

1

解答 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

解説

$$\begin{aligned} (1) f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(2+h)} - \sqrt{2 \cdot 2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(2+h)} - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\sqrt{2(2+h)} - 2][\sqrt{2(2+h)} + 2]}{h[\sqrt{2(2+h)} + 2]} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h) - 4}{h[\sqrt{2(2+h)} + 2]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h[\sqrt{2(2+h)} + 2]} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2(2+h)} + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) 求める接線の傾きは $f'(2) = \frac{1}{2}$

2

解答 $x=0$ で連続である, $x=0$ で微分可能でない

解説

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & (x \geq 0 \text{ のとき}) \\ -x(x+2) & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ゆえに $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x(x+2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \{-x(x+2)\} = 0$$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

また $f(0) = 0$

ゆえに $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

したがって, $f(x)$ は $x=0$ で連続である。

次に, $h \neq 0$ のとき

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h(h+2) - 0}{h} = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h(h+2) - 0}{h} = -2$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \text{ であるから, } f'(0) \text{ は存在しない。}$$

よって, $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

3

解答 $\alpha=2, \beta=4$

解説

関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能となるための必要十分条件は, 極限值 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ が

存在することである。

$f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき, $f(x)$ は $x=2$ で連続である。

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 2+0} (x^3 + \alpha x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (\beta x^2 - \alpha x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} (x^3 + \alpha x) = f(2) = 8 + 2\alpha, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} (\beta x^2 - \alpha x) = 4\beta - 2\alpha \text{ であるから}$$

$$8 + 2\alpha = 4\beta - 2\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \alpha + 2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x^2 + 2x + 4 + \alpha) = \alpha + 12$$

$$\textcircled{1} \text{ を用いて } \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \{(\alpha + 2)x + 4 + \alpha\} = 3\alpha + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{ が存在することから } \alpha + 12 = 3\alpha + 8$$

これを解いて $\alpha=2$ ①から $\beta=4$

4

解答 (1) $2f'(a)$ (2) $a^2 f'(a) - 2af'(a)$

解説

$$\begin{aligned} (1) \text{ (与式)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+4h) - f(a) - \{f(a+2h) - f(a)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ 4 \times \frac{f(a+4h) - f(a)}{4h} - 2 \times \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} \right\} \\ &= 4f'(a) - 2f'(a) = 2f'(a) \end{aligned}$$

(2) $x-a=h$ とおくと, $x \rightarrow a$ のとき $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{よって (与式)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 f(a+h) - (a+h)^2 f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 f(a+h) - (a^2 + 2ah + h^2) f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 \{f(a+h) - f(a)\} - (2ah + h^2) f(a)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ a^2 \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - (2a+h) f(a) \right\} \\ &= a^2 f'(a) - 2af'(a) \end{aligned}$$

別解 (与式) $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 f(x) - a^2 f(a) - \{x^2 f(a) - a^2 f(a)\}}{x - a}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ a^2 \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{x^2 - a^2}{x - a} f(a) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ a^2 \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - (x+a) f(a) \right\}$$

$$= a^2 f'(a) - 2af'(a)$$

5

解答 $-\frac{2}{x^3}$

解説

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h(x+h)^2 x^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(2x+h)}{h(x+h)^2 x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2x+h)}{(x+h)^2 x^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

1

解答 (1) $-\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$

解説

$$\begin{aligned} (1) f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3(1+h)^2} - \frac{1}{3 \cdot 1^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{3(1+h)^2} - \frac{1}{3} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1 - (1+h)^2}{3(1+h)^2} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-2h - h^2}{3(1+h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 - h}{3(1+h)^2} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(2) 求める接線の傾きは $f'(1) = -\frac{2}{3}$

2

解答 略

解説

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{|(2+h)^2 - 4| - |2^2 - 4|}{h} = \frac{|h^2 + 4h|}{h} = \frac{|h(h+4)|}{h} = \frac{|h||h+4|}{h} \dots \dots \textcircled{1}$$

ここで $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h||h+4|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} (h+4) = 4$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h||h+4|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h(h+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (-h-4) = -4$$

であるから, $h \rightarrow 0$ のときの①の極限はない。

よって, 関数 $f(x) = |x^2 - 4|$ は $x=2$ で微分可能でない。

3

解答 $a=-6, b=9$

解説

関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき, $f(x)$ は $x=2$ で連続であるから

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \quad \text{すなわち} \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = f(2)$$

よって $2^2 + a \cdot 2 + b = -2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 1$

すなわち $2a + b + 4 = 1$ ゆえに $b = -2a - 3$

$$\text{したがって } \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(2+h)^2 + a(2+h) + b - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(2+h)^2 + a(2+h) - 2a - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^2 + (a+4)h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow +0} \{h + (a+4)\} = a + 4,$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-(2+h)^2 + 2(2+h) + 1 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h^2 - 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow -0} (-h - 2) = -2$$

よって, $f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるための条件は $a + 4 = -2$

ゆえに $a = -6$ このとき $b = 9$

4

解答 (1) $3f'(a)$ (2) $5f'(a)$ (3) $3a^2 f'(a) - a^3 f'(a)$ (4) $2af'(a) + a^2 f'(a)$

解説

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \cdot 3 = 3f'(a)$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a) + f(a) - f(a-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+3h) - f(a)}{h} - \frac{f(a-2h) - f(a)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \cdot 3 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a)}{-2h} \cdot (-2)$$

$$= 3f'(a) + 2f'(a) = 5f'(a)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - a^3 f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - a^3 f(a) + a^3 f(a) - a^3 f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \cdot f(a) - \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot a^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) \cdot f(a) - f'(a) \cdot a^3$$

$$= 3a^2 f(a) - a^3 f'(a)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(x) - a^2 f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(x) - a^2 f(x) + a^2 f(x) - a^2 f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \cdot f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot a^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x + a) \cdot f(x) + f'(a) \cdot a^2$$

$$= 2af(a) + a^2 f'(a)$$

別解 $x^2 f(x) = g(x)$ とおくと 与式 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

よって $\{x^2 f(x)\}' = 2xf(x) + x^2 f'(x)$
したがって $g'(a) = 2af(a) + a^2 f'(a)$

5

解答 (1) $-\frac{1}{(x-2)^2}$ (2) $-\frac{2}{x^3}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

解説

$$(1) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(x+h)-2} - \frac{1}{x-2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{(x-2) - \{(x+h)-2\}}{\{(x+h)-2\}(x-2)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{\{(x+h)-2\}(x-2)} = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$(2) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-2hx - h^2}{x^2(x+h)^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x - h}{x^2(x+h)^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$(3) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{2(x+h)+1\} - \{2x+1\}}{h\{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}\}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

1

解答 1

解説

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} 1 = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+1) = 1$$

よって $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1$

ゆえに、 $f(x)$ の $x=0$ における微分係数は 1

2

解答 ④

解説

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} x^2 = 0, \quad f(0) = 0$$

ゆえに $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) = 0$

よって、 $f(x)$ は $x=0$ で連続である。

次に $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$,

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} h = 0$$

ゆえに $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

よって、 $f(x)$ は微分可能である。

したがって、 $f(x)$ は $x=0$ において連続であり、微分可能である。

以上から、正しいものは ④

3

解答 略

解説

$$f(x) = x - |x| = \begin{cases} 0 & (x \geq 0) \\ 2x & (x < 0) \end{cases}$$

よって $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{0 - 0}{h} = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{2h - 0}{h} = 2$$

ゆえに、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ すなわち $f'(0)$ は存在しない。

したがって、 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

4

解答 2

解説

関数 $f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるためには、 $f(x)$ は $x=1$ で連続であることが必要である。

よって $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{ax+b}{x+1} = \frac{a+b}{2}, \quad f(1) = \log 1 = 0 \quad \text{であるから} \quad \frac{a+b}{2} = 0$$

ゆえに $b = -a$

$$h < 0 \text{ のとき} \quad f(1+h) - f(1) = \frac{a(1+h) - a}{(1+h)+1} = \frac{ah}{2+h}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{ah}{h(2+h)} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{a}{2+h} = \frac{a}{2}$$

$$h > 0 \text{ のとき} \quad f(1+h) - f(1) = \log(1+h)$$

$$\text{よって} \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\log(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \log(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \log e = 1$$

よって、 $f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるための条件は $\frac{a}{2} = 1$

したがって $a=2$ (このとき $b=-2$)

5

解答 (1) $2f'(c)$ (2) $(p-q)f'(c)$

解説

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+2h) - f(c)}{\sin h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{h}{\sin h} \cdot \frac{f(c+2h) - f(c)}{2h} = 2 \cdot 1 \cdot f'(c) = 2f'(c)$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+ph) - f(c+qh)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(c+ph) - f(c)\} - \{f(c+qh) - f(c)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(c+ph) - f(c)}{ph} \cdot p - \frac{f(c+qh) - f(c)}{qh} \cdot q \right]$$

$$= pf'(c) - qf'(c) = (p-q)f'(c)$$

6

解答 $f'(x) = 2|x|$

解説

$x < 0$ のとき、 $f(x) = x \cdot (-x) = -x^2$ であるから

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h) = -2x$$

$x > 0$ のとき、 $f(x) = x \cdot x = x^2$ であるから

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

また $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)|0+h| - 0|0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$

以上をまとめると $f'(x) = 2|x|$

第1講 レベルB

1

- 解答** (1) $x=0$ で微分可能でない, $x=0$ で連続である
 (2) $x=0$ で微分可能である, $x=0$ で連続である

解説

$$(1) \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \sin \frac{1}{h}$$

$h \rightarrow 0$ のとき, この極限は存在しないから, $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

$x \neq 0$ のとき $0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$ であり, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ が成り立つから, $f(x)$ は $x=0$ で連続である。

$$(2) g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

①により, $g'(0) = 0$ が成り立つから, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能である。
 したがって, $g(x)$ は $x=0$ で連続でもある。

2

- 解答** (1) 極限値 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在する

(2) (イ) が正しい。反例: $f(x) = |x-a|$ (3) 略

解説

(1) 極限値 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在する。

(2) $f(x) = |x-a|$ において

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} (-x+a) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} (x-a) = 0, \quad f(a) = 0$$

$$\text{ゆえに } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

よって, $f(x)$ は $x=a$ において連続である。

しかし

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-1) = -1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

よって, $f(x)$ は $x=a$ において微分可能でない。

したがって, (イ) が正しい。

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} \\ = -\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(a+\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin a$$

極限値が存在するから, 微分可能である。

3

- 解答** (1) $b = \frac{2}{d-1} - a(d+1)$ (2) $a = -\frac{1}{8}, b = \frac{5}{4}, c = -\frac{1}{8}, d = 5$

解説

(1) $f(x)$ は $x=1$ で連続であるから, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$ が成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (ax^2 + bx + c) = a + b + c$$

$$f(1) = 1$$

よって $a + b + c = 1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$

さらに, $f(x)$ は $x=d$ で連続であるから, $\lim_{x \rightarrow d-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow d+0} f(x) = f(d)$ が成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow d-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow d-0} (ax^2 + bx + c) = ad^2 + bd + c$$

$$\lim_{x \rightarrow d+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow d+0} 3 = 3$$

$$f(d) = ad^2 + bd + c$$

よって $ad^2 + bd + c = 3 \quad \dots \dots \textcircled{2}$

② - ① より $a(d^2 - 1) + b(d - 1) = 2$

$d > 1$ より $b = \frac{2}{d-1} - a(d+1) \quad \dots \dots \textcircled{3}$

(2) $f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

が成り立つ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)-1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(1+h)^2 + b(1+h) + c - (a+b+c)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + ah + b) = 2a + b$$

よって $2a + b = 1 \quad \dots \dots \textcircled{4}$

さらに, $f(x)$ は $x=d$ で微分可能であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(d+h)-f(d)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(d+h)-f(d)}{h}$$

が成り立つ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(d+h)-f(d)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(d+h)^2 + b(d+h) + c - (ad^2 + bd + c)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2adh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2ad + ah + b) \\ = 2ad + b$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(d+h)-f(d)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3-3}{h} = 0$$

よって $2ad + b = 0 \quad \dots \dots \textcircled{5}$ ⑤ - ④ より $2a(d-1) = -1$

$d > 1$ より $a = -\frac{1}{2(d-1)} \quad \dots \dots \textcircled{6}$

また, $f(x)$ がすべての実数 x において微分可能であるとき, $f(x)$ はすべての実数 x において連続であるから, a, b, c, d は(1)の①, ②, ③も満たす。

⑥を③に代入すると $b = \frac{2}{d-1} + \frac{d+1}{2(d-1)} = \frac{d+5}{2(d-1)} \quad \dots \dots \textcircled{7}$

$$\textcircled{6}, \textcircled{7} \text{ を } \textcircled{4} \text{ に代入すると } 2\left\{-\frac{1}{2(d-1)}\right\} + \frac{d+5}{2(d-1)} = 1$$

これを解くと $d = 5$ よって $a = -\frac{1}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{8}, b = \frac{5+5}{2 \cdot 4} = \frac{5}{4}$

①より $c = 1 - (a + b) = -\frac{1}{8}$ これらは②も満たす。

よって $a = -\frac{1}{8}, b = \frac{5}{4}, c = -\frac{1}{8}, d = 5$

第2講 例題

1

解答 (1) $y' = -\frac{7}{x^8}$ (2) $y' = \frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^3}$ (3) $y' = \frac{3}{5\sqrt{x^2}}$ (4) $y' = \frac{5}{4}\sqrt{x}$

(5) $y' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

解説

(1) $y = x^{-7}$ であるから $y' = -7x^{-8} = -\frac{7}{x^8}$

(2) $y = -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2}$ より

$$y' = (-x^{-3})' + (3x^{-2})' = 3x^{-4} - 6x^{-3} = \frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^3}$$

(3) $y = x^{\frac{3}{5}}$ であるから $y' = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

(4) $y = x \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{1+\frac{1}{4}} = x^{\frac{5}{4}}$ であるから $y' = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

(5) $y = x^{-\frac{3}{2}}$ であるから

$$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3}{2x^{2+\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

2

解答 $y' = 8x^3 - 2x$

解説

$$y' = (x^2+1)(2x^2-3) + (x^2+1)(2x^2-3)' = 2x(2x^2-3) + (x^2+1) \cdot 4x = 4x^3 - 6x + 4x^3 + 4x = 8x^3 - 2x$$

3

解答 (1) $y' = -\frac{2}{(2x-1)^2}$ (2) $y' = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

解説

(1) $y' = -\frac{(2x-1)'}{(2x-1)^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2}$

(2) $y' = \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

4

解答 (1) $6x(x^2+1)^2$ (2) $-\frac{4}{(2x-3)^3}$ (3) $y' = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

(4) $\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$

解説

(1) $y' = 3(x^2+1)^2 \cdot (x^2+1)' = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2$

(2) $y = (2x-3)^{-2}$ であるから

$$y' = -2(2x-3)^{-3} \cdot (2x-3)' = -2(2x-3)^{-3} \cdot 2 = -\frac{4}{(2x-3)^3}$$

(3) $y' = \frac{(9-x^2)'}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

(4) $y' = (\sqrt[4]{2x+1})' = \{(2x+1)^{\frac{1}{4}}\}' = \frac{1}{4}(2x+1)^{\frac{1}{4}-1}(2x+1)' = \frac{1}{4}(2x+1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$

5

解答 (1) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ (2) $\frac{1}{3}$

解説

(1) $y = x^3$ の逆関数は、 $x = y^3$ を満たす。

よって $\frac{dx}{dy} = 3y^2$ ゆえに $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(x^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

(2) $y = g(x)$ とすると、条件から $x = y^3 + 3y \cdots \cdots \textcircled{1}$ が満たされる。

$\textcircled{1}$ から $g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2+3}$

$x=0$ のとき $y^3+3y=0$ すなわち $y(y^2+3)=0$

$y^2+3>0$ であるから $y=0$ したがって $g'(0) = \frac{1}{3 \cdot 0^2+3} = \frac{1}{3}$

第2講 例題演習

1

解答 (1) $y' = -\frac{5}{x^6}$ (2) $y' = \frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^3}$ (3) $y' = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ (4) $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(5) $-\frac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$ (6) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

解説

(1) $y' = (x^{-5})' = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

(2) $y' = (-x^{-3})' + (3x^{-2})' = 3x^{-4} - 6x^{-3} = \frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^3}$

(3) $y = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ より

$$y' = (x)' + (x^{-1})' + (x^{-2})' = 1 - x^{-2} - 2x^{-3} = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

(4) $y' = (x^{-\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

(5) $y' = (x^{-\frac{3}{4}})' = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$

(6) $y' = (x^{\frac{5}{3}})' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

2

解答 (1) $y' = 12x - 1$ (2) $y' = 12x^3 + 8x$ (3) $y' = 4x^3 + 6x^2 + 2x$

(4) $y' = 8x^3 + 9x^2 + 2x + 1$

解説

(1) $y' = (2x-1)'(3x+1) + (2x-1)(3x+1)' = 2(3x+1) + (2x-1) \cdot 3 = 6x+2+6x-3 = 12x-1$

(2) $y' = (x^2+1)'(3x^2+1) + (x^2+1)(3x^2+1)' = 2x(3x^2+1) + (x^2+1) \cdot 6x = 6x^3+2x+6x^3+6x = 12x^3+8x$

(3) $y' = (x^2+x+1)'(x^2+x-1) + (x^2+x+1)(x^2+x-1)'$
 $= (2x+1)(x^2+x-1) + (x^2+x+1)(2x+1)$
 $= (2x+1)\{(x^2+x-1) + (x^2+x+1)\}$
 $= (2x+1)(2x^2+2x) = 4x^3+6x^2+2x$

(4) $y' = (2x^2-x+1)'(x^2+2x+1) + (2x^2-x+1)(x^2+2x+1)'$
 $= (4x-1)(x^2+2x+1) + (2x^2-x+1)(2x+2)$
 $= (4x^3+7x^2+2x-1) + (4x^3+2x^2+2)$
 $= 8x^3+9x^2+2x+1$

3

解答 (1) $-\frac{1}{(x+1)^2}$ (2) $\frac{6}{(x+3)^2}$ (3) $-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$ (4) $-\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

(5) $-\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)^2}$ (6) $\frac{2x^3-6x^2+7}{(x-2)^2}$

解説

(1) $y' = -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$$(2) y' = \frac{(2x)(x+3) - 2x(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{2 \cdot (x+3) - 2x \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}$$

$$(3) y' = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$(4) y' = \frac{(x-1)(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$$

$$(5) y' = \frac{(x)(x^2-x+1) - x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2-x+1) - x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = -\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$(6) y' = \frac{(x^3-4x+1)(x-2) - (x^3-4x+1)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(3x^2-4)(x-2) - (x^3-4x+1) \cdot 1}{(x-2)^2} \\ = \frac{2x^3-6x^2+7}{(x-2)^2}$$

4

【解答】 (1) $3(x-3)^2$ (2) $4x(x^2-2)$ (3) $-\frac{6x}{(x^2-2)^4}$

(4) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ (5) $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}}$ (6) $-\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$

【解説】

(1) $y' = 3(x-3)^2(x-3)' = 3(x-3)^2 \cdot 1 = 3(x-3)^2$

(2) $y' = 2(x^2-2)(x^2-2)' = 2(x^2-2) \cdot 2x = 4x(x^2-2)$

(3) $y = (x^2-2)^{-3}$ であるから

$$y' = -3(x^2-2)^{-4}(x^2-2)' = -\frac{3}{(x^2-2)^4} \cdot 2x = -\frac{6x}{(x^2-2)^4}$$

(4) $y = \sqrt{x^2+2x+3} = (x^2+2x+3)^{\frac{1}{2}}$

よって $y' = \frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{\frac{1}{2}-1}(x^2+2x+3)' = \frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)$

$$= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

(5) $y = \sqrt[3]{2-x^2} = (2-x^2)^{\frac{1}{3}}$

よって $y' = \frac{1}{3}(2-x^2)^{\frac{1}{3}-1}(2-x^2)' = \frac{1}{3}(2-x^2)^{-\frac{2}{3}}(-2x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(2-x^2)^2}}$

(6) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = (x^2+3)^{-\frac{1}{2}}$

よって $y' = -\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}-1}(x^2+3)' = -\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$

5

【解答】 (1) $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ (2) $-\frac{4225}{48}$

【解説】

(1) $y = \frac{1}{x^3}$ の逆関数は $x = \frac{1}{y^3}$ を満たす。

よって $\frac{dx}{dy} = -\frac{3}{y^4}$ ゆえに $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{y^4}{3} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

(2) $y = f^{-1}(x)$ とすると $x = f(y) = \frac{1}{y^3+1}$

よって $\frac{dx}{dy} = -\frac{(y^3+1)'}{(y^3+1)^2} = -\frac{3y^2}{(y^3+1)^2}$

ゆえに $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{(y^3+1)^2}{3y^2}$

$x = \frac{1}{65}$ のとき $\frac{1}{y^3+1} = \frac{1}{65}$ ゆえに $y^3 = 64$ したがって $y = 4$

このとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{(4^3+1)^2}{3 \cdot 4^2} = -\frac{4225}{48}$

1

【解答】 (1) $y' = 3x^2 + 14x + 12$ (2) $y' = 12(3x^3-1)(3x^4-4x-1)^2$

(3) $y' = -\frac{4(6x^2+5)}{(2x^3+5x)^5}$ (4) $y' = -\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

【解説】

(1) $y' = (x^2+3x)(x+4) + (x^2+3x)(x+4)'$
 $= (2x+3)(x+4) + (x^2+3x) \cdot 1 = 3x^2 + 14x + 12$

(2) $y' = 3(3x^4-4x-1)^2(3x^4-4x-1)'$
 $= 3(3x^4-4x-1)^2(12x^3-4) = 12(3x^3-1)(3x^4-4x-1)^2$

(3) $y = (2x^3+5x)^{-4}$ であるから
 $y' = -4(2x^3+5x)^{-5}(2x^3+5x)'$
 $= -4(2x^3+5x)^{-5}(6x^2+5) = -\frac{4(6x^2+5)}{(2x^3+5x)^5}$

(4) $y = (x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}$ であるから
 $y' = -\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}(x^2+x+1)'$
 $= -\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}(2x+1) = -\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

2

【解答】 (1) $6(x-1)(x^2-2x-4)^2$ (2) $4(x-1)^3(x^2+2)^3(3x^2-2x+2)$

(3) $-\frac{6x}{(x^2+1)^4}$ (4) $-\frac{x^2-6x+19}{(x-5)^4}$ (5) $\frac{4x^3(1-x^2)}{(x^2+1)^5}$

【解説】

(1) $y' = 3(x^2-2x-4)^2(x^2-2x-4)' = 3(x^2-2x-4)^2(2x-8)$
 $= 6(x-1)(x^2-2x-4)^2$

(2) $y' = 4\{(x-1)(x^2+2)\}^3\{(x-1)(x^2+2)\}'$
 $= 4\{(x-1)(x^2+2)\}^3\{1 \cdot (x^2+2) + (x-1) \cdot 2x\}$
 $= 4(x-1)^3(x^2+2)^3(3x^2-2x+2)$

(3) $y' = -\frac{\{(x^2+1)^3\}'}{\{(x^2+1)^3\}^2} = -\frac{3(x^2+1)^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^6} = -\frac{6x}{(x^2+1)^4}$

【別解】 $y = \frac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3}$ と変形できるから

$$y' = -3(x^2+1)^{-4} \cdot (x^2+1)' = -3(x^2+1)^{-4} \cdot 2x = -\frac{6x}{(x^2+1)^4}$$

(4) $y' = \frac{\{(x+1)(x-3)\}'(x-5)^3 - (x+1)(x-3)\{(x-5)^3\}'}{\{(x-5)^3\}^2}$
 $= \frac{1 \cdot (x-3) + (x+1) \cdot 1\{(x-5)^3\} - (x+1)(x-3) \cdot 3(x-5)^2 \cdot 1}{(x-5)^6}$
 $= \frac{(x-5)^2(2x-2)(x-5) - 3(x+1)(x-3)}{(x-5)^6}$
 $= \frac{(2x^2-12x+10) - (3x^2-6x-9)}{(x-5)^4} = \frac{-x^2-6x+19}{(x-5)^4}$

第2講 レベルA

(5) $y' = 4 \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^3 \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' = 4 \cdot \frac{x^3}{(x^2+1)^3} \cdot \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^3(1-x^2)}{(x^2+1)^5}$

3

解答 (1) 略 (2) (ア) $3x^2 - 8x + 1$ (イ) $5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 4x - 2$

解説

(1) $(uvw)' = (uv)w' + (uv)w'$
 $= (u'v + uv')w + uvw'$
 $= u'vw + uv'w + uvw'$

(2) (ア) $y' = (x+1)'(x-2)(x-3) + (x+1)(x-2)'(x-3) + (x+1)(x-2)(x-3)'$
 $= (x-2)(x-3) + (x+1)(x-3) + (x+1)(x-2)$
 $= 3x^2 - 8x + 1$

