$\boxed{1}$

解答　(1)　7　　(2)　9　　(3)　49　　(4)　$3a^2+a+5$

解説

(1)　$f(0)=3\cdot 0^2-5\cdot 0+7=7$

(2)　$f(2)=3\cdot 2^2-5\cdot 2+7=12-10+7=9$

(3)　$f(-3)=3\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)+7=27+15+7=49$

(4)　$f(a+1)=3(a+1)^2-5(a+1)+7=3(a^2+2a+1)-5a-5+7$

$\qquad\qquad=3a^2+a+5$

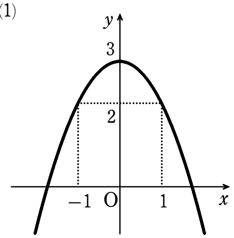
$\boxed{2}$

解答　グラフ，軸，頂点の順に

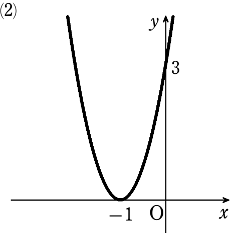
(1)　[図]，y 軸，点 $(0,\ 3)$　　(2)　[図]，直線 $x=-1$，点 $(-1,\ 0)$

(3)　[図]，直線 $x=1$，点 $(1,\ -4)$

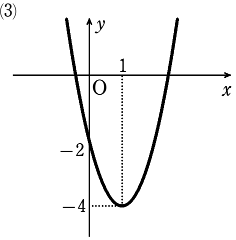
(1)



(2)



(3)

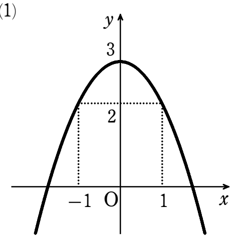


解説

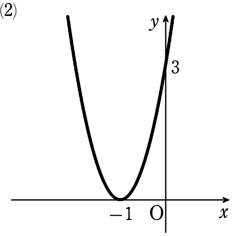
(1)　グラフは[図]。軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ 3)$

(2)　グラフは[図]。軸は直線 $x=-1$，頂点は点 $(-1,\ 0)$

(1)



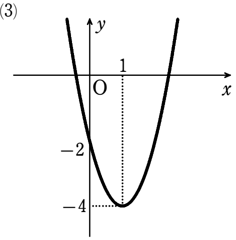
(2)



(3)　グラフは[図]。

軸は直線 $x=1$，頂点は点 $(1,\ -4)$

(3)



$\boxed{3}$

解答　(1)　$y=(x-4)^2-4$　　(2)　$y=2(x-1)^2-3$　　(3)　$y=-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$

解説

(1)　$y=x^2-8x+12=\{(x-4)^2-4^2\}+12=(x-4)^2-4^2+12=(x-4)^2-4$

(2)　$y=2x^2-4x-1=2(x^2-2x)-1=2\{(x-1)^2-1^2\}-1=2(x-1)^2-2\cdot 1^2-1$

$\quad=2(x-1)^2-3$

(3)　$y=-3x^2+3x+1=-3(x^2-x)+1=-3\left\{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}+1$

$\quad=-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1=-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$

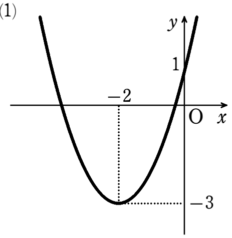
$\boxed{4}$

解答　グラフ，軸，頂点の順に

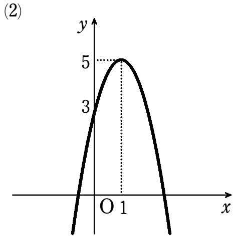
(1)　[図]，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ -3)$　　(2)　[図]，直線 $x=1$，点 $(1,\ 5)$

(3)　[図]，直線 $x=-3$，点 $(-3,\ -3)$　　(4)　[図]，直線 $x=\dfrac{3}{4}$，点 $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{25}{8}\right)$

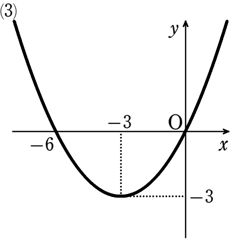
(1)



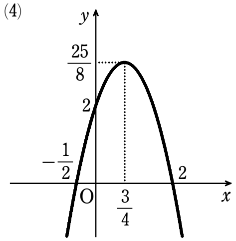
(2)



(3)



(4)



解説

(1)　$y=x^2+4x+1$

$\quad=(x^2+4x+2^2-2^2)+1$

$\quad=\{(x+2)^2-2^2\}+1$

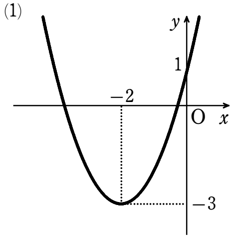
$\quad=(x+2)^2-3$

グラフは[図]。

軸は直線 $x=-2$

頂点は点 $(-2,\ -3)$

(1)



(2)　$y=-2x^2+4x+3=-2(x^2-2x)+3$

$\quad=-2(x^2-2x+1^2-1^2)+3$

$\quad=-2\{(x-1)^2-1^2\}+3$

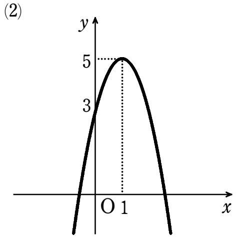
$\quad=-2(x-1)^2+5$

よって，グラフは[図]。

軸は直線 $x=1$

頂点は点 $(1,\ 5)$

(2)



