から  $|\vec{b}|=3$ ,  $|\vec{c}|=2$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3 \times 2 \cos 60^\circ = 3$

$\overrightarrow{AO} = s\vec{b} + t\vec{c}$  ( $s, t$  は実数) とおく。

辺  $AB$  の中点を  $M$  とすると, 点  $O$  は  $\triangle ABC$  の外心であるから

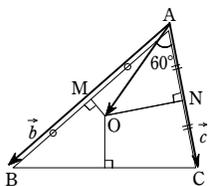
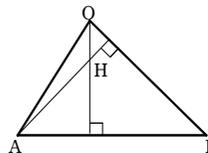
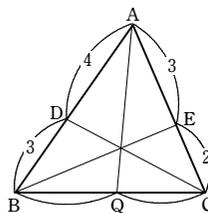
$OM \perp AB$  よって  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{b} - (s\vec{b} + t\vec{c}) = \left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{b} - t\vec{c}$$

であるから

$$\left\{\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{b} - t\vec{c}\right\} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{2}-s\right)|\vec{b}|^2 - t\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

これに  $|\vec{b}|=3$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}=3$  を代入して整理すると  $6s+2t=3 \quad \dots\dots ①$



辺  $AC$  の中点を  $N$  とすると, 点  $O$  は  $\triangle ABC$  の外心であるから  $ON \perp AC$

よって  $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{c} - (s\vec{b} + t\vec{c}) = -s\vec{b} + \left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{c}$$

であるから

$$\left\{-s\vec{b} + \left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{c}\right\} \cdot \vec{c} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad -s\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(\frac{1}{2}-t\right)|\vec{c}|^2 = 0$$

これに  $\vec{b} \cdot \vec{c}=3$ ,  $|\vec{c}|=2$  を代入して整理すると  $3s+4t=2 \quad \dots\dots ②$

①, ② を解いて  $s = \frac{4}{9}$ ,  $t = \frac{1}{6}$

したがって  $\overrightarrow{AO} = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$

第3講 例題演習

1

【解答】 (1)  $\frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{7}$  (2)  $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$  (3)  $4\vec{a}-3\vec{b}$  (4)  $\frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$

【解説】

(1)  $\frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{2+5} = \frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{7}$  (2)  $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$   
 (3)  $\frac{-4\vec{a}+3\vec{b}}{3-4} = 4\vec{a}-3\vec{b}$  (4)  $\frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{3-1} = \frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$

2

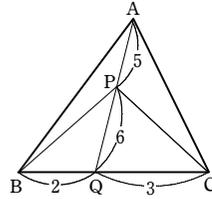
【解答】 (1) 辺 BC を 2:3 に内分する点を Q とすると、線分 AQ を 5:6 に内分する点  
 (2) 6:3:2

【解説】

(1) 与えられた等式から  $6\vec{AP}+3(\vec{AP}-\vec{AB})+2(\vec{AP}-\vec{AC})=\vec{0}$

よって  $11\vec{AP}=3\vec{AB}+2\vec{AC}$   
 ゆえに  $\vec{AP}=\frac{3\vec{AB}+2\vec{AC}}{11}=\frac{5}{11}\times\frac{3\vec{AB}+2\vec{AC}}{5}$   
 $\frac{3\vec{AB}+2\vec{AC}}{5}=\vec{AQ}$  とおくと  $\vec{AP}=\frac{5}{11}\vec{AQ}$

よって BQ:QC=2:3, AP:PQ=5:6  
 したがって、辺 BC を 2:3 に内分する点を Q とすると、点 P は線分 AQ を 5:6 に内分する点である。



(2)  $\triangle PBQ : \triangle PCQ = BQ : QC = 2 : 3$

よって、 $\triangle PBQ = 2S$  とすると  $\triangle PCQ = 3S$

ゆえに  $\triangle PBC = 2S + 3S = 5S$

$\triangle PCQ : \triangle PCA = 6 : 5$  であるから  $\triangle PCA = \frac{5}{6} \times 3S = \frac{5}{2}S$

$\triangle PBQ : \triangle PAB = 6 : 5$  であるから  $\triangle PAB = \frac{5}{6} \times 2S = \frac{5}{3}S$

したがって  $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = 5S : \frac{5}{2}S : \frac{5}{3}S = 6 : 3 : 2$

3

【解答】 (1) 証明略, 1:4 (2) 略

【解説】

(1)  $\vec{AB}=\vec{b}, \vec{AC}=\vec{c}$  とすると

$\vec{AP}=\frac{-\vec{AB}+2\vec{AC}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$

$\vec{AQ}=\frac{1}{3}\vec{AB}=\frac{1}{3}\vec{b}$

$\vec{AR}=\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{c}$

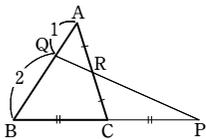
よって  $\vec{QR}=\vec{AR}-\vec{AQ}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}=-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{QP}=\vec{AP}-\vec{AQ}=(-\vec{b}+2\vec{c})-\frac{1}{3}\vec{b}=-\frac{4}{3}\vec{b}+2\vec{c}=4\left(-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

ゆえに  $\vec{QP}=4\vec{QR}$

したがって、3点 P, Q, R は一直線上にある。

また QR:QP=1:4



(2)  $\vec{CB}=\vec{b}, \vec{CD}=\vec{d}$  とすると

$\vec{CP}=\frac{10\vec{b}+9\vec{d}}{19}$  ..... ①

$\vec{CQ}=\vec{CB}+\vec{BQ}=\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}$  であるから

$\vec{CR}=\frac{2\vec{CQ}+\vec{CD}}{3}=\frac{2\left(\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}\right)+\vec{d}}{3}$   
 $=\frac{10\vec{b}+9\vec{d}}{15}$  ..... ②

①, ② から  $\vec{CR}=\frac{19}{15}\vec{CP}$

よって、3点 C, P, R は一直線上にある。

4

【解答】 (1)  $\vec{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$  (2)  $\vec{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

【解説】

(1) AP:PD=s:(1-s), BP:PC=t:(1-t) とすると

$\vec{OP}=(1-s)\vec{OA}+s\vec{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{7}s\vec{b}$ ,

$\vec{OP}=t\vec{OC}+(1-t)\vec{OB}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

よって  $(1-s)\vec{a}+\frac{3}{7}s\vec{b}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \vec{a}\not\parallel\vec{b}$  であるから  $1-s=\frac{3}{5}t, \frac{3}{7}s=1-t$

これを解いて  $s=\frac{7}{13}, t=\frac{10}{13}$  したがって  $\vec{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

(2) AQ:QB=u:(1-u) とすると  $\vec{OQ}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$

また、点 Q は直線 OP 上にあるから、 $\vec{OQ}=k\vec{OP}$

(k は実数) とすると、(1) の結果から

$\vec{OQ}=k\left(\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}\right)=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$

よって  $(1-u)\vec{a}+u\vec{b}=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \vec{a}\not\parallel\vec{b}$  であるから  $1-u=\frac{6}{13}k, u=\frac{3}{13}k$

これを解いて  $k=\frac{13}{9}, u=\frac{1}{3}$  したがって  $\vec{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

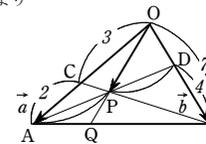
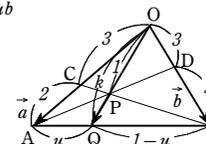
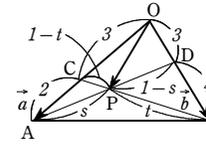
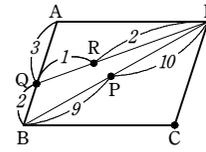
【別解】 チェバ・メネラウスの定理の利用

(1)  $\triangle OAD$  と直線 BC について、メネラウスの定理により

$\frac{OC}{CA} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BO} = 1$  よって  $\frac{3}{2} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{4}{7} = 1$

ゆえに  $\frac{AP}{PD} = \frac{7}{6}$  すなわち AP:PD=7:6

よって  $\vec{OP}=\frac{6\vec{OA}+7\vec{OD}}{7+6}=\frac{1}{13}\left(6\vec{a}+7\cdot\frac{3}{7}\vec{b}\right)$   
 $=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

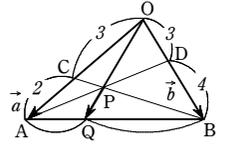


(2)  $\triangle OAB$  において、チェバの定理により

$\frac{OC}{CA} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BD}{DO} = 1$  よって  $\frac{3}{2} \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{4}{3} = 1$

ゆえに  $\frac{AQ}{QB} = \frac{1}{2}$  すなわち AQ:QB=1:2

よって  $\vec{OQ}=\frac{2\vec{OA}+\vec{OB}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$



【別解】 直線のベクトル方程式の利用

(1)  $\vec{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}$  (x, y は実数) とする。

$\vec{b}=\frac{7}{3}\vec{OD}$  より  $\vec{OP}=x\vec{a}+y\cdot\frac{7}{3}\vec{OD}=x\vec{OA}+\frac{7}{3}y\vec{OD}$

点 P は直線 AD 上にあるから  $x+\frac{7}{3}y=1$  ..... ①

$\vec{a}=\frac{5}{3}\vec{OC}$  より  $\vec{OP}=x\cdot\frac{5}{3}\vec{OC}+y\vec{b}=\frac{5}{3}x\vec{OC}+y\vec{OB}$

点 P は直線 BC 上にあるから  $\frac{5}{3}x+y=1$  ..... ②

①, ② を解いて  $x=\frac{6}{13}, y=\frac{3}{13}$  よって  $\vec{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

(2)  $\vec{OQ}=k\vec{OP}=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$  (k は実数) とおくと、点 Q は直線 AB 上にあるから

$\frac{6}{13}k+\frac{3}{13}k=1$  よって  $k=\frac{13}{9}$

ゆえに  $\vec{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

5

【解答】  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10, \vec{OH} = \frac{1}{7}\vec{OA} + \frac{3}{35}\vec{OB}$

【解説】

$|\vec{AB}|=12$  から  $|\vec{OB}-\vec{OA}|=12$

両辺を 2 乗すると  $|\vec{OB}|^2 - 2\vec{OB} \cdot \vec{OA} + |\vec{OA}|^2 = 144$

よって  $10^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 8^2 = 144$  ゆえに  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10$

$\vec{OH} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$  とおく。

$\vec{OH} \perp \vec{AB}$  であるから  $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$

よって  $(s\vec{OA} + t\vec{OB}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = 0$

すなわち

$s\vec{OA} \cdot \vec{OB} - s|\vec{OA}|^2 + t|\vec{OB}|^2 - t\vec{OB} \cdot \vec{OA} = 0$

ゆえに  $10s - 8^2s + 10^2t - 10t = 0$

すなわち  $-3s + 5t = 0$  ..... ①

$\vec{AH} \perp \vec{OB}$  であるから  $\vec{AH} \cdot \vec{OB} = 0$  よって  $(\vec{OH} - \vec{OA}) \cdot \vec{OB} = 0$

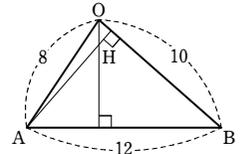
ゆえに  $(s\vec{OA} + t\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot \vec{OB} = 0$

すなわち  $s\vec{OA} \cdot \vec{OB} + t|\vec{OB}|^2 - \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$

ゆえに  $10s + 10^2t - 10 = 0$

すなわち  $s + 10t = 1$  ..... ②

①, ② を解いて  $s=\frac{1}{7}, t=\frac{3}{35}$  したがって  $\vec{OH}=\frac{1}{7}\vec{OA}+\frac{3}{35}\vec{OB}$



6

解答  $\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}$

解説

$\vec{AO} = \vec{x}$  とする.  $\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}, \vec{b} \nparallel \vec{c}$  であるから

$\vec{x} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$  と表される.

条件から  $|\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3, \vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$

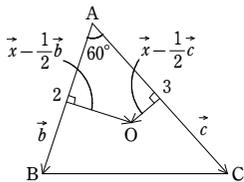
外心 O は各辺の垂直二等分線の交点であるから

$(\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0, (\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{c}) \cdot \vec{c} = 0$  よって

$\left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + \beta\vec{c} \right\} \cdot \vec{b} = 0, \left\{ \alpha\vec{b} + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\vec{c} \right\} \cdot \vec{c} = 0$

ゆえに  $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \cdot 4 + \beta \cdot 3 = 0, \alpha \cdot 3 + \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \cdot 9 = 0$  から

$4\alpha + 3\beta = 2, 3\alpha + 9\beta = \frac{9}{2}$  これを解いて  $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{4}{9}$  よって  $\vec{AO} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}$



1

解答 (1) 略 (2) 略

解説

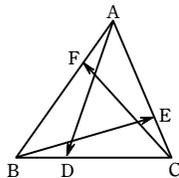
(1)  $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$  とすると

$\vec{AD} = \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{1+3} = \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{4}$

$\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB} = \frac{3}{4}\vec{c} - \vec{b}$

$\vec{CF} = \vec{AF} - \vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}$

したがって  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \frac{3\vec{b} + \vec{c}}{4} + \left(\frac{3}{4}\vec{c} - \vec{b}\right) + \left(\frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}\right)$   
 $= \frac{(3\vec{b} + \vec{c}) + (3\vec{c} - 4\vec{b}) + (\vec{b} - 4\vec{c})}{4} = \vec{0}$



(2)  $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$  とすると, 条件から

$\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{b}, \vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{c}$

線分 BE を 5 : 6 に内分する点を Q とすると

$\vec{AQ} = \frac{6\vec{AB} + 5\vec{AE}}{5+6} = \frac{1}{11}(6\vec{b} + 5 \times \frac{2}{5}\vec{c}) = \frac{2}{11}(3\vec{b} + \vec{c})$

線分 CD を 9 : 2 に内分する点を R とすると

$\vec{AR} = \frac{2\vec{AC} + 9\vec{AD}}{9+2} = \frac{1}{11}(2\vec{c} + 9 \times \frac{2}{3}\vec{b}) = \frac{2}{11}(3\vec{b} + \vec{c})$

よって  $\vec{AQ} = \vec{AR}$

したがって, Q, R は同じ点である.

2

解答  $\vec{OH} = \frac{21}{32}\vec{a} + \frac{11}{32}\vec{b}$

解説

$\vec{OH} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$  ( $0 < t < 1$ ) とおける.

$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{b}-\vec{a}|=4$

ここで  $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = 4^2$

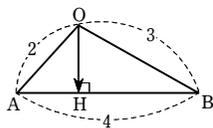
すなわち  $|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 16$

よって  $3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 16$

したがって  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$

$\vec{OH} \perp \vec{AB}$  であるから  $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$

ここで  $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = \vec{OH} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$   
 $= -t\vec{a} \cdot \vec{a} + (1-t)\vec{b} \cdot \vec{b} + (2t-1)\vec{a} \cdot \vec{b}$   
 $= -t|\vec{a}|^2 + (1-t)|\vec{b}|^2 + (2t-1)\vec{a} \cdot \vec{b}$   
 $= -4t + 9(1-t) - \frac{3}{2}(2t-1)$   
 $= \frac{21}{2} - 16t$



よって  $\frac{21}{2} - 16t = 0$

したがって  $t = \frac{21}{32}$

ゆえに  $\vec{OH} = \frac{21}{32}\vec{a} + \frac{11}{32}\vec{b}$

別解 AH = x とおくと  $2^2 - x^2 = 3^2 - (4-x)^2$   
 $4 - x^2 = -7 + 8x - x^2$

よって  $x = \frac{11}{8}$

したがって AH : HB =  $\frac{11}{8} : \left(4 - \frac{11}{8}\right) = 11 : 21$

ゆえに  $\vec{OH} = \frac{21}{32}\vec{a} + \frac{11}{32}\vec{b}$

3

解答 (ア)  $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$  (イ)  $\frac{5}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{c}$

解説

$\vec{OE} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ ,

$\vec{OF} = \vec{OC} + \frac{1}{3}\vec{CB} = \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a}$

よって  $\vec{EF} = \vec{OF} - \vec{OE} = \left(\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) - \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$   
 $= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

G は線分 EF 上にあるから,  $\vec{EG} = k\vec{EF}$  となる実数 k がある.

ゆえに  $\vec{EG} = -\frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{c}$

したがって  $\vec{OG} = \vec{OE} + \vec{EG} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \left(-\frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{c}\right)$   
 $= \left(-\frac{2}{3}k + 1\right)\vec{a} + \frac{1}{2}(k+1)\vec{c}$  …… ①

また, G は線分 OB 上にあるから,  $\vec{OG} = l\vec{OB}$  となる実数 l がある.