(イ) $y' = (x^2-1)'(x^2+2)(x-2) + (x^2-1)(x^2+2)'(x-2) + (x^2-1)(x^2+2)(x-2)'$
 $= 2x(x^2+2)(x-2) + (x^2-1) \cdot 2x \cdot (x-2) + (x^2-1)(x^2+2)$
 $= 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 4x - 2$

4

解答 $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{4x+5}}$

解説

解答1 $x = y^2 + y - 1$ を y について整理すると $y^2 + y - (x+1) = 0$

これを y について解くと

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(x+1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4x+5}}{2}$$

よって $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{4x+5}}{2} \right)' = \pm \frac{1}{2} \left\{ (4x+5)^{\frac{1}{2}} \right\}' = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (4x+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4$
 $= \pm \frac{1}{\sqrt{4x+5}}$

解答2 $x = y^2 + y - 1$ を y で微分すると $\frac{dx}{dy} = 2y + 1$

よって、 $y \neq -\frac{1}{2}$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y+1}$ …… ①

$x = y^2 + y - 1$ を y について解くと $y = \frac{-1 \pm \sqrt{4x+5}}{2}$

① に代入して $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(-1 \pm \sqrt{4x+5}) + 1} = \pm \frac{1}{\sqrt{4x+5}}$

5

解答 $g(2) = 1, g'(2) = \frac{1}{2}$

解説

$f(x)$ は $g(x)$ の逆関数であるから、 $y = g(x)$ とおくと

$$x = f(y) \quad \text{よって} \quad \frac{dx}{dy} = f'(y)$$

また $g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}$ …… ①

$f(1) = 2$ から $g(2) = 1$ ① から $g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$

第2講 レベルB

1

解答 $n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1$

解説

与えられた等式の両辺を x で微分すると

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \right)'$$

ここで $\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \right)' = \frac{(n+1)x^n \cdot (x-1) - (x^{n+1}-1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$

よって、 $x \neq 1$ のとき

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

この式に $x=2$ を代入すると、

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = \frac{n \cdot 2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(2-1)^2} = n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1$$

2

解答 $h'(x) = -\frac{8x(x^2-1)}{(x^2-x+1)^3}$

解説

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-x+1) - (x^2+x+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}, \quad g'(x) = 2x-2$$

であるから

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = [2f(x)-2]f'(x) = 2 \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - 1 \right) \frac{-2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2} = -\frac{8x(x^2-1)}{(x^2-x+1)^3}$$

3

解答 (1) $f(x)$ について、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在するとき、この極限値

を、 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数という

(2) 略 (3) 略

解説

(1) $f(x)$ について、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在するとき、この極限値を、

$f(x)$ の $x=a$ における微分係数という。

(2) $\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$

ここで $f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)$
 $= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)$
 $= \{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}$

よって $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$

$f(x), g(x)$ は微分可能であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

また、微分可能ならば連続であるから $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$

よって $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) 「 $f(x) = x^n$ に対して $f'(x) = nx^{n-1}$ 」……(*)であることを n に関する数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$f(x) = x^1 \text{ すなわち } f(x) = x \text{ であるから } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$nx^{n-1} \text{ に } n=1 \text{ を代入すると } 1 \cdot x^0 = 1$$

よって、(*)は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、(*)が成り立つ、すなわち $g(x) = x^k$ に対して $g'(x) = kx^{k-1}$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき、 $f(x) = x^{k+1}$ に対して、 $f(x) = xg(x)$ であるから、積の微分公式より $f'(x) = (x)g'(x) + xg'(x) = 1 \cdot kx^{k-1} + x \cdot kx^{k-1} = (k+1)x^k$

よって、 $n=k+1$ のときも(*)は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n に対して(*)は成り立つ。

第3講 例題

1

解答 (1) $\cos x - \sin x$ (2) $\tan^2 x$ (3) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ (4) $\frac{4}{\cos^2 4x}$
 (5) $-2x\sin x^2$ (6) $3\sin^2 x \cos x$ (7) $\frac{4\tan^3 x}{\cos^2 x}$

解説

(1) $y' = \cos x - \sin x$
 (2) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$
 (3) $y' = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
 (4) $y' = \frac{(4x)'}{\cos^2 4x} = \frac{4}{\cos^2 4x}$
 (5) $y' = -\sin x^2 \cdot (x^2)' = -2x\sin x^2$
 (6) $y' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x$
 (7) $y' = 4\tan^3 x \cdot (\tan x)' = \frac{4\tan^3 x}{\cos^2 x}$

2

解答 (1) $e^x(\sin x + \cos x)$ (2) $5e^{5x}$ (3) $2e^{2x} + 2xe^{x^2}$ (4) $4 \cdot 3^{4x} \log 3$

解説

(1) $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$
 (2) $y' = e^{5x} \cdot 5 = 5e^{5x}$
 (3) $y' = e^{2x} \cdot 2 + e^{x^2} \cdot 2x = 2e^{2x} + 2xe^{x^2}$
 (4) $y' = (3^{4x} \log 3) \cdot 4 = 4 \cdot 3^{4x} \log 3$

3

解答 (1) $y' = \log x + 1$ (2) $y' = \frac{2x}{x^2+3}$ (3) $y' = \frac{1}{x \log 3}$
 (4) $y' = \frac{1}{\sin x \cos x}$ (5) $y' = \frac{2 \log x}{x}$ (6) $y' = \frac{1}{2(x+1)}$

解説

(1) $y' = (x)' \log x + x \cdot (\log x)' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$
 (2) $y' = \frac{1}{x^2+3} \cdot (x^2+3)' = \frac{2x}{x^2+3}$
 (3) $y' = \frac{1}{5x \log 3} \cdot (5x)' = \frac{5}{5x \log 3} = \frac{1}{x \log 3}$
 (4) $y' = \frac{1}{\tan x} (\tan x)' = \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$
 $= \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$
 (5) $y' = 2 \log x \cdot (\log x)' = 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \log x}{x}$
 (6) $y = \frac{1}{2} \log(x+1)$ であるから $y' = \frac{1}{2(x+1)}$

4

解答 (1) $-\frac{2(4x^2-x+2)}{3x(x^2+1)} \sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2(x^2+1)}}$ (2) $(\log x + 1)x^x$

解説

(1) 両辺の絶対値の自然対数をとって
 $\log |y| = \frac{1}{3} \{4 \log |x+2| - 2 \log |x| - \log(x^2+1)\}$
 両辺を x で微分して $\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{x+2} - \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} \right)$
 よって $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2(4x^2-x+2)}{(x+2)x(x^2+1)} \cdot \sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}}$
 $= -\frac{2(4x^2-x+2)}{3x(x^2+1)} \sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2(x^2+1)}}$
 (2) $x > 0$ であるから, $y > 0$ である。
 両辺の自然対数をとって $\log y = x \log x$
 両辺を x で微分して $\frac{y'}{y} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}$
 よって $y' = y(\log x + 1) = (\log x + 1)x^x$

5

解答 (1) e (2) 1 (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$

解説

(1) $f(x) = e^x$ とおくと, $f'(x) = e^x$ であるから
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = e$
 (2) $f(x) = e^x$ とすると
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$
 $f'(x) = e^x$ であるから $f'(0) = e^0 = 1$
 よって $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
 (3) $f(x) = \log x$ とおくと, $f'(x) = \frac{1}{x}$ であるから
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x - \log 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 1$
 (4) $f(x) = \log x$ とすると
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \log \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log x - \log 2}{x - 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$
 $f'(x) = \frac{1}{x}$ であるから $f'(2) = \frac{1}{2}$
 よって $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \log \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

6

解答 (1) $\frac{1}{6}$ (2) 0 (3) 0

解説

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$

$f(x) = x - \sin x, g(x) = x^3$ とおくと
 $f'(x) = 1 - \cos x, g'(x) = 3x^2$
 また $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2(1 + \cos x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1 + \cos x)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{6}$
 したがって $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = l = \frac{1}{6}$

別解 ロピタルの定理を繰り返し用いると, 次のように計算できる。

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}$
 (2) $f(x) = x^3, g(x) = e^x$ とおくと
 $f'(x) = 3x^2, g'(x) = e^x, f''(x) = 6x, g''(x) = e^x,$
 $f'''(x) = 6, g'''(x) = e^x$ で $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{e^x} = 0$
 したがって $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{e^x} = 0$
 (3) 同様にして

$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$

第3講 例題演習

1

【解答】 (1) $-2\sin(2x-1)$ (2) $\frac{3}{\cos^2 3x}$ (3) $2x\cos x^2$ (4) $2\sin x \cos x$

(5) $\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$

【解説】

(1) $y' = -\sin(2x-1) \cdot (2x-1)' = -2\sin(2x-1)$

(2) $y' = \frac{(3x)'}{\cos^2 3x} = \frac{3}{\cos^2 3x}$

(3) $y' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$

(4) $y' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x$

(5) $y' = 3\tan^2 x \cdot (\tan x)' = 3\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$

2

【解答】 (1) $e^x(\cos x - \sin x)$ (2) $4^x \log 4$ (3) $2e^{2x+1}$ (4) $(1-3x)e^{-3x}$

(5) $3^x(x+1)\log 3 + 1$ (6) $-3a^{-3x}\log a$

【解説】

(1) $y' = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$

(2) $y' = 4^x \log 4$

(3) $y' = e^{2x+1} \cdot (2x+1)' = e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}$

(4) $y' = 1 \cdot e^{-3x} + xe^{-3x} \cdot (-3x)' = e^{-3x} - 3xe^{-3x} = (1-3x)e^{-3x}$

(5) $y' = 1 \cdot 3^x + (x+1) \cdot 3^x \log 3 = 3^x(x+1)\log 3 + 1$

(6) $y' = a^{-3x} \cdot \log a \cdot (-3x)' = a^{-3x} \cdot \log a \cdot (-3) = -3a^{-3x}\log a$

3

【解答】 (1) $3x^2 \log x + x^2$ (2) $\frac{1}{x(\log x + 1)^2}$ (3) $\frac{1}{x}$ (4) $\frac{2x}{x^2-2}$

(5) $\frac{x}{x^2-1}$ (6) $\frac{1}{x \log 3}$ (7) $y' = \frac{3}{(3x+1)\log 10}$ (8) $\frac{4(\log x)^3}{x}$

(9) $\frac{2x}{x^2-4}$ (10) $\frac{1}{x \log x}$ (11) $-\frac{\tan x}{\log 2}$

【解説】

(1) $y' = 3x^2 \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \log x + x^2$

(2) $y' = \frac{(\log x)'(\log x + 1) - \log x(\log x + 1)'}{(\log x + 1)^2}$
 $= \frac{\frac{1}{x}(\log x + 1) - (\log x) \cdot \frac{1}{x}}{(\log x + 1)^2} = \frac{1}{x(\log x + 1)^2}$

(3) $y' = \frac{1}{4x} \cdot 4 = \frac{1}{x}$

(4) $y' = \frac{1}{x^2-2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2-2}$

(5) $y = \frac{1}{2} \log(x^2-1)$ よって $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x = \frac{x}{x^2-1}$

(6) $y' = \frac{1}{4x \log 3} \cdot 4 = \frac{1}{x \log 3}$

(7) $y' = \frac{1}{(3x+1)\log 10} \cdot 3 = \frac{3}{(3x+1)\log 10}$

(8) $y' = 4(\log x)^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4(\log x)^3}{x}$

(9) $y' = \frac{1}{x^2-4} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2-4}$

(10) $y' = \frac{1}{\log x} \cdot (\log x)' = \frac{1}{x \log x}$

(11) $y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x \log 2} = \frac{-\sin x}{\cos x \log 2} = -\frac{\tan x}{\log 2}$

4

【解答】 (1) $y' = \frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$ (2) $y' = -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$

(3) $y' = 2x^{\log x-1} \log x$ (4) $y' = x^{\frac{1}{2}-2}(1-\log x)$

【解説】

(1) 両辺の絶対値の自然対数をとって $\log|y| = \frac{1}{3}(\log|x+1| + 2\log|x-2|)$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} \right) = \frac{3x}{3(x+1)(x-2)} = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$$

ゆえに $y' = \frac{x}{(x+1)(x-2)} \cdot \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2} = \frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとって

$$\log|y| = 2\log|x+1| - 3\log|x+2| - 4\log|x+3|$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3} = -\frac{5x^2+14x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

ゆえに $y' = \left\{ -\frac{5x^2+14x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)} \right\} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4} = -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$

(3) 対数の真数は正であるから $x > 0$ よって $y = x^{\log x} > 0$

両辺の自然対数をとって $\log y = (\log x)^2$

両辺を x で微分して $\frac{y'}{y} = 2\log x \cdot (\log x)' = \frac{2\log x}{x}$

ゆえに $y' = \frac{2\log x}{x} \cdot x^{\log x} = 2x^{\log x-1} \log x$

(4) $x > 0$ であるから $y = x^{\frac{1}{x}} > 0$

両辺の自然対数をとって $\log y = \frac{1}{x} \log x$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x} \right)' \log x + \frac{1}{x} \cdot (\log x)' = -\frac{1}{x^2} \log x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

ゆえに $y' = \frac{1-\log x}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$

5

【解答】 (1) $\sin 2a$ (2) $\log 3$ (3) 0 (4) $\log a + 1$

【解説】

(1) $f(x) = \sin^2 x$ とおくと、 $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \sin 2a$$

(2) $f(x) = 3^x$ とすると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$f'(x) = 3^x \log 3$ であるから $f'(0) = \log 3$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} = \log 3$

(3) $f(x) = \log \cos x$ とすると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x}$ であるから $f'(0) = 0$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x} = 0$

(4) $f(x) = \log x^x$ とすると (与式) $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log x^x - \log a^a}{x - a} = f'(a)$

$f'(x) = (x \log x)' = \log x + 1$ であるから $f'(a) = \log a + 1$

よって (与式) $= \log a + 1$

6

【解答】 (1) 3 (2) $-\pi$ (3) $-\frac{1}{3}$ (4) -1 (5) 0

【解説】

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(2x^2 - 3x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{4x - 3} = \frac{3}{4 - 3} = 3$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sin \pi x)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cos \pi x) \cdot \pi}{1} = \pi \cos \pi = -\pi$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \tan x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{3x^2 \cos^2 x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{3x^2 \cos^2 x} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$
 $= -\frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 0} = -\frac{1}{3}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - e^{\frac{1}{x}})'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{\frac{1}{x}}) = -e^0 = -1$

(5) $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$
 $= \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$

第3講 レベルA

1

【解答】 (1) $y' = 9x^2 + 30x + 7$ (2) $y' = 8x^3 - 24x^2 + 26x - 12$ (3) $y' = -\frac{2x}{(x^2-4)^2}$

(4) $y' = \frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$ (5) $y' = 4(6x+1)(3x^2+x-1)^3$

(6) $y' = -\frac{12x^2}{(2x^3+7)^3}$ (7) $y' = \frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}} \left(= \frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}} \right)$

(8) $y' = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} \left(= \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} \right)$ (9) $y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \left(= -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} \right)$

(10) $y' = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$ (11) $y' = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+6)^3}}$

(12) $y' = -\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$ (13) $y' = \frac{2x}{\cos^2 x^2}$ (14) $y' = 3\sin^2 x \cos x$

(15) $y' = \cos 2x$ (16) $y' = \frac{2x}{x^2-5}$ (17) $y' = \frac{3x^2}{(x^3-1)\log a}$

(18) $y' = 2(x+2)e^{x^2+4x}$ (19) $y' = -3a^{-3x}\log a$

【解説】

(1) $y' = (x+5)'(3x^2+7) + (x+5)(3x^2+7)' = 1 \cdot (3x^2+7) + (x+5) \cdot 6x = 9x^2 + 30x + 7$

(2) $y' = (2x^2+3)'(x^2-4x+5) + (2x^2+3)(x^2-4x+5)' = 4x(x^2-4x+5) + (2x^2+3)(2x-4) = 8x^3 - 24x^2 + 26x - 12$

(3) $y' = -\frac{(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} = -\frac{2x}{(x^2-4)^2}$

(4) $y' = \frac{(x)'(x^2-x+1) - x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2-x+1) - x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

(5) $y' = 4(3x^2+x-1)'(3x^2+x-1) = 4(6x+1)(3x^2+x-1)^3$

(6) $y = (2x^3+7)^{-2}$ から $y' = -2(2x^3+7)^{-3}(2x^3+7)' = \frac{-2}{(2x^3+7)^3} \cdot 6x^2 = -\frac{12x^2}{(2x^3+7)^3}$

(7) $y = \sqrt[8]{x}$ から $x = y^8$

よって $\frac{dx}{dy} = 8y^7 = 8(\sqrt[8]{x})^7 = 8x^{\frac{7}{8}}$

ゆえに $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{8x^{\frac{7}{8}}} = \frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}} \left(= \frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}} \right)$

(8) $y' = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} \left(= \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} \right)$

(9) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$ であるから $y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \left(= -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} \right)$

(10) $y = \sqrt{x^2+3x+5} = (x^2+3x+5)^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$y' = \frac{1}{2}(x^2+3x+5)^{-\frac{1}{2}}(x^2+3x+5)' = \frac{1}{2}(x^2+3x+5)^{-\frac{1}{2}}(2x+3)$$

$$= \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$$

(11) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+6}} = (x^2+6)^{-\frac{1}{2}}$ であるから

$$y' = -\frac{1}{2}(x^2+6)^{-\frac{1}{2}-1}(x^2+6)' = -\frac{1}{2}(x^2+6)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+6)^3}}$$

(12) $y' = -\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$

(13) $y' = \frac{(x^2)'}{\cos^2 x^2} = \frac{2x}{\cos^2 x^2}$

(14) $y' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x$

(15) $y' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' = \cos x \cos x + \sin x (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

【別解】 $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ よって $y' = \frac{1}{2} \cos 2x \cdot (2x)' = \cos 2x$

(16) $y' = \frac{(x^2-5)'}{x^2-5} = \frac{2x}{x^2-5}$

(17) $y' = \frac{(x^3-1)'}{(x^3-1)\log a} = \frac{3x^2}{(x^3-1)\log a}$

(18) $y' = e^{x^2+4x} \cdot (x^2+4x)' = 2(x+2)e^{x^2+4x}$

(19) $y' = a^{-3x} \log a \cdot (-3x)' = -3a^{-3x} \log a$

2

【解答】 (1) $10x(x^2+1)^4$ (2) $\frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$ (3) $\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}$

【解説】

(1) $f'(x) = 5(x^2+1)^4 \cdot 2x = 10x(x^2+1)^4$

(2) $f'(t) = \frac{(e^t+e^{-t})^2 - (e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$

(3) $f'(x) = \frac{\cos 3x \cdot 3}{\sin 3x} = \frac{3\cos 3x}{\sin 3x}$

3

【解答】 (1) $y' = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^x(\log x + 1)$ (2) $y' = \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) x^{\sin x}$

(3) $y' = f(x)^{g(x)} \left\{ g'(x) \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}$

(4) $y' = (1+x)^{\frac{1}{1+x}-2} \{1 - \log(1+x)\}$ (5) $y' = \frac{(-7x+11)(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^6}$

(6) $y' = -\frac{x^3+3x^2-2x+2}{3\sqrt[3]{x^4(x+1)(x^2+2)^4}}$

【解説】

(1) $y = (\sqrt{x})^x = x^{\frac{1}{2}x} (x > 0)$

両辺の自然対数をとると $\log y = \frac{1}{2}x \log x$

両辺を x で微分すると $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}(\log x + 1)$

よって $y' = \frac{1}{2}y(\log x + 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^x(\log x + 1)$

(2) $y = x^{\sin x} (x > 0)$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y = \sin x \log x$$

両辺を x で微分すると $\frac{y'}{y} = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x}$

よって $y' = \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) y = \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) x^{\sin x}$

【別解】 $y = e^{\log x^{\sin x}} = e^{\sin x \log x}$

よって $y' = e^{\sin x \log x} (\sin x \log x)' = \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) x^{\sin x}$

(3) 両辺の自然対数をとると $\log y = g(x) \log f(x)$

両辺を x で微分すると $\frac{y'}{y} = g'(x) \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$

よって $y' = f(x)^{g(x)} \left\{ g'(x) \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}$

(4) $x > 0$ であるから $y > 0$ であり、両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(1+x)^{\frac{1}{1+x}} \quad \text{ゆえに} \quad \log y = \frac{\log(1+x)}{1+x}$$

両辺を x で微分すると $\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x} \cdot (1+x) - \log(1+x) = \frac{1 - \log(1+x)}{(1+x)^2}$

よって $y' = (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{1 - \log(1+x)}{(1+x)^2} = (1+x)^{\frac{1}{1+x}-2} \{1 - \log(1+x)\}$

(5) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log |y| = 2\log|x-1| + 3\log|x-2| - 5\log|x-3|$$

両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} - \frac{5}{x-3} \\ &= \frac{2(x-2)(x-3) + 3(x-1)(x-3) - 5(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{-7x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)} \end{aligned}$$

よって $y' = \frac{(-7x+11)(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^6}$

【別解】 $y = (x-1)^2(x-2)^3(x-3)^{-5}$

$$\begin{aligned} y' &= 2(x-1)(x-2)^3(x-3)^{-5} + (x-1)^2 \cdot 3(x-2)^2(x-3)^{-5} + (x-1)^2(x-2)^3(-5)(x-3)^{-6} \\ &= (x-1)(x-2)^2(x-3)^{-6} \{2(x-2)(x-3) + 3(x-1)(x-3) - 5(x-1)(x-2)\} \\ &= (x-1)(x-2)^2(x-3)^{-6}(-7x+11) \text{ から。} \end{aligned}$$

(6) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log |y| = \frac{1}{3} \{2\log|x+1| - \log|x| - \log(x^2+2)\}$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+2} \right) = \frac{-(x^3+3x^2-2x+2)}{3x(x+1)(x^2+2)}$$

よって $y' = -\frac{x^3+3x^2-2x+2}{3\sqrt[3]{x^4(x+1)(x^2+2)^4}}$

4

【解答】 $\frac{-x^2+6}{2x(x+1)(x+2)}$

【解説】

$x > 0$ であるから両辺の絶対値の自然対数をとると、

$$\log|g(x)| = \frac{1}{2}[3\log x + \log(x+2) - 5\log(x+1)]$$

両辺を x で微分して

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{5}{x+1}\right) = \frac{-x^2+6}{2x(x+1)(x+2)}$$

5

解答 (1) (ア) $\log 2$ (イ) $\sin \alpha + \alpha \cos \alpha$ (2) $2e$

解説

(1) (ア) $f(x) = 2^x$ とすると $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^0}{x - 0} = f'(0)$

$f'(x) = 2^x \log 2$ であるから $f'(0) = 2^0 \log 2 = \log 2$

したがって $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \log 2$

(イ) $f(x) = x \sin x$ とすると

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x \sin x - \alpha \sin \alpha}{\sin(x - \alpha)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x \sin x - \alpha \sin \alpha}{x - \alpha} \cdot \frac{x - \alpha}{\sin(x - \alpha)} = f'(\alpha) \cdot 1 = f'(\alpha)$$

$f'(x) = \sin x + x \cos x$ であるから (与式) $= \sin \alpha + \alpha \cos \alpha$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(h+1)^2} - e^{h^2+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(e^{h^2+1} \cdot \frac{e^{2h} - 1}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(2e^{h^2+1} \cdot \frac{e^{2h} - 1}{2h} \right)$
 $= 2 \lim_{h \rightarrow 0} e^{h^2+1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 1}{2h} = 2e \cdot 1 = 2e$

1

解答 $\frac{2}{x}$

解説

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x - [\log(x-h) - \log x]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\log(x+h) - \log x}{h} + \frac{\log(x-h) - \log x}{-h} \right] \\ &= (\log x)' + (\log x)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

2

解答 6

解説

$$\frac{x(e^{3x} - 1)}{1 - \cos x} = \frac{x(1 + \cos x)(e^{3x} - 1)}{1 - \cos^2 x} = \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot (1 + \cos x) \cdot \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

ここで $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 = 1^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$

また, $f(x) = e^{3x}$ とおくと, $f'(x) = 3e^{3x}$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 3e^0 = 3$$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{3x} - 1)}{1 - \cos x} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

3

解答 (1) $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ (2) 略 (3) 略

(4) $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

解説

(1) $T_1(\cos \theta) = \cos \theta$ であるから $T_1(x) = x$

$T_2(\cos \theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ であるから $T_2(x) = 2x^2 - 1$

(2) $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ の両辺を θ で微分して $T_n'(\cos \theta) \cdot (-\sin \theta) = -n \sin n\theta$