(3)　$y=\dfrac{1}{3}x^2+2x=\dfrac{1}{3}(x^2+6x)$

$\quad=\dfrac{1}{3}(x^2+6x+3^2-3^2)$

$\quad=\dfrac{1}{3}\{(x+3)^2-3^2\}$

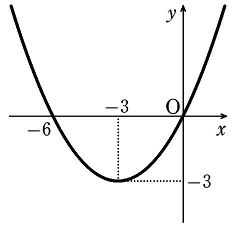
$\quad=\dfrac{1}{3}(x+3)^2-3$

よって，グラフは[図]。

軸は直線 $x=-3$

頂点は点 $(-3,\ -3)$

(3)



(4)　$y=-(x-2)(2x+1)=-(2x^2-3x-2)$

$\quad=-2\left(x^2-\dfrac{3}{2}x\right)+2$

$\quad=-2\left\{x^2-\dfrac{3}{2}x+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}+2$

$\quad=-2\left\{\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}+2$

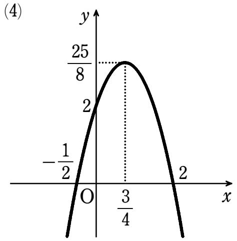
$\quad=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+2\cdot\dfrac{9}{16}+2$

$\quad=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{25}{8}$

よって，グラフは[図]。

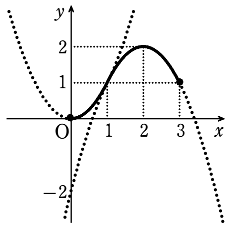
軸は直線 $x=\dfrac{3}{4}$，頂点は点 $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{25}{8}\right)$

(4)



5

解答



解説

$y=x^2$ のグラフは原点を頂点とする放物線で

$x=1$ のとき $y=1$

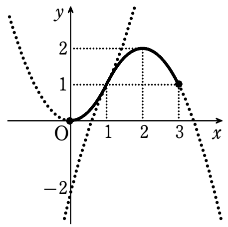
$y=-x^2+4x-2$ を変形すると

$y=-(x-2)^2+2$

このグラフは点 $(2,\ 2)$ を頂点とする放物線で

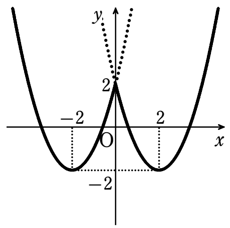
$x=1$ のとき $y=1$，　$x=3$ のとき $y=1$

よって，求めるグラフは [図] の実線部分である。

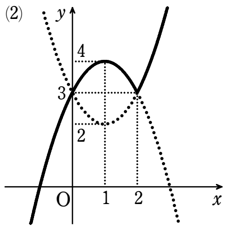


6

解答　(1)



(2)



解説

(1)　[1]　$x \geqq 0$ のとき

$y=x^2-4x+2$

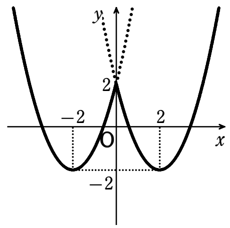
$=(x-2)^2-2$

[2]　$x<0$ のとき

$y=x^2+4x+2$

$=(x+2)^2-2$

よって，グラフは右の図の実線部分のようになる。



(2)　$x \geqq 2$ のとき

$y=x(x-2)+3=x^2-2x+3$

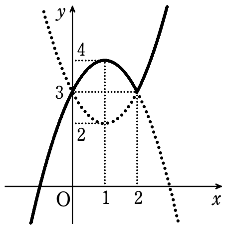
$=(x-1)^2+2$

$x<2$ のとき

$y=x\{-(x-2)\}+3=-x^2+2x+3$

$=-(x-1)^2+4$

グラフは右の図の実線部分。



1

解答　(1)　$f(0)=-1$，$f(1)=3$，$f(-1)=-5$

(2)　$f(-2)=\dfrac{13}{3}$，$f\left(\dfrac{1}{6}\right)=0$，$f\left(\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{1}{12}$

(3)　$g(1)=3$，$g(-3)=27$，$g(a+1)=2a^2+2a+3$

解説

(1)　$f(0)=4\cdot 0-1=-1$

$f(1)=4\cdot 1-1=3$

$f(-1)=4\cdot(-1)-1=-4-1=-5$

(2)　$f(-2)=-2\cdot(-2)+\dfrac{1}{3}=4+\dfrac{1}{3}=\dfrac{13}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{6}\right)=-2\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=0$

$f\left(\dfrac{1}{8}\right)=-2\cdot\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

(3)　$g(1)=2\cdot 1^2-2\cdot 1+3=2-2+3=3$

$g(-3)=2\cdot(-3)^2-2\cdot(-3)+3=18+6+3=27$

$g(a+1)=2(a+1)^2-2(a+1)+3$

$=2(a^2+2a+1)-2a-2+3=2a^2+2a+3$

2

解答　グラフ，軸，頂点の順に

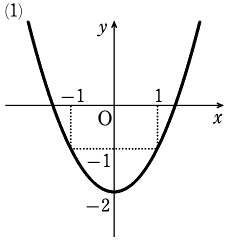
(1)　[図]，y 軸，点 $(0,\ -2)$　　(2)　[図]，y 軸，点 $(0,\ -1)$