$\vec{OB} = \vec{a} + \vec{c}$  であるから  $\vec{OG} = l(\vec{a} + \vec{c}) = l\vec{a} + l\vec{c}$  …… ②

①, ② から  $\left(-\frac{2}{3}k + 1\right)\vec{a} + \frac{1}{2}(k+1)\vec{c} = l\vec{a} + l\vec{c}$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$  で,  $\vec{a}, \vec{c}$  は平行でないから

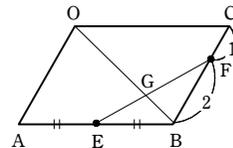
$-\frac{2}{3}k + 1 = l, \frac{1}{2}(k+1) = l$  これを解くと  $k = \frac{3}{7}, l = \frac{5}{7}$

よって  $\vec{OG} = \frac{5}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{c}$

4

解答  $r = \frac{7}{15}$

解説



BR : RQ = s : (1-s), CR : RP = t : (1-t) とすると

$$\begin{aligned} \vec{AR} &= (1-s)\vec{AB} + s\vec{AQ} \\ &= (1-s)\vec{AB} + \frac{2}{3}s\vec{AC} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AR} &= t\vec{AP} + (1-t)\vec{AC} \\ &= \frac{t}{3}\vec{AB} + (1-t)\vec{AC} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$\vec{AB} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{AC} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{AB} \not\parallel \vec{AC}$  であるから, ①, ②により

$$1-s = \frac{t}{3}, \quad \frac{2}{3}s = 1-t$$

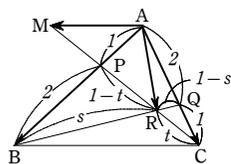
これを解いて  $s = \frac{6}{7}, t = \frac{3}{7}$  よって  $\vec{AR} = \frac{1}{7}\vec{AB} + \frac{4}{7}\vec{AC}$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \vec{AM} &= \frac{-r\vec{AR} + \vec{AP}}{1-r} = \frac{1}{1-r} \left\{ -r \left( \frac{1}{7}\vec{AB} + \frac{4}{7}\vec{AC} \right) + \frac{1}{3}\vec{AB} \right\} \\ &= \frac{1}{1-r} \left\{ \left( \frac{1}{3} - \frac{r}{7} \right) \vec{AB} - \frac{4}{7}r\vec{AC} \right\} \end{aligned}$$

また  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

よって,  $\vec{AM}$  と  $\vec{BC}$  が平行になるための条件は  $\frac{1}{3} - \frac{r}{7} = \frac{4}{7}r$

これを解いて  $r = \frac{7}{15}$  ( $0 < r < 1$  を満たす)



1

【解答】 (1)  $\vec{OE} = \frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a} + \frac{3s}{2s+3}\vec{b}$  (2)  $s = \frac{3}{8}$

【解説】

(1) OC : CB = 3 : 2 であるから  $\vec{OC} = \frac{3}{5}\vec{OB} = \frac{3}{5}\vec{b}$

AD : DB = s : (1-s) であるから  $\vec{OD} = (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$

OE : OD = t : 1 ( $0 < t < 1$ ) とおくと

$$\vec{OE} = t\vec{OD} = t(1-s)\vec{a} + ts\vec{b}$$

AE : EC = u : (1-u) ( $0 < u < 1$ ) とおくと

$$\vec{OE} = (1-u)\vec{OA} + u\vec{OC} = (1-u)\vec{a} + \frac{3}{5}u\vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  であり,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行でないから

$$t(1-s) = 1-u, \quad ts = \frac{3}{5}u$$

これを解くと  $t = \frac{3}{2s+3}, u = \frac{5s}{2s+3}$

よって  $\vec{OE} = \frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a} + \frac{3s}{2s+3}\vec{b}$

(2)  $\triangle OAE$  と  $\triangle OCE$  の面積が等しくなるための条件は, E が線分 AC の中点になることである。すなわち,  $u = \frac{1}{2}$  となることであるから, (1) より

$$\frac{5s}{2s+3} = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad 10s = 2s+3$$

これを解いて  $s = \frac{3}{8}$

【別解】 (1)  $\triangle ABC$  と直線 OD についてメネラウスの定理により

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CO}{OB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{AE}{EC} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1-s}{s} = 1$$

よって  $\frac{AE}{EC} = \frac{5s}{3(1-s)}$  ゆえに AE : EC = 5s : 3(1-s)

したがって

$$\begin{aligned} \vec{OE} &= \frac{3(1-s)}{5s+3(1-s)}\vec{OA} + \frac{5s}{5s+3(1-s)}\vec{OC} = \frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a} + \frac{5s}{2s+3} \times \frac{3}{5}\vec{b} \\ &= \frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a} + \frac{3s}{2s+3}\vec{b} \end{aligned}$$

2

【解答】 略

【解説】

$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$  から

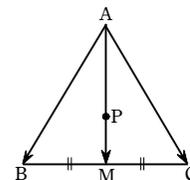
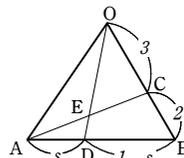
$$-\vec{AP} + (\vec{AB} - \vec{AP}) + (\vec{AC} - \vec{AP}) = \vec{0}$$

よって  $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$

ゆえに, P は  $\triangle ABC$  の重心であるから, AP は  $\triangle ABC$  の中線で, AP の延長と辺 BC の交点を M とすると

$$BM = CM \quad \dots\dots ①$$

また, P は  $\triangle ABC$  の内心であるから, AP は  $\angle A$  の二等分線である。



よって AB : AC = BM : MC  $\dots\dots ②$

①, ②から AB = AC

以上は点 A を始点と考えたが, B を始点として同様に考えると BA = BC したがって,  $\triangle ABC$  は正三角形である。

3

【解答】 (1) 略 (2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = -15, \vec{c} \cdot \vec{a} = -20$  (3)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【解説】

(1)  $\vec{OG} = \vec{g}$  とする。

$$4\vec{AG} + 3\vec{BG} + 5\vec{CG} = 12\vec{OG} \text{ を変形すると } 4(\vec{g} - \vec{a}) + 3(\vec{g} - \vec{b}) + 5(\vec{g} - \vec{c}) = 12\vec{g}$$

よって  $4\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0} \quad \dots\dots ①$

(2) ①より  $4\vec{a} + 3\vec{b} = -5\vec{c}$  よって  $|4\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = |-5\vec{c}|^2$

ゆえに  $16|\vec{a}|^2 + 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 25|\vec{c}|^2$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 5^2$  であるから  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

①より  $3\vec{b} + 5\vec{c} = -4\vec{a}$  よって  $|3\vec{b} + 5\vec{c}|^2 = |-4\vec{a}|^2$

ゆえに  $9|\vec{b}|^2 + 30\vec{b} \cdot \vec{c} + 25|\vec{c}|^2 = 16|\vec{a}|^2$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 5^2$  であるから  $\vec{b} \cdot \vec{c} = -15$

①より  $5\vec{c} + 4\vec{a} = -3\vec{b}$  よって  $|5\vec{c} + 4\vec{a}|^2 = |-3\vec{b}|^2$

ゆえに  $25|\vec{c}|^2 + 40\vec{c} \cdot \vec{a} + 16|\vec{a}|^2 = 9|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 5^2$  であるから  $\vec{c} \cdot \vec{a} = -20$

(3)  $\vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$  であるから

$$\begin{aligned} |\vec{OG}|^2 &= \left| \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right|^2 = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}}{9} \\ &= \frac{1}{9} \{ 5^2 + 5^2 + 5^2 + 2 \times 0 + 2 \times (-15) + 2 \times (-20) \} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$|\vec{OG}| > 0$  であるから  $|\vec{OG}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$

したがって  $OG = \frac{\sqrt{5}}{3}$

4

【解答】 (1)  $\vec{OQ} = \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b}$  (2)  $\vec{OP} = \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b-c}$

(3)  $\vec{OP} = \frac{5}{2}\vec{OA} + \frac{3}{2}\vec{OB}$

【解説】

(1)  $AQ : QB = \triangle OAP : \triangle OBP = a : b$

よって  $\vec{OQ} = \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b}$

(2)  $OQ : QP = \triangle OAB : \triangle ABP = (a+b-c) : c$

よって  $\vec{OP} = \frac{a+b}{a+b-c}\vec{OQ} = \frac{a+b}{a+b-c} \times \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b} = \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b-c}$

(3) 点Pを中心とし、3直線OA, OB, ABに接する円の半径をrとすると

$$a = \triangle OAP = \frac{1}{2} \times 3 \times r = \frac{3}{2}r$$

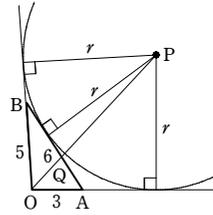
$$b = \triangle OBP = \frac{1}{2} \times 5 \times r = \frac{5}{2}r$$

$$c = \triangle ABP = \frac{1}{2} \times 6 \times r = 3r$$

これらを(2)の結果に代入して

$$\vec{OP} = \frac{\frac{5}{2}r\vec{OA} + \frac{3}{2}r\vec{OB}}{\frac{3}{2}r + \frac{5}{2}r - 3r}$$

$$= \frac{5}{2}\vec{OA} + \frac{3}{2}\vec{OB}$$



1

【解答】 (1)  $\frac{21}{2}$  (2)  $\vec{AD} = \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$  (3)  $\vec{AI} = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$  (4)  $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

【解説】

(1)  $AB=3, CA=4$  から  $|\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$

$BC=2$  すなわち  $|\vec{BC}|=2$  から  $|\vec{c}-\vec{b}|=2$

よって  $|\vec{c}-\vec{b}|^2=4$  すなわち  $|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2=4$

$|\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$  を代入して  $16 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 9=4$  ゆえに  $\vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{21}{2}$

【別解】  $\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$\cos \angle BAC = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8}$$

よって  $\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos \angle BAC = 3 \times 4 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{2}$

(2) AD は  $\angle A$  の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 3 : 4 \dots\dots ①$$

よって  $\vec{AD} = \frac{4\vec{AB} + 3\vec{AC}}{3+4} = \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$

(3)  $BD : DC = 3 : 4$  であり、 $BC=2$  であるから

$$BD = \frac{3}{3+4}BC = \frac{3}{7} \times 2 = \frac{6}{7}$$

BI は  $\angle B$  の二等分線であるから

$$AI : ID = BA : BD = 3 : \frac{6}{7} = 7 : 2$$

よって  $\vec{AI} = \frac{7}{7+2}\vec{AD} = \frac{7}{9}\left(\frac{4}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}\right) = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

(4)  $BE : EC = s : (1-s)$  とすると

$$\vec{AE} = (1-s)\vec{b} + s\vec{c} \text{ と表される。}$$

$IE \perp BC$  であるから  $\vec{IE} \cdot \vec{BC} = 0 \dots\dots ②$

ここで  $\vec{IE} = \vec{AE} - \vec{AI} = \left(\frac{5}{9}-s\right)\vec{b} + \left(s-\frac{1}{3}\right)\vec{c}$

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$

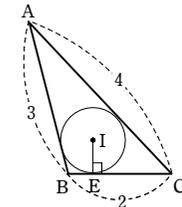
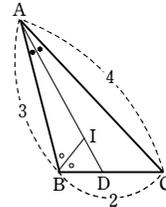
よって、②から  $\left\{\left(\frac{5}{9}-s\right)\vec{b} + \left(s-\frac{1}{3}\right)\vec{c}\right\} \cdot (\vec{c}-\vec{b}) = 0$

ゆえに  $\left(s-\frac{5}{9}\right)|\vec{b}|^2 + \left(\frac{8}{9}-2s\right)\vec{b}\cdot\vec{c} + \left(s-\frac{1}{3}\right)|\vec{c}|^2 = 0$

$|\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4, \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{21}{2}$  を代入して  $9\left(s-\frac{5}{9}\right) + \frac{21}{2}\left(\frac{8}{9}-2s\right) + 16\left(s-\frac{1}{3}\right) = 0$

整理すると  $4s-1=0$  よって  $s = \frac{1}{4}$

したがって  $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$



【別解】 まず、 $BE : EC$  を求める。

$\triangle ABC$  の内接円と辺  $AB, CA$  との接点を、それぞれ  $F, G$  とすると

$$AF=AG, BE=BF, CE=CG$$

よって、 $AF=l, BE=m, CE=n$  とおくと、 $AB=3, BC=2, CA=4$  から

$$l+m=3 \dots\dots ③, \quad m+n=2 \dots\dots ④,$$

$$n+l=4 \dots\dots ⑤$$

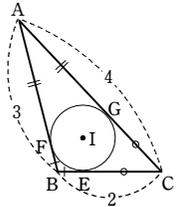
③, ④, ⑤の辺々を加えて  $2(l+m+n)=9$

よって  $l+m+n = \frac{9}{2} \dots\dots ⑥$

⑥-⑤から  $m = \frac{1}{2}$  ⑥-③から  $n = \frac{3}{2}$

ゆえに  $BE : EC = m : n = 1 : 3$

したがって  $\vec{AE} = \frac{3\vec{AB} + \vec{AC}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$



2

【解答】 (1) 略 (2)  $\vec{OC} = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}$

【解説】

(1)  $\angle AOB$  の二等分線と線分  $AB$  の交点を  $D$  とすると

$$AD : DB = OA : OB = |\vec{a}| : |\vec{b}|$$

よって、点  $D$  は線分  $AB$  を  $|\vec{a}| : |\vec{b}|$  に内分する点であるから

$$\vec{OD} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$$

また、点  $P$  が直線  $OD$  上にあるとき

$$\vec{OP} = s\vec{OD} \quad (s \text{ は実数})$$

ゆえに  $\vec{OP} = s\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}\right) = \frac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

$\frac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$  は実数であるから、点  $P$  が  $\angle AOB$  の二等分線上にあるとき、

$$\vec{OP} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \text{ となる実数 } t \text{ が存在する。}$$

(2) 直線  $OA$  上に、 $\vec{OD} = 2\vec{OA}$  となるように  $D$  をとると、点  $C$  は  $\angle BAD$  の二等分線上にある。

よって、(1) から  $\vec{AC} = u\left(\frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|} + \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\right)$  となる実数  $u$  が存在する。

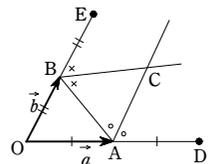
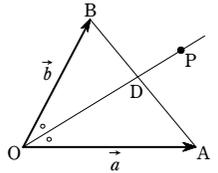
ゆえに  $\vec{AC} = u\left(\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\right)$

ここで  $|\vec{AB}|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 5^2 - 2 \times 5 + 7^2 = 64$

$|\vec{AB}| > 0$  であるから  $|\vec{AB}| = 8$  よって  $\vec{OC} - \vec{a} = u\left(\frac{\vec{a}}{7} + \frac{\vec{b}-\vec{a}}{8}\right)$

したがって  $\vec{OC} = \left(1 + \frac{u}{56}\right)\vec{a} + \frac{u}{8}\vec{b} \dots\dots ①$

また、直線  $OB$  上に  $\vec{OE} = 2\vec{OB}$  となるように  $E$  をとると、点  $C$  は  $\angle ABE$  の二等分



第4講 追加演習

線上にある。

よって、(1)から  $\vec{BC} = v \left( \frac{\vec{BE}}{|\vec{BE}|} + \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} \right)$  となる実数  $v$  が存在する。

ゆえに  $\vec{BC} = v \left( \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} + \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} \right)$  すなわち  $\vec{OC} - \vec{b} = v \left( \frac{\vec{b}}{5} + \frac{\vec{a} - \vec{b}}{8} \right)$

したがって  $\vec{OC} = \frac{v}{8}\vec{a} + \left(1 + \frac{3}{40}v\right)\vec{b}$  ……②

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  で  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行でないから、①, ②より

$$1 + \frac{v}{56} = \frac{v}{8}, \quad \frac{v}{8} = 1 + \frac{3}{40}v$$

これを解くと  $u = 14, v = 10$

よって、 $u = 14$  を①に代入すると  $\vec{OC} = \left(1 + \frac{14}{56}\right)\vec{a} + \frac{14}{8}\vec{b} = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}$

3

【解答】(1)  $\vec{OP} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$  (2) 2 : 1

【解説】

(1)  $CP : PM = s : (1-s), BP : PD = t : (1-t)$  とする

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (1-s)\vec{OC} + s\vec{OM} \\ &= (1-s)\frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} + \frac{s}{2}\vec{b} \\ &= \frac{2(1-s)}{3}\vec{a} + \frac{2+s}{6}\vec{b} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= t\vec{OD} + (1-t)\vec{OB} \\ &= \frac{2}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ②から

$$\frac{2(1-s)}{3}\vec{a} + \frac{2+s}{6}\vec{b} = \frac{2}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \not\parallel \vec{b}$  であるから

$$\frac{2(1-s)}{3} = \frac{2}{5}t, \quad \frac{2+s}{6} = 1-t$$

これを解いて  $s = \frac{2}{3}, t = \frac{5}{9}$

$t = \frac{5}{9}$  を②に代入して

$$\vec{OP} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{9}\vec{a} + \left(1 - \frac{5}{9}\right)\vec{b} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \quad \dots\dots ③$$