よって $\sin n\theta = \frac{1}{n} T_n'(\cos \theta) \sin \theta$

(3) $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} T_n(\cos \theta) &= \cos n\theta = \cos \theta \cos(n-1)\theta - \sin \theta \sin(n-1)\theta \\ &= \cos \theta T_{n-1}(\cos \theta) - \sin \theta \cdot \frac{1}{n-1} T_{n-1}'(\cos \theta) \sin \theta \\ &= \cos \theta T_{n-1}(\cos \theta) + \frac{1}{n-1} (\cos^2 \theta - 1) T_{n-1}'(\cos \theta) \end{aligned}$$

よって, $T_n(x) = x T_{n-1}(x) + \frac{1}{n-1} (x^2 - 1) T_{n-1}'(x)$ が成り立つ。

(4) $T_2(x) = 2x^2 - 1$ から $T_2'(x) = 4x$

よって, (3) から

$$T_3(x) = x T_2(x) + \frac{1}{2} (x^2 - 1) T_2'(x) = x(2x^2 - 1) + \frac{1}{2} (x^2 - 1) \cdot 4x = 4x^3 - 3x$$

ゆえに $T_3'(x) = 12x^2 - 3$

よって, (3) から

$$T_4(x) = x T_3(x) + \frac{1}{3} (x^2 - 1) T_3'(x) = x(4x^3 - 3x) + \frac{1}{3} (x^2 - 1)(12x^2 - 3) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

1

解答 (1) $3(5x-3)(3x+1)(x-2)^2$ (2) $-\frac{3x^2-4x-1}{(x^2+1)^3}$

解説

(1) $y' = 2(3x+1) \cdot 3 \cdot (x-2)^3 + (3x+1)^2 \cdot 3(x-2)^2 \cdot 1$
 $= 3(3x+1)(x-2)^2[2(x-2) + (3x+1)]$
 $= 3(5x-3)(3x+1)(x-2)^2$

(2) $y' = \frac{1 \cdot (x^2+1)^2 - (x-1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$
 $= \frac{(x^2+1)((x^2+1) - 4x(x-1))}{(x^2+1)^4} = -\frac{3x^2-4x-1}{(x^2+1)^3}$

2

解答 (1) $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}$ (2) $\frac{4x^4+3x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ (3) $\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

解説

(1) $y' = \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}$$

(2) $y' = 3x^2 \sqrt{1+x^2} + x^3 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x^2(1+x^2) + x^4}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{4x^4+3x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(3) $y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

3

解答 (1) $-4\sin 8x$ (2) $2x \sin 3x^2 + 6x^3 \cos 3x^2$

(3) $\cos^3 x - 2\cos x$ (4) $-\frac{3\sin x + 1}{(3 + \sin x)^2}$ (5) $\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}}$

(6) $\frac{(2x+1)\cos\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ (7) $-\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$

解説

(1) $y' = 2\cos 4x \cdot (\cos 4x)' = 2\cos 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot (4x)'$
 $= -8\cos 4x \sin 4x = -4\sin 8x$

別解 $y = \frac{1 + \cos 8x}{2}$ よって $y' = -\frac{1}{2} \sin 8x \cdot (8x)' = -4\sin 8x$

(2) $y' = (x^2)' \sin 3x^2 + x^2 (\sin 3x^2)' = 2x \sin 3x^2 + x^2 \cdot (\cos 3x^2) \cdot (3x^2)'$
 $= 2x \sin 3x^2 + x^2 \cdot (\cos 3x^2) \cdot 6x = 2x \sin 3x^2 + 6x^3 \cos 3x^2$

(3) $y' = (\sin x)' \cos^2 x + \sin x \cdot (\cos^2 x)' = \cos x \cos^2 x + \sin x \cdot \{2\cos x \cdot (\cos x)'\}$
 $= \cos x \cos^2 x + \sin x \cdot \{2\cos x \cdot (-\sin x)\} = \cos^3 x - 2\sin^2 x \cos x$
 $= \cos^3 x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = 3\cos^3 x - 2\cos x$

別解 $y = \sin x(1 - \sin^2 x) = \sin x - \sin^3 x$

よって $y' = \cos x - 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = \cos x - 3\sin^2 x \cos x$
 $= \cos x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = 3\cos^3 x - 2\cos x$

$$(4) \quad y' = \frac{(\cos x)' \cdot (3 + \sin x) - \cos x \cdot (3 + \sin x)'}{(3 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x \cdot (3 + \sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(3 + \sin x)^2} = \frac{-3\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(3 + \sin x)^2}$$

$$= -\frac{3\sin x + 1}{(3 + \sin x)^2}$$

$$(5) \quad y' = \frac{(1 + \sin^2 x)'}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} = \frac{2\sin x \cos x}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

$$(6) \quad y' = \cos \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot (\sqrt{x^2 + x + 1})' = \cos \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{(x^2 + x + 1)'}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$= \frac{(2x + 1)\cos \sqrt{x^2 + x + 1}}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$(7) \quad \tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

ゆえに $y = \left(\frac{2}{\sin 2x}\right)^2 = \frac{4}{\sin^2 2x}$

よって $y' = -\frac{4(\sin^2 2x)'}{(\sin^2 2x)^2} = -4 \cdot \frac{2\sin 2x \cdot (\sin 2x)'}{\sin^4 2x}$

$$= -4 \cdot \frac{2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2}{\sin^4 2x} = -\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$$

4

解答 (1) $2e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ (2) $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

解説

(1) $y' = (e^{-2x})' \cos 2x + e^{-2x} (\cos 2x)' = e^{-2x} \cdot (-2) \cdot \cos 2x + e^{-2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2$

$$= -2e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)$$

(2) $y' = e^{x \log x} (x \log x)' = e^{x \log x} \{ (x)' \log x + x (\log x)'\}$

$$= e^{x \log x} \left(\log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = (\log x + 1) e^{x \log x}$$

5

解答 (1) $y' = (\log x + 1)e^{x \log x}$ (2) $y' = \frac{1}{\cos x}$ (3) $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

解説

(1) $y' = e^{x \log x} (x \log x)' = e^{x \log x} \{ (x)' \log x + x (\log x)'\}$

$$= e^{x \log x} \left(\log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = (\log x + 1) e^{x \log x}$$

(2) $y = \frac{1}{2} |\log(1 + \sin x) - \log(1 - \sin x)|$

よって $y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} - \frac{-\cos x}{1 - \sin x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x(1 - \sin x) + \cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x}$

$$= \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

(3) $y' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 4})'}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \right)$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4} + x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

6

解答 $x - 1$

解説

$f(x)$ を $(x-3)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $px+q$ とすると, 次の恒等式が成り立つ。

$$f(x) = (x-3)^2 Q(x) + px + q \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

この $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 2(x-3)Q(x) + (x-3)^2 Q'(x) + p \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ に $x=3$ を代入すると $f(3) = 3p + q, f'(3) = p$

$f(3) = 2, f'(3) = 1$ であるから $3p + q = 2, p = 1$

これを解くと $p = 1, q = -1$

したがって, 求める余りは $x - 1$

7

解答 (1) $f(0) = 0, f'(x) = a$ (2) $f(0) = 1, f'(x) = af(x)$

解説

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$ とする。

$\textcircled{1}$ に $x=0$ を代入すると $f(y) = f(0) + f(y)$ よって $f(0) = 0$

また, $\textcircled{1}$ に $y=h$ を代入すると $f(x+h) = f(x) + f(h)$

ゆえに $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f'(0) = a$$

(2) $f(x+y) = f(x)f(y) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$ とする。

$\textcircled{2}$ に $x=y=0$ を代入すると $f(0) = f(0)f(0)$

よって $f(0)\{f(0) - 1\} = 0$ $f(0) > 0$ であるから $f(0) = 1$

また, $\textcircled{2}$ に $y=h$ を代入すると $f(x+h) = f(x)f(h)$

ゆえに $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)\{f(h) - 1\}}{h}$

$$= f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f(x) \cdot f'(0) = af(x)$$

1

解答 (1) $28x(x-2)^7(2x+3)^5$ (2) $(x^2+1)(x-3)^2(7x^2-12x+3)$

(3) $-\frac{2(x+1)(x-3)(2x-1)^2}{(x^2+1)^3}$ (4) $4(x-1)^3(x^2+2)^3(3x^2-2x+2)$

(5) $\frac{-x^2-6x+19}{(x-5)^4}$ (6) $\frac{4x^3(1-x^2)}{(x^2+1)^5}$

解説

(1) $y' = \{(x-2)^8\}' \cdot (2x+3)^6 + (x-2)^8 \cdot \{(2x+3)^6\}'$

$$= 8(x-2)^7 \cdot (x-2)' \cdot (2x+3)^6 + (x-2)^8 \cdot 6(2x+3)^5 \cdot (2x+3)'$$

$$= 8(x-2)^7(2x+3)^6 + 12(x-2)^8(2x+3)^5$$

$$= 4(x-2)^7(2x+3)^5 \{2(2x+3) + 3(x-2)\}$$

$$= 4(x-2)^7(2x+3)^5 \cdot 7x = 28x(x-2)^7(2x+3)^5$$

(2) $y' = 2(x^2+1) \cdot 2x(x-3)^3 + (x^2+1)^2 \cdot 3(x-3)^2 \cdot 1$

$$= (x^2+1)(x-3)^2 \{4x(x-3) + 3(x^2+1)\}$$

$$= (x^2+1)(x-3)^2(7x^2-12x+3)$$

(3) $y' = \frac{3(2x-1)^2 \cdot 2(x^2+1)^2 - (2x-1)^3 \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$$= \frac{2(2x-1)^2 \{3(x^2+1) - (2x-1) \cdot 2x\}}{(x^2+1)^3} = -\frac{2(x+1)(x-3)(2x-1)^2}{(x^2+1)^3}$$

(4) $y' = 4\{(x-1)(x^2+2)\}^3 \{(x-1)(x^2+2)\}'$

$$= 4\{(x-1)(x^2+2)\}^3 \{1 \cdot (x^2+2) + (x-1) \cdot 2x\}'$$

$$= 4(x-1)^3(x^2+2)^3(3x^2-2x+2)$$

(5) $y' = \frac{\{(x+1)(x-3)\}'(x-5)^3 - (x+1)(x-3)\{(x-5)^3\}'}{\{(x-5)^3\}^2}$

$$= \frac{\{1 \cdot (x-3) + (x+1) \cdot 1\}(x-5)^3 - (x+1)(x-3) \cdot 3(x-5)^2 \cdot 1}{(x-5)^6}$$

$$= \frac{(x-5)^2(2x-2)(x-5) - 3(x+1)(x-3)}{(x-5)^6}$$

$$= \frac{(2x^2-12x+10) - (3x^2-6x-9)}{(x-5)^4} = \frac{-x^2-6x+19}{(x-5)^4}$$

(6) $y' = 4 \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^3 \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' = 4 \cdot \frac{x^3}{(x^2+1)^3} \cdot \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^3(1-x^2)}{(x^2+1)^5}$

2

解答 (1) $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ (2) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\frac{1}{(x+4)\sqrt{(x+1)^2(x+4)}}$

(4) $\frac{x(x^2-3x+3)}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}}$

解説

(1) $y' = 1 \cdot \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

第4講 例題演習

$$(2) y' = \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$(3) y' = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{x+1}{x+4} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{(x+4)-(x+1)}{(x+4)^2}}{(x+4)\sqrt[3]{(x+1)^2(x+4)}} = \frac{1}{(x+4)\sqrt[3]{(x+1)^2(x+4)}}$$

$$(4) y' = \frac{\left(\sqrt{x^2-2x} + x \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \right) (x-1) - x\sqrt{x^2-2x}}{(x-1)^2} \\ = \frac{(x^2-2x+x^2-x)(x-1) - x(x^2-2x)}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x(x^2-3x+3)}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}}$$

3

解答 (1) $3\cos^3 x - 2\cos x$ (2) $4\sin^3 x \cos 5x$ (3) $\frac{1}{1-\sin x}$

(4) $\frac{\sin x - \cos x - 1}{(1+\cos x)^2}$ (5) $\frac{(2x-1)\cos\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}}$ (6) $-\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}$

(7) $2x\sin(3x+5) + 3x^2\cos(3x+5)$ (8) $\frac{2}{1+\sin 2x}$ (9) $\frac{2+\sin x}{(1-\sin x)^2}$

(10) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$ (11) $-\frac{16\cos 2x}{\sin^2 2x}$ (12) $\frac{a^2 \cos x}{\sqrt{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3}}$

解説

(1) $y' = (\sin x)' \cos^2 x + \sin x \cdot (\cos^2 x)'$
 $= \cos x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot 2\cos x(-\sin x)$
 $= \cos^3 x - 2\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 2\cos x(1-\cos^2 x)$
 $= 3\cos^3 x - 2\cos x$

(2) $y' = (\sin^4 x)' \cos 4x + \sin^4 x (\cos 4x)'$
 $= 4\sin^3 x \cdot (\sin x)' \cdot \cos 4x + \sin^4 x \cdot (-\sin 4x) \cdot (4x)'$
 $= 4\sin^3 x \cos x \cos 4x - 4\sin^4 x \sin 4x = 4\sin^3 x (\cos x \cos 4x - \sin x \sin 4x)$
 $= 4\sin^3 x \cos(x+4x) = 4\sin^3 x \cos 5x$

(3) $y' = \frac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$
 $= \frac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$
 $= \frac{-\sin x + (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$

(4) $y' = \frac{(1-\sin x)'(1+\cos x) - (1-\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$
 $= \frac{-\cos x(1+\cos x) - (1-\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$
 $= \frac{-\cos x + \sin x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\sin x - \cos x - 1}{(1+\cos x)^2}$

(5) $y' = \cos\sqrt{x^2-x+1} \cdot (\sqrt{x^2-x+1})' = \cos\sqrt{x^2-x+1} \cdot \frac{(x^2-x+1)'}{2\sqrt{x^2-x+1}}$
 $= \frac{(2x-1)\cos\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

(6) $y' = \frac{(1+\cos^2 x)'}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{2\cos x \cdot (\cos x)'}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{2\cos x \cdot (-\sin x)}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} = -\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}$

(7) $y' = 2x \cdot \sin(3x+5) + x^2 \cdot \cos(3x+5) \cdot 3$
 $= 2x\sin(3x+5) + 3x^2\cos(3x+5)$

(8) $y' = \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$
 $= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x} = \frac{2}{1 + \sin 2x}$

(9) $y' = \frac{-\sin x(1-\sin x)^2 - \cos x \cdot 2(1-\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^4}$
 $= \frac{-\sin x + 2 + 2\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{2+\sin x}{(1-\sin x)^2}$

(10) $y' = \frac{(\sin 2x)'}{2\sqrt{\sin 2x}} = \frac{\cos 2x \cdot 2}{2\sqrt{\sin 2x}} = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$

(11) $y' = \left\{ \left(\frac{\tan^2 x + 1}{\tan x} \right)^2 \right\}' = \left\{ \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right)^2 \right\}' = \left\{ \left(\frac{2}{\sin 2x} \right)^2 \right\}'$
 $= [4(\sin 2x)^{-2}]' = 4[-2(\sin 2x)^{-3}] \cos 2x \cdot 2 = -\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$

(12) $y' = \left\{ \sin x (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \right\}'$
 $= \cos x (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$
 $- \frac{1}{2} \sin x (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(b^2 - a^2) \sin x \cos x$
 $= a^2 \cos x (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}$
 $= \frac{a^2 \cos x}{\sqrt{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3}}$

4

解答 (1) $\frac{e^{2x}(2x+1)}{(x+1)^2}$ (2) $y' = -3e^{-3x}(\sin 3x - \cos 3x)$

(3) $\sin(e^x+1) + xe^x \cos(e^x+1)$ (4) $e^{\sin 2x} (2\cos 2x \tan x + \frac{1}{\cos^2 x})$

(5) $-\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$

解説

(1) $y' = \frac{2e^{2x}(x+1) - e^{2x} \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{e^{2x}(2x+1)}{(x+1)^2}$

(2) $y' = (e^{-3x})' \sin 3x + e^{-3x} (\sin 3x)' = e^{-3x} \cdot (-3) \cdot \sin 3x + e^{-3x} \cdot \cos 3x \cdot 3$
 $= -3e^{-3x}(\sin 3x - \cos 3x)$

(3) $y' = 1 \cdot \sin(e^x+1) + x \cos(e^x+1) \cdot (e^x+1)' = \sin(e^x+1) + xe^x \cos(e^x+1)$

(4) $y' = e^{\sin 2x} \cdot 2\cos 2x \cdot \tan x + e^{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = e^{\sin 2x} \left(2\cos 2x \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)$

(5) $y' = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4e^x e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$

別解 $y = 1 + \frac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1}$ であるから $y' = -\frac{2 \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = -\frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$

5

解答 (1) 1 (2) $-\frac{\log a}{x(\log x)^2}$ (3) $\frac{1}{(x-a)(x+a)}$ (4) $\frac{x}{x-1}$

(5) $\frac{5}{(3x+1)(2x-1)}$ (6) $\frac{2\cos x}{\sin x}$ (7) $\tan x$

(8) $-\frac{1}{x} \tan x - \frac{1}{x^2} \log |\cos x|$ (9) $\frac{2}{\cos x}$ (10) $\frac{1}{\sin x}$ (11) $\frac{2x}{x^4-1}$

(12) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (13) $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2} \log a}$ (14) $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

解説

(1) $y = e^{\log x}$ から $\log y = \log x$ よって $y = x$ したがって $y' = 1$

(2) $y = \frac{\log a}{\log x}$ よって $y' = -\log a \cdot \frac{(\log x)'}{(\log x)^2} = -\frac{\log a}{x(\log x)^2}$

(3) $y = \frac{1}{2a} (\log|x-a| - \log|x+a|)$

よって $y' = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{2a}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

(4) $y = \log e^x + \log(1-x) = x + \log(1-x)$

よって $y' = 1 + \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{x}{x-1}$

(5) $y = \log \left| \frac{3x+1}{2x-1} \right| = \log|3x+1| - \log|2x-1|$

よって $y' = \frac{3}{3x+1} - \frac{2}{2x-1} = -\frac{5}{(3x+1)(2x-1)}$

(6) $y' = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cos x = \frac{2\cos x}{\sin x}$

(7) $y' = (-\log \cos x)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$

(8) $y' = \frac{-\sin x}{\cos x} \cdot x - (\log|\cos x|) \cdot 1$
 $= -\frac{\sin x}{\cos x} \cdot x - \log|\cos x| = -\frac{1}{x} \tan x - \frac{1}{x^2} \log|\cos x|$

(9) $y = \log(1+\sin x) - \log(1-\sin x)$ であるから

$$y' = \frac{1}{1+\sin x} (1+\sin x)' - \frac{1}{1-\sin x} (1-\sin x)'$$

$$= \frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{-\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x \{(1-\sin x) + (1+\sin x)\}}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}$$

別解 $y' = \frac{1}{1+\sin x} \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right)' = \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \cdot \frac{\cos x(1-\sin x) - (1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

$$= \frac{2\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}$$

(10) $y = \frac{1}{2} \{ \log(1-\cos x) - \log(1+\cos x) \}$ であるから

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} \right) = \frac{\sin x}{2} \cdot \frac{2}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x}$$

(11) $y = \frac{1}{2} \log \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \{ \log(x^2-1) - \log(x^2+1) \}$

よって $y' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} - \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2x}{x^4-1}$

(12) $y' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(13) $y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{(x + \sqrt{x^2-a^2})\log a} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}\log a}$

(14) $y' = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)'} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)'$
 $= \frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} \cdot (\sqrt{1+e^x}+1) - (\sqrt{1+e^x}-1) \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$
 $= \frac{e^x(\sqrt{1+e^x}+1) - e^x(\sqrt{1+e^x}-1)}{(\sqrt{1+e^x}-1)(\sqrt{1+e^x}+1) \cdot 2\sqrt{1+e^x}} = \frac{2e^x}{e^x \cdot 2\sqrt{1+e^x}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

6

解答 $2x-1$

解説

$f(x) = (x-1)^2g(x) + ax + b$ とおく

$f'(x) = 2(x-1)g(x) + (x-1)^2g'(x) + a$

条件から $f(1) = a + b = 1, f'(1) = a = 2$

ゆえに $a = 2, b = -1$

よって、余りは $2x-1$

7

解答 $f'(x) = a, f(x) = ax$

解説

$f(x+py) = f(x) + pf(y)$ …… ① とする。

① に $y = h$ を代入して $f(x+ph) = f(x) + pf(h)$

また、① に $y = 0$ を代入して $f(x) = f(x) + pf(0)$

$p \neq 0$ であるから $f(0) = 0$

よって $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ph) - f(x)}{ph} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f'(0) = a$

ゆえに $f(x) = \int f'(x) dx = \int a dx = ax + C$ (C は積分定数)

$f(0) = 0$ であるから $C = 0$ よって $f(x) = ax$

1

解答 (1) $y' = 2(2x-1)^2(5x^2-x+9)$ (2) $y' = \frac{5x-7}{(x+1)^3}$ (3) $y' = -\frac{3x^2}{(x-1)^4}$

(4) $y' = -\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$ (5) $y' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$

(6) $y' = \frac{x+2}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ (7) $y' = 4x - \frac{2(2x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}$

解説

(1) $y' = 2x(2x-1)^3 + (x^2+3) \cdot 3(2x-1)^2 \cdot 2$
 $= 2(2x-1)^2\{x(2x-1) + 3(x^2+3)\} = 2(2x-1)^2(5x^2-x+9)$

(2) $y = \frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2} = \frac{-5x+1}{(x+1)^2} + 1$

よって $y' = \frac{-5 \cdot (x+1)^2 - (-5x+1) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$
 $= \frac{-5(x+1) - 2(-5x+1)}{(x+1)^3} = \frac{5x-7}{(x+1)^3}$

(3) $y' = 3\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = 3\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{3x^2}{(x-1)^4}$

(4) $y = (x-1)^{-\frac{1}{2}}$ であるから
 $y' = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}} = -\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

(5) $y' = 1 \cdot \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$
 $= \frac{(1+x^2) + x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$

(6) $y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+x+1} - x \cdot \frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+1)}{x^2+x+1}$
 $= \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{x(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \frac{2(x^2+x+1) - (2x^2+x)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$
 $= \frac{x+2}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

(7) $y = \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})} = \frac{x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}{x^2-(x^2-1)}$
 $= \frac{2x^2-2x\sqrt{x^2-1}-1}{1}$

よって $y' = 4x - 2\left\{1 \cdot \sqrt{x^2-1} + x \cdot \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right\}$
 $= 4x - 2\left(\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)$
 $= 4x - 2 \cdot \frac{(x^2-1) + x^2}{\sqrt{x^2-1}} = 4x - \frac{2(2x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}$

2

解答 (1) $y' = \frac{1}{1-\sin x}$ (2) $y' = \frac{2x^2+5x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ (3) $y' = \frac{x+xe^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$

(4) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

解説

(1) $y' = \frac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$
 $= \frac{(-\sin x) \cdot (1-\sin x) - \cos x \cdot (-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$
 $= \frac{-\sin x + (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1-\sin x)^2}$
 $= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$

参考 関数 $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$ は、 $1-\sin x \neq 0$ すなわち $x \neq \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は整数) において微分可能な関数である。

(2) $y' = (x+2)' \sqrt{x^2+2x+5} + (x+2) \cdot (\sqrt{x^2+2x+5})'$
 $= 1 \cdot \sqrt{x^2+2x+5} + (x+2) \cdot \frac{(x^2+2x+5)'}{2\sqrt{x^2+2x+5}}$
 $= \sqrt{x^2+2x+5} + (x+2) \cdot \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}$
 $= \frac{(\sqrt{x^2+2x+5})^2 + (x+2)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{2x^2+5x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

(3) $y' = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} - xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2} = \frac{x+xe^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$

(4) $y = \log \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}} = \log \sqrt{(\sqrt{1+x^2}+x)^2} = \log(\sqrt{1+x^2}+x)$ であるから
 $y' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3

解答 $\frac{d}{dx} g(f(x)) = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

解説

$g(f(x)) = \frac{1}{2}\{2x \log(x + \sqrt{x^2+1})\} = x \log(x + \sqrt{x^2+1})$ であるから

$\frac{d}{dx} g(f(x)) = 1 \cdot \log(x + \sqrt{x^2+1}) + x \cdot \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$
 $= \log(x + \sqrt{x^2+1}) + x \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(x + \sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$
 $= \log(x + \sqrt{x^2+1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

4

解答 $\frac{1}{2(2+\log 2)}$

解説

第4講 レベルA

$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ から $h'(0) = f'(g(0))g'(0)$ …… ①

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ …… ②,

$g(x) = 1 + \log\{1 + f(x)\} = 1 + \log\{1 + 1 + \log(1+x)\} = 1 + \log\{2 + \log(1+x)\}$,

$g'(x) = \frac{1}{2 + \log(1+x)} \cdot \frac{1}{1+x}$

よって $g(0) = 1 + \log 2$, $g'(0) = \frac{1}{2}$ …… ③

①, ②, ③ から $h'(0) = f'(1 + \log 2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + (1 + \log 2)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2(2 + \log 2)}$