(3)　[図]，直線 $x=-3$，点 $(-3,\ 0)$　　(4)　[図]，直線 $x=1$，点 $(1,\ 0)$

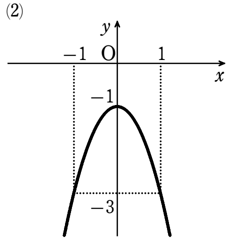
(5)　[図]，直線 $x=2$，点 $(2,\ 1)$　　(6)　[図]，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ 5)$

(7)　[図]，直線 $x=-3$，点 $(-3,\ -1)$

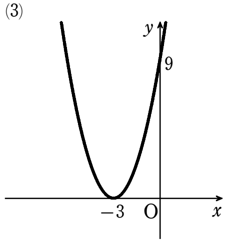
(1)



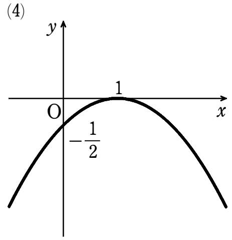
(2)



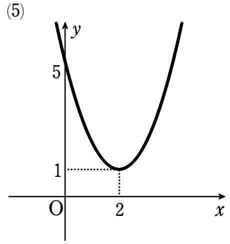
(3)



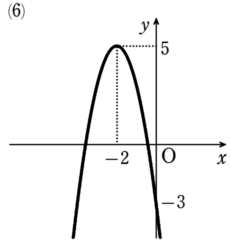
(4)



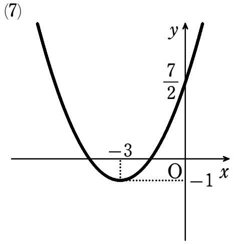
(5)



(6)



(7)

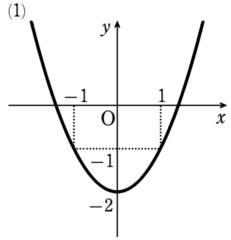


解説

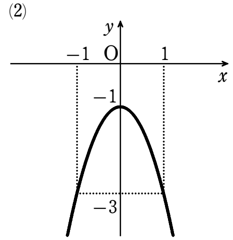
(1)　グラフは [図]。軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ -2)$

(2)　グラフは [図]。軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ -1)$

(1)



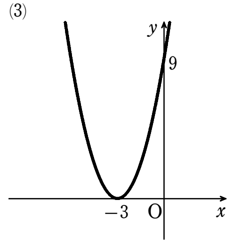
(2)



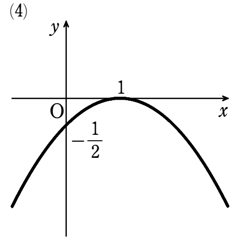
(3)　グラフは [図]。軸は直線 $x=-3$，頂点は点 $(-3,\ 0)$

(4)　グラフは [図]。軸は直線 $x=1$，頂点は点 $(1,\ 0)$

(3)



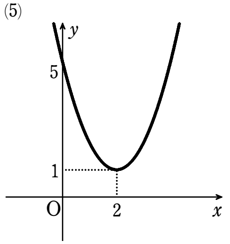
(4)



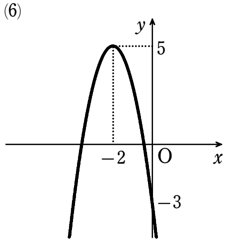
(5)　グラフは [図]。軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ 1)$

(6)　グラフは [図]。軸は直線 $x=-2$，頂点は点 $(-2,\ 5)$

(5)

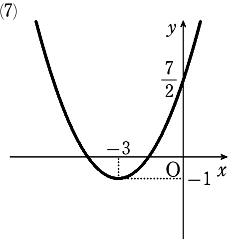


(6)



(7)　グラフは［図］。
軸は直線 $x=-3$
頂点は点 $(-3,\ -1)$

(7)



3

解答　(1)　$(x+5)^2-25$　　(2)　$(x-2)^2+5$　　(3)　$(x+4)^2-22$　　(4)　$-(x-2)^2$

(5)　$3(x-2)^2-8$　　(6)　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$　　(7)　$-\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

(8)　$3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{45}{4}$　　(9)　$-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$

解説

(1)　$x^2+10x=(x+5)^2-5^2=(x+5)^2-25$

(2)　$x^2-4x+9=(x-2)^2-2^2+9=(x-2)^2+5$

(3)　$x^2+8x-6=(x+4)^2-4^2-6=(x+4)^2-22$

(4)　$-x^2+4x-4=-(x^2-4x)-4=-\{(x-2)^2-2^2\}-4$
$=-(x-2)^2$

(5)　$3x^2-12x+4=3(x^2-4x)+4=3\{(x-2)^2-2^2\}+4$
$=3(x-2)^2-8$

(6)　$x^2-x+3=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$

(7)　$-x^2-7x-12=-(x^2+7x)-12=-\left\{\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2\right\}-12$

$=-\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

(8)　$3x^2+9x+18=3(x^2+3x)+18=3\left\{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}+18$

$=3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{45}{4}$

(9)　$-2x^2+5x-1=-2\left(x^2-\dfrac{5}{2}x\right)-1=-2\left\{\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2-\left(\dfrac{5}{4}\right)^2\right\}-1$

$=-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$

4

解答　グラフ，軸，頂点の順に

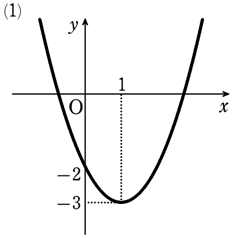
(1)　［図］，直線 $x=1$，点 $(1,\ -3)$　　(2)　［図］，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ -9)$