(2) 点 Q が直線 OP 上にあるから、 $\vec{OQ} = k\vec{OP}$  となる実数  $k$  がある。

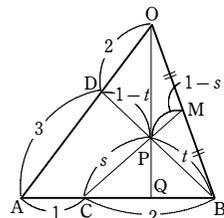
③から  $\vec{OQ} = \frac{2}{9}k\vec{a} + \frac{4}{9}k\vec{b}$  ……④

また、 $AQ : QB = u : (1-u)$  とすると

$$\vec{OQ} = (1-u)\vec{a} + u\vec{b} \quad \dots\dots ⑤$$

④, ⑤から

$$\frac{2}{9}k\vec{a} + \frac{4}{9}k\vec{b} = (1-u)\vec{a} + u\vec{b}$$



$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \not\parallel \vec{b}$  であるから  $\frac{2}{9}k = 1-u, \frac{4}{9}k = u$

これを解いて  $u = \frac{2}{3}, k = \frac{3}{2}$

したがって  $AQ : QB = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$

【参考】 次の項目「ベクトル方程式」で学習する以下のことを用いてもよい。

点 P( $\vec{p}$ ) が 2 点 A( $\vec{a}$ ), B( $\vec{b}$ ) を通る直線上にある  $\Leftrightarrow \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, s+t=1$

【別解】 点 Q が直線 OP 上にあるから、 $\vec{OQ} = k\vec{OP}$  となる実数  $k$  がある。

③から  $\vec{OQ} = \frac{2}{9}k\vec{a} + \frac{4}{9}k\vec{b}$

点 Q は直線 AB 上にあるから  $\frac{2}{9}k + \frac{4}{9}k = 1$  よって  $k = \frac{3}{2}$

ゆえに  $\vec{OQ} = \frac{2}{9} \times \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} = \frac{1 \cdot \vec{a} + 2\vec{b}}{2+1}$

よって  $AQ : QB = 2 : 1$

4

【解答】(1)  $\vec{AE} = \frac{4\vec{b} + 3\vec{d}}{7}, \vec{AF} = \frac{-\vec{b} + 3\vec{d}}{3}$  (2)  $\vec{AG} = \frac{4}{3}\vec{b} + \vec{d}$

(3)  $AB : AD = 3 : 4$

【解説】

(1)  $\vec{AE} = \frac{4\vec{AB} + 3\vec{AD}}{7} = \frac{4\vec{b} + 3\vec{d}}{7}$

$$\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF} = \vec{d} + \frac{1}{3}\vec{CD} = \frac{-\vec{b} + 3\vec{d}}{3}$$

(2)  $\vec{AG} = k\vec{AE}$  ( $k$  は実数) とおける。

よって  $\vec{AG} = \frac{4}{7}k\vec{b} + \frac{3}{7}k\vec{d}$  ……①

また、 $\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{DG}$  であるから、

$\vec{AG} = \vec{d} + t\vec{b}$  ( $t$  は実数) とおける。

よって  $\vec{AG} = t\vec{b} + \vec{d}$  ……②

$\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{d} \neq \vec{0}, \vec{b}$  と  $\vec{d}$  は平行でないから、①, ②より  $\frac{4}{7}k = t, \frac{3}{7}k = 1$

ゆえに  $k = \frac{7}{3}, t = \frac{4}{3}$  よって、②から  $\vec{AG} = \frac{4}{3}\vec{b} + \vec{d}$

(3)  $\vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB} = \frac{-\vec{b} + 3\vec{d}}{3} - \vec{b} = -\frac{4}{3}\vec{b} + \vec{d}$

$\vec{AG} \perp \vec{BF}$  から  $\vec{AG} \cdot \vec{BF} = 0$  よって  $\left(\frac{4}{3}\vec{b} + \vec{d}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\vec{b} + \vec{d}\right) = 0$

ゆえに  $|\vec{d}|^2 - \frac{16}{9}|\vec{b}|^2 = 0$  したがって  $\frac{|\vec{b}|}{3} = \frac{|\vec{d}|}{4}$

ゆえに  $AB : AD = |\vec{b}| : |\vec{d}| = 3 : 4$

5

【解答】 正三角形

【解説】

$\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$  とすると、条件式から

$$(\vec{c} - \vec{b}) \cdot (-\vec{c}) = (-\vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$

よって  $-|\vec{c}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} - |\vec{b}|^2$

$-|\vec{c}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} - |\vec{b}|^2$  から  $|\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

$|\vec{b}| > 0, |\vec{c}| > 0$  であるから  $|\vec{b}| = |\vec{c}|$  すなわち  $AB = AC$

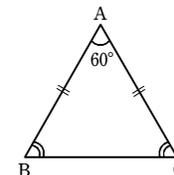
また、 $-|\vec{c}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{c}$  から  $2\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2$

よって  $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}|\vec{c}|^2$

ゆえに  $\cos \angle BAC = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{\frac{1}{2}|\vec{c}|^2}{|\vec{c}|^2} = \frac{1}{2}$

$0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$  であるから  $\angle BAC = 60^\circ$

したがって、 $AB = AC, \angle BAC = 60^\circ$  となるから、 $\triangle ABC$  は正三角形である。



6

【解答】(1) 略 (2)  $s(4t-1) = t$

【解説】

(1)  $\vec{CI} = \frac{1}{3}(\vec{CG} + \vec{CH}), \vec{CJ} = \frac{1}{3}(\vec{CD} + \vec{CG} + \vec{CH})$

ゆえに  $\vec{IJ} = \vec{CJ} - \vec{CI} = \frac{1}{3}\vec{CD}$

(2) 4 点 C, D, I, J が同一直線上にあるための必要十分条件は、(1)から、点 I が線分 CD 上にあること、すなわち、 $\vec{CI} = k\vec{CD}$  となる  $k$  が存在することである。

左辺  $= \vec{CI} = \vec{OI} - \vec{OC}$

$$= \frac{1}{3}(\vec{OC} + \vec{OG} + \vec{OH}) - \vec{OC}$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{OG} + \vec{OH} - 2\vec{OC})$$

$$= \frac{1}{9}(\vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OA} + \vec{OB} - 6\vec{OC})$$

$$= \frac{1}{9}(s\vec{OA} + t\vec{OB} + \vec{OA} + \vec{OB} - 6s\vec{OA})$$

$$= \frac{1}{9}\{(-5s+1)\vec{OA} + (t+1)\vec{OB}\}$$

右辺  $= k\vec{CD} = k(\vec{OD} - \vec{OC}) = -ks\vec{OA} + kt\vec{OB}$

ゆえに  $-ks = \frac{-5s+1}{9}$  かつ  $kt = \frac{t+1}{9}$

よって  $9ks = 5s-1$  かつ  $9kt = t+1$

したがって  $(5s-1)t = s(t+1)$

ゆえに  $s(4t-1) = t$

$t = \frac{1}{4}$  はこの式を満たさないから  $t \neq \frac{1}{4}$

第5講 例題

1

- 【解答】 (1)  $x = -4 + 3t, y = 2 - t; x + 3y - 2 = 0$   
 (2)  $x = t - 3, y = -4t + 5; 4x + y + 7 = 0$

【解説】

直線上の任意の点を  $P(\vec{p})$  とする。

- (1) 点  $A(\vec{a})$  を通り、ベクトル  $\vec{d}$  に平行な直線のベクトル方程式は  $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$

$\vec{p} = (x, y), \vec{a} = (-4, 2), \vec{d} = (3, -1)$  であるから  
 $(x, y) = (-4, 2) + t(3, -1) = (-4 + 3t, 2 - t)$

ゆえに  $\begin{cases} x = -4 + 3t & \dots\dots ① \\ y = 2 - t & \dots\dots ② \end{cases}$  ( $t$  は媒介変数)

①+②×3 から  $x + 3y - 2 = 0$

- (2) 2点  $A(\vec{a}), B(\vec{b})$  を通る直線のベクトル方程式は  $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$

$\vec{p} = (x, y), \vec{a} = (-3, 5), \vec{b} = (-2, 1)$  であるから  
 $(x, y) = (1-t)(-3, 5) + t(-2, 1) = (t-3, -4t+5)$

ゆえに  $\begin{cases} x = t - 3 & \dots\dots ③ \\ y = -4t + 5 & \dots\dots ④ \end{cases}$  ( $t$  は媒介変数)

③×4+④ から  $4x + y + 7 = 0$

2

- 【解答】 (1)  $3x - 4y + 12 = 0$  (2)  $\alpha = 45^\circ$

【解説】

- (1) 直線上の点を  $P(x, y)$  とする。

$\vec{AP} \perp \vec{n}$  であるから  $\vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$

ここで  $\vec{AP} = (x-4, y-6)$   
 よって  $3 \times (x-4) - 4 \times (y-6) = 0$   
 したがって  $3x - 4y + 12 = 0$

- (2)  $2x - 4y + 11 = 0$  ..... ①  
 $x + 3y - 12 = 0$  ..... ②

$\vec{m} = (2, -4), \vec{n} = (1, 3)$  とすると、 $\vec{m}, \vec{n}$  は、それぞれ2直線①、②の法線ベクトルである。  
 よって、 $\vec{m}$  と  $\vec{n}$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2 \times 1 + (-4) \times 3}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{-10}{2\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 135^\circ$   
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  であるから  $\alpha = 180^\circ - \theta = 45^\circ$

3

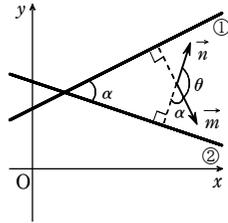
- 【解答】 (1)  $(\vec{p} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$  (2)  $\vec{p} = (2t - \frac{1}{2})\vec{a} + t\vec{b}$  ( $t$  は実数)

【解説】

- (1) 点  $P$  は線分  $AB$  の中点  $M$  を通り、

$AB$  に垂直な直線上にあるから  $\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0$

ゆえに  $(\vec{OP} - \vec{OM}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = 0$



よって  $(\vec{p} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

- (2) 求める直線は、点  $M$  を通り、 $\vec{CA}$  を方向ベクトルとする直線であるから、そのベクトル方程式は

$\vec{GP} = \vec{GM} + t\vec{CA}$  ( $t$  は実数) ..... ①

点  $G$  に関する位置ベクトルを考えると

$\vec{GG} = \frac{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}}{3}$

ゆえに  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

よって  $\vec{GC} = -\vec{GA} - \vec{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$

$\vec{GM} = \frac{1}{2}(\vec{GB} + \vec{GC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} - \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{CA} = \vec{GA} - \vec{GC} = \vec{a} - (-\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$

以上より ①は  $\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{a} + t(2\vec{a} + \vec{b})$

すなわち  $\vec{p} = (2t - \frac{1}{2})\vec{a} + t\vec{b}$  ( $t$  は実数)

4

- 【解答】 (1) 線分  $AB$  を 2:3 に内分する点を中心とする半径 1 の円  
 (2)  $\triangle ABC$  の重心を中心とする半径 1 の円  
 (3) 線分  $AB$  を 1:2 に内分する点を中心とする半径  $\frac{1}{3}|AB|$  の円  
 (4) 線分  $OA$  の垂直二等分線  
 (5) 点  $A$  を中心とする半径  $|OA|$  の円  
 (6) 点  $O$  に関して点  $A$  と対称な点と点  $B$  を直径の両端とする円

【解説】

- (1)  $|3\vec{AP} + 2\vec{BP}| = 5$  から  $|3\vec{AP} + 2(\vec{AP} - \vec{AB})| = 5$

すなわち  $|5\vec{AP} - 2\vec{AB}| = 5$

両辺を 5 で割って  $|\vec{AP} - \frac{2\vec{AB}}{5}| = 1$

よって、点  $P$  が描く図形は、線分  $AB$  を 2:3 に内分する点を中心とする半径 1 の円である。

- (2)  $A, B, C, P$  の位置ベクトルを、それぞれ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$  とすると、

$|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}| = 3$  から  $|-\vec{AP} + (\vec{AB} - \vec{AP}) + (\vec{AC} - \vec{AP})| = 3$

ゆえに  $|(\vec{AB} + \vec{AC}) - 3\vec{AP}| = 3$

すなわち  $|3\vec{AP} - (\vec{AB} + \vec{AC})| = 3$

よって  $|\frac{\vec{AP} - \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}}{1}| = 1$  ..... ①

$\triangle ABC$  の重心を  $G$  とすると  $\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$

よって、①から  $|\vec{AP} - \vec{AG}| = 1$

したがって、点  $P$  は  $G$  を中心とする半径 1 の円を表す。

- (3)  $|2\vec{AP} + \vec{BP}| = |\vec{OA} - \vec{OB}|$  から

$|3\vec{OP} - 2\vec{OA} - \vec{OB}| = |\vec{OA} - \vec{OB}|$

$|\vec{OP} - \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{3}| = \frac{1}{3}|\vec{BA}|$

よって、点  $P$  は線分  $AB$  を 1:2 に内分する点を中心とする半径  $\frac{1}{3}|\vec{AB}|$  の円を描く。

- (4)  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OP} = \vec{p}$  とする。

$|\vec{p}| = |\vec{p} - \vec{a}|$  の両辺を 2 乗すると  $|\vec{p}|^2 = |\vec{p} - \vec{a}|^2$

よって  $|\vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2$  ゆえに  $2\vec{p} \cdot \vec{a} - |\vec{a}|^2 = 0$

両辺を 2 で割ると  $\vec{p} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 = 0$  すなわち  $(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$

ここで、線分  $OA$  の中点を  $M$  とすると、 $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}$  であるから

$\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{OP} - \vec{OM} = \vec{MP}$

よって  $\vec{MP} \cdot \vec{OA} = 0$

ゆえに、 $\vec{MP} \neq \vec{0}$  のとき  $\vec{MP} \perp \vec{OA}$

$\vec{MP} = \vec{0}$  のとき、点  $P$  は  $M$  と一致する。

したがって、点  $P$  が描く図形は、線分  $OA$  の中点  $M$  を通り  $OA$  に垂直な直線、すなわち線分  $OA$  の垂直二等分線である。

- (5)  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OP} = \vec{p}$  とする。

$|\vec{p}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$  の両辺に  $|\vec{a}|^2$  を加えると  $|\vec{p}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{p} + |\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2$

よって  $|\vec{p} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2$  ゆえに  $|\vec{p} - \vec{a}| = |\vec{a}|$

したがって、点  $P$  が描く図形は、点  $A$  を中心とする半径  $|\vec{OA}|$  の円である。

- (6)  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OP} = \vec{p}$  とする。

$\vec{OP} \cdot (\vec{OP} - \vec{AB}) = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$  から  $\vec{p} \cdot \{\vec{p} - (\vec{b} - \vec{a})\} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

よって  $|\vec{p}|^2 + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{p} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

ゆえに  $(\vec{p} + \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$

すなわち  $\{\vec{p} - (-\vec{a})\} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$

よって、点  $O$  に関して点  $A$  と対称な点と点  $B$  を直径の両端とする円。

5

- 【解答】 (1)  $\vec{OC} = 3\vec{OB}, \vec{OD} = 2\vec{OA}, \vec{OE} = \vec{OD} + \vec{OC}$  となる点  $C, D, E$  をとると、平行四辺形  $ODEC$  の周および内部

(2)  $3\vec{OA} = \vec{OA}', 3\vec{OB} = \vec{OB}'$  となる点  $A', B'$  をとると、線分  $A'B'$

(3)  $3\vec{OA} = \vec{OA}', 2\vec{OB} = \vec{OB}'$  を満たす点  $A', B'$  をとると、線分  $A'B'$

(4)  $\vec{OC} = 2\vec{OA}, \vec{OD} = 2\vec{OB}$  となる点  $C, D$  をとると、 $\triangle OCD$  の周および内部

(5)  $\frac{3}{2}\vec{OB} = \vec{OB}'$  を満たす点  $B'$  をとると、 $\triangle OAB'$  の周および内部

【解説】

(1)  $s = k$  ( $k$ は定数)とすると,  $0 \leq k \leq 2$ で  $\vec{OP} = k\vec{OA} + t\vec{OB}$

$\vec{OQ} = k\vec{OA}$ とすると  $\vec{OP} = \vec{OQ} + t\vec{OB}$

$t$ の値が0から3まで変化すると, 点Pは線分QR上をQからRまで動く。

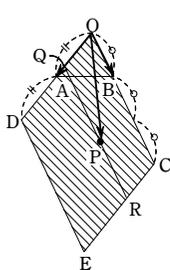
(ただし  $\vec{OC} = 3\vec{OB}$ ,  $\vec{OR} = \vec{OQ} + \vec{OC}$ )

次に,  $k$ の値が0から2まで変化すると, 点Q, Rは, QR//OC(//DE)の状態を保ちながら, それぞれ線分OD, CE上を, OからD, CからEまで動く。

(ただし  $\vec{OD} = 2\vec{OA}$ ,  $\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{OC}$ )