5

【解答】 (1) $12x + 17$ (2) $nx - n$

【解説】

(1) $h(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $Ax+B$ とおくと

$h(x) = x^{25} - x^{13} + 5 = (x+1)^2 Q(x) + Ax + B$

$h'(x) = 25x^{24} - 13x^{12} = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + A$

ゆえに $h(-1) = 5 = -A + B$, $h'(-1) = 12 = A$ よって $A = 12, B = 17$

$x^n - 1$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $px+q$ とすると, 次の恒等式が成り立つ。

(2) $x^n - 1 = (x-1)^2 Q(x) + px + q$ …… ①

両辺を x で微分すると

$nx^{n-1} = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + p$ …… ②

①, ② に $x=1$ を代入すると $0 = p + q$, $n = p$

よって $p = n$, $q = -n$

したがって, 求める余りは $nx - n$

【別解】 $x-1 = X$ とおくと $x = X+1$

二項定理により $x^n - 1 = (X+1)^n - 1$

$= X^n + {}_n C_1 X^{n-1} + \dots + {}_n C_{n-2} X^2 + {}_n C_{n-1} X + 1 - 1$

これを $(x-1)^2$ すなわち X^2 で割ると, 余りは ${}_n C_{n-1} X = n(x-1)$

6

【解答】 (1) 略 (2) $a = n$, $b = -n - 1$

【解説】

(1) $f'(x) = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) = (x-1)\{2Q(x) + (x-1)Q'(x)\}$

よって, $f'(x)$ は $x-1$ で割り切れる。

(2) $g(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$ から $g'(x) = a(n+1)x^n + bnx^{n-1}$

$g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるから,

$g(x) = (x-1)^2 P(x)$ ($P(x)$ は整式) …… ① とおける。

よって, (1)の結果より, $g'(x)$ は $x-1$ で割り切れるから $g'(1) = 0$

ゆえに $a(n+1) + bn = 0$ …… ②

①より, $g(x)$ は $x-1$ で割り切れるから $g(1) = 0$

よって $a + b + 1 = 0$ …… ③

②-③ $\times n$ から $a - n = 0$ ゆえに $a = n$

このとき, ③ から $b = -a - 1 = -n - 1$

第4講 レベルB

1

【解答】 $y' = \sqrt{x^2 + 4}$

【解説】

$y' = \frac{1}{2} \{ (x)' \cdot \sqrt{x^2 + 4} + x \cdot (\sqrt{x^2 + 4})' \} + 2 \cdot \frac{(x + \sqrt{x^2 + 4})'}{x + \sqrt{x^2 + 4}}$

$= \frac{1}{2} \{ 1 \cdot \sqrt{x^2 + 4} + x \cdot \left\{ (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} \right\}' \} + 2 \cdot \frac{\{ x + (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} \}'}{x + \sqrt{x^2 + 4}}$

$= \frac{1}{2} \left[\sqrt{x^2 + 4} + x \cdot \left\{ \frac{1}{2} (x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 4)' \right\} \right]$

$+ \frac{2}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} (x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 4)' \right\}$

$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 + 4} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \right) + \frac{2}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 + 4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} \right) + \frac{2}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}}$

$= \frac{x^2 + 4 + x^2 + 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{x^2 + 4}$

2

【解答】 (1) 0 (2) [略] (3) $\frac{C}{x}$ (4) $C \log x$

【解説】

(1) $x = y = 1$ とすると $f(1) = 2f(1)$ よって $f(1) = 0$

(2) $y = \frac{1}{x} > 0$ とすると $f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

(1)より $f(1) = 0$ であるから $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

(3) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f\left(\frac{1}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} \right]$

$= \frac{1}{x} \lim_{\frac{h}{x} \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} f'(1) = \frac{C}{x}$

(4) $f(x) = \int \frac{C}{x} dx = C \log|x| + D$ (D は積分定数)

また $f(1) = D = 0$, $x > 0$ より $f(x) = C \log x$

第5講 例題

1

【解答】 $y'' = 4(x+1)e^{2x}$, $y''' = 4(2x+3)e^{2x}$

【解説】

$y' = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x+1)e^{2x}$ であるから
 $y'' = 2e^{2x} + 2(2x+1)e^{2x} = 4(x+1)e^{2x}$
 $y''' = 4e^{2x} + 8(x+1)e^{2x} = 4(2x+3)e^{2x}$

2

【解答】 (1) 2 (2) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$

【解説】

(1) $f(x)$ の最高次の項を ax^n ($a \neq 0$) とすると、条件から $n \geq 2$
 このとき、 $f'(x)$ の最高次の項は nax^{n-1}
 $f''(x)$ の最高次の項は $n(n-1)ax^{n-2}$
 よって、 $f''(x) + 2f'(x)$ の最高次の項は $2nax^{n-1}$
 これが $8x$ に等しいから $2na = 8$, $n-1 = 1$
 これを解いて $n = 2$, $a = 2$ したがって、 $f(x)$ の次数は 2
 (2) (1) と条件 $f(0) = 1$ から、 $f(x) = 2x^2 + bx + 1$ における。
 よって $f'(x) = 4x + b$, $f''(x) = 4$
 これらを $f''(x) + 2f'(x) = 8x$ に代入して
 $4 + 2(4x + b) = 8x$ ゆえに $b = -2$
 したがって $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$

3

【解答】 略

【解説】

$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \dots \dots$ ① とする。

[1] $n = 1$ のとき

$y^{(1)} = y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

よって、① は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、① が成り立つと仮定すると

$y^{(k)} = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$

$n = k + 1$ のとき

$y^{(k+1)} = \{y^{(k)}\}' = -\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$
 $= \cos\left\{\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left\{x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right\}$

よって、 $n = k + 1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について ① は成り立つ。

4

【解答】 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$ (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-2}{y}$ (3) $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ (4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

【解説】

(1) 両辺を x で微分すると $2y \cdot \frac{dy}{dx} = 2$

よって、 $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}$

(2) 両辺を x で微分すると $8x - 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 4 = 0$

よって $y \cdot \frac{dy}{dx} = 4x - 2$

$y^2 = 4x^2 - 4x + 5 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4 > 0$ から $y \neq 0$

ゆえに $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-2}{y}$

(3) 両辺を x で微分すると $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

よって $\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$

ゆえに、 $x \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$

(4) 両辺を x で微分すると $2y + 2x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$2xy - 3 = 0$ より、 $x \neq 0$ であるから $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

5

【解答】 (1) $-\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ (2) $\frac{1+t^2}{2t}$

【解説】

(1) $\frac{dx}{d\theta} = 3a \cos^2 \theta (\cos \theta)' = -3a \sin \theta \cos^2 \theta$

$\frac{dy}{d\theta} = 3a \sin^2 \theta (\sin \theta)' = 3a \sin^2 \theta \cos \theta$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a \sin^2 \theta \cos \theta}{-3a \sin \theta \cos^2 \theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

(2) $\frac{dx}{dt} = \frac{2t(1-t^2) - (1+t^2) \cdot (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{2(1-t^2) - 2t \cdot (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}}{\frac{4t}{(1-t^2)^2}} = \frac{1+t^2}{2t}$

6

【解答】 $\frac{1}{t \cos^3 t}$

【解説】

$\frac{dx}{dt} = -\sin t + (\sin t + t \cos t) = t \cos t$

$\frac{dy}{dt} = \cos t - (\cos t - t \sin t) = t \sin t$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{t \sin t}{t \cos t} = \tan t$

したがって $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (\tan t) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$
 $= \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{t \cos t} = \frac{1}{t \cos^3 t}$

【参考】 一般に、 $x = f(t)$, $y = g(t)$ のとき、 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{\{f'(t)\}^3}$ が成り立つ。

第5講 例題演習

1

【解答】 (1) $y'' = 6x - 4, y''' = 6$ (2) $y'' = \frac{8}{(2x+1)^3}, y''' = -\frac{48}{(2x+1)^4}$

(3) $y'' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, y''' = -\frac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$

(4) $y'' = -\sin x - \cos x, y''' = -\cos x + \sin x$

(5) $y'' = -2e^x \sin x, y''' = -2e^x(\sin x + \cos x)$

(6) $y'' = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}, y''' = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

【解説】

(1) $y' = 3x^2 - 4x + 1, y'' = 6x - 4, y''' = 6$

(2) $y' = -\frac{2}{(2x+1)^2}$

$y'' = \frac{2 \cdot 2(2x+1) \cdot 2}{(2x+1)^4} = \frac{8}{(2x+1)^3}$

$y''' = -\frac{8 \cdot 3(2x+1)^2 \cdot 2}{(2x+1)^6} = -\frac{48}{(2x+1)^4}$

(3) $y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$y'' = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$y''' = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ であるから $y''' = -\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x^2+1} \cdot 2x}{(x^2+1)^3} = -\frac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$

(4) $y' = \cos x - \sin x$

$y'' = -\sin x - \cos x$

$y''' = -\cos x + \sin x$

(5) $y' = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$

$y'' = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$

$y''' = -2(e^x \sin x + e^x \cos x) = -2e^x(\sin x + \cos x)$

(6) $y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

$y'' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$y''' = -\frac{2 \cdot 2x(x^2+1)^2 - 2(x^2-1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$= -\frac{4x(x^2+1)\{(x^2+1) - 2(x^2-1)\}}{(x^2+1)^4} = -\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

2

【解答】 (1) $n=4$ (2) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

【解説】

(1) $f(x)$ の最高次の項を ax^n ($a \neq 0$) とすると, $n \geq 2$ であるから

$f'(x)$ の最高次の項は nax^{n-1}

$f''(x)$ の最高次の項は $n(n-1)ax^{n-2}$

よって, 等式の左辺における最高次の項の係数は $2na - 8a = 2a(n-4)$

これが0であるから $2a(n-4)=0$ $a \neq 0$ であるから $n=4$

(2) (1)の結果から, $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ とおける。

よって $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

これらを与えられた等式に代入して

$(x-1)(12ax^2 + 6bx + 2c) + (2x-3)(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) - 8(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = 0$

整理すると $-2bx^3 - (12a + 3b + 4c)x^2 - (6b + 4c + 6d)x - (2c + 3d + 8e) = 0$

これが x についての恒等式であるから

$2b=0, 12a+3b+4c=0, 6b+4c+6d=0, 2c+3d+8e=0$

よって $b=0, c=-3a, d=2a, e=0$

ゆえに $f(x) = a(x^4 - 3x^2 + 2x)$

ここで, $f(2) = 8$ から $8a = 8$ よって $a = 1$

したがって $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

3

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$ ……① とする。

[1] $n=1$ のとき $y' = 2\cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ であるから, ① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, ① が成り立つと仮定すると $y^{(k)} = 2^k \sin\left(2x + \frac{k\pi}{2}\right)$ ……②

$n=k+1$ のときを考えると, ②の両辺を x で微分して

$\frac{d}{dx} y^{(k)} = 2^{k+1} \cos\left(2x + \frac{k\pi}{2}\right)$

ゆえに $y^{(k+1)} = 2^{k+1} \sin\left(2x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2^{k+1} \sin\left(2x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$

よって, $n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2) [1] $n=1$ のとき $y' = (\log x)' = \frac{1}{x}$

一方 $(-1)^{1-1} \cdot \frac{(1-1)!}{x^1} = \frac{1}{x}$

よって, 等式は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, 等式が成り立つと仮定すると

$y^{(k)} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}$

$n=k+1$ のとき

$y^{(k+1)} = \{y^{(k)}\}' = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (-k) \cdot x^{-k-1} = (-1)^k \cdot \frac{k!}{x^{k+1}}$

よって, $n=k+1$ のときにも等式は成り立つ。

[1], [2] から, 等式 $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$ はすべての自然数 n について成り立つ。

4

【解答】 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y-2)}$ (2) $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ (3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y+1)}$ (5) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x+3y^2}$ (6) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)}$

【解説】

(1) $(y-2)^2 = x+5$ の両辺を x で微分すると

$2(y-2)\frac{dy}{dx} = 1$ よって $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y-2)}$

(2) $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$ の両辺を x で微分すると

$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$ よって $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(3) $x = \cos y$ の両辺を x で微分すると

$1 = (-\sin y) \cdot \frac{dy}{dx}$ よって $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$

(4) 両辺を x で微分すると $1 = 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \cdot \frac{dy}{dx}$

ゆえに $2(y+1)\frac{dy}{dx} = 1$

よって, $y \neq -1$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y+1)}$

(5) 両辺を x で微分すると $1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$

ゆえに $(x+3y^2)\frac{dy}{dx} = 2x-y$

よって, $x+3y^2 \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x+3y^2}$

(6) 両辺を x で微分すると $1 = \cos(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$

よって, $\cos(x+y) \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(x+y)} - 1 = \frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)}$

5

【解答】 (1) $\frac{2t+1}{6t^2}$ (2) $-2\sqrt{1-t^2}$ (3) $-\frac{3\cos\theta}{2\sin\theta}$ (4) $-\frac{2}{3}\tan\theta$

(5) $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ (6) $\frac{3}{2\sin t}$

【解説】

(1) $\frac{dx}{dt} = 6t^2, \frac{dy}{dt} = 2t+1$

よって, $t \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{2t+1}{6t^2}$

(2) $t \neq \pm 1$ のとき $\frac{dx}{dt} = \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{dy}{dt} = 2t$

よって, $t \neq 0, t \neq \pm 1$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}} = -2\sqrt{1-t^2}$

(3) $\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta$

よって, $\sin\theta \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{3\cos\theta}{2\sin\theta}$

(4) $\frac{dx}{d\theta} = 3 \cdot 3\cos^2\theta \cdot (-\sin\theta), \frac{dy}{d\theta} = 2 \cdot 3\sin^2\theta \cdot \cos\theta$

よって、 $\sin\theta\cos\theta \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot 3\sin^2\theta\cos\theta}{-3 \cdot 3\cos^2\theta\sin\theta} = -\frac{2}{3}\tan\theta$

$$(5) \frac{dx}{dt} = \frac{3(1+t^3)-3t \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6t(1+t^3)-3t^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{3t(2-t^3)}{3(1-2t^3)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

$$(6) \frac{dx}{dt} = -\frac{2(-\sin t)}{\cos^2 t} = \frac{2\sin t}{\cos^2 t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{\cos^2 t}$$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sin t}$

6

解答 (1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2(t+1)^3$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{4\sin^3 t}$

解説

$$(1) \frac{dx}{dt} = \frac{1 \cdot (1+t) - t \cdot 1}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2t(1+t) - t^2 \cdot 1}{(1+t)^2} = \frac{t^2+2t}{(1+t)^2}$$

ゆえに $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2+2t}{\frac{1}{(1+t)^2}} = t^2+2t$

ここで $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

よって $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(t^2+2t) \cdot \frac{1}{\frac{1}{(1+t)^2}} = (2t+2) \cdot (1+t)^2 = 2(t+1)^3$

$$(2) \frac{dx}{dt} = -2\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3\cos t$$

ゆえに $\frac{dy}{dx} = -\frac{3\cos t}{2\sin t}$

ここで $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

よって $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3\cos t}{2\sin t}\right) \cdot \frac{1}{-2\sin t} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\tan t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2\sin t}\right)$
 $= -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2\sin t}\right) = -\frac{3}{4\sin^3 t}$

1

解答 (1) (ア) $y''=6x-6, y'''=6$ (イ) $y''=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}, y'''=\frac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$

(ウ) $y''=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, y'''=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

(エ) $y''=-2e^x\sin x, y'''=-2e^x(\sin x+\cos x)$

(オ) $y''=e^x(4\cos 2x-3\sin 2x), y'''=-e^x(2\cos 2x+11\sin 2x)$

解説

(1) (ア) $y'=3x^2-6x+2$ であるから $y''=6x-6, y'''=6$

(イ) $y'=(x^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ であるから

$$y''=\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y'''=-\frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}\right) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

(ウ) $y'=\frac{2x}{x^2+1}$ であるから

$$y''=\frac{2(x^2+1-x \cdot 2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$y'''=\frac{2\{2(1-x^2)(x^2+1)^{-2}\}'}{2(1-x^2)(x^2+1)^{-2}} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

(エ) $y'=e^x\cos x - e^x\sin x = e^x(\cos x - \sin x)$ であるから

$$y''=e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x\sin x$$

$$y'''=-2e^x\sin x - 2e^x\cos x = -2e^x(\sin x + \cos x)$$

(オ) $y'=e^x\sin 2x + e^x\cos 2x \cdot 2 = e^x(\sin 2x + 2\cos 2x)$

$$y''=e^x(\sin 2x + 2\cos 2x) + e^x(\cos 2x \cdot 2 - 2\sin 2x \cdot 2)$$

$$= e^x(4\cos 2x - 3\sin 2x)$$

$$y'''=e^x(4\cos 2x - 3\sin 2x) + e^x(-4\sin 2x \cdot 2 - 3\cos 2x \cdot 2)$$

$$= e^x(-2\cos 2x - 11\sin 2x) = -e^x(2\cos 2x + 11\sin 2x)$$

(2) 条件より、 $y=g(x)$ に対して $x=\cos y$ が成り立つから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sin y}$$

$\pi < y < 2\pi$ であるから $\sin y < 0$

ゆえに $\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$

よって $g'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

また $g''(x) = \{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\}' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

2

解答 (1) 略 (2) $a=-3, b=2$

解説

$$(1) y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y'' = \{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\}' = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

よって $(x^2+1)y'' + xy' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

ゆえに、等式 $(x^2+1)y'' + xy' = 0$ は成り立つ。

(2) $y'=2e^{2x}+e^x, y''=4e^{2x}+e^x$ であるから

$$y'' + ay' + by = (4e^{2x} + e^x) + a(2e^{2x} + e^x) + b(e^{2x} + e^x)$$

$$y'' + ay' + by = 0 \text{ から } (2a+b+4)e^{2x} + (a+b+1)e^x = 0$$

これがすべての x に対して成り立つから

$$2a+b+4=0 \dots\dots \textcircled{1}, \quad a+b+1=0 \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を解いて $a=-3, b=2$

3

解答 (1) $y^{(n)}=n!$ (2) $y^{(n)}=n! \cdot 7^n(1-7x)^{n-1}$ (3) $y^{(n)}=a^{n-1}(n+ax)e^{ax}$

解説

(1) $n=1, 2, 3$ のとき、順に

$$y'=x'=1, y''=(x^2)''=(2x)'=2 \cdot 1, y'''=(x^3)'''=3(x^2)''=3 \cdot 2 \cdot 1$$

したがって、 $y^{(n)}=n!$ …… $\textcircled{1}$ と推測できる。

[1] $n=1$ のとき $y'=1!$ であるから、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると

$$y^{(k)}=k! \quad \text{すなわち} \quad \frac{d^k}{dx^k} x^k = k!$$

$n=k+1$ のときを考えると、 $y=x^{k+1}$ で $(x^{k+1})'=(k+1)x^k$ であるから

$$y^{(k+1)} = \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d}{dx} x^{k+1} \right) = \frac{d^k}{dx^k} \{(k+1)x^k\} = (k+1) \frac{d^k}{dx^k} x^k = (k+1)k! = (k+1)!$$

よって、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について $\textcircled{1}$ は成り立ち $y^{(n)}=n!$

(2) $y=(1-7x)^{-1}$ であるから

$$y' = -(1-7x)^{-2} \cdot (-7) = 7(1-7x)^{-2}$$

$$y'' = 7 \cdot (-2)(1-7x)^{-3} \cdot (-7) = 2 \cdot 7^2(1-7x)^{-3}$$

$$y''' = 2 \cdot 7^2 \cdot (-3)(1-7x)^{-4} \cdot (-7) = 2 \cdot 3 \cdot 7^3(1-7x)^{-4}$$

よって、 $y^{(n)}=n! \cdot 7^n(1-7x)^{n-1}$ …… $\textcircled{1}$ と推測できる。

[1] $n=1$ のとき、 $y'=7(1-7x)^{-2}=1! \cdot 7^1(1-7x)^{-1-1}$

であるから、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると

$$y^{(k)} = k! \cdot 7^k(1-7x)^{-k-1} \dots\dots \textcircled{2}$$

$n=k+1$ のときを考えると、 $\textcircled{2}$ の両辺を x で微分して

$$y^{(k+1)} = k! \cdot 7^k \cdot (-k-1)(1-7x)^{-k-2} \cdot (-7) \\ = (k+1)! \cdot 7^{k+1}(1-7x)^{-(k+1)-1}$$

ゆえに、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n に対して $\textcircled{1}$ は成り立つ。

したがって $y^{(n)}=n! \cdot 7^n(1-7x)^{n-1}$

(3) $y'=e^{ax}+axe^{ax}=(1+ax)e^{ax}$ …… $\textcircled{1}$

$$y''=ae^{ax}+a(1+ax)e^{ax}=a(2+ax)e^{ax}$$

$$y'''=a[ae^{ax}+a(2+ax)e^{ax}]=a^2(3+ax)e^{ax}$$

第5講 レベルA

よって、 $y^{(n)} = a^{n-1}(n+ax)e^{ax}$ …… [A] と類推される。

[A] を、数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき、① から、[A] は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、[A] が成り立つと仮定すると

$$y^{(k)} = a^{k-1}(k+ax)e^{ax}$$

$n=k+1$ のとき

$$y^{(k+1)} = \{y^{(k)}\}' = a^{k-1}\{ae^{ax} + a(k+ax)e^{ax}\}$$

$$= a^{k-1} \cdot a(1+k+ax)e^{ax}$$

$$= a^k(k+1+ax)e^{ax}$$

よって、 $n=k+1$ のときにも [A] は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について [A] は成り立つ。

ゆえに $y^{(n)} = a^{n-1}(n+ax)e^{ax}$

4

【解答】 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ の順に (1) $\frac{1}{2y}$, $-\frac{1}{4y^3}$ (2) $\frac{x}{y}$, $-\frac{4}{y^3}$

(3) $-\frac{x+1}{y}$, $-\frac{9}{y^3}$ (4) $\frac{2-3y}{3x+5}$, $\frac{6(3y-2)}{(3x+5)^2}$

【解説】

(1) $y^2 = x$ の両辺を x で微分すると $2y \frac{dy}{dx} = 1$

よって、 $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

また、この両辺を x で微分すると $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y'}{2y^2} = -\frac{1}{2y^2} \cdot \frac{1}{2y} = -\frac{1}{4y^3}$

(2) $x^2 - y^2 = 4$ の両辺を x で微分すると $2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$

よって、 $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

また、この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1 \cdot y - xy'}{y^2} = \frac{y - \frac{x^2}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3}$$

(3) $(x+1)^2 + y^2 = 9$ の両辺を x で微分すると $2(x+1) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$

よって、 $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+1}{y}$

また、この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1 \cdot y - (x+1)y'}{y^2} = -\frac{y + \frac{(x+1)^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + (x+1)^2}{y^3} = -\frac{9}{y^3}$$

(4) $3xy - 2x + 5y = 0$ の両辺を x で微分すると $3\left(y + x \frac{dy}{dx}\right) - 2 + 5 \frac{dy}{dx} = 0$

よって $(3x+5) \frac{dy}{dx} = 2-3y$ ゆえに $\frac{dy}{dx} = \frac{2-3y}{3x+5}$

また、この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3y'(3x+5) - (2-3y) \cdot 3}{(3x+5)^2} = \frac{-3 \cdot \frac{2-3y}{3x+5} \cdot (3x+5) - 3(2-3y)}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{6(3y-2)}{(3x+5)^2}$$

5

【解答】 $\frac{4}{9}$

【解説】

$x^3 + (x+1)\{y(x)\}^3 = 1$ …… ① とする。

① に $x=0$ を代入すると $\{y(0)\}^3 = 1$ よって $y(0) = 1$

① の両辺を x で微分すると $3x^2 + \{y(x)\}^3 + 3(x+1)y'(x)\{y(x)\}^2 = 0$ …… ②

② に $x=0$ を代入すると $\{y(0)\}^3 + 3y'(0)\{y(0)\}^2 = 0$

$y(0) = 1$ であるから $1 + 3y'(0) = 0$ すなわち $y'(0) = -\frac{1}{3}$

② の両辺を x で微分すると

$$6x + 3y'(x)\{y(x)\}^2 + 3y''(x)\{y(x)\}^2 + 3(x+1)y''(x)\{y(x)\}^2 + 6(x+1)\{y'(x)\}^2y(x) = 0$$

これに $x=0$ を代入すると

$$6y'(0)\{y(0)\}^2 + 3y''(0)\{y(0)\}^2 + 6\{y'(0)\}^2y(0) = 0$$

$y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{3}$ であるから $6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1^2 + 3y''(0) \cdot 1^2 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 1 = 0$

ゆえに $-2 + 3y''(0) + \frac{2}{3} = 0$ よって $y''(0) = \frac{4}{9}$

6

【解答】 (1) $-\frac{1}{x^2+1}$ (2) $-\frac{b}{a^2 \sin^3 \theta}$ (3) $-\frac{2(t-1)(3t^2+8t+6)}{(2+t)^5} e^{4t}$