(3)　［図］，直線 $x=-3$，点 $(-3,\ 4)$　　(4)　［図］，直線 $x=1$，点 $(1,\ -1)$

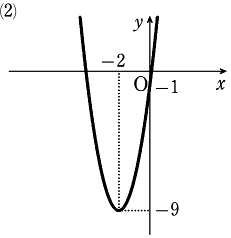
(5)　［図］，直線 $x=\dfrac{3}{2}$，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$　　(6)　［図］，直線 $x=-\dfrac{5}{4}$，点 $\left(-\dfrac{5}{4},\ \dfrac{17}{8}\right)$

(7)　［図］，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ 2)$　　(8)　［図］，直線 $x=-\dfrac{1}{2}$，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{9}{4}\right)$

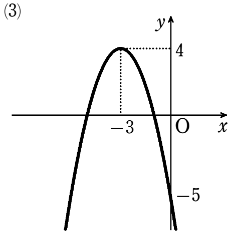
(1)



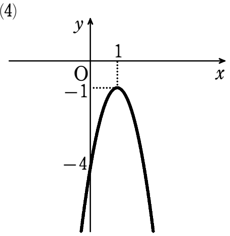
(2)



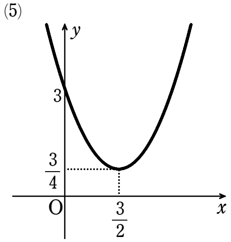
(3)



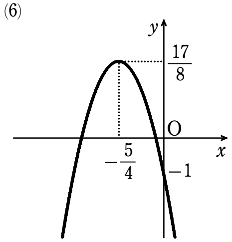
(4)



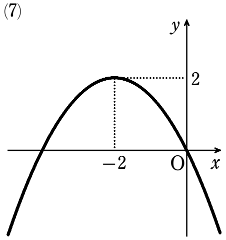
(5)



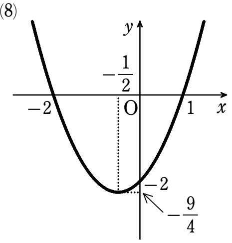
(6)



(7)



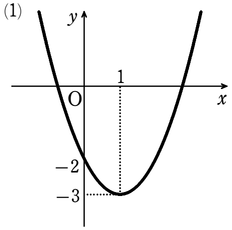
(8)



解説

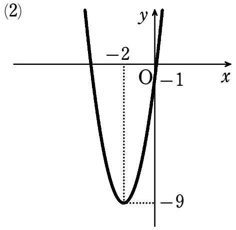
(1)　$y=x^2-2x-2$
$=(x^2-2x+1^2-1^2)-2$
$=\{(x-1)^2-1^2\}-2$
$=(x-1)^2-3$
よって，グラフは［図］。
軸は直線 $x=1$
頂点は点 $(1,\ -3)$

(1)



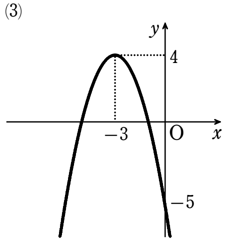
(2)　$y=2x^2+8x-1=2(x^2+4x)-1$
$=2(x^2+4x+2^2-2^2)-1$
$=2\{(x+2)^2-2^2\}-1$
$=2(x+2)^2-9$
よって，グラフは［図］。
軸は直線 $x=-2$
頂点は点 $(-2,\ -9)$

(2)



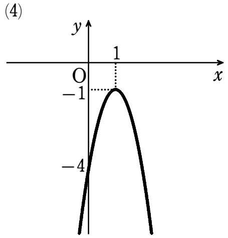
(3)　$y=-x^2-6x-5=-(x^2+6x)-5$
$=-(x^2+6x+3^2-3^2)-5$
$=-\{(x+3)^2-3^2\}-5$
$=-(x+3)^2+4$
よって，グラフは［図］。
軸は直線 $x=-3$
頂点は点 $(-3,\ 4)$

(3)



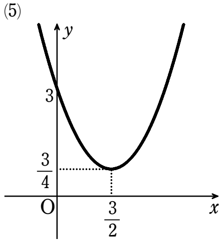
(4)　$y=-3x^2+6x-4=-3(x^2-2x)-4$
$=-3(x^2-2x+1^2-1^2)-4$
$=-3\{(x-1)^2-1^2\}-4$
$=-3(x-1)^2-1$
よって，グラフは［図］。
軸は直線 $x=1$
頂点は点 $(1,\ -1)$

(4)



(5)　$y=x^2-3x+3$
$=\left\{x^2-3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}+3$
$=\left\{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}+3$
$=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$
よって，グラフは［図］。
軸は直線 $x=\dfrac{3}{2}$

(5)



頂点は点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

(6)　$y=-2x^2-5x-1=-2\left(x^2+\dfrac{5}{2}x\right)-1$

$=-2\left\{x^2+\dfrac{5}{2}x+\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-\left(\dfrac{5}{4}\right)^2\right\}-1$

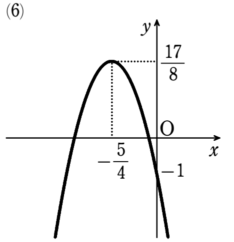
$=-2\left\{\left(x+\dfrac{5}{4}\right)^2-\left(\dfrac{5}{4}\right)^2\right\}-1$

$=-2\left(x+\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$

よって，グラフは［図］。

軸は直線 $x=-\dfrac{5}{4}$，頂点は点 $\left(-\dfrac{5}{4},\ \dfrac{17}{8}\right)$

(6)