よって, 点Pの存在範囲は

平行四辺形ODECの周および内部



(2)  $s+t=3$ から  $\frac{s}{3} + \frac{t}{3} = 1$

ここで,  $\frac{s}{3} = s'$ ,  $\frac{t}{3} = t'$ とおくと

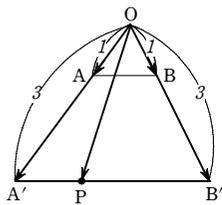
$$\vec{OP} = s'(3\vec{OA}) + t'(3\vec{OB})$$

$$s' + t' = 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

よって,  $3\vec{OA} = \vec{OA}'$ ,  $3\vec{OB} = \vec{OB}'$ となる点A', B'をとると

$$\vec{OP} = s'\vec{OA}' + t'\vec{OB}', s' + t' = 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

したがって, 点Pの存在範囲は線分A'B'である。



(3)  $2s+3t=6$ から  $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 1$

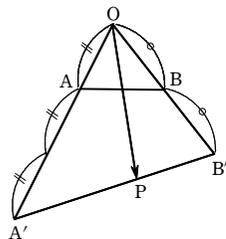
$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} = \frac{s}{3}(3\vec{OA}) + \frac{t}{2}(2\vec{OB})$$

ここで,  $\frac{s}{3} = s'$ ,  $\frac{t}{2} = t'$ とおくと

$$\vec{OP} = s'(3\vec{OA}) + t'(2\vec{OB})$$

$$s' + t' = 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

よって,  $3\vec{OA} = \vec{OA}'$ ,  $2\vec{OB} = \vec{OB}'$ を満たす点A', B'をとると, Pの存在範囲は線分A'B'である。



(4)  $s+t=k$ とおく。

$$s+t=k \text{ から } \frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1$$

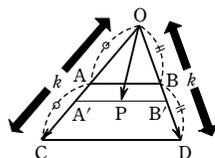
$\frac{s}{k} = s'$ ,  $\frac{t}{k} = t'$ とおくと

$$\vec{OP} = s'(k\vec{OA}) + t'(k\vec{OB}), s' + t' = 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

よって,  $k\vec{OA} = \vec{OA}'$ ,  $k\vec{OB} = \vec{OB}'$ となる点A', B'をとると, 定数kに対して, 点Pの存在範囲は辺ABに平行な線分A'B'である。

ここで,  $\vec{OC} = 2\vec{OA}$ ,  $\vec{OD} = 2\vec{OB}$ となる点C, Dをとると,  $0 < k \leq 2$ の範囲でkが変わるとき, 線分A'B'上の点は, 点Oを除く△OCDの周および内部を動く。

したがって, 点Pの存在範囲は, △OCDの周および内部である。



(5)  $0 \leq 3s+2t \leq 3$ から  $0 \leq s + \frac{2}{3}t \leq 1$

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} = s\vec{OA} + \frac{2}{3}t(\frac{3}{2}\vec{OB})$$

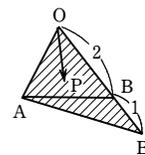
ここで,  $\frac{2}{3}t = t'$ とおくと

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t'(\frac{3}{2}\vec{OB})$$

$$0 \leq s+t' \leq 1, s \geq 0, t' \geq 0,$$

よって,  $\frac{3}{2}\vec{OB} = \vec{OB}'$ を満たす点B'をとると, Pの存在

範囲は△OAB'の周および内部である。



1

解答 (1)  $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 5-2t \end{cases}; 2x+y-3=0$  (2)  $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 5-t \end{cases}; x+3y-14=0$

解説

(1) 点Aを通り,  $\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示は

$$(x, y) = (-1, 5) + t(1, -2)$$

すなわち  $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 5-2t \end{cases}$

$t$ を消去すると  $y = 5 - 2(x + 1)$  すなわち  $2x + y - 3 = 0$

(2) 2点A, Bを通る直線の媒介変数表示は

$$(x, y) = (1-t)(-1, 5) + t(2, 4)$$

すなわち  $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 5-t \end{cases}$

$t$ を消去すると  $x = -1 + 3(5 - y)$  すなわち  $x + 3y - 14 = 0$

2

解答 (1)  $4x - y - 14 = 0$  (2)  $45^\circ$

解説

(1) 直線上の任意の点をP(x, y)とする。

$$\vec{AP} \perp \vec{n} \text{ から } \vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$$

$$\vec{AP} = (x-3, y+2), \vec{n} = (-4, 1) \text{ から } -4(x-3) + (y+2) = 0 \text{ すなわち } 4x - y - 14 = 0$$

(2) 2直線  $x-3y+5=0$ ,  $2x+4y+3=0$ をそれぞれ  $l_1, l_2$ とすると,  $l_1, l_2$ の法線

ベクトルはそれぞれ  $\vec{n}_1 = (1, -3)$ ,  $\vec{n}_2 = (2, 4)$ とおける。

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 2 - 3 \times 4 = -10, |\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10},$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

であるから,  $\vec{n}_1$ と $\vec{n}_2$ のなす角を $\theta$ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{-10}{\sqrt{10} \sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから  $\theta = 135^\circ$

したがって, 2直線  $l_1, l_2$ のなす鋭角は  $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

3

解答 (1)  $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$  ( $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ でもよい)

(2)  $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}(\vec{b} + \vec{c})$  ( $t$ は実数) (3)  $2\vec{p} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2$

解説

(1) 点Aを通り, BCに垂直な直線であるから, そのベクトル方程式は

$$\vec{AP} \cdot \vec{BC} = 0 \text{ すなわち } (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \text{ (} (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0 \text{でもよい)}$$

(2) 辺BCの中点をM( $\vec{m}$ )とすると  $\vec{m} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$

よって, 求めるベクトル方程式は

$$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{m} \text{ (} t \text{は実数) すなわち } \vec{p} = (1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \text{ (} t \text{は実数)}$$

(3) 辺BCの中点Mを通り, 辺BCに垂直な直線であるから, そのベクトル方程式は

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\vec{p} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

$$\text{整理して} \quad 2\vec{p} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2$$

4

- 【解答】 (1) 線分 AB を 3:4 に内分する点を中心とする半径 1 の円  
 (2) BC を 3:2 に内分する点, AD を 5:1 に内分する点をそれぞれ D, E とすると, E を中心とする半径 1 の円  
 (3) 辺 BC の中点を中心とし, 点 A を通る円  
 (4) 線分 OA を 3:1 に外分する点 Q を通り OA に垂直な直線  
 (5) 線分 OA を 2:1 に外分する点を中心とする半径  $\sqrt{3}|\overrightarrow{OA}|$  の円  
 (6) AB を直径の両端とする円

【解説】

$$(1) |4\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP}| = 7 \text{ から } |4\overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB})| = 7$$

$$\text{すなわち } |7\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AB}| = 7$$

$$\text{両辺を 7 で割って } \left| \overrightarrow{AP} - \frac{3\overrightarrow{AB}}{7} \right| = 1$$

よって, 点 P が描く図形は, 線分 AB を 3:4 に内分する点を中心とする半径 1 の円である。

$$(2) A, B, C, P \text{ の位置ベクトルを, それぞれ } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p} \text{ とすると, } |\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC}| = 6 \text{ から } |-\overrightarrow{AP} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP})| = 6$$

$$\text{ゆえに } |(2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}) - 6\overrightarrow{AP}| = 6$$

$$\text{すなわち } |6\overrightarrow{AP} - (2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})| = 6$$

$$\text{よって } \left| 6\overrightarrow{AP} - \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{6} \right| = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで } \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5}$$

BC を 3:2 に内分する点, AD を 5:1 に内分する点をそれぞれ D, E とすると

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5}, \quad \overrightarrow{AE} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{よって, } \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{6} = \overrightarrow{AE} \text{ となり, } \textcircled{1} \text{ から } |\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AE}| = 1$$

したがって, BC を 3:2 に内分する点, AD を 5:1 に内分する点をそれぞれ D, E とすると, 点 P は E を中心とする半径 1 の円を表す。

$$(3) \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AP} = \vec{p} \text{ とする。}$$

$$|\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}| = |(\vec{p} - \vec{b}) + (\vec{p} - \vec{c})| = 2 \left| \vec{p} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \right|$$

であるから, ベクトル方程式は

$$2 \left| \vec{p} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \right| = |\vec{b} + \vec{c}|$$

$$\text{ゆえに } \left| \vec{p} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \right| = \left| \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \right|$$

よって, この方程式の表す図形は, BC の中点を中心とし, 点 A を通る円である。

$$(4) \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OP} = \vec{p} \text{ とする。}$$

$$|\vec{p} + 2\vec{a}| = |\vec{p} - 5\vec{a}| \text{ の両辺を 2 乗すると } |\vec{p} + 2\vec{a}|^2 = |\vec{p} - 5\vec{a}|^2$$

$$\text{よって } |\vec{p}|^2 + 4\vec{p} \cdot \vec{a} + 4|\vec{a}|^2 = |\vec{p}|^2 - 10\vec{p} \cdot \vec{a} + 25|\vec{a}|^2$$

$$\text{ゆえに } 14\vec{p} \cdot \vec{a} - 21|\vec{a}|^2 = 0$$

$$\text{両辺を 14 で割ると } \vec{p} \cdot \vec{a} - \frac{3}{2}|\vec{a}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\vec{p} - \frac{3}{2}\vec{a}\right) \cdot \vec{a} = 0$$

ここで, 線分 OA を 3:1 に外分する点を Q とすると,  $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{2}\vec{a}$  であるから

$$\vec{p} - \frac{3}{2}\vec{a} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\text{ゆえに, } \overrightarrow{QP} \neq \vec{0} \text{ のとき } \overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{QP} = \vec{0} \text{ のとき, 点 P は Q と一致する。}$$

したがって, 点 P が描く図形は, 線分 OA を 3:1 に外分する点 Q を通り OA に垂直な直線である。

$$(5) |\overrightarrow{OP}|^2 - 4\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{OA}|^2 = 0 \text{ から } |\overrightarrow{OP}|^2 - 4\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} + 4|\overrightarrow{OA}|^2 = 3|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$\text{よって } |\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OA}|^2 = (\sqrt{3}|\overrightarrow{OA}|)^2$$

ゆえに, 点 P の描く図形は, 線分 OA を 2:1 に外分する点を中心とする半径  $\sqrt{3}|\overrightarrow{OA}|$  の円である。

$$(6) \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OP} = \vec{p} \text{ とする。}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \cdot (2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) \text{ から } \vec{p} \cdot (\vec{p} - (\vec{b} - \vec{a})) = 2\vec{a} \cdot \vec{p} - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\text{よって } |\vec{p}|^2 - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{p} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{ゆえに } (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

よって, 点 P の描く図形は, AB を直径の両端とする円である。

5

【解答】 (1)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ ,  $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$ ,  $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$  となる点 C, D, E をとると, 平行四辺形 ADEC の周および内部

(2)  $4\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ ,  $4\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$  となる点 A', B' をとると, 線分 A'B'

(3)  $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ ,  $\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$  となる点 A', B' をとると, 線分 A'B'

(4)  $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OB}$  となる点 C, D をとると,  $\triangle OCD$  の周および内部

(5)  $3\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ ,  $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$  となる点 A', B' をとると,  $\triangle OA'B'$  の周および内部

【解説】

(1) s を固定して,  $\overrightarrow{OA'} = s\overrightarrow{OA}$  とすると

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + t\overrightarrow{OB}$$

ここで, t を  $0 \leq t \leq 1$  の範囲で変化させると, 点 P は右の図の線分 A'C' 上を動く。

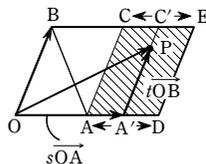
$$\text{ただし, } \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB}$$

次に, s を  $1 \leq s \leq 2$  の範囲で変化させると, 線分 A'C' は図の線分 AC から DE まで平行に動く。

$$\text{ただし, } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$$

よって, 点 P の存在範囲は

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ ,  $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$ ,  $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$  とすると, 平行四辺形 ADEC の周および内部



である。

$$(2) s+t=4 \text{ から } \frac{s}{4} + \frac{t}{4} = 1$$

ここで,  $\frac{s}{4} = s'$ ,  $\frac{t}{4} = t'$  とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s'(4\overrightarrow{OA}) + t'(4\overrightarrow{OB}), \quad s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

よって,  $4\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ ,  $4\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$  となる点 A', B' をとると

$$\overrightarrow{OP} = s'\overrightarrow{OA'} + t'\overrightarrow{OB'}$$

$$s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

したがって, 点 P の存在範囲は線分 A'B' である。

$$(3) s+6t=2 \text{ から } \frac{s}{2} + 3t = 1$$

$$\text{また } \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{2}(2\overrightarrow{OA}) + 3t(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB})$$

ここで,  $\frac{s}{2} = s'$ ,  $3t = t'$  とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s'(2\overrightarrow{OA}) + t'(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}),$$

$$s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

よって,  $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ ,  $\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$  となる点 A', B' をとると, 点 P の存在範囲は線分 A'B' である。

(4)  $s+t=k$  とおく。

$$s+t=k \text{ から } \frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1$$

$$\frac{s}{k} = s', \quad \frac{t}{k} = t' \text{ とおくと } \overrightarrow{OP} = s'(k\overrightarrow{OA}) + t'(k\overrightarrow{OB}), \quad s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

よって,  $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$  となる点 A', B' をとると, 定数 k に対して, 点 P の存在範囲は辺 AB に平行な線分 A'B' である。

ここで,  $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OB}$  となる点 C, D をとると,  $0 < k \leq 3$  の範囲で k が変わるとき, 線分 A'B' 上の点は, 点 O を除く  $\triangle OCD$  の周および内部を動く。

したがって, 点 P の存在範囲は,  $\triangle OCD$  の周および内部である。

$$(5) 0 \leq 2s + 3t \leq 6 \text{ から } 0 \leq \frac{s}{3} + \frac{t}{2} \leq 1$$

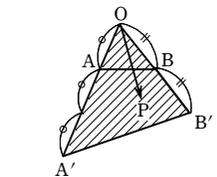
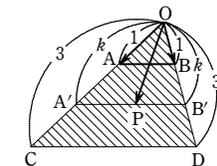
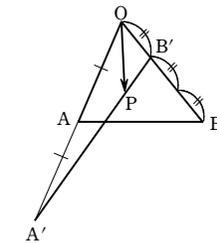
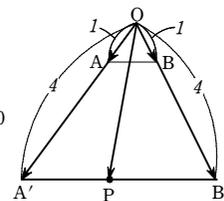
$$\text{また } \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{3}(3\overrightarrow{OA}) + \frac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$$

ここで,  $\frac{s}{3} = s'$ ,  $\frac{t}{2} = t'$  とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s'(3\overrightarrow{OA}) + t'(2\overrightarrow{OB}),$$

$$0 \leq s' + t' \leq 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

よって,  $3\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ ,  $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$  となる点 A', B' をとると, 点 P の存在範囲は  $\triangle OA'B'$  の周および内部である。



第5講 レベルA

1

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) 中心 C, 半径 r の円の接線上に点 P( $\vec{p}$ ) があることは,  $\overrightarrow{CP_0} \perp \overrightarrow{P_0P}$  または  $\overrightarrow{P_0P} = \vec{0}$  が成り立つことと同値である。

よって, 接線のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{CP_0} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0) = 0$$

$\overrightarrow{CP_0} = \vec{p}_0 - \vec{c}$  であるから

$$(\vec{p}_0 - \vec{c}) \cdot \{(\vec{p} - \vec{c}) - (\vec{p}_0 - \vec{c})\} = 0$$

したがって  $(\vec{p}_0 - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) - |\vec{p}_0 - \vec{c}|^2 = 0$

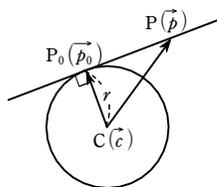
$$|\vec{p}_0 - \vec{c}|^2 = CP_0^2 = r^2 \text{ であるから } (\vec{p}_0 - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

(2) 中心が原点 O ( $\vec{0}$ ), 半径 r の円上の点 P( $\vec{p}_0$ ) における接線のベクトル方程式は,

① において,  $\vec{c} = \vec{0}$  とおくと得られるから  $\vec{p}_0 \cdot \vec{p} = r^2 \dots\dots \textcircled{2}$

$$\vec{p}_0 = (x_0, y_0), \vec{p} = (x, y) \text{ とおくと } \vec{p}_0 \cdot \vec{p} = x_0x + y_0y$$

これを②に代入して, 接線の方程式は  $x_0x + y_0y = r^2$



2

【解答】 (1)  $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 4$  (2)  $x^2 + y^2 - \frac{5}{2}bx + b^2 = 0$