【解説】

(1) $x \tan y = 1$ の両辺を x で微分すると

$$\tan y + x \cdot \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots\dots ①$$

条件から $x > 0$, $\cos y > 0$

よって $\tan y = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^2+1}{x^2}$

① に代入して $\frac{1}{x} + x \cdot \frac{x^2+1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ ゆえに $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2+1}$

(2) $\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = b \cos \theta$

よって、 $\sin \theta \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos \theta}{a \sin \theta}$

したがって $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{b \cos \theta}{a \sin \theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{b \cos \theta}{a \sin \theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx}$

$$= -\frac{b(-\sin \theta \sin \theta - \cos \theta \cos \theta)}{a \sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{-a \sin \theta}$$

$$= -\frac{b(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{a^2 \sin^3 \theta} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 \theta}$$

(3) $\frac{dx}{dt} = -e^{-t} + (3+t)e^{-t} = (2+t)e^{-t}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-(2+t)-(2-t)}{(2+t)^2} e^{2t} + \frac{2-t}{2+t} \cdot 2e^{2t} = \frac{-4+2(2-t)(2+t)}{(2+t)^2} e^{2t} = \frac{4-2t^2}{(2+t)^2} e^{2t}$$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{4-2t^2}{(2+t)^2} \cdot e^{2t} \cdot \frac{1}{(2+t)e^{-t}} = \frac{4-2t^2}{(2+t)^3} e^{3t}$

したがって $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{4-2t^2}{(2+t)^3} e^{3t} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{4-2t^2}{(2+t)^3} e^{3t} \right\} \cdot \frac{dt}{dx}$

$$= \left\{ \frac{-4t(2+t)^3 - (4-2t^2) \cdot 3(2+t)^2}{(2+t)^6} e^{3t} + \frac{4-2t^2}{(2+t)^3} \cdot 3e^{3t} \right\} \cdot \frac{e^t}{2+t}$$

$$= \frac{-4t(2+t) - 3(4-2t^2) + 3(4-2t^2)(2+t)}{(2+t)^4} \cdot \frac{e^{4t}}{2+t}$$

$$= -\frac{2(3t^3+5t^2-2t-6)}{(2+t)^5} e^{4t} = -\frac{2(t-1)(3t^2+8t+6)}{(2+t)^5} e^{4t}$$

1

【解答】 (1) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

【解説】

(1) 逆関数を $y=f(x)$ とすると $x=f^{-1}(y)=\sin y$

よって $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$

$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos y \geq 0$

ゆえに $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $g(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)$

$y = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)$ とおくと $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$

$e^x > 0$ であるから $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$

よって $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$

x と y を入れ替えて $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

よって $h(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

したがって

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}h(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}h(x) = -(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x(x^2 + 2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = (x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}}(2x^2 - 1)$$

よって $(x^2 + 1) \frac{d^3}{dx^3}h(x) + 3x \frac{d^2}{dx^2}h(x)$

$$= (x^2 + 1)(x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}}(2x^2 - 1) + 3x \left\{ -x(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$= (x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}(2x^2 - 1 - 3x^2) = (x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}(-x^2 - 1) = -(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

2

【解答】 (1) 略 (2) $f^{(9)}(0) = 11025, f^{(10)}(0) = 0$

【解説】

(1) 与えられた等式を ① とする。

[1] $n=1$ のとき, $f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$,

$f''(x) = \left\{ (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right\}' = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$ であるから

①の左辺 $= (x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$

よって, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, ①が成り立つと仮定すると

$$(x^2 + 1)f^{(k+1)}(x) + (2k-1)xf^{(k)}(x) + (k-1)^2f^{(k-1)}(x) = 0$$

両辺を x で微分すると

$$2xf^{(k+1)}(x) + (x^2 + 1)f^{(k+2)}(x) + (2k-1)[f^{(k)}(x) + xf^{(k+1)}(x)] + (k-1)^2f^{(k)}(x) = 0$$

よって $(x^2 + 1)f^{(k+2)}(x) + (2k-1+2)xf^{(k+1)}(x) + \{(2k-1) + (k-1)^2\}f^{(k)}(x) = 0$

ゆえに $(x^2 + 1)f^{(k+2)}(x) + (2k+1)xf^{(k+1)}(x) + k^2f^{(k)}(x) = 0$

よって, $n=k+1$ のときにも ①は成り立つ。

[1], [2]から, 任意の自然数 n に対して ①が成り立つ。

(2) ①の両辺に $x=0$ を代入して $f^{(n+1)}(0) + (n-1)^2f^{(n-1)}(0) = 0$

よって $f^{(n+1)}(0) = -(n-1)^2f^{(n-1)}(0) \dots \dots$ ②

ここで, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ であるから $f'(0) = 1$

ゆえに, ②から

$$f^{(3)}(0) = -1^2 \cdot f'(0) = -1, f^{(5)}(0) = -3^2 f^{(3)}(0) = -9(-1) = 9,$$

$$f^{(7)}(0) = -5^2 f^{(5)}(0) = -25 \cdot 9 = -225,$$

$$f^{(9)}(0) = -7^2 f^{(7)}(0) = -49(-225) = 11025$$

また, $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$, ②から $f^{(2)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = -2^2 f^{(2)}(0) = 0$

同様に $f^{(6)}(0) = 0, f^{(8)}(0) = 0, f^{(10)}(0) = 0$

1

【解答】 (ア) 1 (イ) 1 (ウ) 2 (エ) 0 (オ) 1 (カ) 4

【解説】

関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるとき $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0)$

よって $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin \pi x \sin \frac{\pi}{2} x(x-1) \sin \frac{\pi}{2} (x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2} = a$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin \pi x \sin \frac{\pi}{2} x(x-1) \sin \frac{\pi}{2} (x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} x(x-1)}{\frac{\pi}{2} x(x-1)} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} (x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{-1}{-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ゆえに $a = \frac{1}{2}$

また, $f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるとき, $x=1$ で連続である。

よって $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1)$

ゆえに $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sin \pi x \sin \frac{\pi}{2} x(x-1) \sin \frac{\pi}{2} (x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2} = b$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sin \pi x \sin \frac{\pi}{2} x(x-1) \sin \frac{\pi}{2} (x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \sin \pi x \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} x(x-1)}{\frac{\pi}{2} x(x-1)} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} (x-1)}{\frac{\pi}{2} (x-1)} \cdot \frac{1}{4x}$$

$$= 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

したがって $b = 0$

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから,

$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ と $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ が存在して, その値が等しい。

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{-c\pi(x-1)}{x-1} = -c\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sin \pi x \sin \frac{\pi}{2} x(x-1) \sin \frac{\pi}{2} (x-1)}{\pi^2 x^2 (x-1)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \frac{\pi}{4(x-1)} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} x(x-1)}{\frac{\pi}{2} x(x-1)} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} (x-1)}{\frac{\pi}{2} (x-1)}$$

ここで $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \frac{\pi}{4(x-1)} = -\frac{\sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)} \cdot \frac{\pi}{4x}$

よって $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{\pi}{4}$

ゆえに, $-c\pi = -\frac{\pi}{4}$ から $c = \frac{1}{4}$

章末問題A

2

【解答】 $A = -5f'(2)$, $A = -4$

【解説】

$$\begin{aligned} A &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h) - f(2) - \{f(2+2h) - f(2)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-3 \frac{f(2-3h) - f(2)}{-3h} - 2 \frac{f(2+2h) - f(2)}{2h} \right] \\ &= -3f'(2) - 2f'(2) \\ &= -5f'(2) \end{aligned}$$

ここで、 $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ から $f'(2) = \frac{4}{5}$

ゆえに $A = -4$

3

【解答】 (ア) 3 (イ) 3

【解説】

$$\begin{aligned} \text{(ア)} \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(5h) - f(-2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(5h) - f(0) - f(-2h) + f(0)}{h} \\ &= 5 \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(5h) - f(0)}{5h} + 2 \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(-2h) - f(0)}{(-2h)} \end{aligned}$$

$5h = s$, $-2h = t$ とおくと $h \rightarrow +0$ のとき $s \rightarrow +0$, $t \rightarrow -0$ から

$$5 \lim_{s \rightarrow +0} \frac{f(s) - f(0)}{s} + 2 \lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = 5 \times 1 + 2 \times (-1) = 3$$

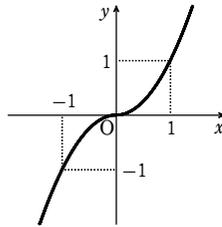
$$\begin{aligned} \text{(イ)} \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(3h^2) - f(h^3)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(3h^2) - f(0) - f(h^3) + f(0)}{h^2} \\ &= 3 \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(3h^2) - f(0)}{3h^2} - \lim_{h \rightarrow -0} \left\{ \frac{f(h^3) - f(0)}{h^3} \times h \right\} \end{aligned}$$

$3h^2 = s$, $h^3 = t$ とおくと $h \rightarrow -0$ のとき $s \rightarrow +0$, $t \rightarrow -0$ から

$$3 \lim_{s \rightarrow +0} \frac{f(s) - f(0)}{s} - \lim_{t \rightarrow -0} \left\{ \frac{f(t) - f(0)}{t} \times \sqrt[3]{t} \right\} = 3 \times 1 - \{(-1) \times 0\} = 3$$

4

- 【解答】 (1) 略
(2) [図]
(3) 微分可能である



【解説】

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1$$

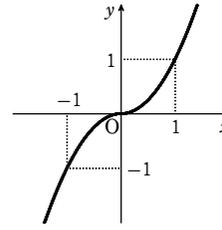
よって、 $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ であるから、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \text{ は存在しない。}$$

したがって、 $f(x)$ は $x=0$ において微分可能でない。

(2) $x \geq 0$ のとき $y = x^2$
 $x < 0$ のとき $y = -x^2$

よって、 $y = |x|$ のグラフの概形は、右の図のようになる。



(3) m は自然数であるから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^m \cdot h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} h^m = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{h^m \cdot (-h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (-h^m) = 0$$

よって、 $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = 0$ であるから、極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \text{ が存在する。}$$

したがって、 $g(x)$ は $x=0$ において微分可能である。

5

【解答】 (1) 略 (2) $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$ (3) 2

【解説】

$$(1) \quad f(-x) = \log \frac{1-x}{1+x} = \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\log \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$$

ゆえに、 $f(x)$ は奇関数である。

(2) $-1 < x < 1$ から $1+x > 0$, $1-x > 0$

よって $f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x) + (1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$(3) \quad f(0) = \log 1 = 0 \text{ から 与式 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$$(2) \text{ から } f'(0) = \frac{2}{1-0^2} = 2$$

よって、求める値は 2

6

【解答】 (1) $f_2(x) = x^2 + 2x$ (2) $a_{n+1} = a_n + 2$, $b_{n+1} = a_n + b_n$

(3) $a_n = 2(n-1)$, $b_n = (n-1)(n-2)$

【解説】

$$(1) \quad e^x f_2(x) = \frac{d}{dx} (e^x f_1(x)) = \frac{d}{dx} (x^2 e^x) = 2x e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x) e^x$$

よって $f_2(x) = x^2 + 2x$

$$(2) \quad e^x f_{n+1}(x) = \frac{d}{dx} (e^x f_n(x)) = e^x \{f_n(x) + f_n'(x)\}$$

よって $f_{n+1}(x) = f_n(x) + f_n'(x)$ ……①

$f_n'(x) = 2x + a_n$ であるから、①より

$$x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1} = (x^2 + a_nx + b_n) + 2x + a_n$$

整理すると $(a_{n+1} - a_n - 2)x + (b_{n+1} - b_n - a_n) = 0$

これが x についての恒等式であるから $a_{n+1} - a_n - 2 = 0$, $b_{n+1} - b_n - a_n = 0$

よって $a_{n+1} = a_n + 2$ ……②, $b_{n+1} = a_n + b_n$ ……③

(3) $f_1(x) = x^2$ から $x^2 + a_1x + b_1 = x^2$ よって $a_1 = b_1 = 0$ ……④

②, ④より、 $\{a_n\}$ は初項0, 公差2の等差数列で

$$a_n = 0 + (n-1) \cdot 2 = 2(n-1)$$

③から $b_{n+1} - b_n = 2(n-1)$

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(k-1) = 0 + 2 \left\{ \frac{1}{2} (n-1)n - (n-1) \right\} \\ &= (n-1)(n-2) \text{ ……⑤} \end{aligned}$$

初項は $b_1 = 0$ であるから、⑤は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって $b_n = (n-1)(n-2)$

7

【解答】 (ア) $\frac{2}{13}$ (イ) $-\frac{3}{13}$

【解説】

$y = e^{2x}(a \sin 3x + b \cos 3x)$ より

$$\begin{aligned} y' &= e^{2x} \cdot 2 \cdot (a \sin 3x + b \cos 3x) + e^{2x} (a \cdot 3 \cos 3x - b \cdot 3 \sin 3x) \\ &= e^{2x} \{ (2a-3b) \sin 3x + (3a+2b) \cos 3x \} \end{aligned}$$

よって $e^{2x} \{ (2a-3b) \sin 3x + (3a+2b) \cos 3x \} = e^{2x} \sin 3x$

これが x についての恒等式となるとき $2a-3b=1$, $3a+2b=0$

$$\text{これを解くと } a = \frac{7}{13}, b = -\frac{3}{13}$$

8

【解答】 (1) $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$ (2) $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

【解説】

$$\begin{aligned} (1) \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\} \{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\}}{h \{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

(2) $f(x) \cdot \{f(x) \cdot f(x)\} = x$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x) \{f(x) \cdot f(x)\} + f(x) \{f(x) \cdot f(x)\}' = 1$$

よって $f'(x) \{f(x)\}^2 + f(x) \{f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x)\} = 1$

$$\text{ゆえに } 3f'(x) \{f(x)\}^2 = 1 \quad f(x) \neq 0 \text{ であるから } f'(x) = \frac{1}{3 \{f(x)\}^2} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

9

【解答】 (1) [略] (2) [略] (3) [略]

【解説】

$$(1) \quad (1-x)(1+x+\dots+x^n) = (1+x+\dots+x^n) - x(1+x+\dots+x^n) = 1 - x^{n+1}$$

章末問題A

ゆえに $(1-x)f(x)=1-x^{n+1}$ …… ①
 (2) ①の両辺を x で微分すると $-f(x)+(1-x)f'(x)=-(n+1)x^n$
 よって $(1-x)f'(x)=f(x)-(n+1)x^n$ …… ②
 $x \neq 1$ であるから、①により $f(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
 これを②に代入して $(1-x)f'(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-(n+1)x^n$

$$= \frac{1-x^{n+1}-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{nx^n(x-1)+1-x^n}{1-x}$$
 $x \neq 1$ であるから $f'(x)=\frac{nx^n(x-1)+1-x^n}{(1-x)^2}$
 (3) $f'(x)=1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$
 よって、(2) から $1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}=\frac{nx^n(x-1)+1-x^n}{(1-x)^2}$
 $x=\frac{1}{2}$ を代入すると

$$1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0, n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ であるから $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\dots+\frac{n}{2^{n-1}} < 4$
 両辺を2で割ると $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^n} < 2$

10

解答 $\log a - \frac{1}{a}x + \frac{1}{6a^3}x^3$

解説

$f(x)=\log(\sqrt{a^2+x^2}-x)$ から $f(0)=\log\sqrt{a^2}=\log|a|$
 $a > 0$ であるから $f(0)=\log a$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}-x}\cdot\left(\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}-1\right)$$

$$=\frac{x-\sqrt{a^2+x^2}}{(\sqrt{a^2+x^2}-x)\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{a^2+x^2}}=-(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

よって $f'(0)=-(a^2)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{a}$

$$f''(x)=-\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=x(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

よって $f''(0)=0\cdot(a^2)^{-\frac{3}{2}}=0$

$$f'''(x)=1\cdot(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}+x\cdot\left(-\frac{3}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right)=(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\{(a^2+x^2)-3x^2\}$$

$$=(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}(a^2-2x^2)$$

よって $f'''(0)=(a^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot a^2=\frac{1}{a^3}$

したがって $f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=\log a-\frac{1}{a}x+\frac{1}{6a^3}x^3$

11

解答 $a=2, b=\frac{1}{4}, c=0$

解説

$$f'(x)=-\sin x, g'(x)=-\frac{a(2bx+c)}{(bx^2+cx+1)^2}$$

$f(0)=g(0)$ から $2=a$ …… ①

$f'(0)=g'(0)$ から $0=-ac$ …… ②

①, ② から $a=2, c=0$

よって、 $g'(x)=-\frac{4bx}{(bx^2+1)^2}$ であるから

$$g''(x)=-\frac{4b\{(bx^2+1)^2-x\cdot 2(bx^2+1)\cdot 2bx\}}{(bx^2+1)^4}=-\frac{4b\{bx^2+1-4bx^2\}}{(bx^2+1)^3}$$

$$=-\frac{4b(3bx^2-1)}{(bx^2+1)^3}$$

また $f''(x)=-\cos x$

よって、 $f''(0)=g''(0)$ から $-1=-4b$ ゆえに $b=\frac{1}{4}$

したがって $a=2, b=\frac{1}{4}, c=0$

12

解答 (1) $f(x)=\sqrt{5-4\cos x}$ (2) $\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{R}$ (3) 1

解説

(1) 余弦定理により

$$\{f(x)\}^2=2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot \cos x=5-4\cos x$$

$f(x) > 0$ であるから $f(x)=\sqrt{5-4\cos x}$ …… ①

(2) $\frac{d}{dx}f(x)=\frac{-4(-\sin x)}{2\sqrt{5-4\cos x}}=\frac{2\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$

ここで、正弦定理により $\frac{f(x)}{\sin x}=2R$

よって、①から $\sqrt{5-4\cos x}=2R\sin x$

ゆえに $\frac{d}{dx}f(x)=\frac{2\sin x}{2R\sin x}=\frac{1}{R}$ …… ②

(3) 正弦定理により $\frac{2}{\sin C}=2R$ すなわち $\frac{1}{R}=\sin C$

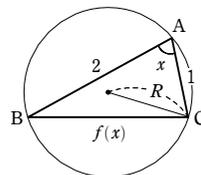
よって、②から $\frac{d}{dx}f(x)=\sin C$

ゆえに、 $0^\circ < C < 180^\circ$ のとき $\frac{d}{dx}f(x)$ は $C=90^\circ$ で最大値1をとる。

このとき $A=60^\circ, B=30^\circ$ で、確かに $\triangle ABC$ が存在する。

13 [横浜市立大]

解答 証明略, $a_n=n(n-1)$



解説

$f(x)=x^2e^x$ に対し、 a_n を定数として

$$f^{(n)}(x)=x^2e^x+2nxe^x+a_ne^x \dots\dots ①$$

とする。

[1] $n=1$ のとき $f'(x)=2xe^x+x^2e^x$

よって、 $a_1=0$ とすると、①が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、①が成り立つと仮定すると、定数 a_k があり

$$f^{(k)}(x)=x^2e^x+2kxe^x+a_ke^x \dots\dots ②$$

と表される。

$n=k+1$ のときを考えると、②の両辺を x で微分して

$$f^{(k+1)}(x)=2xe^x+x^2e^x+2ke^x+2kxe^x+a_ke^x$$

$$=x^2e^x+2(k+1)xe^x+(a_k+2k)e^x$$

a_k+2k は定数であるから、これを a_{k+1} とおくと、①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について、 a_n を定数として①が成り立つ。

次に、以上のことから $a_{n+1}=a_n+2n$ ゆえに $a_{n+1}-a_n=2n$

よって、 $n \geq 2$ のとき $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} 2k=0+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=n(n-1) \dots\dots ③$

③で $n=1$ とすると $a_1=0$

[1] より $a_1=0$ であるから、③は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n=n(n-1)$

14

解答 (ア) $\frac{1}{4}$ (イ) $(\sqrt{2})^n$ (ウ) $\frac{n}{4}$ (エ) $(\sqrt{2})^{n+1}$ (オ) $\frac{n+1}{4}$

解説

$$y^{(1)}=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)$$

$$y^{(2)}=\sqrt{2}\left\{e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}e^x\left\{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}e^x\cdot\sqrt{2}\cos\left\{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right\}=(\sqrt{2})^2e^x\cos\left(x+\frac{2}{4}\pi\right)$$

よって、 $y^{(n)}=(\sqrt{2})^ne^x\cos\left(x+\frac{n}{4}\pi\right) \dots\dots ①$ と推測できる。

これを、数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$$y^{(1)}=\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)$$
 により、①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

①が成り立つと仮定する。

$y^{(k)}=(\sqrt{2})^ke^x\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)$ の両辺を x で微分すると

$$y^{(k+1)}=(\sqrt{2})^ke^x\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)-(\sqrt{2})^ke^x\sin\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)$$

$$=(\sqrt{2})^ke^x\left\{\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)-\sin\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=(\sqrt{2})^ke^x\cdot\sqrt{2}\cos\left\{\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)+\frac{\pi}{4}\right\}=(\sqrt{2})^{k+1}e^x\cos\left(x+\frac{k+1}{4}\pi\right)$$

よって、 $n=k+1$ のときも、①は成り立つ。

章末問題A

[1], [2]から, すべての自然数 n に対して, $y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x + \frac{n}{4}\pi\right)$ が成り立つ。

したがって $y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x + \frac{n}{4}\pi\right) \dots\dots ②$

次に, $y = e^x(\cos x + \sin x)$ のとき, $y = \sqrt{2}e^x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ であるから, $x - \frac{\pi}{4} = t$ とお

けば $y = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \cdot e^t \cos t$

ここで $y^{(1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot 1 = \frac{dy}{dt}$

よって, これを繰り返すことにより $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$

したがって, ②より $y^{(n)} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \cdot (\sqrt{2})^n e^t \cos\left(t + \frac{n}{4}\pi\right)$

よって $y^{(n)} = (\sqrt{2})^{n+1} e^{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{x-\frac{\pi}{4}} \cos\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{n}{4}\pi\right]$
 $= (\sqrt{2})^{n+1} e^x \cos\left[\left(x + \frac{n+1}{4}\pi\right) - \frac{\pi}{2}\right] = (\sqrt{2})^{n+1} e^x \sin\left(x + \frac{n+1}{4}\pi\right)$

15

解答 (1) $a_n = n$ (2) $\frac{1}{e-1}$

解説

(1) $f^{(1)}(x) = 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = -(x-1)e^{-x}$
 $f^{(2)}(x) = -[1 \cdot e^{-x} + (x-1)(-e^{-x})] = (x-2)e^{-x}$
 $f^{(3)}(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x-2)(-e^{-x}) = -(x-3)e^{-x}$

よって, $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x} \dots\dots ①$ と推測される。
 この推測が正しいことを, 数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき

$f^{(1)}(x) = -(x-1)e^{-x}$ であるから, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, ①が成り立つ, すなわち

$f^{(k)}(x) = (-1)^k(x-k)e^{-x} \dots\dots ②$ と仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると, ②により

$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k[1 \cdot e^{-x} + (x-k)(-e^{-x})] = (-1)^k[-(x-k-1)e^{-x}]$
 $= (-1)^{k+1}[(x-(k+1))e^{-x}]$

よって, $n=k+1$ のときにも ①は成り立つ。

[1], [2]から, すべての自然数 n について ①は成り立つ。

ゆえに $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}$

$f^{(n)}(x) = 0$ とすると $(-1)^n(x-n)e^{-x} = 0$

これを解くと $x=n$ したがって $a_n = n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$

16

解答 (1) $f'(2) = 2e, f''(2) = \frac{3}{2}e$ (2) $g'(2e) = \frac{1}{2e}, g''(2e) = -\frac{3}{16e^2}$

解説

(1) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$ から $f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{x}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}(x+2)e^{\frac{x}{2}}$,

$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(x+2) \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}(x+4)e^{\frac{x}{2}}$

よって $f'(2) = \frac{1}{2}(2+2)e^{\frac{2}{2}} = 2e, f''(2) = \frac{1}{4}(2+4)e^{\frac{2}{2}} = \frac{3}{2}e$

(2) $g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であるから, $y=g(x)$ とおくと $x=f(y)$

両辺の関数を x で微分すると $1=f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$ すなわち $g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$

さらに, この両辺の関数を x で微分すると

$g''(x) = \frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2} \cdot \frac{1}{f'(y)} = -\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$

ここで, $f(2) = 2e$ であるから, $x=2e$ のとき $y=g(2e) = 2$

ゆえに, (1)より $g'(2e) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2e}$,

$g''(2e) = -\frac{f''(2)}{\{f'(2)\}^3} = -\frac{3}{2}e \cdot \frac{1}{(2e)^3} = -\frac{3}{16e^2}$

参考 $g(x)$ の定義域

$x > 0$ において, $f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)e^{\frac{x}{2}} > 0$ であるから, 関数 $f(x)$ は単調に増加する。