(7)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2-2x=-\dfrac{1}{2}(x^2+4x)$

$=-\dfrac{1}{2}(x^2+4x+2^2-2^2)$

$=-\dfrac{1}{2}\{(x+2)^2-2^2\}$

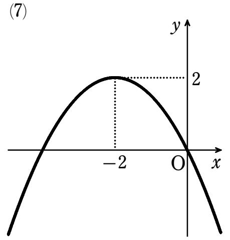
$=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2+2$

よって，グラフは［図］。

軸は直線 $x=-2$

頂点は点 $(-2,\ 2)$

(7)



(8)　$y=(x+2)(x-1)=x^2+x-2$

$=\left\{x^2+x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}-2$

$=\left\{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}-2$

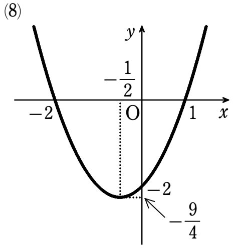
$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$

よって，グラフは［図］。

軸は直線 $x=-\dfrac{1}{2}$

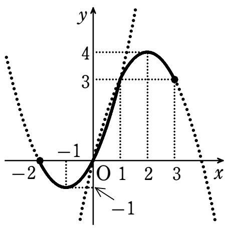
頂点は点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{9}{4}\right)$

(8)



$\boxed{5}$

解答



解説

$y=x^2+2x$ を変形すると

$y=(x+1)^2-1$

このグラフは頂点が点 $(-1,\ -1)$ の放物線で

$x=-2$ のとき $y=0$，　$x=1$ のとき $y=3$

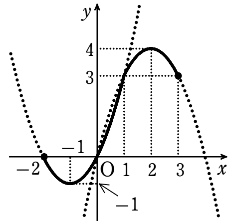
$y=-x^2+4x$ を変形すると

$y=-(x-2)^2+4$

このグラフは頂点が点 $(2,\ 4)$ の放物線で

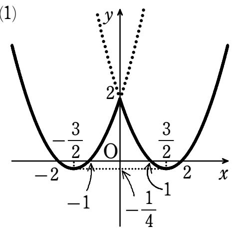
$x=1$ のとき $y=3$，　$x=3$ のとき $y=3$

よって，求めるグラフは右の図の実線部分である。

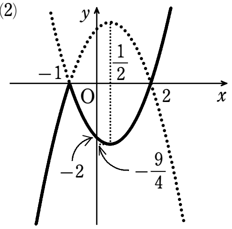


$\boxed{6}$

解答　(1)



(2)



解説

(1)　$x\geqq 0$ のとき

$y=x^2-3x+2$

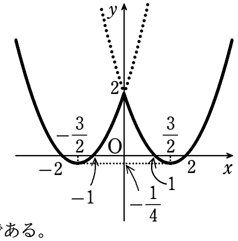
$=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

$x<0$ のとき

$y=x^2+3x+2$

$=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

よって，$y=x^2-3|x|+2$ のグラフは，図の実線部分である。



(2)　$x+1\geqq 0$ すなわち $x\geqq -1$ のとき

$y=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$

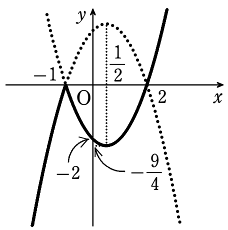
$x+1<0$ すなわち $x<-1$ のとき

$y=-(x+1)(x-2)$

$=-x^2+x+2$

$=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

よって，$y=|x+1|(x-2)$ のグラフは，図の実線部分である。



$\boxed{1}$

解答　$a<-\dfrac{3}{2}$

解説

$y=x^2-2(a+1)x+a^2-2=\{x-(a+1)\}^2-2a-3$

よって，頂点の座標は　$(a+1,\ -2a-3)$

これが第２象限にあるから　$a+1<0,\ -2a-3>0$

これを解くと　$a<-\dfrac{3}{2}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　順に $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}-2\right)$，$a=2$　(2)　$a=-1$，$b=-10$

解説

(1)　$y=x^2+ax-2=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-2$

よって，頂点の座標は　$\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}-2\right)$

また，頂点が直線 $y=2x-1$ 上にあるとき　$-\dfrac{a^2}{4}-2=2\left(-\dfrac{a}{2}\right)-1$

整理して　$a^2-4a+4=0$　よって　$(a-2)^2=0$　ゆえに　$a=2$

(2)　$y=2x^2-12x+17=2(x^2-6x)+17=2(x-3)^2-1$

$y=ax^2+6x+b=a\left(x^2+\dfrac{6}{a}x\right)+b=a\left(x+\dfrac{3}{a}\right)^2-a\left(\dfrac{3}{a}\right)^2+b$

$=a\left(x+\dfrac{3}{a}\right)^2-\dfrac{9}{a}+b$

よって，２つの放物線の頂点の座標は，順に　$(3,\ -1)$，$\left(-\dfrac{3}{a},\ -\dfrac{9}{a}+b\right)$

題意を満たすための条件は　$3=-\dfrac{3}{a}$ ……①，$-1=-\dfrac{9}{a}+b$ ……②

① の両辺に $\dfrac{a}{3}$ を掛けて　$a=-1$

$a=-1$ を ② に代入して　$-1=9+b$　ゆえに　$b=-10$

別解　放物線 $y=2x^2-12x+17$ の頂点は，点 $(3,\ -1)$ であるから，２つの放物線の頂点が一致するための条件は，$y=ax^2+6x+b$ が，$y=a(x-3)^2-1$ ……③ と表されることである。