(3)  $(x-11)^2 + (y+7)^2 = 72$

【解説】

(1)  $|\vec{p}|^2 = x^2 + y^2, \vec{a} \cdot \vec{p} = 2x + 3y$  より  $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48 = 0$

$$\text{ゆえに } (x-4)^2 + (y-6)^2 = 4$$

(2)  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = (x, y) + (x-b, y) = (2x-b, 2y)$

$$\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{BP} = (x, y) + (-2x+2b, -2y) = (-x+2b, -y)$$

$$(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}) \cdot (\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{BP}) = 0 \text{ から } (2x-b)(-x+2b) + 2y(-y) = 0$$

$$\text{すなわち } -2x^2 + 5bx - 2b^2 - 2y^2 = 0$$

$$\text{したがって } x^2 + y^2 - \frac{5}{2}bx + b^2 = 0$$

(3)  $2|\overrightarrow{AP}| = 3|\overrightarrow{BP}|$  から  $4|\overrightarrow{AP}|^2 = 9|\overrightarrow{BP}|^2$

$$P(x, y) \text{ とすると } 4\{(x-2)^2 + (y-2)^2\} = 9\{(x-7)^2 + (y+3)^2\}$$

$$\text{展開して整理すると } x^2 + y^2 - 22x + 14y + 98 = 0$$

$$\text{よって } (x-11)^2 + (y+7)^2 = 72$$

3

【解答】 (ア)  $-\frac{\sqrt{21}}{7}$  (イ) 4

【解説】

(ア)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 \times \cos 60^\circ = 1$

$$\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b} \text{ とすると}$$

$$|\vec{u}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 4 \times 1^2 - 12 \times 1 + 9 \times 2^2 = 28$$

$$|\vec{v}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1^2 = 12$$

$|\vec{u}| > 0, |\vec{v}| > 0$  であるから

$$|\vec{u}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}, |\vec{v}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{また } \vec{u} \cdot \vec{v} = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = 4 \times 1^2 - 4 \times 1 - 3 \times 2^2 = -12$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-12}{2\sqrt{7} \times 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$$

(イ) 原点 O に対し,  $\overrightarrow{OP} = \vec{p}, \overrightarrow{OU} = \vec{u}, \overrightarrow{OV} = \vec{v}$  とする。

$$(\vec{p} - 2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{p} - 2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \text{ から } (\vec{p} - \vec{u}) \cdot (\vec{p} - \vec{v}) = 0$$

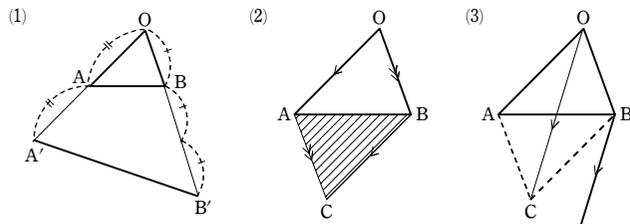
$$\text{ゆえに } \overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{VP} = 0$$

これは, 線分 UV を直径とする円のベクトル方程式である。

$$\text{よって, 求める円の半径は } \frac{|\overrightarrow{UV}|}{2} = \frac{|\vec{v} - \vec{u}|}{2} = \frac{|4\vec{b}|}{2} = 2$$

4

【解答】 (1) [図] (2) [図] 斜線部分, 境界線上の点を含む (3) [図]



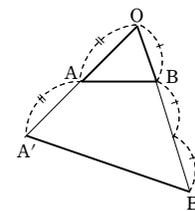
【解説】

(1)  $s = \frac{\alpha}{2}, t = \frac{\beta}{3}$  とおくと  $s+t=1, s \geq 0, t \geq 0$

また,  $\overrightarrow{OP} = s(2\overrightarrow{OA}) + t(3\overrightarrow{OB})$  となる。

よって,  $\overrightarrow{OA}' = 2\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}' = 3\overrightarrow{OB}$  を満たす点 A', B' を

とると  $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}' + t\overrightarrow{OB}'$ ;  $s+t=1, s \geq 0, t \geq 0$  したがって, 終点 P の集合は図の線分 A'B' である。



(2)  $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$  のとき

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  とすると, P は平行四辺形 OACB の周および内部にある。

$1 \leq \alpha + \beta \leq 2$  のとき

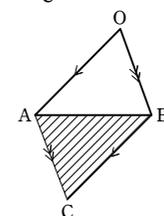
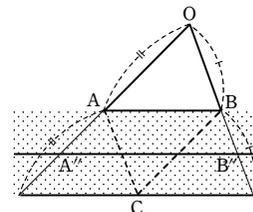
$$\alpha + \beta = k \text{ (} 1 \leq k \leq 2 \text{)} \text{ とすると } \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k} = 1$$

$$\text{また } \overrightarrow{OP} = \frac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{OA}) + \frac{\beta}{k}(k\overrightarrow{OB}), \overrightarrow{OA}'' = k\overrightarrow{OA},$$

$\overrightarrow{OB}'' = k\overrightarrow{OB}$  を満たす点 A'', B'' をとると, P は直線 A''B'' 上を動く。

ここで, k を  $1 \leq k \leq 2$  の範囲で動かすと, P は図の影の部分

を動く。したがって,  $1 \leq \alpha + \beta \leq 2, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$  のとき, 終点 P の集合は図ようになる。ただし, 境界線上の点を含む。



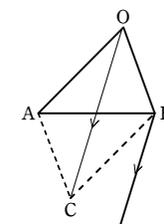
(3)  $\beta - \alpha = 1$  から  $\beta = \alpha + 1$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA} + (\alpha+1)\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \alpha(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$\alpha \geq 0$  であるから, 終点 P の集合は

点 B を端点とし, ベクトル  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  に平行な半直線である。

[図]



1

【解答】 (1)  $\frac{2}{3}a$  (2)  $3a$  (3)  $\sqrt{3}a^2 + \frac{2}{3}\pi a^2$

【解説】

(1)  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$  とする。

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle BAC = a \times 2a \times \cos \frac{2}{3}\pi = -a^2$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \dots \textcircled{1} \text{ であるから}$$

$$|\vec{d}|^2 = \left| \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right|^2 = \frac{1}{9}(4|\vec{b}|^2 + 4\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2) \\ = \frac{1}{9}(4 \times a^2 + 4 \times (-a^2) + (2a)^2) = \frac{4}{9}a^2$$

$$|\overrightarrow{AD}| > 0 \text{ であるから } |\overrightarrow{AD}| = \frac{2}{3}a$$

(2)  $|\overrightarrow{2AP} - \overrightarrow{2BP} - \overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{2AP} - 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC})| = |-\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

① より,  $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD}$  であるから  $|3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}| = a \dots \textcircled{2}$

ここで,  $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$  とおき,  $\overrightarrow{AE} = \vec{e}$ ,  $\overrightarrow{AP} = \vec{p}$  とすると, ②は

$$|\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP}| = a \quad \text{すなわち} \quad |\vec{e} - \vec{p}| = a$$

よって, 点 P は, 中心が E, 半径が a の円周上の点である。

この円を K とおく。

ここで, 直線 AE と円 K の交点のうち, 点 A から遠い方を F とする。

$|\overrightarrow{AP}|$  が最大となるのは, 点 P が点 F に一致するときである。

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD} \text{ であるから } |\overrightarrow{AE}| = 3|\overrightarrow{AD}| = 3 \times \frac{2}{3}a = 2a$$

よって,  $|\overrightarrow{AP}|$  の最大値は  $|\overrightarrow{AE}| + |\overrightarrow{EF}| = 3a$  である。

(3) 線分 AP が通過してできる図形は右の図の斜線部分である。

ただし, 境界線を含む。

ここで, G, H は A から円 K に引いた 2 本の接線の接点である。

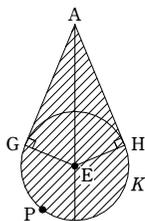
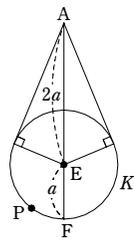
$$\cos \angle AEH = \frac{EH}{AE} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$0 < \angle AEH < \pi \text{ であるから } \angle AEH = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{また, } \angle AEH = \angle AEG \text{ であるから } \angle GEH = \frac{2}{3}\pi$$

よって, 線分 AP が通過してできる図形の面積 S は

$$S = 2 \times \triangle AEH + (\text{円 K の面積}) - (\text{扇形 EGH の面積}) \\ = 2 \times \frac{1}{2} \times a \times \sqrt{3}a + \pi a^2 - \frac{1}{2}a^2 \times \frac{2}{3}\pi = \sqrt{3}a^2 + \frac{2}{3}\pi a^2$$



2

【解答】 (1)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$  とすると, 線分 OB, OC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部

(2)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$  とすると, 線分 OC, OD を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部

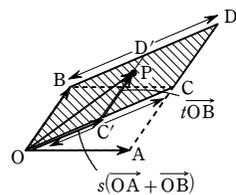
【解説】

(1)  $s\overrightarrow{OA} + (s+t)\overrightarrow{OB} = s(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + t\overrightarrow{OB}$  であるから,  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$  とすると

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

よって, 点 P の存在範囲は

線分 OB, OC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部である。



(2)  $(s-t)\overrightarrow{OA} + (s+t)\overrightarrow{OB} = s(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$  であるから

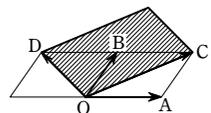
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$$

とすると

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OD}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ゆえに, 点 P の存在範囲は

線分 OC, OD を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部。



3

【解答】 (1)  $6\sqrt{6}$  (2)  $18\sqrt{6}$  (3)  $\frac{27\sqrt{6}}{5}$

【解説】

(1) 余弦定理より  $\cos \angle AOB = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$

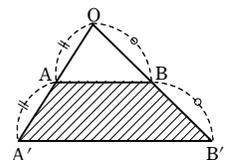
$$\sin \angle AOB > 0 \text{ であるから } \sin \angle AOB = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{よって } \triangle OAB = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}$$

(2)  $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$  となる点 A', B' をとると, 点 P が存在する部分は右の図の斜線部分である。

$\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$  であり, その相似比は 1:2 であるから, 求める面積は

$$\triangle OA'B' - \triangle OAB = 2^2 \triangle OAB - \triangle OAB \\ = 3 \triangle OAB = 3 \times 6\sqrt{6} \\ = 18\sqrt{6}$$



(3)  $2s = s'$  とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s' \left( \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \right) + t \overrightarrow{OB} \quad (s' \geq 0, t \geq 0, 1 \leq s' + t \leq 2)$$

$$s + 3t \leq 3 \text{ から } \frac{s}{3} + t \leq 1$$

$$\frac{s}{3} = s'' \text{ とおくと } \overrightarrow{OP} = s''(3\overrightarrow{OA}) + t\overrightarrow{OB} \quad (s'' \geq 0, t \geq 0, s'' + t \leq 1)$$

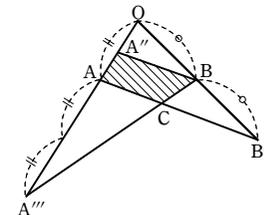
よって,  $\overrightarrow{OA''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OA'''} = 3\overrightarrow{OA}$  となる点 A'', A''' をとると, 点 P が存在する部分は, 四角形 AA''BB' の内部と  $\triangle OA''B$  の内部の共通部分で, 右の図の斜線部分である。

線分 AB' と線分 A''B の交点を C とすると

$$\triangle A''A'B = \triangle OA''B - \triangle OA'B \\ = 3 \triangle OAB - \frac{1}{2} \triangle OAB \\ = \frac{5}{2} \triangle OAB = \frac{5}{2} \times 6\sqrt{6} = 15\sqrt{6}$$

$\triangle A''A'B \sim \triangle A'''AC$  であり, その相似比は 5:4 であるから, 求める面積は

$$\triangle A''A'B - \triangle A'''AC = \triangle A''A'B - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \triangle A''A'B \\ = \frac{9}{25} \triangle A''A'B = \frac{9}{25} \times 15\sqrt{6} = \frac{27\sqrt{6}}{5}$$



章末問題A

1

【解答】 (1)  $\frac{12}{5}$  (2)  $\frac{28}{13}$

【解説】

(1)  $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$  …… ①,  $\vec{q} = \frac{1}{4}(-\vec{a} + 2\vec{b})$  …… ② とする。

② から  $4\vec{q} = -\vec{a} + 2\vec{b}$  …… ③

(①-③)÷2 から  $\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{p} - 4\vec{q})$  …… ④

(①+③)÷4 から  $\vec{b} = \frac{1}{4}(\vec{p} + 4\vec{q})$  …… ⑤

よって  $|\vec{a}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{p}|^2 - 8\vec{p} \cdot \vec{q} + 16|\vec{q}|^2) = \frac{1}{4}(32 - 8\vec{p} \cdot \vec{q}) = 8 - 2\vec{p} \cdot \vec{q}$

$|\vec{b}|^2 = \frac{1}{16}(|\vec{p}|^2 + 8\vec{p} \cdot \vec{q} + 16|\vec{q}|^2) = \frac{1}{16}(32 + 8\vec{p} \cdot \vec{q}) = 2 + \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$  であるから  $8 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} = 2 + \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q}$  これを解いて  $\vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{12}{5}$

(2) ④, ⑤ から  $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \frac{1}{4}(\vec{p} + 4\vec{q}) - \frac{1}{2}(\vec{p} - 4\vec{q}) = -\frac{1}{4}\vec{p} + 3\vec{q}$

2つのベクトル  $\vec{AB}$ ,  $\vec{PQ}$  が垂直であるから  $\vec{AB} \cdot \vec{PQ} = 0$

ここで  $\vec{AB} \cdot \vec{PQ} = \left(-\frac{1}{4}\vec{p} + 3\vec{q}\right) \cdot \left(\vec{q} - \vec{p}\right) = \frac{1}{4}|\vec{p}|^2 - \frac{13}{4}\vec{p} \cdot \vec{q} + 3|\vec{q}|^2$   
 $= 4 - \frac{13}{4}\vec{p} \cdot \vec{q} + 3 = 7 - \frac{13}{4}\vec{p} \cdot \vec{q}$

よって  $7 - \frac{13}{4}\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$  すなわち  $\vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{28}{13}$

2

【解答】 (1)  $\frac{19}{23}\vec{a} + \frac{13}{23}\vec{b}$  (2) 10:9

【解説】

(1)  $MP : PF = t : (1-t)$ ,  $CP : PE = s : (1-s)$  とする。

$\vec{AP} = t\vec{AF} + (1-t)\vec{AM} = t\left(\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) + (1-t)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)$   
 $= \frac{1+t}{2}\vec{a} + \frac{3-2t}{3}\vec{b}$  …… ①

また  $\vec{AP} = s\vec{AE} + (1-s)\vec{AC}$   
 $= s \times \frac{3}{5}\vec{a} + (1-s)(\vec{a} + \vec{b})$   
 $= \left(1 - \frac{2}{5}s\right)\vec{a} + (1-s)\vec{b}$  …… ②

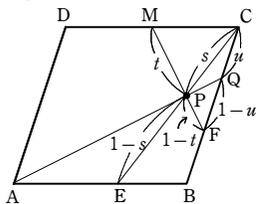
$\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$  であるから,

①, ② より  $\frac{1+t}{2} = \frac{5-2s}{5}$ ,  $\frac{3-2t}{3} = 1-s$

これを解いて  $s = \frac{10}{23}$ ,  $t = \frac{15}{23}$

ゆえに,  $\vec{AP} = \frac{1+\frac{15}{23}}{2}\vec{a} + \left(1 - \frac{2}{5} \times \frac{15}{23}\right)\vec{b} = \frac{19}{23}\vec{a} + \frac{13}{23}\vec{b}$

(2)  $CQ : QF = u : (1-u)$  とおくと,



$\vec{AQ} = u\vec{AF} + (1-u)\vec{AC} = u\left(\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) + (1-u)(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \left(1 - \frac{2}{3}u\right)\vec{b}$

また  $\vec{AQ} = t\vec{AP}$  より,  $\vec{AQ} = \frac{19}{23}t\vec{a} + \frac{13}{23}t\vec{b}$  であるから,

$t = \frac{23}{19}$ ,  $u = \frac{9}{19}$  となり  $CQ : QF = \frac{9}{19} : \frac{10}{19} = 9 : 10$  から  $FQ : QC = 10 : 9$

3

【解答】 (1) 2 (2)  $\sqrt{3}$  (3)  $30^\circ$  (4)  $15^\circ$

【解説】

(1)  $|\vec{OB}|^2 = (\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2$   
 $= 3\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta$   
 $= 4(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 4$

よって  $|\vec{OB}| = 2$  圈

(2)  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta) + (\sin^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)$   
 $= 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta$   
 $= \sqrt{3}\sin 90^\circ - \cos 90^\circ = \sqrt{3}$  圈

【別解】  $\vec{OA} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $\vec{OB} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$  から

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$  圈

(3)  $|\vec{OA}| = 1$ ,  $|\vec{OB}| = 2$ ,  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \sqrt{3}$  であるから  $\cos \angle AOB = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}||\vec{OB}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ \leq \angle AOB \leq 180^\circ$  であるから  $\angle AOB = 30^\circ$  圈