また $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

これと, $f(x)$ が連続であることから, 関数 $y=f(x)$ の値域は $y \geq 0$ したがって, その逆関数 $g(x)$ の定義域は $x \geq 0$

17

解答 (ア) -2 (イ) $\frac{1}{3}$

解説

$\frac{d}{dx} \sqrt{x^2+1} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

$\frac{d}{dx} \sqrt{(x^2+1)^3} = \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+1}$ から

$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{(x^2+1)^3} = 3\left(\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$
 $= \frac{3(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

与式は $\frac{ax^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{3b(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

ゆえに $(a+6b)x^2 + 3b = 1$

これが x についての恒等式となるのは $a+6b=0, 3b=1$

よって $a=-2, b=\frac{1}{3}$

18

解答 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}$ (2) $\frac{dy}{dx} = 2, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{25}{8}$

解説

(1) $\frac{dx}{d\theta} = \sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = 1 - \cos\theta$

よって, $\sin\theta \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

また $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) \cdot \frac{d\theta}{dx}$
 $= \frac{\sin\theta \sin\theta - (1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}$

(2) $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} - 1 = -\frac{3}{5}$

$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{4}{3}$ であるから $\sin\theta = \cos\theta \tan\theta = \frac{4}{5}$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}} = 2, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{25}{8}$

19

解答 (1) (ア) 3 (イ) $\frac{5}{2}$ (2) (ウ) 7 (エ) 4 (3) (オ) 2 (カ) $2\sqrt{3}$

解説

$f(\theta) = h(g(\theta)) = \log g(\theta) = \log\left(\frac{9}{4}\sin 2\theta\right) \dots\dots ①$ とする。

(1) ①から $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \log\left(\frac{9}{4}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \log\left(\frac{9}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 $= \log\frac{3^{\frac{5}{2}}}{2^3} = -^7 3\log 2 + ^1 5 \log 3$

(2) $\sin\theta_1 + \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{82}}{8}$ から $(\sin\theta_1 + \cos\theta_1)^2 = \frac{82}{64} = \frac{41}{32}$

よって $1 + 2\sin\theta_1 \cos\theta_1 = \frac{41}{32}$

ゆえに $2\sin\theta_1 \cos\theta_1 = \frac{9}{32}$ すなわち $\sin 2\theta_1 = \frac{9}{32}$

したがって, ①から

$f(\theta_1) = \log\left(\frac{9}{4}\sin 2\theta_1\right) = \log\left(\frac{9}{4} \cdot \frac{9}{32}\right) = \log\frac{3^4}{2^7} = -^7 7\log 2 + ^4 4\log 3$

(3) $f'(\theta) = h'(g(\theta))g'(\theta)$ であり,

$h'(x) = \frac{1}{x}, g'(\theta) = \frac{9}{4} \cdot 2\cos 2\theta = \frac{9}{2}\cos 2\theta$

であるから $f'(\theta) = \frac{1}{\frac{9}{4}\sin 2\theta} \cdot \frac{9}{2}\cos 2\theta = \frac{2}{\tan 2\theta}$

よって $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2}{\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{1} = 2, f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}$

章末問題B

1

【解答】 $5f(a)g'(a)+3f'(a)g(a)$

【解説】

$$\begin{aligned} & f(a+3h)g(a+5h)-f(a)g(a) \\ &= f(a+3h)g(a+5h)-f(a+3h)g(a)+f(a+3h)g(a)-f(a)g(a) \\ &= f(a+3h)[g(a+5h)-g(a)]+[f(a+3h)-f(a)]g(a) \\ \text{よって} & \frac{f(a+3h)g(a+5h)-f(a)g(a)}{h} \\ &= \frac{f(a+3h)[g(a+5h)-g(a)]+[f(a+3h)-f(a)]g(a)}{h} \\ &= 5f(a+3h) \cdot \frac{g(a+5h)-g(a)}{5h} + \frac{f(a+3h)-f(a)}{3h} \cdot 3g(a) \end{aligned}$$

ここで、 $f(x)$ 、 $g(x)$ は $x=a$ で微分可能であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+5h)-g(a)}{5h} = g'(a),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h)-f(a)}{3h} = f'(a),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+3h) = f(a)$$

したがって $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h)g(a+5h)-f(a)g(a)}{h} = 5f(a)g'(a)+3f'(a)g(a)$

2

【解答】 (ア) ax^3+bx^2+c (イ) $x+2$ (ウ) $a+b+c=3$
(エ) $-a+b+c=1$ (オ) 1 (カ) -1 (キ) 3

【解説】

(1) (ア) $|x| < 1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ であるから $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

(イ) $|x| > 1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ であるから

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+2 + 2\left(\frac{a}{x^{n-3}} + \frac{b}{x^{n-2}} + \frac{c}{x^n}\right)}{1 + \frac{2}{x^n}} = x+2$$

(2) (ウ) $f(x)$ が $x=1$ で連続であるための条件は

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$$

ゆえに $\frac{3+2a+2b+2c}{3} = a+b+c=3$

よって $a+b+c=3$

(3) (エ) n が偶数のとき

$$f(-1) = \frac{1}{3}[-1+2+2(-a+b+c)] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-a+b+c) \dots \dots \textcircled{1}$$

n が奇数のとき

$$f(-1) = 1-2+2(-a+b+c) = -1+2(-a+b+c) \dots \dots \textcircled{2}$$

$x=-1$ で $f(x)$ が定まるためには、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が一致すればよい。

ゆえに $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-a+b+c) = -1+2(-a+b+c)$

よって $-a+b+c=1$

(4) (オ), (カ), (キ) $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(h+3)-3}{h} = 1,$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{a(1+h)^3 + b(1+h)^2 + c - (a+b+c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} (3a+3ah+ah^2+2b+bh) \\ &= 3a+2b \end{aligned}$$

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

ゆえに $3a+2b=1 \dots \dots \textcircled{3}$

また、 $f(x)$ は $x=1$ で連続であるから、(2) より $a+b+c=3 \dots \dots \textcircled{4}$

更に、(3) から $-a+b+c=1 \dots \dots \textcircled{5}$

$\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{5}$ から $a=1, b=-1, c=3$

3

【解答】 4個

【解説】

$x \geq 0$ のとき $y = x|x-1||x^2-2|$ 、 $x < 0$ のとき $y = x|-x-1||x^2-2|$ から

$$y = \begin{cases} x(x-1)(x^2-2) & (x \geq \sqrt{2}) \\ -x(x-1)(x^2-2) & (1 \leq x < \sqrt{2}) \\ x(x-1)(x^2-2) & (0 \leq x < 1) \\ -x(x+1)(x^2-2) & (-1 \leq x < 0) \\ x(x+1)(x^2-2) & (-\sqrt{2} \leq x < -1) \\ -x(x+1)(x^2-2) & (x < -\sqrt{2}) \end{cases}$$

となり、グラフは図のようになる。

グラフから、明らかに、4点 $x = -\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}$ で微分不可能である。

$x=0$ においては、

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h(h-1)(h^2-2)}{h} = 2,$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h(h+1)(h^2-2)}{h} = 2$$

から、微分可能である。

ゆえに、微分可能でない点を4個もっている。

4

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $f(0) \neq 0$ と仮定する。与式で $x=y=0$ とすると $f(0)+\{f(0)\}^2=2f(0)$

よって $f(0)\{f(0)-1\}=0$ $f(0) \neq 0$ であるから $f(0)=1$

このとき、与式で $y=0$ とすると $f(x)+f(x) \cdot 1 = f(x)+1$

よって $f(x)=1$ ゆえに $f'(x)=0$

したがって、 $f'(0)=0$ となり、 $f'(0)=1$ に矛盾。

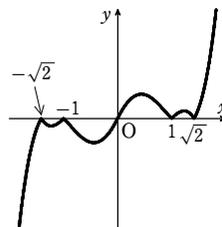
よって、 $f(0)=0$ である。

(2) $f'(0)=1$ であるから $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1 \dots \dots \textcircled{1}$

与式で $y=h$ とすると $f(x+h)+f(x)f(h) = f(x)+f(h)$

ゆえに $f(x+h)-f(x) = f(h)\{1-f(x)\} \dots \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ から、任意の実数 x に対して



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \{1-f(x)\} = 1-f(x)$$

よって $f'(x) = 1-f(x)$

すなわち、 $f(x)$ は常に微分可能である。

5

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) $k=4$ 、極限值 $1 + \frac{5}{3 \log 3}$

【解説】

(1) $y = \log_3 x$ のグラフと $y = 3^x$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称であり、直線 $y = -x + s$ も直線 $y = x$ に関して対称であるから、2点 P、Q も直線 $y = x$ に関して対称である。

よって、線分 PQ の中点は、2直線 $y = x$ と $y = -x + s$ の交点である。

$$x = -x + s \text{ から } x = \frac{s}{2}$$

ゆえに $y = \frac{s}{2}$

したがって、線分 PQ の中点の座標は $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$

(2) $\frac{s}{2} = \frac{t+u}{2}$ から $s = t+u \dots \dots \textcircled{1}$

点 P は直線 $y = -x + s$ 上にあるから $\log_3 t = -t + s$

これと $\textcircled{1}$ から $u = \log_3 t$

(3) $su = (t+u)\log_3 t = (t+\log_3 t)\log_3 t$ であるから、 $t \rightarrow 3$ のとき $su \rightarrow 4$

よって、 $k=4$ が必要である。

このとき、 $f(t) = (t+\log_3 t)\log_3 t$ とおくと、 $f(3) = 4$ であるから

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{su-k}{t-3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{f(t)-f(3)}{t-3} = f'(3)$$

$$f'(t) = \left(1 + \frac{1}{t \log 3}\right) \log_3 t + \frac{t + \log_3 t}{t \log 3}$$

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{su-k}{t-3} = 1 + \frac{5}{3 \log 3}$$

ゆえに $k=4$ 、極限值 $1 + \frac{5}{3 \log 3}$

6

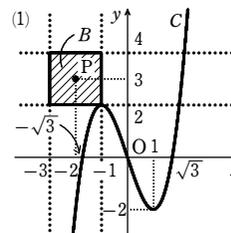
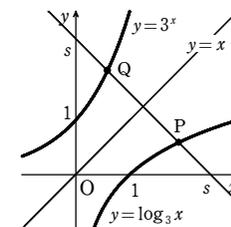
【解答】 (1) 図、境界線を含む

(2) 曲線 $y = x^3 + 3x^2 - 1$ の $x < -2$ の部分

$$(3) \text{ 曲線 } y = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x < -2, \frac{\sqrt{6}}{3} < x) \\ 3 & (-2 \leq x \leq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 3 & (0 < x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}) \end{cases}$$

(4) 略

【解説】



章末問題B

(1) $y = x^3 - 3x$ より

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = \pm 1$$

y の増減表は右のようになる。

よって、曲線 C の概形は右図のようになる。

また、点 $P(-2, 3)$ のとき

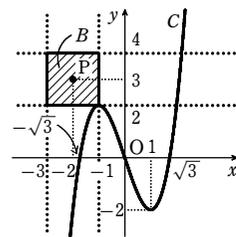
$$|x+2| \leq 1, |y-3| \leq 1$$

$$\text{よって } -3 \leq x \leq -1, 2 \leq y \leq 4$$

したがって、このときの領域 B は右図の斜線部分のようになる。

ただし、境界線を含む。

x	...	-1	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	-2	↗



(2) a, b は $b > a^3 - 3a$ を満たすから、 P が動く領域は右図の斜線部分のように C の上側である。

ただし、境界線を含まない。

$P(a, b)$ のときの領域 B は、 $|x-a| \leq 1, |y-b| \leq 1$ より

$$a-1 \leq x \leq a+1, b-1 \leq y \leq b+1$$

すなわち、4頂点 $(a-1, b-1), (a-1, b+1), (a+1, b-1), (a+1, b+1)$ がつくる正方形の周および内部である。

B と C が $x < -1$ の範囲にある点で接するとき、点 $(a+1, b-1)$ は C の $x < -1$ の部分上にある。

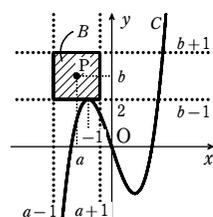
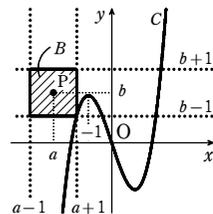
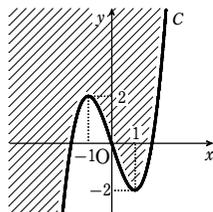
すなわち

$$a+1 < -1 \text{ かつ } b-1 = (a+1)^3 - 3(a+1)$$

$$\text{よって } a < -2 \text{ かつ } b = a^3 + 3a^2 - 1$$

ゆえに、このときの点 P の軌跡は

$$\text{曲線 } y = x^3 + 3x^2 - 1 \text{ の } x < -2 \text{ の部分}$$



(3) [1] B と C が $x = -1$ の点で接するとき

$$\text{このとき } a-1 \leq -1 \leq a+1 \text{ かつ } b-1 = 2$$

$$\text{よって } -2 \leq a \leq 0 \text{ かつ } b = 3$$

ゆえに、このときの点 P の軌跡は

$$\text{直線 } y = 3 \text{ の } -2 \leq x \leq 0 \text{ の部分}$$

[2] B と C が $x > -1$ の範囲にある点で接するとき

まず、このとき $a-1 > -1$ であるから $a > 0$

ここで、点 $(a-1, b-1)$ と $(a+1, b-1)$ がともに C 上にあるときを考える。

$$b-1 = (a-1)^3 - 3(a-1) \text{ より } b = a^3 - 3a^2 + 3$$

$$b-1 = (a+1)^3 - 3(a+1) \text{ より } b = a^3 + 3a^2 - 1$$

$$b \text{ を消去すると } a^3 - 3a^2 + 3 = a^3 + 3a^2 - 1$$

$$\text{よって } a^2 = \frac{2}{3}$$

$$a > 0 \text{ より } a = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(i) $0 < a \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき

このとき、 B と C は点 $(a-1, b-1)$ で接するから、点 $(a-1, b-1)$ は C 上にある。

$$\text{よって } b = a^3 - 3a^2 + 3$$

このときの点 P の軌跡は

$$\text{曲線 } y = x^3 - 3x^2 + 3 \text{ の } 0 < x \leq \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ の部分}$$

(ii) $\frac{\sqrt{6}}{3} < a$ のとき

このとき、 B と C は点 $(a+1, b-1)$ で接するから、点 $(a+1, b-1)$ は C 上にある。

$$\text{よって } b = a^3 + 3a^2 - 1$$

このときの点 P の軌跡は

$$\text{曲線 } y = x^3 + 3x^2 - 1 \text{ の } x > \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ の部分}$$

よって、(2) の結果と合わせると、求める軌跡は次の式で表される曲線である。

$$y = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x < -2, \frac{\sqrt{6}}{3} < x) \\ 3 & (-2 \leq x \leq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 3 & (0 < x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}) \end{cases}$$

(4) $y = f(x)$ とすると、(3) より

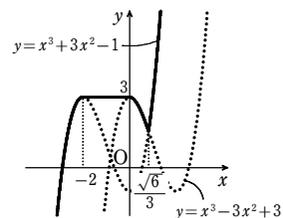
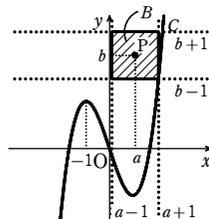
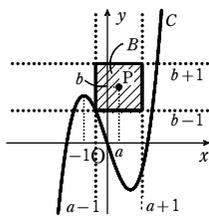
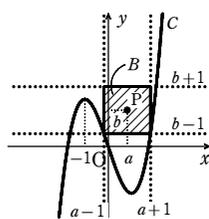
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3-3}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(h^3 - 3h^2 + 3) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} (h^2 - 3h) = 0$$

$$\text{ゆえに } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

すなわち、 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

【参考】点 P の軌跡は右図のようになる。



7

【解答】(1) 1 (2) 1 (3) 略 (4) 略 (5) $f(x) = e^x$

【解説】

(1) (b) の不等式に $x=0$ を代入すると $|f(0) - 1| \leq 0$ ゆえに $f(0) = 1$

$$(2) (b) \text{ と (1) から } \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - 1 \right| \leq M\sqrt{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} M\sqrt{|x|} = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - 1 \right| = 0$$

ゆえに $f'(0) = 1$

$$(3) (a) \text{ から } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \cdot \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$h \rightarrow 0 \text{ のとき } f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$

$$\text{ゆえに } f'(x) = f(x)$$

$$(4) \frac{d}{dx}(f(x)e^{-x}) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = f(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$$

(5) (4) から $f(x)e^{-x} = a$ (a は定数) とおける。

$$f(0)e^{-0} = 1 \text{ であるから } f(x)e^{-x} = 1$$

$$\text{ゆえに } f(x) = e^x$$

8

【解答】(1) 略 (2) $a=1, b=-2$

【解説】

(1) $f(x)$ を m 次多項式、 $g(x)$ を n 次多項式とする。ここで、 $1 \leq m \leq n$ としてよい。

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = [f'(x)]g(x) + [g'(x)]f(x) \text{ と仮定する。}$$

$$\text{両辺の次数から } m+n-1 = 2n$$

すなわち $m = n+1$ でなければならない。

これは、 $m > n$ を意味し、 $m \leq n$ に矛盾する。

ゆえに、 $f(x), g(x)$ がともに多項式の場合では、関係式を満足しない。

(2) $f(x) = e^x + 2e^{-x}, g(x) = ae^x + be^{-x}$

$$\text{ゆえに } f(x)g(x) = ae^{2x} + (2a+b) + 2be^{-2x}$$

$$\text{よって } \{f(x)g(x)\}' = 2ae^{2x} - 4be^{-2x}$$

$$\{f(x)\}' = e^{2x} + 4e^{-2x}$$

$$\{g(x)\}' = a^2e^{2x} + 2ab + b^2e^{-2x}$$

関係式に代入して係数を比較すると

$$2a = a^2 + 1, 0 = 2ab + 4, -4b = b^2 + 4$$

したがって $a=1, b=-2$

9

$$\text{【解答】 (1) } \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta + \beta)} \quad (2) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

【解説】

章末問題B

(1) △ABD において正弦定理により

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin(\pi - \theta - \beta)}$$

AD = AE であるから

$$AE = \frac{\sin \beta}{\sin(\theta + \beta)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

△AEF において正弦定理により

$$\frac{EF}{\sin \alpha} = \frac{AE}{\sin(\pi - \theta - \alpha)}$$

EF = EG であるから $EG = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)} AE$

$$\textcircled{1} \text{ より } EG = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta + \beta)}$$

$$(2) AG + EB = AB - EG = 1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta + \beta)}$$

$$= \frac{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta + \beta) - \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta + \beta)}$$

$f(\theta) = \sin(\theta + \alpha) \sin(\theta + \beta)$ とおくと

$$f'(\theta) = \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta + \beta) + \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \beta)$$

よって $f'(0) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta)$

ゆえに $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AG + EB}{\theta}$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ \frac{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta + \beta) - \sin \alpha \sin \beta}{\theta} \times \frac{1}{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta + \beta)} \right\}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(\theta) - f(0)}{\theta} \cdot \frac{1}{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta + \beta)}$$

$$= f'(0) \cdot \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

10

解答 (1) 略 (2) $F(x) = 1, G(x) = 1$ (3) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

解説

(1) $H(x) = [f(x)]^2 - [g(x)]^2$ とする。

$$H'(x) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$$

ゆえに, $H(x)$ は定数である。

ここで $H(0) = [f(0)]^2 - [g(0)]^2 = 1^2 - 0^2 = 1$

よって $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$

(2) $F'(x) = -e^{-x}\{f(x) + g(x)\} + e^{-x}\{f'(x) + g'(x)\} = 0$

ゆえに, $F(x)$ は定数である。

ここで $F(0) = f(0) + g(0) = 1$ よって $F(x) = 1$

また $G'(x) = e^x\{f(x) - g(x)\} + e^x\{f'(x) - g'(x)\} = 0$

ゆえに, $G(x)$ は定数である。

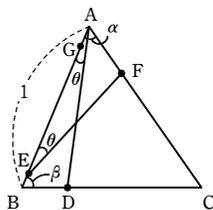
ここで $G(0) = f(0) - g(0) = 1$ よって $G(x) = 1$

(3) $F(x) = 1$ であるから $e^{-x}\{f(x) + g(x)\} = 1$

すなわち $f(x) + g(x) = e^x \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$G(x) = 1$ であるから $e^x\{f(x) - g(x)\} = 1$

すなわち $f(x) - g(x) = e^{-x} \quad \dots\dots \textcircled{2}$



①, ② から $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

11

解答 (1) 0 (2) 3 (3) 11 (4) $f(x) = 4x^2 + 3x$

解説

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 8xy \quad \dots\dots \textcircled{1}$ とする。

(1) ① に $x=y=0$ を代入すると $f(0) = f(0) + f(0) + 0$

よって $f(0) = 0$

(2) $f(0) = 0$ であるから $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = f'(0)$

条件 (B) から $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 3$

(3) ① に $x=1$ を代入すると $f(1+y) = f(1) + f(y) + 8y$

よって $f(1+y) - f(1) = f(y) + 8y$

ゆえに $f'(1) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(1+y) - f(1)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) + 8y}{y}$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(y)}{y} + 8 \right\} = 3 + 8 = 11$$

(4) ① から $f(x+y) - f(x) = f(y) + 8xy$

よって $f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) + 8xy}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(y)}{y} + 8x \right\}$

$$= 3 + 8x$$

ゆえに $f(x) = \int f'(x) dx = \int (3 + 8x) dx = 4x^2 + 3x + C$ (C は積分定数)

(1) より, $f(0) = 0$ であるから $C = 0$

したがって $f(x) = 4x^2 + 3x$

12

解答 $s = -\frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta, t = \frac{1}{4} \sin^2 \theta$

解説

曲線 C 上の任意の点を (x, y) とすると

$$(x-s)^2 + (y-t)^2 = \frac{(x \cos \theta + y \sin \theta + p)^2}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

よって $(x-s)^2 + (y-t)^2 = (x \cos \theta + y \sin \theta + p)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

① の両辺を x で微分すると

$$2(x-s) + 2(y-t) \frac{dy}{dx} = 2(x \cos \theta + y \sin \theta + p) \left(\cos \theta + \frac{dy}{dx} \sin \theta \right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

② の両辺を 2 で割り, 更に両辺を x で微分すると

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (y-t) \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\cos \theta + \frac{dy}{dx} \sin \theta \right) \left(\cos \theta + \frac{dy}{dx} \sin \theta \right) + (x \cos \theta + y \sin \theta + p) \frac{d^2y}{dx^2} \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

曲線 C は原点を通るから, ① より $s^2 + t^2 = p^2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$

一方 $f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x + 4x - 1, f'(0) = 0,$

$$f''(x) = -2e^{-x} \cos x + 4, f''(0) = 2$$

条件から, $x=0, y=0$ のとき $\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d^2y}{dx^2} = 2$

ゆえに, ② から $-s = p \cos \theta,$ ③ から $1 - 2t = \cos^2 \theta + 2p \sin \theta$

よって $s = -p \cos \theta, t = \frac{1}{2} \sin \theta (\sin \theta - 2p) \quad \dots\dots \textcircled{5}$

④, ⑤ から $p^2 = p^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{4} (\sin^4 \theta - 4p \sin^3 \theta + 4p^2 \sin^2 \theta)$

$$= p^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{1}{4} \sin^3 \theta (\sin \theta - 4p)$$

$$= p^2 + \frac{1}{4} \sin^3 \theta (\sin \theta - 4p)$$

ゆえに $\frac{1}{4} \sin^3 \theta (\sin \theta - 4p) = 0$ $\sin \theta \neq 0$ であるから $p = \frac{1}{4} \sin \theta$

よって $s = -\frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta, t = \frac{1}{4} \sin^2 \theta$

13

解答 (1) 略 (2) 証明略, 0

解説

(1) $F'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x), F''(x) = e^x f(x) + 2e^x f'(x) + e^x f''(x)$

ここで, $f''(x) = -2f'(x) - 2f(x)$ であるから

$$F''(x) = e^x f(x) + 2e^x f'(x) + e^x \{-2f'(x) - 2f(x)\} = -e^x f(x) = -F(x)$$

(2) $F''(x) = -F(x)$ を満たす関数 $F(x)$ は

$$\begin{aligned} \{[F'(x)]^2 + [F(x)]^2\}' &= 2F'(x)F''(x) + 2F(x)F'(x) \\ &= 2F'(x)\{-F''(x) + F(x)\} = 0 \end{aligned}$$

したがって, $\{F'(x)\}^2 + \{F(x)\}^2 = C$ (C は負でない定数) と表される。

このとき, $C \geq \{F(x)\}^2$ から $\sqrt{C} \geq |F(x)|$

$$f(x) = \frac{F(x)}{e^x} \text{ とすると } 0 \leq |f(x)| \leq \frac{\sqrt{C}}{e^x}$$