③ の右辺を展開して整理すると　$y=ax^2-6ax+9a-1$

$y=ax^2+6x+b$ と係数を比較して　$6=-6a$，$b=9a-1$

これを解いて　$a=-1$，$b=-10$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a<0$　(2)　$b<0$　(3)　$c>0$　(4)　$b^2-4ac>0$

(5)　$\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+c<0$　(6)　$a-b<0$

解説

(1)　グラフは上に凸であるから　$a<0$

(2)　軸は $x<0$ の部分にあるから　$-\dfrac{b}{2a}<0$

(1) から　$a<0$　よって　$b<0$

(3)　グラフは y 軸と $y>0$ の部分で交わるから　　$c>0$

(4)　頂点の y 座標は正であるから　　$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$

(1) から　　$a<0$　　　よって　　$b^2-4ac>0$

(5)　$x=\dfrac{1}{2}$ で $y<0$ であるから　　$\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+c<0$

(6)　頂点の x 座標について，$-\dfrac{1}{2}<x<0$ であるから　　$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{b}{2a}<0$

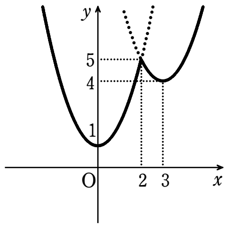
よって　　$0<\dfrac{b}{a}<1$

(1) より $a<0$ であるから　　$b>a$

したがって　　$a-b<0$

4

解答　［図］



解説

[1]　$x-2\geqq 0$ すなわち $x\geqq 2$ のとき

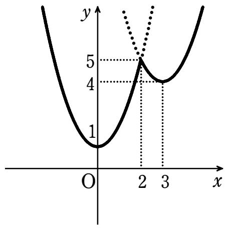
$y=x^2-3x+7-3(x-2)$

$=x^2-6x+13=(x-3)^2+4$

[2]　$x-2\leqq 0$ すなわち $x\leqq 2$ のとき

$y=x^2-3x+7+3(x-2)=x^2+1$

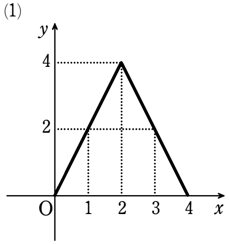
[1]，[2] から，y のグラフは右の図のようになる。



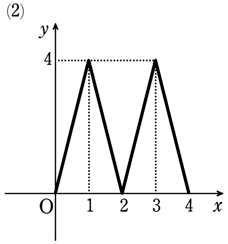
1

解答　(1)［図］　(2)［図］

(1)



(2)



解説

(1)　グラフは図 (1)。

(2)　$f(f(x))=\begin{cases}2f(x) & (0\leqq f(x)<2)\\ 8-2f(x) & (2\leqq f(x)\leqq 4)\end{cases}$

よって，(1) のグラフから

$0\leqq x<1$ のとき　$f(f(x))=2\cdot 2x=4x$

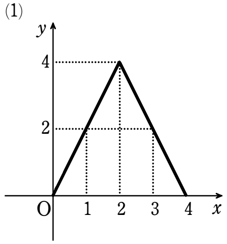
$1\leqq x<2$ のとき　$f(f(x))=8-2\cdot 2x=8-4x$

$2\leqq x\leqq 3$ のとき　$f(f(x))=8-2(8-2x)=4x-8$

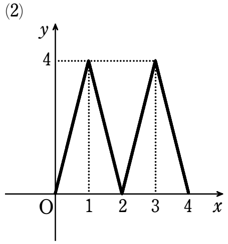
$3<x\leqq 4$ のとき　$f(f(x))=2(8-2x)=16-4x$

よって，グラフは図 (2)。

(1)



(2)

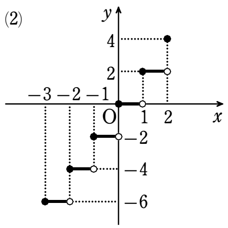


2

解答　(1)　$[2.3]=2$，$[1]=1$，$[-\sqrt{3}]=-2$

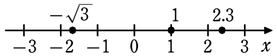
(2)［図］

(2)