(4)  $\vec{OA} \perp \vec{OB}$  とすると  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$

(2) より  $\sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta = 0$

$\cos 2\theta \neq 0$  であるから  $\tan 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$0^\circ \leq 2\theta \leq 180^\circ$  であるから  $2\theta = 30^\circ$  ゆえに  $\theta = 15^\circ$  圈

4

【解答】  $\vec{c} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{9}{10}\vec{b}$

【解説】

点 C は  $\angle AOB$  の二等分線上にあるから

$\vec{c} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) = t\left(\frac{\vec{a}}{3} + \frac{\vec{b}}{2}\right)$  ( $t$  は実数)

と表される。

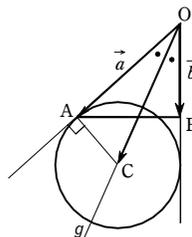
また, 中心 C の円が点 A で直線 OA に接するから

$CA \perp OA$

よって  $\vec{CA} \cdot \vec{OA} = 0$  …… ①

ここで  $\vec{CA} \cdot \vec{OA} = (\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = \left(1 - \frac{t}{3}\right)\vec{a} - \frac{t}{2}\vec{b} \cdot \vec{a}$   
 $= \left(1 - \frac{t}{3}\right)|\vec{a}|^2 - \frac{t}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(1 - \frac{t}{3}\right) \times 3^2 - \frac{t}{2} \times 4$   
 $= 9 - 5t$

① から  $9 - 5t = 0$  ゆえに  $t = \frac{9}{5}$



したがって  $\vec{c} = \frac{9}{5}\left(\frac{\vec{a}}{3} + \frac{\vec{b}}{2}\right) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{9}{10}\vec{b}$

【別解】 直線 OC と辺 AB の交点を D とすると

$AD : DB = OA : OB = 3 : 2$

よって  $\vec{OD} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5}$

$\vec{OC} = k\vec{OD}$  ( $k$  は実数) と表されるから,  $\frac{k}{5} = t$  とおくと

$\vec{c} = t(2\vec{a} + 3\vec{b})$  ( $t$  は実数)

と表される。

また, 中心 C の円が点 A で直線 OA に接するから

$CA \perp OA$

よって  $\vec{CA} \cdot \vec{OA} = 0$  …… ①

ここで  $\vec{CA} \cdot \vec{OA} = (\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = \left(1 - 2t\right)\vec{a} - 3t\vec{b} \cdot \vec{a}$   
 $= (1 - 2t)|\vec{a}|^2 - 3t\vec{a} \cdot \vec{b}$   
 $= (1 - 2t) \times 3^2 - 3t \times 4 = 9 - 30t$

① から  $9 - 30t = 0$  ゆえに  $t = \frac{3}{10}$

したがって  $\vec{c} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{9}{10}\vec{b}$

5

【解答】 (1)  $\vec{AE} = 2\vec{b}$ ,  $\vec{AF} = 3\vec{d}$  (2)  $\vec{QR} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d}$  (3) 略

【解説】

(1)  $\vec{AE} = k\vec{AB}$ ,  $\vec{DE} = h\vec{DC}$  とすると

$\vec{AE} = k\vec{b}$

$\vec{DE} = h(\vec{AC} - \vec{AD}) = h\left(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d} - \vec{d}\right)$   
 $= \frac{4}{5}h\vec{b} - \frac{2}{5}h\vec{d}$

ゆえに

$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{d} + \left(\frac{4}{5}h\vec{b} - \frac{2}{5}h\vec{d}\right)$   
 $= \frac{4}{5}h\vec{b} + \left(1 - \frac{2}{5}h\right)\vec{d}$

$\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{d} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b}$  と  $\vec{d}$  は平行でないから

$\frac{4}{5}h = k$ ,  $1 - \frac{2}{5}h = 0$

これを解いて  $k = 2$ ,  $h = \frac{5}{2}$  よって  $\vec{AE} = 2\vec{b}$

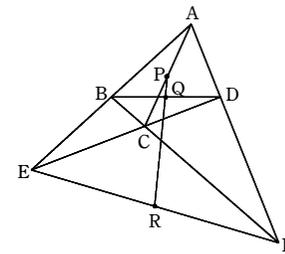
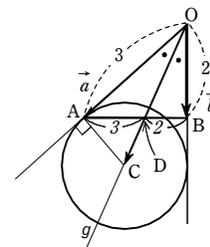
$\vec{AF} = l\vec{AD}$ ,  $\vec{BF} = m\vec{BC}$  とすると  $\vec{AF} = l\vec{d}$

$\vec{BF} = m(\vec{AC} - \vec{AB}) = m\left(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d} - \vec{b}\right) = -\frac{1}{5}m\vec{b} + \frac{3}{5}m\vec{d}$

ゆえに  $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{b} - \frac{1}{5}m\vec{b} + \frac{3}{5}m\vec{d} = \left(1 - \frac{1}{5}m\right)\vec{b} + \frac{3}{5}m\vec{d}$

これから  $1 - \frac{1}{5}m = 0$ ,  $\frac{3}{5}m = l$

これを解いて  $l = 3$ ,  $m = 5$  よって  $\vec{AF} = 3\vec{d}$



章末問題A

(2)  $\overrightarrow{AQ} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$

$\overrightarrow{AR} = \frac{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}}{2} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{2}$

よって  $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AQ} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{2} - \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d}$

(3)  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}\right) = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{d}$

ゆえに  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{2} - \left(\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{d}\right) = \frac{3}{5}(\vec{b} + 2\vec{d}) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d}\right)$

よって  $\overrightarrow{PR} = \frac{6}{5}\overrightarrow{QR}$

したがって、3点P, Q, Rは同一直線上にある。

6

【解答】 (1)  $\overrightarrow{OR} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$  (2)  $\overrightarrow{BS} = \frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b}$  (3)  $\frac{3}{4}$  (4)  $\frac{\sqrt{7}}{8}$

【解説】

(1) 点Pは辺ABを1:3に内分するから

$\overrightarrow{OP} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

点Rは直線OP上にあるから、 $\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OP}$  ( $k$ は実数)とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \frac{3}{4}k\vec{a} + \frac{1}{4}k\vec{b} = \frac{3}{4}k\vec{a} + \left(\frac{1}{2}k\right)\frac{1}{2}\vec{b} \\ &= \frac{3}{4}k\vec{a} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{OQ} \end{aligned}$$

点Rは直線AQ上にあるから  $\frac{3}{4}k + \frac{1}{2}k = 1$

よって  $k = \frac{4}{5}$  ゆえに  $\overrightarrow{OR} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$

(2) (1)から  $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OB} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$

点Sは直線BR上にあるから、 $\overrightarrow{BS} = m\overrightarrow{BR}$  ( $m$ は実数)とすると

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{BR} = \frac{3}{5}m\vec{a} + \left(1 - \frac{4}{5}m\right)\vec{b}$

点Sは辺OA上にあるから  $1 - \frac{4}{5}m = 0$  よって  $m = \frac{5}{4}$

このとき  $\overrightarrow{BS} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BR} = \frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b}$

(3)  $\overrightarrow{BS} \perp \overrightarrow{OA}$  であるから  $\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$  ゆえに、(2)から  $\frac{3}{4}|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$|\vec{a}| = 1$  より  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{4}$

(4) (3)から

$\triangle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{8}$

7

【解答】 (1) 2 (2)  $\overrightarrow{AP} = \vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$

(3)  $AP = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ,  $AQ = \frac{4\sqrt{2}}{3}$  (4)  $\frac{8\sqrt{2}}{9}$

【解説】

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = AB \times AD \times \cos \angle BAD = 2 \times 3 \times \frac{1}{3} = 2$

(2) 点Pは直線BC上にあり、 $AD \parallel BC$ であるから

$\overrightarrow{BP} = k\vec{b}$  ( $k$ は実数)

と表される。

よって  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \vec{a} + k\vec{b}$

$AD \perp AP$ であるから  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

ゆえに  $\vec{b} \cdot (\vec{a} + k\vec{b}) = 0$

よって  $\vec{a} \cdot \vec{b} + k|\vec{b}|^2 = 0$

ゆえに  $2 + k \cdot 3^2 = 0$  よって  $k = -\frac{2}{9}$

したがって  $\overrightarrow{AP} = \vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}$

また、 $BQ : QD = s : (1-s)$ とすると  $\overrightarrow{AQ} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$

$BD \perp AQ$ であるから  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$  よって  $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\} = 0$

ゆえに  $(s-1)|\vec{a}|^2 + (1-2s)\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 = 0$

よって  $(s-1) \cdot 2^2 + (1-2s) \cdot 2 + s \cdot 3^2 = 0$

ゆえに  $9s - 2 = 0$  よって  $s = \frac{2}{9}$

したがって  $\overrightarrow{AQ} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$

(3)  $AP = |\overrightarrow{AP}|$ ,  $AQ = |\overrightarrow{AQ}|$ であるから

$|\overrightarrow{AP}|^2 = \left|\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}\right|^2 = (\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b})$

$= |\vec{a}|^2 - \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{81}|\vec{b}|^2 = 2^2 - \frac{4}{9} \cdot 2 + \frac{4}{81} \cdot 3^2 = \frac{32}{9}$

よって  $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$|\overrightarrow{AQ}|^2 = \left|\frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}\right|^2 = \frac{1}{81}(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$

$= \frac{1}{81}(49|\vec{a}|^2 + 28\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2) = \frac{1}{81}(49 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 + 4 \cdot 3^2) = \frac{288}{81}$

ゆえに  $|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{\frac{288}{81}} = \frac{12\sqrt{2}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

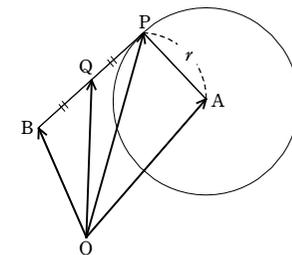
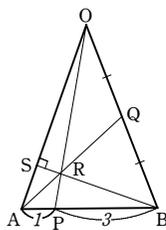
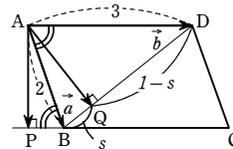
(4)  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} - \left(\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}\right) = -\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} = -\frac{2}{9}(\vec{a} - 2\vec{b})$

よって  $|\overrightarrow{PQ}|^2 = \left|-\frac{2}{9}(\vec{a} - 2\vec{b})\right|^2 = \frac{4}{81}(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$

$= \frac{4}{81}(|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2) = \frac{4}{81}(2^2 - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3^2) = \frac{4}{81} \cdot 32$

ゆえに  $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{4}{81} \cdot 32} = \frac{2}{9} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{9}$

よって  $PQ = \frac{8\sqrt{2}}{9}$



8

【解答】 (ア)  $\left(3, \frac{3}{2}\right)$  (イ) (1, 2) (ウ)  $0 \leq s' + t' \leq \frac{1}{3}$ ,  $s' \geq 0$ ,  $t' \geq 0$

【解説】

$0 \leq s + t \leq \frac{1}{2}$ ,  $s \geq 0$ ,  $t \geq 0$ から

$0 \leq 2s + 2t \leq 1$ ,  $2s \geq 0$ ,  $2t \geq 0$

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ から  $\overrightarrow{OP} = 2s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right) + 2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

よって、 $\overrightarrow{OA}' = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}' = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ とおくと、点Pの存在範囲は $\triangle OA'B'$ の周および内部である。

ゆえに、点A'の座標は  $\left(3, \frac{3}{2}\right)$

また、点B'の座標は  $(1, 2)$

$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ であるから

$\overrightarrow{OQ} = s\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}\right) + t\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right) = \frac{3}{2}s\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}t\overrightarrow{OB}$

よって、点Qの存在範囲が点Pの存在範囲と一致するとき

$0 \leq \frac{3}{2}s' + \frac{3}{2}t' \leq \frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}s' \geq 0$ ,  $\frac{3}{2}t' \geq 0$

ゆえに、実数 $s'$ と $t'$ の満たす条件は

$0 \leq s' + t' \leq \frac{1}{3}$ ,  $s' \geq 0$ ,  $t' \geq 0$

9

【解答】 (1)  $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = r$  (2)  $\left|\overrightarrow{OQ} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\right| = \frac{r}{2}$

(3)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$ , (0, 2)

【解説】

(1)  $|\overrightarrow{AP}| = r$

また、 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ であるから  $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = r$

(2)  $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OB})$

よって  $\overrightarrow{OQ} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$

ゆえに  $\left|\overrightarrow{OQ} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\right| = \frac{r}{2}$

【別解】 (2)  $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB})$ から

$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB}$

これを(1)の結果に代入すると

$|\overrightarrow{2OQ} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = r$

ゆえに  $\left|\overrightarrow{OQ} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\right| = \frac{r}{2}$

(3)  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(2-1, 5-1) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

よって  $\vec{OQ} - \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = (x - \frac{1}{2}, y - 2)$

(2) の結果と  $r=1$  から、 $D$  の方程式は  $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{4}$

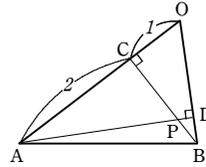
$x=0$  とおくと  $(y-2)^2=0$  ゆえに  $y=2$   
したがって、求める共有点の座標は  $(0, 2)$

1

【解答】 (1)  $60^\circ$  (2)  $t = \frac{3}{4}$  (3)  $\vec{OP} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【解説】

(1)  $\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = t\vec{b} - \vec{a}$   
 $\vec{AD} \perp \vec{OB}$  から  $\vec{AD} \cdot \vec{OB} = 0$   
 すなわち  $(t\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$  よって  $\vec{a} \cdot \vec{b} = t|\vec{b}|^2$   
 $t = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$  を代入して  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$  …… ①



ゆえに  $\cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2}$   
 $0^\circ < \angle AOB < 180^\circ$  であるから  $\angle AOB = 60^\circ$

(2)  $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$   
 $\vec{BC} \perp \vec{OA}$  より  $\vec{BC} \cdot \vec{OA} = 0$  であるから  $(\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$   
 よって  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}|\vec{a}|^2$  …… ②

①, ② より  $\frac{1}{3}|\vec{a}|^2 = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$   $|\vec{a}| \neq 0$  であるから  $|\vec{a}| = \frac{3}{2}|\vec{b}|$

したがって  $t = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|} = \frac{\frac{3}{2}|\vec{b}|}{2|\vec{b}|} = \frac{3}{4}$

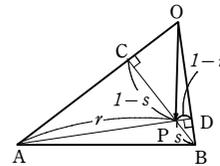
(3)  $AP : PD = r : (1-r)$ ,  $BP : PC = s : (1-s)$  とすると  
 $\vec{OP} = (1-r)\vec{OA} + r\vec{OD} = (1-r)\vec{a} + \frac{3}{4}r\vec{b}$  …… ③

$\vec{OP} = s\vec{OC} + (1-s)\vec{OB} = \frac{1}{3}s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$  …… ④

③, ④ より  $(1-r)\vec{a} + \frac{3}{4}r\vec{b} = \frac{1}{3}s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$

ここで、 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  で、かつ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  は平行でないから  
 $1-r = \frac{1}{3}s$ ,  $\frac{3}{4}r = 1-s$

これを解いて  $r = \frac{8}{9}$ ,  $s = \frac{1}{3}$   $s = \frac{1}{3}$  を ④ に代入して  $\vec{OP} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$



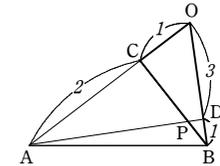
【別解】  $t = \frac{3}{4}$  より  $OD : DB = 3 : 1$

$\triangle OBC$  と直線  $AD$  について、メネラウスの定理を適用して

$\frac{BD}{DO} \cdot \frac{OA}{AC} \cdot \frac{CP}{PB} = 1$  すなわち  $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{CP}{PB} = 1$

よって  $\frac{CP}{PB} = 2$  ゆえに  $CP : PB = 2 : 1$

したがって  $\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{OC} + \frac{2}{3}\vec{OB} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$



2

【解答】 (1)  $\sin \beta = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ ,  $\cos 2\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)  $\beta = 75^\circ, 105^\circ$

(3)  $s = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $t = -\frac{1}{2}$

【解説】

(1) 正弦定理より  $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$

よって  $\frac{1 + \sqrt{3}}{\sin \beta} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$

ゆえに  $\sin \beta = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

また  $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\angle ACB = 45^\circ$  であるから  $0^\circ < \beta < 135^\circ$  よって  $0^\circ < 2\beta < 270^\circ$

ゆえに、 $\cos 2\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  から  $2\beta = 150^\circ, 210^\circ$

したがって  $\beta = 75^\circ, 105^\circ$

(3)  $\triangle ABC$  が鋭角三角形であるから  $\beta = 75^\circ$   
 円周角の定理により  $\angle AOB = 2\angle ACB = 90^\circ$

ゆえに  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$

また、 $OA = OB$  であるから  $OA = OB = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \sqrt{2}$