ここで, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{C}}{e^x} = 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$ よって $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

14

解答 (1) $f_n'(0) = n, f_n''(0) = n(n-1)$

(2) $f_{m+n}(x) = f_m'(x)f_n(x) + 2f_m''(x)f_n'(x) + f_m(x)f_n''(x)$ (3) [略]

解説

$$f_n(x) = (1+x)^n$$

(1) $f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}, f_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$

ゆえに $f_n'(0) = n, f_n''(0) = n(n-1)$

(2) $f_{m+n}(x) = (1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n = f_m(x)f_n(x)$

ゆえに $f_{m+n}(x) = f_m'(x)f_n(x) + f_m(x)f_n'(x)$

よって $f_{m+n}(x) = f_m''(x)f_n(x) + 2f_m'(x)f_n'(x) + f_m(x)f_n''(x)$

(3) (2) の結果に $x=0$ を代入すると

$$f_{m+n}(0) = f_m''(0)f_n(0) + 2f_m'(0)f_n'(0) + f_m(0)f_n''(0)$$

$f_m(0) = f_n(0) = 1$ であるから, (1) より

$$(m+n)(m+n-1) = m(m-1) + 2mn + n(n-1)$$

ゆえに $\frac{(m+n)(m+n-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2} + mn + \frac{n(n-1)}{2}$

よって $m+n C_2 = m C_2 + m C_1 \times n C_1 + n C_2$

15

解答 証明略, 係数は $(n-1)!n!$

章末問題B

【解説】

[1] $n=1$ のとき $f_1(x) = x^2$

よって, $f_1(x)$ は 2 次多項式である。

[2] $n=k$ のとき, $f_k(x)$ が $(k+1)$ 次多項式であると仮定すると

$$f_k(x) = a_k x^{k+1} + g_k(x) \text{ (ただし, } a_k \neq 0, g_k(x) \text{ は } k \text{ 次以下の多項式)} \dots\dots \textcircled{1}$$

と表される。

$n=k+1$ のときを考えると, ①の両辺を x で微分して

$$f_k'(x) = (k+1)a_k x^k + g_k'(x)$$

更に, 両辺を x で微分して $f_k''(x) = k(k+1)a_k x^{k-1} + g_k''(x)$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } f_{k+1}(x) &= f_k(x) + x^3 f_k''(x) = f_k(x) + x^3 \{k(k+1)a_k x^{k-1} + g_k''(x)\} \\ &= k(k+1)a_k x^{k+2} + f_k(x) + x^3 g_k''(x) \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで, $k(k+1)a_k \neq 0, f_k(x)$ は $(k+1)$ 次式, $x^3 g_k''(x)$ は $(k+1)$ 次以下の多項式である。

よって, $f_{k+1}(x)$ は $(k+2)$ 次式である。

[1], [2] から, すべての自然数 n について $f_n(x)$ は $(n+1)$ 次多項式である。

次に, ①から, $f_{n+1}(x)$ の x^{n+2} の係数は a_{n+1} であり, ②より, $f_{n+1}(x)$ の x^{n+2} の係数は $n(n+1)a_n$ であるから $a_{n+1} = n(n+1)a_n, a_1 = 1$

$$\text{ゆえに } \frac{a_{n+1}}{n!(n+1)!} = \frac{a_n}{(n-1)!n!} \quad \text{よって} \quad \frac{a_n}{(n-1)!n!} = \frac{a_1}{0!1!} = 1$$

したがって $a_n = (n-1)!n!$

【16】

【解答】 $e^{2ax}(x+at)^n$

【解説】

$$f'(x) = 2ae^{2ax}, f''(x) = (2a)^2 e^{2ax}, \dots\dots$$

$$\text{よって } f^{(k)}(x) = (2a)^k e^{2ax} \quad (k \geq 0)$$

$$\text{また } g'(x) = nx^{n-1}, g''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \dots\dots$$

ゆえに, $0 \leq k \leq n$ のとき

$$g^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = {}_n P_k x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$$k \geq n+1 \text{ のとき } g^{(k)}(x) = 0$$

$$\text{よって } (f *_{t} g)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{2^k k!} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{2^k k!} (2a)^k e^{2ax} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$$= e^{2ax} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (at)^k x^{n-k} = e^{2ax} \sum_{k=0}^n {}_n C_k (at)^k x^{n-k}$$

$$\text{ここで, 二項定理から } \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{n-k} (at)^k = (x+at)^n$$

$$\text{したがって } (f *_{t} g)(x) = e^{2ax}(x+at)^n$$

【17】

【解答】 (1) $e^x = \frac{1}{y} - 1$ (2) $f_1(y) = y^2 - y, a_1 = 1, b_1 = -1$ (3) $a_2 = 2, b_2 = -3$

$$(4) a_{n+1} = (n+1)a_n, a_n = n! \quad (5) b_{n+1} = nb_n - (n+1)!, b_n = -\frac{1}{2}(n+1)!$$

【解説】

$$(1) y = \frac{1}{1+e^x} (\neq 0) \text{ より } 1+e^x = \frac{1}{y} \quad \text{よって } e^x = \frac{1}{y} - 1$$

$$(2) f_1(y) = \frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = -\frac{\frac{1}{y}-1}{\left(\frac{1}{y}\right)^2} = y^2 - y$$

$$\text{よって } a_1 = 1, b_1 = -1$$

$$(3) f_2(y) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dy} f_1(y) \cdot \frac{dy}{dx} = (2y-1)(y^2-y) = 2y^3 - 3y^2 + y$$

$$\text{よって } a_2 = 2, b_2 = -3$$

(4) $f_n(y)$ の $(n-1)$ 次以下の部分を $g_n(y)$ とすると, $f_n(y) = a_n y^{n+1} + b_n y^n + g_n(y)$ と表せる。

$$\begin{aligned} f_{n+1}(y) &= \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right) = \frac{d}{dx} f_n(y) = \frac{d}{dy} f_n(y) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \{a_n(n+1)y^n + b_n n y^{n-1} + g_n'(y)\}(y^2 - y) \\ &= (n+1)a_n y^{n+2} + \{nb_n - (n+1)a_n\}y^{n+1} - nb_n y^n + g_n'(y)(y^2 - y) \end{aligned}$$

$-nb_n y^n + g_n'(y)(y^2 - y)$ は y の n 次式であるから

$$a_{n+1} = (n+1)a_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = nb_n - (n+1)a_n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ の両辺を } (n+1)! \text{ で割ると } \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!}$$

$$\text{よって } \frac{a_n}{n!} = \frac{a_1}{1!} = 1 \quad \text{ゆえに } a_n = n!$$

$$(5) \textcircled{2} \text{ より } b_{n+1} = nb_n - (n+1)!$$

$$\text{両辺を } n! \text{ で割ると } \frac{b_{n+1}}{n!} = \frac{b_n}{(n-1)!} - (n+1)$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } \frac{b_n}{(n-1)!} &= \frac{b_1}{0!} + \sum_{k=1}^{n-1} \{- (k+1)\} = -1 - \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= -\frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

$$\text{よって } b_n = -\frac{1}{2}(n+1)! \quad \text{これは } n=1 \text{ のときも成り立つ。}$$

$$\text{よって } b_n = -\frac{1}{2}(n+1)!$$

【18】

【解答】 (1) $f_3(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, g_3(x) = \frac{6}{(4-x)^4}$

$$(2) f_n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, g_n(x) = \frac{n!}{(4-x)^{n+1}}; \text{証明は略}$$

$$(3) \frac{n!}{3} \left\{ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{1}{(4-x)^{n+1}} \right\}$$

$$(4) -\frac{1}{3}$$

【解説】

$$(1) f_1(x) = f'_0(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{よって } f_2(x) = f'_1(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\text{ゆえに } f_3(x) = f'_2(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$\text{また } g_1(x) = g'_0(x) = \frac{1}{(4-x)^2} \quad \text{よって } g_2(x) = g'_1(x) = \frac{2}{(4-x)^3}$$

$$\text{ゆえに } g_3(x) = g'_2(x) = \frac{6}{(4-x)^4}$$

$$(2) (1) \text{ から } f_n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g_n(x) = \frac{n!}{(4-x)^{n+1}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

と推測できる。

[1] $n=0$ のとき

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}, g_0(x) = \frac{1}{4-x} \text{ であるから, } n=0 \text{ のとき } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ は成り立つ。}$$

[2] $n=k$ のとき ①, ② が成り立つ, すなわち

$$f_k(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, g_k(x) = \frac{k!}{(4-x)^{k+1}}$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$f_{k+1}(x) = f'_k(x) = \frac{k!(k+1)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}}$$

$$g_{k+1}(x) = g'_k(x) = \frac{k!(k+1)}{(4-x)^{k+2}} = \frac{(k+1)!}{(4-x)^{(k+1)+1}}$$

したがって, $n=k+1$ のときにも ①, ② は成り立つ。

[1], [2] から, ①, ② は 0 以上のすべての整数 n に対して成り立つ。

$$(3) {}_n C_{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$(2) \text{ から } f_{k-1}(x) = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k}, g_{n-k+1}(x) = \frac{(n-k+1)!}{(4-x)^{n-k+2}}$$

$$\text{よって } {}_n C_{k-1} f_{k-1}(x) g_{n-k+1}(x) = \frac{n!}{(4-x)^{n+2}} \left(\frac{4-x}{1-x} \right)^k$$

$$\text{ゆえに } h_n(x) = \frac{n!}{(4-x)^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{4-x}{1-x} \right)^k$$

$$\frac{4-x}{1-x} \neq 1 \text{ であるから}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{4-x}{1-x} \right)^k = \frac{\frac{4-x}{1-x} \left\{ 1 - \left(\frac{4-x}{1-x} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{4-x}{1-x}} = \frac{x-4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{4-x}{1-x} \right)^{n+1} \right\}$$

$$\text{よって } h_n(x) = \frac{n!}{3} \left\{ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{1}{(4-x)^{n+1}} \right\}$$

$$(4) (3) \text{ から } h_n(3) = \frac{n!}{3} \left\{ \frac{1}{(-2)^{n+1}} - 1 \right\}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} h_n(3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{(-2)^{n+1}} - 1 \right\} = -\frac{1}{3}$$

【19】

【解答】 (1) 関数 $f(x)$ について, $x=a$ における微分係数 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存

在するとき, $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという

(2) 略 (3) 略

【解説】

章末問題B

- (1) 関数 $f(x)$ について、 $x=a$ における微分係数 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在するとき、 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという。
 (2) $h(x) - h(a) = f(x)g(x) - f(a)g(a) = \{f(x) - f(a)\}g(x) + f(a)\{g(x) - g(a)\}$
 よって $h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right\}$
 $= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
 (3) $h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n C_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \cdots \cdots$ ① とする。

[1] $n=1$ のとき

①の左辺 $= h^{(1)}(x) = h'(x)$

①の右辺 $= C_0 f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) + C_1 f^{(0)}(x)g^{(1)}(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

微分可能である関数 $f(x)$, $g(x)$ について $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ が成り立つから、①は成り立つ。

[2] $n=l$ のとき ①が成り立つと仮定する。

$n=l+1$ のときを考えると

$$h^{(l+1)}(x) = \{h^{(l)}(x)\}' = \left\{ \sum_{k=0}^l C_l C_k f^{(l-k)}(x)g^{(k)}(x) \right\}'$$

$$= \sum_{k=0}^l \{ C_l C_k f^{(l-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + C_l C_k f^{(l-k)}(x)g^{(k+1)}(x) \}$$

$$= C_0 f^{(l+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^l (C_l C_k + C_{l-1} C_{k-1}) f^{(l-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + C_l C_l f^{(0)}(x)g^{(l+1)}(x)$$

ここで、 $C_0 = C_{l+1}$, $C_{l+1} C_k = C_l C_k + C_{l-1} C_{k-1}$ ($k=1, 2, \dots, l$), $C_l = C_{l+1} C_{l+1}$ が成り

立つから $h^{(l+1)}(x) = \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1} C_k f^{(l+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$

よって、①は $n=l+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] から、①はすべての自然数 n について成り立つ。

①に $x=a$ を代入して $h^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_n C_k f^{(n-k)}(a)g^{(k)}(a)$

章末問題C

1

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$$(1) 2^n a_n \sin \frac{x}{2^n} = 2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}$$

$$= 2^{n-1} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cdots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \left(2 \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n} \right)$$

$$= 2^{n-1} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cdots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \sin \frac{x}{2^{n-1}}$$

$$= 2^{n-1} a_{n-1} \sin \frac{x}{2^{n-1}} = \cdots = 2a_1 \sin \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \sin x$$

よって、 n と無関係に一定である。

(2) $\log |a_n| = \log \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \log \left| \cos \frac{x}{2^2} \right| + \cdots + \log \left| \cos \frac{x}{2^n} \right| \cdots \cdots$ ①

また $2^n a_n \sin \frac{x}{2^n} = \sin x$ から、 $\sin \frac{x}{2^n} \neq 0$ のとき $a_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$

よって

$$\log |a_n| = \log \left| \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \right| = -n \log 2 + \log |\sin x| - \log \left| \sin \frac{x}{2^n} \right| \cdots \cdots$$
 ②

①, ② から $\log |\sin x| - \log \left| \sin \frac{x}{2^n} \right| - n \log 2 = \sum_{k=1}^n \log \left| \cos \frac{x}{2^k} \right|$

両辺を x で微分すると

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k} \cdot \frac{-\sin \frac{x}{2^k}}{\cos \frac{x}{2^k}} \right) = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k}$$

両辺を $-\frac{1}{2}$ 倍すると $-\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} \tan \frac{x}{2^k}$

ここで $x = \frac{\pi}{2}$ を代入すると

$$-\frac{1}{2} \times \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} \tan \frac{\pi}{2^{k+1}} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2^k} \tan \frac{\pi}{2^k}$$

よって $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2^k} \tan \frac{\pi}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\pi} \times \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \right) = \frac{1}{\pi}$$

2

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略 (4) 略

解説

$f(2x) = (e^x + 1)f(x) \cdots \cdots$ ① とする。

(1) ①において $x=0$ とすると $f(0) = (e^0 + 1)f(0)$
 すなわち $f(0) = 2f(0)$ したがって $f(0) = 0$

(2) ①において、 x を $\frac{x}{2}$ とすると $f(x) = (e^{\frac{x}{2}} + 1)f\left(\frac{x}{2}\right)$
 $x \neq 0$ のとき $e^x - 1 \neq 0$ であるから、両辺を $e^x - 1$ で割って

$$\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{(e^{\frac{x}{2}} + 1)f\left(\frac{x}{2}\right)}{(e^{\frac{x}{2}} + 1)(e^{\frac{x}{2}} - 1)} = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}} - 1}$$

したがって、 $x \neq 0$ のとき $\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}} - 1}$

(3) (1)より $f(0) = 0$ であるから $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$

また $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{1}{\frac{e^h - 1}{h}} \right\}$

ここで、 $g(x) = e^x$ とすると $g'(x) = e^x$

よって $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h - 0} = g'(0) = 1$

ゆえに $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{1}{1} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$

すなわち $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1}$

(4) (2)から、 $x \neq 0$ のとき $\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}} - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{4}\right)}{e^{\frac{x}{4}} - 1} = \cdots = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}} - 1}$

$h = \frac{x}{2^n}$ とおくと $\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}} - 1} = \frac{f(h)}{e^h - 1}$

$n \rightarrow \infty$ のとき $h \rightarrow 0$ であるから、(3)より

$$\frac{f(x)}{e^x - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}} - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1} = f'(0)$$

よって、 $x \neq 0$ のとき $f(x) = (e^x - 1)f'(0)$
 $x = 0$ のとき $f(0) = (1 - 1)f'(0) = 0$ となり、(1)より $f(0) = 0$ であるから、 $x = 0$ のときも成り立つ。

したがって、すべての実数 x について $f(x) = (e^x - 1)f'(0)$

3

解答 (1) 略 (2) $\{a \mid 0 < a \leq 1, a = 3\}$

(3) 正しくない。(反例) $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 2 & (x \leq 0) \end{cases}$

解説

(1) 実数 a が条件 (P) を満たすから、 $|dx| < r$ のとき $f(a + dx) \leq f(a)$
 よって $f(a + dx) - f(a) \leq 0$

章末問題C

$0 < dx < r$ のとき $\frac{f(a+dx)-f(a)}{dx} \leq 0$

ゆえに $\lim_{dx \rightarrow +0} \frac{f(a+dx)-f(a)}{dx} \leq 0$ すなわち $f'(a) \leq 0$ ……①

$-r < dx < 0$ のとき $\frac{f(a+dx)-f(a)}{dx} \geq 0$

ゆえに $\lim_{dx \rightarrow -0} \frac{f(a+dx)-f(a)}{dx} \geq 0$ すなわち $f'(a) \geq 0$ ……②

①, ② から $f'(a) = 0$

(2) $x < 0$ のとき $|x| - x = -2x$
 $0 \leq x < 1$ のとき $|x| - x = 0$

また, $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ であるから

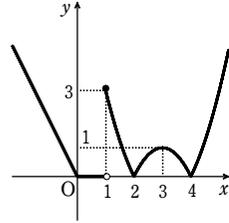
$1 \leq x \leq 2, 4 \leq x$ のとき

$|x^2 - 6x + 8| = x^2 - 6x + 8$

$2 < x < 4$ のとき

$|x^2 - 6x + 8| = -(x^2 - 6x + 8)$

よって, $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



[1] $a \neq 0, 1, 2, 4$ のとき

$f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるから, a が条件 (P) を満たすとき, (1) より $f'(a) = 0$ となる。よって, $0 < a < 1$ または $a = 3$ となることが必要である。

(i) $0 < a < 1$ のとき $f(a) = 0$

正の実数 r を $0 < a - r, a + r < 1$ を満たすように選べば, $|x - a| < r$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) = 0$ ゆえに, $f(x) \leq f(a)$ が成り立つ。

(ii) $a = 3$ のとき

$r = 1$ とすれば, グラフから, $|x - 3| < r$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) \leq f(3)$

したがって, 条件 (P) を満たす a の値の範囲は $0 < a < 1, a = 3$

[2] $a = 0, 2, 4$ のとき

グラフより, 条件 (P) を満たさない。

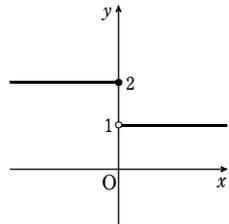
[3] $a = 1$ のとき

$r = 1$ とすれば, グラフより, $|x - 1| < 1$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) \leq f(1)$ となるから, 条件 (P) を満たす。

[1], [2], [3] から, 求める実数 a 全体の集合は $\{a \mid 0 < a \leq 1, a = 3\}$

(3) 正しくない。

(反例) $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 2 & (x \leq 0) \end{cases}$



[1] $a \leq 0$ のとき $f(a) = 2$

どのような実数 r を選んでも, $|x - a| < r$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) \leq 2$

よって, $f(x) \leq f(a)$ が成り立つ。

[2] $a > 0$ のとき $f(a) = 1$

正の実数 r を $0 < a - r$ を満たすように選べば,

$|x - a| < r$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) = 1$

よって, $f(x) \leq f(a)$ が成り立つ。

[1], [2] より, すべての実数 a は条件 (P) を満たすが, $f(x)$ は定数関数ではない。

[4]

解答 (1) $S(h) = \pi[f(a+h) + f(a)]\sqrt{[f(a+h) - f(a)]^2 + h^2}$

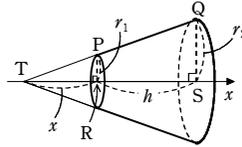
(2) $2\pi f(a)\sqrt{[f'(a)]^2 + 1}$

解説

(1) $f(a) = r_1, f(a+h) = r_2$ とし, [図1] のように点 R, S, T をとる。

また, $TR = x$ とする。

ここで, $f'(x) > 0, h > 0$ から $r_2 > r_1$



[図1]

$\triangle PTR \sim \triangle QTS$ であるから $x : r_1 = (x+h) : r_2$

よって $r_1x + hr_1 = r_2x$ ゆえに $x = \frac{hr_1}{r_2 - r_1}$

ここで $TP = \sqrt{r_1^2 + x^2}, TQ = \frac{r_2}{r_1} TP$

よって, [図2] から

$$S(h) = \frac{1}{2} TQ \cdot 2\pi r_2 - \frac{1}{2} TP \cdot 2\pi r_1 = \frac{\pi r_2^2 TP}{r_1} - \pi r_1 TP = \frac{\pi \sqrt{r_1^2 + x^2} (r_2^2 - r_1^2)}{r_1}$$

$$= \pi \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{hr_1}{r_2 - r_1}\right)^2} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1} = \frac{\pi r_1}{r_2 - r_1} \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + h^2} \cdot \frac{(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)}{r_1}$$

$$= \pi(r_2 + r_1) \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + h^2}$$

$r_1 = f(a), r_2 = f(a+h)$ であるから

$S(h) = \pi[f(a+h) + f(a)]\sqrt{[f(a+h) - f(a)]^2 + h^2}$

(2) $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{S(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \pi[f(a+h) + f(a)] \sqrt{\frac{[f(a+h) - f(a)]^2 + h^2}{h^2}}$

$$= \pi \lim_{h \rightarrow +0} [f(a+h) + f(a)] \sqrt{\left\{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right\}^2 + 1}$$

$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ であるから $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{S(h)}{h} = 2\pi f(a)\sqrt{[f'(a)]^2 + 1}$

[5]

解答 (1) $f(0) = 1, g(0) = 0$

(2) (ア) $\frac{f(y)-1}{y}$ (イ) $\frac{g(y)}{y}$ (ウ) $2f(x) - g(x)$ (エ) $f(x) + 2g(x)$

(オ) 4 (カ) $4x$ (キ) e^{4x}

解説

(1) ①, ② に $x = y = 0$ を代入すると $f(0) = [f(0)]^2 - [g(0)]^2$ ……①'
 $g(0) = 2f(0)g(0)$ ……②'

②' において $g(0) \neq 0$ と仮定すると $f(0) = \frac{1}{2}$

このとき①' から $[g(0)]^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} < 0$ となり不適。

よって $g(0) = 0$

したがって, ①' と $\{f(0)\}^2 + \{g(0)\}^2 > 0$ から $f(0) = 1$

(2) $\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(x)f(y) - g(x)g(y) - f(x)}{y} = \frac{f(y)-1}{y} f(x) - \frac{g(y)}{y} g(x)$

$\frac{g(x+y) - g(x)}{y} = \frac{f(x)g(y) + f(y)g(x) - g(x)}{y} = \frac{g(y)}{y} f(x) + \frac{f(y)-1}{y} g(x)$

よって, $y \rightarrow 0$ とすると, $f(0) = 1, g(0) = 0, f'(0) = 2, g'(0) = 1$ から

$\begin{cases} f'(x) = 2f(x) - g(x) & \dots\dots \textcircled{3} \\ g'(x) = f(x) + 2g(x) & \dots\dots \textcircled{4} \end{cases}$

このとき $F(x) = \log\{[f(x)]^2 + [g(x)]^2\}$ から

$F'(x) = \frac{2[f(x)f'(x) + g(x)g'(x)]}{[f(x)]^2 + [g(x)]^2}$

③, ④ から $f(x)f'(x) + g(x)g'(x) = f(x)[2f(x) - g(x)] + g(x)[f(x) + 2g(x)]$
 $= 2\{[f(x)]^2 + [g(x)]^2\}$

ゆえに $F'(x) = 2$

また $F(0) = \log\{[f(0)]^2 + [g(0)]^2\} = \log 1 = 0$

よって $F(x) = 2x$

ゆえに $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = e^{4x}$

[6]

解答 (1) 略 (2) 証明は略, $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

解説

$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ ……①

(1) $-1 < x < 1$ のとき $-1 < -x < 1$

① において, $y = -x$ とすると $f(x) + f(-x) = f\left(\frac{x-x}{1-x^2}\right)$

よって $f(x) + f(-x) = f(0)$ ……②

また, ① において, $x = y = 0$ とすると $f(0) + f(0) = f(0)$

よって $f(0) = 0$ ……③

②, ③ から $f(x) + f(-x) = 0$ したがって $f(x) = -f(-x)$

(2) $f'(0) = 1$ から $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$ ③ から $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1$ ……④

$-1 < x < 1$ で, h が十分に小さいとき

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(-x)}{h}$ ((1) から)

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x+h-x}{1+(x+h)(-x)}\right)}{h}$ (① から)

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{h}{1-x^2-hx}\right)}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{h}{1-x^2-hx}\right)}{\frac{h}{1-x^2-hx}} \cdot \frac{1}{1-x^2-hx}$

章末問題C

$h \rightarrow 0$ のとき、 $\frac{h}{1-x^2-hx} \rightarrow 0$ であるから、④より $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{h}{1-x^2-hx}\right)}{\frac{h}{1-x^2-hx}} = 1$

よって $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1 \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$

したがって、 $f(x)$ は $-1 < x < 1$ の範囲で微分可能で $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