解説

(1)　2.3，1，$-\sqrt{3}$ を数直線上に表すと，右図のようになる。



よって　　$[2.3]=2$，$[1]=1$，$[-\sqrt{3}]=-2$

(2)　$-3\leqq x<-2$ のとき　　$y=2(-3)=-6$

$-2\leqq x<-1$ のとき　　$y=2(-2)=-4$

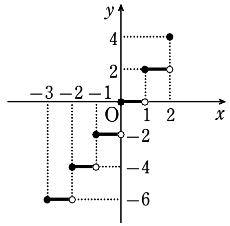
$-1\leqq x<0$　のとき　　$y=2(-1)=-2$

$0\leqq x<1$　のとき　　$y=2\cdot 0=0$

$1\leqq x<2$　のとき　　$y=2\cdot 1=2$

$x=2$　　　のとき　　$y=2\cdot 2=4$

よって，グラフは右図のようになる。



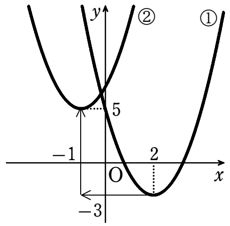
1

解答　x 軸方向に -3，y 軸方向に 8 だけ平行移動

解説

$y=2x^2-8x+5$ ……①，$y=2x^2+4x+7$ ……②

とする。



放物線 ① を平行移動して放物線 ② に重ねると，① の頂点は ② の頂点に移る。

① を変形すると　$y=2(x-2)^2-3$

② を変形すると　$y=2(x+1)^2+5$

よって，① の頂点は点 $(2,\ -3)$

② の頂点は点 $(-1,\ 5)$

放物線 ① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すれば，放物線 ①，② が重なるとすると

$2+p=-1$，$-3+q=5$　　よって　$p=-3$，$q=8$

したがって，x 軸方向に -3，y 軸方向に 8 だけ平行移動すればよい。

2

解答　$y=3x^2-18x+27$

解説

求める方程式は，$y=3x^2-6x+4$ の x，y をそれぞれ $x-2$，$y-(-1)$ でおき換えて

$y-(-1)=3(x-2)^2-6(x-2)+4$　すなわち　$y=3x^2-18x+27$

3

解答　(1)　$y=2x^2-3x+1$　(2)　$y=-2x^2-3x-1$　(3)　$y=2x^2+3x+1$

解説

(1)　求める方程式は，x，y をそれぞれ x，$-y$ でおき換えて

$-y=-2x^2+3x-1$　すなわち　$y=2x^2-3x+1$

(2)　求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，y でおき換えて

$y=-2(-x)^2+3(-x)-1$　すなわち　$y=-2x^2-3x-1$

(3)　求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，$-y$ でおき換えて

$-y=-2(-x)^2+3(-x)-1$　すなわち　$y=2x^2+3x+1$

4

解答　$y=-2x^2-4x+3$

解説

求める放物線は，放物線 $y=-2x^2+16x-29$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動し，更に y 軸に関して対称移動したものである。

まず，x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると

$y-2=-2\{x-(-3)\}^2+16\{x-(-3)\}-29$

よって　$y=-2(x+3)^2+16(x+3)-27$

すなわち　$y=-2x^2+4x+3$

次に，y 軸に関して対称移動すると

$y=-2(-x)^2+4(-x)+3$

したがって，求める放物線の方程式は　$y=-2x^2-4x+3$

5

解答　(1)　$y=2(x-1)^2+3$（$y=2x^2-4x+5$）

(2)　$y=-2(x+1)^2+11$（$y=-2x^2-4x+9$）

(3)　$y=2x^2-5x+2$

解説

(1)　頂点が点 $(1,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は

$y=a(x-1)^2+3$

と表される。そのグラフが点 $(0,\ 5)$ を通るから

$5=a(0-1)^2+3$　　これを解くと　$a=2$

よって　$y=2(x-1)^2+3$（$y=2x^2-4x+5$ でもよい）

(2)　軸が直線 $x=-1$ であるから，求める 2 次関数は

$y=a(x+1)^2+q$

と表される。そのグラフが 2 点 $(-2,\ 9)$，$(1,\ 3)$ を通るから

$9=a(-2+1)^2+q$，　$3=a(1+1)^2+q$

これを解くと　$a=-2$，$q=11$

よって　$y=-2(x+1)^2+11$（$y=-2x^2-4x+9$ でもよい）

(3)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが 3 点 $(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=9 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=-1 & \cdots\cdots ② \\ 4a+2b+c=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　$2b=-10$　　よって　$b=-5$

③−② から　$3a+b=1$ ……④

$b=-5$ を ④ に代入して　$3a-5=1$　　ゆえに　$a=2$

$a=2$，$b=-5$ を ① に代入して　$2+5+c=9$　　ゆえに　$c=2$

よって，求める 2 次関数は　$y=2x^2-5x+2$

6

解答　$y=2x^2-8x+6$

解説

放物線 $y=2x^2+3x-5$ を平行移動したものであるから，求める 2 次関数は

$y=2x^2+bx+c$ と表される。

このグラフが 2 点 $(2,\ -2)$，$(3,\ 0)$ を通るから

$-2=8+2b+c$，$0=18+3b+c$

整理して　$2b+c=-10$，$3b+c=-18$　　これを解いて　$b=-8$，$c=6$

よって，求める 2 次関数は　$y=2x^2-8x+6$

1

解答　x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動

解説

$y=x^2-3x+2$ ……①，$y=x^2+x+1$ ……②　とする。

放物線 ① を平行移動して放物線 ② に重ねると，① の頂点は ② の頂点に移る。

① を変形すると　$y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

② を変形すると　$y=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

よって，① の頂点の座標は　$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)$

② の頂点の座標は　$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

放物線 ① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すれば，放物線 ①，② が重なるとすると

$\dfrac{3}{2}+p=-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{4}+q=\dfrac{3}{4}$　　よって　$p=-2$，$q=1$