すなわち  $OA = OB = OC = \sqrt{2}$   
 円周角の定理により  $\angle AOC = 2\beta = 150^\circ$

よって  $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = |\vec{OA}| |\vec{OC}| \cos 150^\circ$   
 $= (\sqrt{2})^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

更に、 $\angle BOC = 360^\circ - (90^\circ + 150^\circ) = 120^\circ$  であるから

$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = |\vec{OB}| |\vec{OC}| \cos 120^\circ = (\sqrt{2})^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

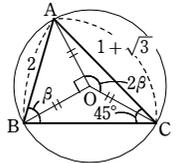
よって、 $\vec{OC} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$  ( $s, t$  は実数) とすると

$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = s|\vec{OA}|^2 + t\vec{OA} \cdot \vec{OB} = s(\sqrt{2})^2 + t \cdot 0 = 2s$

ゆえに、 $2s = -\sqrt{3}$  から  $s = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

また  $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = s\vec{OA} \cdot \vec{OB} + t|\vec{OB}|^2 = s \cdot 0 + t(\sqrt{2})^2 = 2t$

よって、 $2t = -1$  から  $t = -\frac{1}{2}$



3

【解答】 (1)  $\vec{BP} = \frac{3-3t}{5-3t}\vec{a} + \frac{2t}{5-3t}\vec{c}$  (2)  $t = \frac{2}{5}$

【解説】

(1)  $AP : PL = m : (1-m)$  とすると

$\vec{BP} = (1-m)\vec{BA} + m\vec{BL} = (1-m)\vec{a} + m\vec{c}$  …… ①

また、 $CP : PN = n : (1-n)$  とすると

$\vec{BP} = n\vec{BN} + (1-n)\vec{BC} = \frac{3}{5}n\vec{a} + (1-n)\vec{c}$  …… ②

章末問題B

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{c}$  であるから, ①, ②より

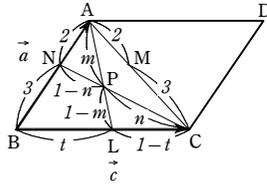
$$1-m = \frac{3}{5}n, \quad mt = 1-n$$

$n$  を消去して整理すると  $(5-3t)m = 2$

$0 < t < 1$  であるから  $5-3t \neq 0$

$$\text{よって } m = \frac{2}{5-3t}$$

$$\text{①に代入して } \vec{BP} = \frac{3-3t}{5-3t}\vec{a} + \frac{2t}{5-3t}\vec{c}$$



$$(2) \vec{MD} = \vec{BD} - \vec{BM} = (\vec{a} + \vec{c}) - \frac{1}{5}(3\vec{a} + 2\vec{c}) = \frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{c})$$

$$\vec{PD} = \vec{BD} - \vec{BP} = (\vec{a} + \vec{c}) - \frac{1}{5-3t}(3(1-t)\vec{a} + 2t\vec{c}) = \frac{1}{5-3t}(2\vec{a} + (5-5t)\vec{c})$$

P, M, D が一直線上にあり,  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{c}$  であるから  $5-5t = 3$

$$\text{よって } t = \frac{2}{5}$$

4

$$\text{【解答】 } \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}, \quad \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

【解説】

円との交点を P とすると, 点 P は  $\angle AOB$  の二等分線上にあるから

$$\vec{OP} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) = t\left(\frac{\vec{a}}{3} + \frac{\vec{b}}{5}\right) \quad (t \text{ は実数})$$

と表される。

$$\text{よって } \vec{BP} = \vec{OP} - \vec{OB} = \frac{t}{3}\vec{a} + \left(\frac{t}{5} - 1\right)\vec{b}$$

$BP = \sqrt{10}$  より  $|\vec{BP}|^2 = 10$  であるから

$$\frac{t^2}{9}|\vec{a}|^2 + 2 \times \frac{t}{3} \left(\frac{t}{5} - 1\right) \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{t}{5} - 1\right)^2 |\vec{b}|^2 = 10$$

$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 5 \times \frac{3}{5} = 9$  を代入して

$$t^2 + 6t\left(\frac{t}{5} - 1\right) + (t-5)^2 = 10 \quad \text{整理して } 16t^2 - 80t + 75 = 0$$

$$\text{よって } (4t-5)(4t-15) = 0 \quad \text{ゆえに } t = \frac{5}{4}, \frac{15}{4}$$

したがって, 求める位置ベクトルは  $\frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}, \quad \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

【別解】  $\angle AOB$  の二等分線と AB の交点を C とすると,  $AC : CB = OA : OB = 3 : 5$  であるから

$$\vec{OP} = t\vec{OC} = t \times \frac{5\vec{a} + 3\vec{b}}{3+5}$$

$\frac{t}{8} = k$  とおくと,  $\vec{OP} = k(5\vec{a} + 3\vec{b})$  と表される。

このとき  $\vec{BP} = 5k\vec{a} + (3k-1)\vec{b}$

そこで,  $|\vec{BP}|^2 = 10$  から  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = 9$  を代入すると

$$48k^2 - 16k + 1 = 0 \quad \text{これを解いて } k = \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$$

したがって, 求める位置ベクトルは  $\frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}, \quad \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

5

$$\text{【解答】 (1) } \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} \quad (2) \frac{15\sqrt{3}}{4} \quad (3) \sqrt{3} \leq S \leq \frac{25\sqrt{3}}{16}$$

【解説】

(1) 直線 AI と辺 BC の交点を D とすると

$$BD : DC = AB : AC = 3 : 5$$

$$\text{よって } \vec{AD} = \frac{5\vec{AB} + 3\vec{AC}}{3+5} = \frac{1}{8}(5\vec{b} + 3\vec{c})$$

$$\text{また } BD = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8} \times 7 = \frac{21}{8}$$

$$\triangle ABD \text{ において } AI : ID = AB : BD = 3 : \frac{21}{8} = 8 : 7$$

$$\text{ゆえに } \vec{AI} = \frac{8}{15}\vec{AD} = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{8}(5\vec{b} + 3\vec{c}) = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} \quad \dots\dots \text{①}$$

(2)  $\triangle ABC$  において, 余弦定理により

$$\cos \angle BAC = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$  であるから  $\angle BAC = 120^\circ$

$$\text{ゆえに } \triangle ABC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

(3)  $\vec{AP} = k\vec{b}, \vec{AQ} = l\vec{c}$  ( $0 < k \leq 1, 0 < l \leq 1$ ) とすると,  $\triangle APQ$  の面積  $S$  は

$$S = kl \triangle ABC = \frac{15\sqrt{3}}{4}kl$$

$PI : IQ = t : (1-t)$  ( $0 < t < 1$ ) とすると

$$\vec{AI} = (1-t)\vec{AP} + t\vec{AQ} = (1-t)k\vec{b} + tl\vec{c} \quad \dots\dots \text{②}$$

$\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}, \vec{b} \nparallel \vec{c}$  であるから, ①, ②より

$$(1-t)k = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \text{③}, \quad tl = \frac{1}{5} \quad \dots\dots \text{④}$$

$$\text{よって } k = \frac{1}{3(1-t)}, \quad l = \frac{1}{5t}$$

$$\text{ゆえに } S = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3(1-t)} \cdot \frac{1}{5t} = \frac{\sqrt{3}}{4t(1-t)}$$

ここで,  $0 < k \leq 1$  と ③ から  $1-t \geq \frac{1}{3}$  よって  $t \leq \frac{2}{3}$

$0 < l \leq 1$  と ④ から  $t \geq \frac{1}{5}$

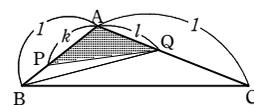
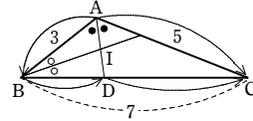
ゆえに,  $t$  のとりうる値の範囲は  $\frac{1}{5} \leq t \leq \frac{2}{3}$

$4t(1-t) = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$  であるから,  $\frac{1}{5} \leq t \leq \frac{2}{3}$  の範囲で  $4t(1-t)$  は

$$t = \frac{1}{5} \text{ のとき最小値 } 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25}, \quad t = \frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } 1$$

をとる。

したがって,  $S = \frac{\sqrt{3}}{4t(1-t)}$  のとりうる値の範囲は



$$\frac{\sqrt{3}}{1} \leq S \leq \frac{\sqrt{3}}{\frac{16}{25}} \quad \text{すなわち } \sqrt{3} \leq S \leq \frac{25\sqrt{3}}{16}$$

6

$$\text{【解答】 (1) } m = 2, n = 1 \quad (2) s = -\frac{14}{5}, t = \frac{7}{2}$$

【解説】

(1) 点 O から直線  $k$  に垂線  $OO'$  を引く。

$\triangle OCA : \triangle ACD = 1 : 2$  であるから  $O'A : O'D = 1 : 3$

$$\text{また } \vec{O'A} = \vec{OA} - \vec{OO'} = \vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{BA}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$$

$$\text{よって } \vec{OD} = \vec{OO'} + \vec{O'D} = \frac{1}{2}\vec{BA} + 3\vec{O'A}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{OA} - \vec{OB}) + \frac{3}{2}\vec{OA} + \frac{3}{2}\vec{OB}$$

$$= 2\vec{OA} + \vec{OB}$$

$\vec{OA} \neq \vec{0}, \vec{OB} \neq \vec{0}, \vec{OA} \nparallel \vec{OB}$  であるから

$$m = 2, n = 1$$

(2)  $\triangle OAB$  は, 1 辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1,$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}||\vec{OB}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$\vec{OE} = \alpha\vec{OA}, \vec{OF} = \beta\vec{OB}$  ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ) とすると

$$\vec{EF} = \vec{OF} - \vec{OE} = \beta\vec{OB} - \alpha\vec{OA}$$

$\vec{EF} \perp \vec{OD}$  から  $\vec{EF} \cdot \vec{OD} = 0$

ここで

$$\vec{EF} \cdot \vec{OD} = (\beta\vec{OB} - \alpha\vec{OA}) \cdot (2\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$= -2\alpha|\vec{OA}|^2 + (2\beta - \alpha)\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \beta|\vec{OB}|^2$$

$$= -2\alpha \times 1^2 + (2\beta - \alpha) \times \frac{1}{2} + \beta \times 1^2 = -\frac{5}{2}\alpha + 2\beta$$

$$\text{よって } -\frac{5}{2}\alpha + 2\beta = 0 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$\text{また } \vec{OD} = 2\vec{OA} + \vec{OB} = \frac{2}{\alpha}\vec{OE} + \frac{1}{\beta}\vec{OF}$$

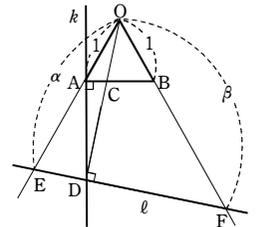
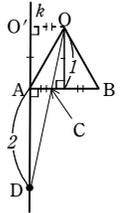
点 D は直線 EF 上にあるから  $\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \quad \dots\dots \text{②}$

$$\text{① から } \beta = \frac{5}{4}\alpha \quad \text{これを ② に代入して } \frac{2}{\alpha} + \frac{4}{5\alpha} = 1$$

これを解くと  $\alpha = \frac{14}{5}$  このとき  $\beta = \frac{7}{2}$

$$\text{ゆえに } \vec{EF} = -\frac{14}{5}\vec{OA} + \frac{7}{2}\vec{OB}$$

$\vec{OA} \neq \vec{0}, \vec{OB} \neq \vec{0}, \vec{OA} \nparallel \vec{OB}$  であるから  $s = -\frac{14}{5}, t = \frac{7}{2}$



章末問題B

7

解答 (1)  $\vec{c} = \frac{5}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$  (2)  $\vec{OH} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ ,  $|\vec{CH}| = 3\sqrt{2}$

(3)  $t = \frac{1}{2}$ ,  $s = \frac{3}{2}$  で最小値 4

解説

(1)  $x, y$  を実数として,  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$  とおく。

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 8$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 20$  に代入すると  $\vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b}) = 8$ ,  $\vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b}) = 20$

ゆえに  $2x + 2y = 8$ ,  $2x + 10y = 20$

よって  $x = \frac{5}{2}$ ,  $y = \frac{3}{2}$  したがって  $\vec{c} = \frac{5}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

(2)  $l$  を実数として,  $\vec{OH} = l\vec{a} + (1-l)\vec{b}$  とおく。

$\vec{CH} \perp \vec{AB}$  から  $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$

ゆえに  $(\vec{OH} - \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = 0$  ..... ①

(1) の結果から, ①の左辺は

$$\begin{aligned} & \left[ l\vec{a} + (1-l)\vec{b} - \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} \right] \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \left[ \left( l - \frac{5}{2} \right) \vec{a} + \left( -l - \frac{1}{2} \right) \vec{b} \right] \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (2l - 2) \vec{a} \cdot \vec{b} - \left( l - \frac{5}{2} \right) |\vec{a}|^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right) |\vec{b}|^2 \\ &= 4l - 4 - 2l + 5 - 10l - 5 = -8l - 4 \end{aligned}$$

よって, ① から  $-8l - 4 = 0$  すなわち  $l = -\frac{1}{2}$

ゆえに  $\vec{OH} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

したがって  $\vec{CH} = -3\vec{a}$  から  $|\vec{CH}| = 3\sqrt{2}$

(3)  $(s+t-1)(s+3t-3) \leq 0$  から

$s+t \geq 1$ ,  $\frac{s}{3} + t \leq 1$

または

$s+t \leq 1$ ,  $\frac{s}{3} + t \geq 1$

ゆえに,  $3\vec{a} = \vec{OD}$  となる

点 D をとると, 点 P の存在する範囲は図の斜線部分になる。ただし, 境界線を含む。

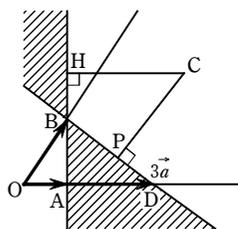
また, (1) より点 C は直線 OA, OB で挟まれた部分のうち, 線分 BD に関して点 O と反対側の領域にあることがわかるから, 線分 BD 上に点 P があるときの  $|\vec{CP}|$  の最小値を求めればよい。

$\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC} = \left( s - \frac{5}{2} \right) \vec{a} + \left( t - \frac{3}{2} \right) \vec{b}$

から  $|\vec{CP}|^2 = \left( s - \frac{5}{2} \right)^2 |\vec{a}|^2 + 2 \left( s - \frac{5}{2} \right) \left( t - \frac{3}{2} \right) \vec{a} \cdot \vec{b} + \left( t - \frac{3}{2} \right)^2 |\vec{b}|^2$

P が線分 BD 上の点から  $s = -3t + 3$ ,  $0 \leq t \leq 1$

よって  $|\vec{CP}|^2 = 2 \left( -3t + \frac{1}{2} \right)^2 + 4 \left( -3t + \frac{1}{2} \right) \left( t - \frac{3}{2} \right) + 10 \left( t - \frac{3}{2} \right)^2$



$= 16t^2 - 16t + 20 = 16 \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 + 16$

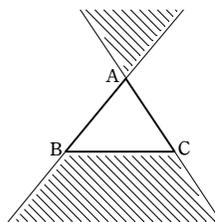
ゆえに,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq s \leq 3$  から,  $t = \frac{1}{2}$ ,  $s = \frac{3}{2}$  で  $|\vec{CP}|^2$  は最小値 16 をとり, このとき  $|\vec{CP}|$  は最小値 4 をとる。

4 は  $CH = 3\sqrt{2}$  より小さいから, これが求める最小値である。

8

解答 (1)  $\vec{AD} = \frac{b}{b+c}\vec{AB} + \frac{c}{b+c}\vec{AC}$

(2) [図] 境界線を含まない



解説

(1)  $\vec{AD} = \frac{b\vec{AB} + c\vec{AC}}{b+c} = \frac{b}{b+c}\vec{AB} + \frac{c}{b+c}\vec{AC}$

(2) 等式から  $-a\vec{AP} + b(\vec{AB} - \vec{AP}) + c(\vec{AC} - \vec{AP}) = \vec{0}$

変形して  $(a+b+c)\vec{AP} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$

また, 条件(a) から  $a+b+c \neq 0$

よって  $\vec{AP} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$

ゆえに, (1) から  $\vec{AP} = \frac{b+c}{a+b+c}\vec{AD}$

[1]  $a+b+c > 0$  のとき, 条件(a) より  $a < 0$  であるから

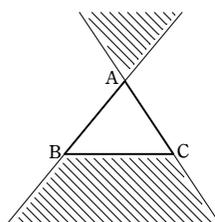
$b+c > a+b+c > 0$  よって  $\frac{b+c}{a+b+c} > 1$