[7]

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) 数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき $f_1(x)=x$, $g_1(x)=1$ とおけばよい。

[2] $n=k$ のとき 題意を満たす $f_k(x)$, $g_k(x)$ が存在すると仮定する。

$n=k+1$ とすると

$$\begin{aligned} \cos(k+1)\theta &= \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta = f_k(\cos \theta) \cos \theta - g_k(\cos \theta) \sin \theta, \\ \sin(k+1)\theta &= \sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta = g_k(\cos \theta) \sin \theta \cos \theta + f_k(\cos \theta) \sin \theta \\ &= \{g_k(\cos \theta) \cos \theta + f_k(\cos \theta)\} \sin \theta \end{aligned}$$

そこで $f_{k+1}(x) = f_k(x)x - g_k(x)(1-x^2)$, $g_{k+1}(x) = g_k(x)x + f_k(x)$ とおくと、これらは題意を満たす。

[1], [2] から、題意を満たす $f_n(x)$ と $g_n(x)$ が存在する。

(2) $\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ の両辺を θ で微分すると $-n \sin n\theta = f'_n(\cos \theta)(-\sin \theta)$

よって $-ng_n(\cos \theta) \sin \theta = f'_n(\cos \theta)(-\sin \theta)$ が任意の θ に対して成り立つ。

ゆえに、 $ng_n(x) = f'_n(x)$ が無限個の x について成り立ち、かつ、両辺は整式であるから、恒等的に $f'_n(x) = ng_n(x)$ である。

[8]

【解答】 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ (2) 0 (3) 略

【解説】

(1) $f(x)$ は $x=0$ で連続であるから $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = c$ ……①

$$\frac{1}{n+1} \leq |x| < \frac{1}{n} \text{ の各辺の逆数をとって}$$

$$n < \frac{1}{|x|} \leq n+1 \text{ ……② すなわち } \frac{1}{|x|} - 1 \leq n < \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|x|} - 1 \right) = \infty \text{ であるから、} x \rightarrow 0 \text{ のとき } n \rightarrow \infty$$

$$\text{ゆえに } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \text{ よって、①から } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$$

(2) $f(x)$ の定義から $f(x) = f(-x)$

$$\text{ゆえに } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(-x) - f(0)}{-x} \right\} = -f'(0)$$

$$\text{よって } 2f'(0) = 0 \text{ すなわち } f'(0) = 0$$

(3) $f'(0)$ が存在するとき、(2) から $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ ……③

ここで、(1)の②の不等式から

$$n|f(x) - f(0)| \leq \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} \leq (n+1)|f(x) - f(0)|$$

$$\text{ゆえに } n|c_n - c| \leq \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} \leq (n+1)|c_n - c| \text{ ……④}$$

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} \leq (n+1)|c_n - c| \text{ から } \frac{n}{n+1} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq n|c_n - c|$$

これと④の左の不等式から

$$\frac{n}{n+1} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq n|c_n - c| \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right|$$

ここで、 $n \rightarrow \infty$ とすると、 $x \rightarrow 0$ であるから、③より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = |f'(0)| = 0$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} n|c_n - c| = 0$ したがって、数列 $\{n(c_n - c)\}$ は0に収束する。

[9]

【解答】 (1) $f(0) = 0$ (2) 略 (3) $f'(x+y) = f'(x)\sqrt{1+[f(y)]^2} + \frac{f(y)f(x)f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$

$$(4) f'(x) = \sqrt{1+[f(x)]^2}$$

【解説】

$$f(x+y) = f(x)\sqrt{1+[f(y)]^2} + f(y)\sqrt{1+[f(x)]^2} \text{ ……①}$$

(1) ①に $x=0$, $y=0$ を代入すると

$$f(0) = f(0)\sqrt{1+[f(0)]^2} + f(0)\sqrt{1+[f(0)]^2}$$

$$\text{よって } f(0)\{2\sqrt{1+[f(0)]^2} - 1\} = 0$$

$$2\sqrt{1+[f(0)]^2} - 1 \geq 1 \text{ であるから } f(0) = 0$$

(2) ①に $y=-x$ を代入すると

$$f(0) = f(x)\sqrt{1+[f(-x)]^2} + f(-x)\sqrt{1+[f(x)]^2}$$

(1)より $f(0) = 0$ であるから

$$f(x)\sqrt{1+[f(-x)]^2} = -f(-x)\sqrt{1+[f(x)]^2} \text{ ……②}$$

両辺を2乗すると

$$\{f(x)\}^2[1+[f(-x)]^2] = \{f(-x)\}^2[1+[f(x)]^2]$$

整理すると $\{f(-x)\}^2 = \{f(x)\}^2$

ゆえに $f(-x) = f(x)$ または $f(-x) = -f(x)$

$$\text{ここで } f(-x) = f(x) \text{ のとき、②から } 2f(x)\sqrt{1+[f(x)]^2} = 0$$

よって、任意の実数 x に対して $f(x) = 0$

これは $f(-x) = -f(x)$ を満たす。

したがって $f(-x) = -f(x)$

(3) ①の両辺を x で微分すると

$$f'(x+y) = f'(x)\sqrt{1+[f(y)]^2} + \frac{f(y)f(x)f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} \text{ ……③}$$

(4) ③に $y=-x$ を代入すると

$$f'(0) = f'(x)\sqrt{1+[f(-x)]^2} + \frac{f(-x)f(x)f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

$f'(0) = 1$ であるから

$$1 = f'(x)\sqrt{1+[f(-x)]^2} + \frac{f(-x)f(x)f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

(2)より $f(-x) = -f(x)$ であるから

$$1 = f'(x)\sqrt{1+[f(x)]^2} - \frac{\{f(x)\}^2 f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

$$\text{分母を払うと } \sqrt{1+[f(x)]^2} = f'(x)[1+[f(x)]^2] - \{f(x)\}^2 f'(x)$$

$$\text{したがって } f'(x) = \sqrt{1+[f(x)]^2}$$

[10]

【解答】 (1) $f_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1$ (2) 2^{2m-1} (3) 略

【解説】

(1) $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ が成り立ち、 $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ は実数であるから、 $\cos n\theta$ は $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ の実部と一致する。

よって

$$\begin{aligned} \cos 6\theta &= {}_6C_0(\cos \theta)^6 + {}_6C_2(\cos \theta)^4(\sin \theta)^2 + {}_6C_4(\cos \theta)^2(\sin \theta)^4 + {}_6C_6(\sin \theta)^6 \\ &= \cos^6 \theta - 15\cos^4 \theta \sin^2 \theta + 15\cos^2 \theta \sin^4 \theta - \sin^6 \theta \end{aligned}$$

$$t = \cos \theta \text{ とおくと } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - t^2$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \cos 6\theta &= t^6 - 15t^4(1-t^2) + 15t^2(1-t^2)^2 - (1-t^2)^3 \\ &= 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } f_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1$$

(2) (1)と同様にして

$$\begin{aligned} \cos 2m\theta &= {}_{2m}C_0(\cos \theta)^{2m} + {}_{2m}C_2(\cos \theta)^{2m-2}(\sin \theta)^2 + {}_{2m}C_4(\cos \theta)^{2m-4}(\sin \theta)^4 \\ &\quad + \dots + {}_{2m}C_{2m}(\sin \theta)^{2m} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k}(\cos \theta)^{2m-2k}(\sin \theta)^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^m (-1)^k {}_{2m}C_{2k}(\cos \theta)^{2m-k}(\sin^2 \theta)^k$$

$t = \cos \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} \cos 2m\theta &= \sum_{k=0}^m (-1)^k {}_{2m}C_{2k} t^{2m-k}(1-t^2)^k = \sum_{k=0}^m (-1)^k {}_{2m}C_{2k} t^{2m-k} \left\{ \sum_{l=0}^k C_k(-t^2)^l \right\} \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k (-1)^{k+l} {}_{2m}C_{2k} \cdot {}_k C_l t^{2m-k+l} \end{aligned}$$

この式の t^{2m} の項は $2(m-k+l) = 2m$ すなわち $k=l$ のときである。

$k=l$ のとき、 $(-1)^{k+l} = 1$, ${}_k C_l = 1$ であるから、 $f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数は

$${}_{2m}C_0 + {}_{2m}C_2 + \dots + {}_{2m}C_{2m}$$

$$\text{ここで } (x+1)^{2m} = {}_{2m}C_0 x^{2m} + {}_{2m}C_1 x^{2m-1} + {}_{2m}C_2 x^{2m-2} + \dots + {}_{2m}C_{2m}$$

この式に $x=1$, -1 をそれぞれ代入すると

$$2^{2m} = {}_{2m}C_0 + {}_{2m}C_1 + {}_{2m}C_2 + \dots + {}_{2m}C_{2m}$$

$$0 = {}_{2m}C_0 - {}_{2m}C_1 + {}_{2m}C_2 - \dots + {}_{2m}C_{2m}$$

$$\text{よって } 2^{2m} = 2({}_{2m}C_0 + {}_{2m}C_2 + \dots + {}_{2m}C_{2m})$$

$$\text{ゆえに } {}_{2m}C_0 + {}_{2m}C_2 + \dots + {}_{2m}C_{2m} = 2^{2m-1}$$

したがって、 $f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数は 2^{2m-1}

【別解】 $\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos(n+1)\theta \cos \theta$ であるから

$$f_{n+2}(t) + f_n(t) = 2t f_{n+1}(t)$$

$$\text{よって } f_{n+2}(t) = 2t f_{n+1}(t) - f_n(t)$$

$$\text{また } f_1(t) = \cos \theta = t, f_2(t) = \cos 2\theta = 2t^2 - 1$$

$$\text{これらより } f_n(t) = 2^{n-1} t^n + (n-1 \text{ 次以下}) \text{ ……①}$$

章末問題C

であると推測できる。

この推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1, 2$ のとき

$$f_1(t) = t, f_2(t) = 2t^2 - 1 \text{ であるから, } \textcircled{1} \text{ は正しい。}$$

[2] $n=k, k+1$ のとき $\textcircled{1}$ が正しいと仮定すると

$$f_k(t) = 2^{k-1}t^k + (k-1 \text{ 次以下})$$

$$f_{k+1}(t) = 2^k t^{k+1} + (k \text{ 次以下})$$

$n=k+2$ のときを考える

$$\begin{aligned} f_{k+2}(t) &= 2t f_{k+1}(t) - f_k(t) = 2t[2^k t^{k+1} + (k \text{ 次以下})] - [2^{k-1}t^k + (k-1 \text{ 次以下})] \\ &= 2^{k+1}t^{k+2} + (k+1 \text{ 次以下}) \end{aligned}$$

よって, $\textcircled{1}$ は $n=k+2$ のときも正しい。

[1], [2] より, すべての自然数 n で $\textcircled{1}$ は正しい。

よって, $f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数は 2^{2m-1}

(3) $\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$

この両辺を θ で微分すると $-\sin n\theta \cdot n = f_n'(\cos\theta) \cdot (-\sin\theta)$

$$\text{よって } \frac{1}{n} f_n'(\cos\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } f_n(t)^2 + (1-t^2) \left\{ \frac{1}{n} f_n'(t) \right\}^2 &= f_n(\cos\theta)^2 + (1-\cos^2\theta) \left\{ \frac{1}{n} f_n'(\cos\theta) \right\}^2 \\ &= \cos^2 n\theta + \sin^2 \theta \left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \right)^2 \\ &= \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1 \end{aligned}$$

$\textcircled{11}$

【解答】 (1) 略 (2) (ア) $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ (イ) 略

【解説】

(1) [1] $n=1$ のとき

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{(x-\alpha)^2} + \frac{\beta}{(x-\beta)^2} = (-1)^1 1! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{1+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{1+1}} \right\} \text{ であるから,}$$

$n=1$ のときは成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= (-1)^k k! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{k+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{k+1}} \right\} \text{ が成り立つと仮定すると} \\ f^{(k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} k! \left\{ -\frac{(k+1)\alpha}{(x-\alpha)^{k+2}} + \frac{(k+1)\beta}{(x-\beta)^{k+2}} \right\} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{k+2}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{k+2}} \right\} \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n に対して

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}} \right\} \text{ が成り立つ。}$$

(2) (ア) $b^2 > 4c$ であるから, 2次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ は異なる2つの実数解をもち, それらが α, β であるから $x^2 - bx + c = (x-\alpha)(x-\beta)$

$$\frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\beta}{x-\beta} \right) \text{ であるから, (1) の結果より}$$

$$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}} \right\}$$

$$\text{よって } h^{(n)}(0) = -\frac{n!}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} \right)$$

解と係数の関係により, $\alpha + \beta = b, \alpha\beta = c$ であるから

$$a_n = -\frac{\alpha^n \beta^n}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} \right) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$\begin{aligned} \text{(イ) } a_{n+2} - b a_{n+1} + c a_n &= \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha\beta(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} - \alpha^{n+2} + \alpha\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta + \beta^{n+2} + \alpha^{n+1}\beta - \alpha\beta^{n+1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\textcircled{12}$

【解答】 (1) $a_0=1$ (2) 略 (3) 略 (4) $a_n=2n+1$

【解説】

(1) $H_0(x) = 1$ であるから $f_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\text{よって } f_0'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}, f_0''(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ゆえに, $-f_0''(x) + x^2 f_0(x) = f_0(x)$ が成り立つから $a_0=1$

(2) $f_n'(x) = H_n'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ であるから

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= H_{n+1}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = \{2x H_n(x) - H_n'(x)\} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - \{H_n'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\} \\ &= x f_n(x) - f_n'(x) \end{aligned}$$

(3) $f(x)$ は2回微分可能であるから $g'(x) = f(x) + x f'(x) - f''(x)$

$$-f''(x) = a f(x) - x^2 f(x) \text{ を代入すると } g'(x) = (a+1)f(x) - x^2 f(x) + x f'(x)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } g''(x) &= (a+1)f'(x) - 2x f(x) - x^2 f'(x) + f'(x) + x f''(x) \\ &= (a+2)f'(x) - 2x f(x) - x^2 f'(x) + x f''(x) \\ &= (a+2)f'(x) - 2x f(x) - x^2 f'(x) + x \{x^2 f(x) - a f(x)\} \\ &= (a+2)\{f'(x) - x f(x)\} - x^2 f'(x) + x^3 f(x) \\ &= -(a+2)g(x) + x^2 \{x f(x) - f'(x)\} = -(a+2)g(x) + x^2 g(x) \end{aligned}$$

ゆえに $-g''(x) + x^2 g(x) = (a+2)g(x)$

(4) $g_n(x) = x f_n(x) - f_n'(x)$ とおくと, (2) から $f_{n+1}(x) = g_n(x)$

また, $-f_n''(x) + x^2 f_n(x) = a_n f_n(x)$ が成り立つとき, (3) から

$$-g_n''(x) + x^2 g_n(x) = (a_n + 2)g_n(x)$$

すなわち $-f_{n+1}''(x) + x^2 f_{n+1}(x) = (a_n + 2)f_{n+1}(x)$

よって $a_{n+1} = a_n + 2$

数列 $\{a_n\}$ は $a_0=1$, 公差2の等差数列であるから $a_n = 2n+1$

$\textcircled{13}$

【解答】 (1) $P_2(-a) = 8a^2, P_3(-a) = -48a^3$ (2) 略

(3) $P_n(-a) = n!(-2a)^n, P_n(a) = n!(2a)^n$

【解説】

$$(1) P_2(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 2a^2x^2 + a^4) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 4a^2x) = 12x^2 - 4a^2$$

$$\text{よって } P_2(-a) = 12(-a)^2 - 4a^2 = 8a^2$$

$$\begin{aligned} \text{また } P_3(x) &= \frac{d^3}{dx^3}(x^6 - 3a^2x^4 + 3a^4x^2 - a^6) = \frac{d^2}{dx^2}(6x^5 - 12a^2x^3 + 6a^4x) \\ &= \frac{d}{dx}(30x^4 - 36a^2x^2 + 6a^4) = 120x^3 - 72a^2x \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } P_3(-a) = 120(-a)^3 - 72a^2(-a) = -48a^3$$

(2) $(uv)^{(n)} = {}_n C_0 u^{(n)} v + {}_n C_1 u^{(n-1)} v^{(1)} + \dots + {}_n C_{n-1} u^{(1)} v^{(n-1)} + {}_n C_n u v^{(n)}$ …… (*)
であることを n に関する数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$\text{(左辺)} = (uv)^{(1)} = u^{(1)}v + uv^{(1)}$$

$$\text{(右辺)} = {}_1 C_0 u^{(1)}v + {}_1 C_1 u v^{(1)} = u^{(1)}v + uv^{(1)}$$

よって, (*) は成り立つ。

[2] $n=i$ のとき, (*) が成り立つと仮定すると

$$(uv)^{(i)} = {}_i C_0 u^{(i)}v + {}_i C_1 u^{(i-1)}v^{(1)} + \dots + {}_i C_{i-1} u^{(1)}v^{(i-1)} + {}_i C_i u v^{(i)}$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} (uv)^{(i+1)} &= {}_i C_0 u^{(i+1)}v + {}_i C_0 u^{(i)}v^{(1)} + {}_i C_1 u^{(i)}v^{(1)} + {}_i C_1 u^{(i-1)}v^{(2)} + \dots \\ &\quad + {}_i C_{i-1} u^{(2)}v^{(i-1)} + {}_i C_{i-1} u^{(1)}v^{(i)} + {}_i C_i u^{(1)}v^{(i)} + {}_i C_i u v^{(i+1)} \\ &= {}_i C_0 u^{(i+1)}v + ({}_i C_0 + {}_i C_1) u^{(i)}v^{(1)} + \dots + ({}_i C_{i-1} + {}_i C_i) u^{(1)}v^{(i)} + {}_i C_i u v^{(i+1)} \end{aligned}$$

${}_i C_0 = {}_{i+1} C_0 (=1), {}_i C_i = {}_{i+1} C_{i+1} (=1), {}_i C_{k-1} + {}_i C_k = {}_{i+1} C_k$ ($k=1, 2, \dots, i$) であるから

$$(uv)^{(i+1)} = {}_{i+1} C_0 u^{(i+1)}v + {}_{i+1} C_1 u^{(i)}v^{(1)} + \dots + {}_{i+1} C_i u^{(1)}v^{(i)} + {}_{i+1} C_{i+1} u v^{(i+1)}$$

よって, $n=i+1$ のときも (*) は成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n に対して (*) は成り立つ。

(3) $P_n(x) = \{(x^2 - a^2)^n\}^{(n)} = \{(x+a)^n(x-a)^n\}^{(n)}$

$(x+a)^n = u, (x-a)^n = v$ とすると, (2) で示したライブニッツの公式から

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (uv)^{(n)} \\ &= {}_n C_0 u^{(n)}v + {}_n C_1 u^{(n-1)}v^{(1)} + \dots + {}_n C_{n-1} u^{(1)}v^{(n-1)} + {}_n C_n u v^{(n)} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで, 0以上の整数 k ($0 \leq k \leq n$) について

$$u^{(k)} = \{(x+a)^n\}^{(k)} = {}_n P_k (x+a)^{n-k}, v^{(k)} = \{(x-a)^n\}^{(k)} = {}_n P_k (x-a)^{n-k}$$

$$\text{よって } u^{(k)}(-a) = \begin{cases} 0 & (0 \leq k \leq n-1) \\ n! & (k=n) \end{cases}, v^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & (0 \leq k \leq n-1) \\ n! & (k=n) \end{cases}$$

したがって, $\textcircled{1}$ から

$$P_n(-a) = {}_n C_0 u^{(n)}(-a)v^{(n)}(-a) = 1 \cdot n! \cdot (-a-a)^n = n!(-2a)^n$$

$$P_n(a) = {}_n C_n u(a)v^{(n)}(a) = 1 \cdot (a+a)^n \cdot n! = n!(2a)^n$$

$\textcircled{14}$

【解答】 (1) 証明略, $a_1=1, b_1=-1, a_{n+1}=b_n - (n+1)a_n, b_{n+1} = -(n+1)b_n$

(2) $a_n = (-1)^{n+1} n! h_n, b_n = (-1)^n n!$

【解説】

(1) [1] $n=1$ のとき

$$f'(x) = \frac{1}{x} \times x - \log x \times 1 = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

章末問題C

よって、 $a_1=1, b_1=-1$ とすればよい。

[2] $n=k$ のとき

$$f^{(k)}(x) = \frac{a_k + b_k \log x}{x^{k+1}}$$

と表されると仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$f^{(k+1)}(x) = \left(\frac{a_k + b_k \log x}{x^{k+1}} \right)' = b_k \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^{k+1}} - (a_k + b_k \log x) \times \frac{k+1}{x^{k+2}}$$

$$= \frac{b_k - (k+1)a_k - (k+1)b_k \log x}{x^{k+2}}$$

よって、 $a_{k+1} = b_k - (k+1)a_k, b_{k+1} = -(k+1)b_k$ とすればよい。

[1], [2]から、すべての自然数 n に対して与えられた命題は成り立つ。

また $a_1=1, b_1=-1, a_{n+1} = b_n - (n+1)a_n, b_{n+1} = -(n+1)b_n$

(2) $b_{n+1} = -(n+1)b_n$ から $\frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} = \frac{b_n}{(-1)^n n!}$

$b_1 = -1$ であるから $\frac{b_n}{(-1)^n n!} = \frac{-1}{(-1) \times 1!}$

ゆえに $b_n = (-1)^n n!$

したがって、 $a_{n+1} = (-1)^n n! - (n+1)a_n$ から

$$\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} = -\frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{(-1)^n n!}$$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{(-1)^n n!} = \frac{a_1}{(-1) \times 1!} + \sum_{l=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{l+1} \right) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。

$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ であるから $a_n = (-1)^{n+1} n! h_n$

[15]

【解答】 (1) 略

(2) (ア) x^{p-1} (イ) $r'(x)(x-1) + pr(x)$ (ウ) x^{p-1} (エ) $\frac{p+k-1}{k}$

(オ) $\frac{(p+k-1)!}{k!(p-1)!} (-1)^p$

【解説】

(1) $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ ($b_n \neq 0$) とおく。

$$g^{(k)}(x) = b_n {}_n P_k x^{n-k} + b_{n-1} {}_{n-1} P_k x^{n-k-1} + \dots + b_k {}_k P_k$$

ただし ${}_m P_k = \frac{m!}{(m-k)!}$ ($m \geq k$)

${}_k P_k = k!$ であるから $g^{(k)}(0) = b_k k!$

$g^{(k)}(0) = 0$ のとき $b_k = 0$

これが $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ について成り立つ。

よって、 $g(x)$ は m 以上の項からなり、 $(n-m)$ 次式 $h(x)$ を用いて、 $g(x) = h(x)x^m$ と表される。

(2) 条件(B)より、 $(2p-2)$ 次式 $f'(x)$ に対して $f^{(k+1)}(0) = 0$ ($k=0, 1, \dots, p-2$)

よって、(1)より、 $(p-1)$ 次式 $h(x)$ を用いて $f'(x) = h(x)x^{p-1}$

と表される。一方、 $f(x) = r(x)(x-1)^p$ であるから

$$f'(x) = \{r'(x)(x-1) + pr(x)\}(x-1)^{p-1} \dots \textcircled{1}$$

したがって、 $f'(x)$ は $x^{p-1}, (x-1)^{p-1}$ で割り切れ

$$f'(x) = A(x)x^{p-1}(x-1)^{p-1} \dots \textcircled{2}$$

と表される。①と

$$r(x) = a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1x + a_0$$

$$r'(x) = (p-1)a_{p-1}x^{p-2} + \dots + a_1$$

より $f'(x)$ の最高次の項は $\{(p-1)a_{p-1} + pa_{p-1}\}x^{2p-2} = (2p-1)a_{p-1}x^{2p-2}$

一方、②より $f'(x)$ の最高次の項は

$$(A(x) \text{ の最高次の項}) \times x^{2p-2}$$

である。

$f'(x)$ の次数は $2p-2$ であるから、 $A(x)$ は定数で $(2p-1)a_{p-1}$ でなければならない。

ゆえに、②から $f'(x) = (2p-1)a_{p-1}(x-1)^{p-1} \times x^{p-1}$

①から $r'(x)(x-1) + pr(x) = (2p-1)a_{p-1}x^{p-1}$

ここで両辺の x^{k-1} ($k=1, 2, \dots, p-1$) の係数を比較すると

$$(k-1)a_{k-1} - ka_k + pa_{k-1} = 0$$

よって $a_k = \frac{p+k-1}{k} a_{k-1}$ ($k=1, 2, \dots, p-1$)

また $f(0) = r(0)(-1)^p = a_0(-1)^p$

(A)から $a_0(-1)^p = 1$ ゆえに $a_0 = (-1)^p$

よって $a_k = \frac{p+k-1}{k} \cdot \frac{p+k-2}{k-1} \cdot \dots \cdot \frac{p}{1} \times a_0 = \frac{(p+k-1)!}{k!(p-1)!} (-1)^p$