[2]  $a+b+c < 0$  のとき, 条件(a) より  $b+c > 0$  であるから

$\frac{b+c}{a+b+c} < 0$

ゆえに, 点 D は線分 BC (B, C を除く) 上の任意の点であり [1], [2] から, 点 P は線分 AD の外分点 (端点を除く) 全体を動く。

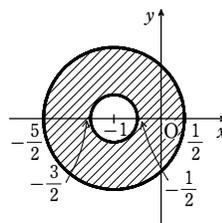
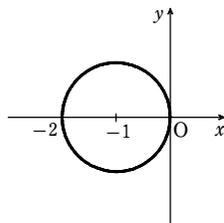
よって, 図の斜線部分。ただし, 境界線を除く。



9

解答 (1) [図]

(2) [図], 境界線を含む



解説

P は点 A (2, 0) を中心とする半径 1 の円 C<sub>1</sub> 上を動くから

$|\vec{OP} - \vec{OA}| = 1$  ..... ①

Q は点 B (-4, 0) を中心とする半径 2 の円 C<sub>2</sub> 上を動くから

$|\vec{OQ} - \vec{OB}| = 2$  ..... ②

(1)  $\vec{OS} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$  を変形して

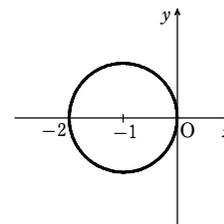
$\vec{OQ} = 2\vec{OS} - \vec{OA}$  ..... ③

② に代入して  $|2\vec{OS} - \vec{OA} - \vec{OB}| = 2$

すなわち  $\left| \vec{OS} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \right| = 1$

$\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = (-1, 0)$  であるから, 点 S は点 (-1, 0)

を中心とする半径 1 の円上を動く。よって, 点 S の動く範囲は右の図のようになる。



(2) ③ から  $\vec{OR} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OQ}) = \frac{1}{2}(\vec{OP} + 2\vec{OS} - \vec{OA})$

ゆえに  $\vec{OR} = \vec{OS} + \vec{OS} - \frac{1}{2}\vec{OA}$

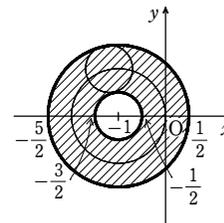
これを ① に代入すると

$|2\vec{OR} - 2\vec{OS} + \vec{OA} - \vec{OA}| = 1$

すなわち  $|\vec{OR} - \vec{OS}| = \frac{1}{2}$

よって, 点 R は点 S を中心とする半径  $\frac{1}{2}$  の円上を動く。

また, (1) より, 点 S が点 (-1, 0) を中心とする半径 1 の円上を動くことから, 点 R の動く範囲は右の図の斜線部分になる。ただし, 境界線を含む。



章末問題C

1

解答  $\frac{2}{5} \leq t < 1$

解説

条件から  $\vec{OP} = t\vec{a}$ ,  $\vec{OQ} = \frac{1}{2}\vec{b}$

QR : RA = r : (1-r) (0 < r < 1) とすると

$$\vec{OR} = r\vec{OA} + (1-r)\vec{OQ} = r\vec{a} + \frac{1-r}{2}\vec{b} \quad \dots\dots ①$$

PR : RB = s : (1-s) (0 < s < 1) とすると

$$\vec{OR} = (1-s)\vec{OP} + s\vec{OB} = (1-s)t\vec{a} + s\vec{b} \quad \dots\dots ②$$

$\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角  $\theta$  が  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  であるから  $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$

また,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  であるから, ①, ② より  $r = (1-s)t$ ,  $\frac{1-r}{2} = s$

よって  $r = \frac{t}{2-t}$  (0 < t < 1)

ゆえに  $\vec{OR} = \frac{t}{2-t}\vec{a} + \frac{1-t}{2-t}\vec{b}$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OR} \cdot \vec{AB} &= \left(\frac{t}{2-t}\vec{a} + \frac{1-t}{2-t}\vec{b}\right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2-t} \{-t|\vec{a}|^2 + (1-t)|\vec{b}|^2 + (2t-1)\vec{a} \cdot \vec{b}\} \\ &= \frac{1}{2-t} \{-9t + 4(1-t) + 6(2t-1)\cos\theta\} \\ &= \frac{1}{2-t} \{6(2t-1)\cos\theta - 13t + 4\} \end{aligned}$$

ここで,  $0 < t < 1$  であるから  $2-t \neq 0$

ゆえに, 求める条件は, 任意の  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ) に対して,  $6(2t-1)\cos\theta - 13t + 4 \neq 0$  が成り立つことである。

ここで,  $\cos\theta = p$  とすると  $-1 < p < 1$

よって,  $f(p) = 6(2t-1)p - 13t + 4$  とすると,  $-1 < p < 1$  を満たすすべての  $p$  について  $f(p) \neq 0$  が成り立つような  $t$  の値の範囲を求めればよい。

[1]  $t = \frac{1}{2}$  のとき

$f(p) = -\frac{5}{2}$  であるから,  $f(p) \neq 0$  を満たす。

[2]  $0 < t < \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} < t < 1$  のとき

$f(p)$  は 1 次関数であるから,  $-1 < p < 1$  を満たすすべての  $p$  について  $f(p) \neq 0$  が成り立つための条件は

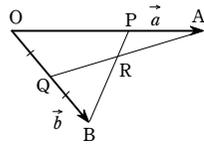
$$f(-1)f(1) \geq 0$$

ゆえに  $(-25t + 10)(-t - 2) \geq 0$

よって  $(5t - 2)(t + 2) \geq 0$       ゆえに  $t \leq -2$ ,  $\frac{2}{5} \leq t$

$0 < t < \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} < t < 1$  との共通範囲は  $\frac{2}{5} \leq t < \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} < t < 1$

[1], [2] から, 求める  $t$  の値の範囲は  $\frac{2}{5} \leq t < 1$



2

解答 (1) 略 (2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

解説

(1) (B) から  $|\vec{b} \cdot \vec{c}| \leq |\vec{b}| |\vec{c}| = 1$

よって, (A) から  $|\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq 1$

したがって  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots ①$

$\vec{a}$  と  $\vec{b}$  が平行であると仮定すると, (B) から  $\vec{b} = \vec{a}$  または  $\vec{b} = -\vec{a}$

$\vec{b} = \vec{a}$  のとき,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 = 1$  となり, ① に矛盾する。

$\vec{b} = -\vec{a}$  のとき,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|^2 = -1$  となり, ① に矛盾する。

したがって,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行でない。

(2)  $\vec{a}$  と  $\vec{c}$  のなす角を  $\alpha$ ,  $\vec{b}$  と  $\vec{c}$  のなす角を  $\beta$  とする。

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$  から  $|\vec{a}| |\vec{c}| \cos\alpha = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos\beta$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$  を代入すると  $\cos\alpha = \cos\beta$

$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ,  $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$  であるから  $\alpha = \beta$

(1) の結果より  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行でないから,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  のなす角は, 右の図のようになっている。

$\vec{a} \cdot \vec{c} = -\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{b}$  から  $\cos\alpha = -\sqrt{3}\cos 2\alpha$

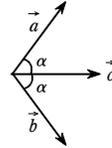
よって  $\cos\alpha = -\sqrt{3}(2\cos^2\alpha - 1)$

$$2\sqrt{3}\cos^2\alpha + \cos\alpha - \sqrt{3} = 0$$

$$(2\cos\alpha + \sqrt{3})(\sqrt{3}\cos\alpha - 1) = 0$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{-\sqrt{3}} = -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}}$  であるから,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値は  $\frac{1}{2}$  または  $-\frac{1}{3}$



3

解答 (1)  $\angle APB = 120^\circ$ ,  $\angle APC = 120^\circ$

$$(2) |\vec{PA}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\vec{PB}| = \frac{2}{\sqrt{7}}, |\vec{PC}| = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

解説

$$(1) \frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} + \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|} + \frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|} = \vec{0} \quad \dots\dots ①$$

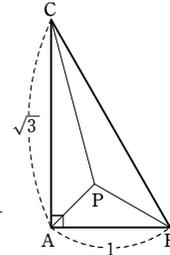
① より,  $\frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|} = -\left(\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} + \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|}\right)$  であるから

$$\left|\frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|}\right| = \left|\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} + \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|}\right|$$

両辺を 2 乗すると  $\frac{|\vec{PC}|^2}{|\vec{PC}|^2} = \frac{|\vec{PA}|^2}{|\vec{PA}|^2} + 2\frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}||\vec{PB}|} + \frac{|\vec{PB}|^2}{|\vec{PB}|^2}$

よって  $1 = 1 + 2\frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}||\vec{PB}|} + 1$

ゆえに  $\frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}||\vec{PB}|} = -\frac{1}{2}$



$$\frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}||\vec{PB}|} = \cos\angle APB \text{ であるから } \cos\angle APB = -\frac{1}{2}$$

よって  $\angle APB = 120^\circ$

$$\text{① より, } \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|} = -\left(\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} + \frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|}\right) \text{ であるから } \left|\frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|}\right| = \left|\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} + \frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|}\right|$$

両辺を 2 乗して上と同様に計算すると  $\frac{|\vec{PA} \cdot \vec{PC}|}{|\vec{PA}||\vec{PC}|} = -\frac{1}{2}$

よって,  $\cos\angle APC = -\frac{1}{2}$  から  $\angle APC = 120^\circ$

(2)  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $AC = \sqrt{3}$  から  $\angle ABC = 60^\circ$

よって  $\angle PAB = 180^\circ - \angle APB - \angle PBA$

$$= 180^\circ - 120^\circ - \angle PBA = 60^\circ - \angle PBA = \angle PBC$$

また  $\angle BPC = 360^\circ - \angle APB - \angle APC = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$

よって  $\angle APB = \angle BPC$

したがって  $\triangle PAB \sim \triangle PBC$

$AB : BC = 1 : 2$  であるから,  $\triangle PAB$  と  $\triangle PBC$  の相似比は  $1 : 2$  である。

$AP = x$  とおくと,  $AP : BP = 1 : 2$  から  $BP = 2x$

また,  $PB : PC = 1 : 2$  から  $PC = 2PB = 4x$

$\triangle PAB$  に余弦定理を適用すると  $x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cos 120^\circ = 1^2$

よって  $7x^2 = 1$   $x > 0$  から  $x = \frac{1}{\sqrt{7}}$

したがって  $|\vec{PA}| = \frac{1}{\sqrt{7}}$ ,  $|\vec{PB}| = \frac{2}{\sqrt{7}}$ ,  $|\vec{PC}| = \frac{4}{\sqrt{7}}$

4

解答  $\frac{\sqrt{3}}{9}$

解説

点 P は辺 AB 上を動くから

$$\vec{BP} = s\vec{BA} \quad (0 \leq s \leq 1)$$

と表される。同様に, 点 Q は辺 CD 上を動くから

$$\vec{CQ} = t\vec{CD} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

と表される。

よって,  $\vec{BA} = \vec{a}$ ,  $\vec{CD} = \vec{b}$  とすると,

$$\vec{BP} = s\vec{a}, \vec{BQ} = \vec{BC} + \vec{CQ} = \vec{BC} + t\vec{b}$$

と表される。

点 R は線分 PQ を 2 : 1 に内分するから

$$\vec{BR} = \frac{1 \cdot \vec{BP} + 2\vec{BQ}}{2+1} = \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{BC} + t\vec{b})$$

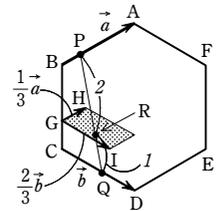
$$= \frac{2}{3}\vec{BC} + s\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right) + t\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right) \quad \dots\dots ①$$

ここで, G を  $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BC}$  を満たす点とし, H, I を

$$\vec{GH} = \frac{1}{3}\vec{a}, \vec{GI} = \frac{2}{3}\vec{b}$$

を満たす点とする。

$s$  と  $t$  はそれぞれ  $0 \leq s \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$  を満たすから, ① より, 点 R の通りうる範囲は



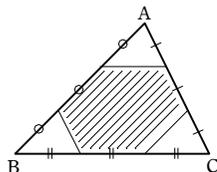
章末問題C

線分 GH, GI を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周および内部  
 である。  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角は  $60^\circ$  であり、  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  であるから、求める面積は

$$GH \cdot GI \sin 60^\circ = \left| \frac{1}{3} \vec{a} \right| \left| \frac{2}{3} \vec{b} \right| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

5

【解答】 図, ただし, 境界線は含まない



【解説】

$$\vec{AP} = s\vec{AB} \quad (0 < s < 1), \quad \vec{AR} = t\vec{AC} \quad (0 < t < 1),$$

$$\vec{AQ} = \vec{AB} + u\vec{BC} \quad (0 < u < 1) \quad \text{とする。}$$

$\triangle PQR$  の重心を  $G$  とすると

$$\begin{aligned} \vec{AG} &= \frac{1}{3}(\vec{AP} + \vec{AQ} + \vec{AR}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB} + s \cdot \frac{1}{3}\vec{AB} + t \cdot \frac{1}{3}\vec{AC} + u \cdot \frac{1}{3}\vec{BC} \end{aligned}$$

辺  $AB$  の 3 等分点を  $A$  に近い方から  $D_1, D_2$ ,

辺  $AC$  の 3 等分点を  $A$  に近い方から  $E_1, E_2$ ,

辺  $BC$  の 3 等分点を  $B$  に近い方から  $F_1, F_2$  とする。

また,  $D_1F_2$  と  $E_1F_1$  の交点を  $H$  とする。

$$\vec{AS} = \frac{1}{3}\vec{AB} + s \cdot \frac{1}{3}\vec{AB} + t \cdot \frac{1}{3}\vec{AC} \quad \text{とすると,}$$

$$\vec{AS} = \vec{AD}_1 + s\vec{D}_1\vec{D}_2 + t\vec{D}_1\vec{H}$$

であり,  $0 < s < 1, 0 < t < 1$  であるから, 点  $S$  は

平行四辺形  $D_1D_2F_1H$  の内部を動く。

この点  $S$  に対して

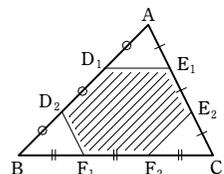
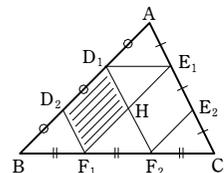
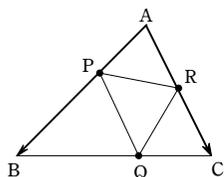
$$\vec{AG} = \vec{AS} + u\vec{F}_1\vec{F}_2$$

であり,  $0 < u < 1$  であるから,  $\triangle PQR$  の重心  $G$  の

存在範囲は六角形  $D_1D_2F_1F_2E_2E_1$  の内部であり,

右の図の斜線部分である。

ただし, 境界線は含まない。



6

【解答】 (1) 中心の位置ベクトルは  $(\frac{4}{3}k-1)\vec{a}$ , 半径は  $\frac{2}{3}k+1$  (2)  $\frac{1}{2} < k < \frac{9}{2}$

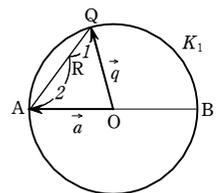
【解説】

$$(1) \vec{BR} = \vec{OR} - \vec{OB} = \frac{\vec{a} + 2\vec{q}}{3} - (-\vec{a}) = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q}$$

$$\text{よって } \vec{p} = \vec{AQ} + k\vec{BR} = \vec{q} - \vec{a} + k\left(\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}$$

$$\text{ゆえに } \vec{p} - \left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a} = \left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}$$



$$\text{よって } \left| \vec{p} - \left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a} \right| = \left| \frac{2}{3}k+1 \right| |\vec{q}|$$

$k > 0$  より  $\frac{2}{3}k+1 > 0$  であり,  $|\vec{q}| = 1$  であるから

$$\left| \vec{p} - \left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a} \right| = \frac{2}{3}k+1$$

したがって, 点  $P$  が描く図形  $K_2$  は中心の位置ベクトルが  $(\frac{4}{3}k-1)\vec{a}$ , 半径が  $\frac{2}{3}k+1$  の円である。

(2) (1) から, 円  $K_2$  の内部に点  $A$  が含まれるための条件は

$$\left| \vec{a} - \left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a} \right| < \frac{2}{3}k+1$$

$$\text{よって } \left| 2 - \frac{4}{3}k \right| |\vec{a}| < \frac{2}{3}k+1$$

$$|\vec{a}| = 1 \text{ であるから } \left| 2 - \frac{4}{3}k \right| < \frac{2}{3}k+1$$

$$\text{両辺に 3 を掛けて } |6 - 4k| < 2k + 3$$

$$\text{ゆえに } -2k - 3 < 6 - 4k < 2k + 3$$

$$-2k - 3 < 6 - 4k \text{ から } k < \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$6 - 4k < 2k + 3 \text{ から } k > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$  の共通範囲は  $\frac{1}{2} < k < \frac{9}{2}$  これは  $k > 0$  に適する。

したがって, 求める  $k$  の値の範囲は  $\frac{1}{2} < k < \frac{9}{2}$