したがって，x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すればよい。

2

解答　(1)　$y=2x^2-11x+12$　(2)　$y=2x^2-7x$　(3)　$y=2x^2+5x+1$

(4)　$y=2x^2-15x+24$

解説

$y=2x^2-7x+3$ ……①　とする。

(1)　求める方程式は，① の x を $x-1$ でおき換えて

$y=2(x-1)^2-7(x-1)+3$　すなわち　$y=2x^2-11x+12$

(2)　求める方程式は，① の y を $y-(-3)$ でおき換えて

$y-(-3)=2x^2-7x+3$　すなわち　$y=2x^2-7x$

(3)　求める方程式は，① の x，y をそれぞれ $x-(-3)$，$y-1$ でおき換えて

$y-1=2\{x-(-3)\}^2-7\{x-(-3)\}+3$

よって　$y=2(x+3)^2-7(x+3)+4$

すなわち　$y=2x^2+5x+1$

(4)　求める方程式は，① の x，y をそれぞれ $x-2$，$y-(-1)$ でおき換えて

$y-(-1)=2(x-2)^2-7(x-2)+3$

すなわち　$y=2x^2-15x+24$

3

解答　(1)　$y=-x^2+5x-2$　(2)　$y=x^2+5x+2$　(3)　$y=-x^2-5x-2$

解説

(1)　求める方程式は，x，y をそれぞれ x，$-y$ でおき換えて

$-y=x^2-5x+2$　すなわち　$y=-x^2+5x-2$

(2)　求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，y でおき換えて

$y=(-x)^2-5(-x)+2$　すなわち　$y=x^2+5x+2$

(3)　求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，$-y$ でおき換えて

$-y=(-x)^2-5(-x)+2$　すなわち　$y=-x^2-5x-2$

4

解答　(1)　$y=3x^2-8x-1$　(2)　$y=-x^2+8x-11$

解説

(1)　求める放物線は，放物線 $y=3x^2+4x$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -5 だけ平行移動したものである。

よって，その方程式は

$y-(-5)=3(x-2)^2+4(x-2)$　　すなわち　　$y=3x^2-8x-1$

(2)　求める放物線は，放物線 $y=x^2-6x+7$ を x 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

まず，x 軸に関して対称移動すると

$-y=x^2-6x+7$　　すなわち　　$y=-x^2+6x-7$

次に，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると

$y-3=-(x-1)^2+6(x-1)-7$

よって　　$y=-x^2+8x-11$

5

解答　(1)　$y=\frac{1}{4}(x-1)^2+3$ $\left(y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{13}{4}\right)$

(2)　$y=(x-4)^2-3$ $(y=x^2-8x+13)$

(3)　$y=3x^2-2x$

解説

(1)　頂点が点 $(1,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は

$y=a(x-1)^2+3$

と表される。そのグラフが点 $(-1,\ 4)$ を通るから

$4=4a+3$　　ゆえに　　$a=\frac{1}{4}$

よって　　$y=\frac{1}{4}(x-1)^2+3$　$\left(y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{13}{4}\text{ でもよい}\right)$

(2)　軸が直線 $x=4$ であるから，求める 2 次関数は

$y=a(x-4)^2+q$

と表される。そのグラフが 2 点 $(2,\ 1)$，$(5,\ -2)$ を通るから

$1=4a+q$　……①

$-2=a+q$　……②

①−② から　　$3=3a$　　ゆえに　　$a=1$

② から　　$q=-3$

よって　　$y=(x-4)^2-3$ $(y=x^2-8x+13$ でもよい$)$

(3)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが 3 点 $(-2,\ 16)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 21)$ を通るから

$$\begin{cases}4a-2b+c=16 & \cdots\cdots ①\\ a+b+c=1 & \cdots\cdots ②\\ 9a+3b+c=21 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

①−② から　　$3a-3b=15$　　よって　$a-b=5$　……④

③−② から　　$8a+2b=20$　　よって　$4a+b=10$　……⑤

④+⑤ から　　$5a=15$　　よって　$a=3$

$a=3$ を ④ に代入して　$3-b=5$　　ゆえに　$b=-2$

$a=3$，$b=-2$ を ② に代入して　　$3-2+c=1$　　ゆえに　$c=0$

よって，求める 2 次関数は　　$y=3x^2-2x$

6

解答　(1)　$y=-3x^2+4$　　(2)　$y=x^2-4x+1$

解説

(1)　放物線 $y=-3x^2+4x+7$ を平行移動したものであるから，求める 2 次関数は $y=-3x^2+bx+c$ と表される。

このグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(2,\ -8)$ を通るから

$1=-3+b+c$，$-8=-12+2b+c$

整理して　　$b+c=4$，$2b+c=4$　　　これを解いて　$b=0$，$c=4$

よって，求める 2 次関数は　　$y=-3x^2+4$

(2)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフは，3 点 $(0,\ 3)$，$(1,\ -2)$，$(-1,\ 10)$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動した点 $(-1,\ 6)$，$(0,\ 1)$，$(-2,\ 13)$ を通るから

$$\begin{cases}a-b+c=6 & \cdots\cdots ①\\ c=1 & \cdots\cdots ②\\ 4a-2b+c=13 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

② を ① に代入して　　$a-b+1=6$　　よって　　$a-b=5$　……④

② を ③ に代入して　　$4a-2b+1=13$　　よって　　$2a-b=6$　……⑤

④，⑤ を連立して解くと　　$a=1$，$b=-4$

よって，求める 2 次関数は　　$y=x^2-4x+1$

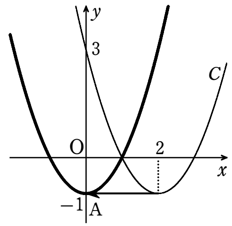
1

解答　(1)　$y=x^2-1$　　(2)　$y=x^2-4x-1$

解説

$x^2-4x+3=(x-2)^2-2^2+3=(x-2)^2-1$

であるから，グラフ C は，頂点が点 $(2,\ -1)$，y 軸との交点の座標が $(0,\ 3)$ の放物線である。



(1)　グラフ C が，点 A $(0,\ -1)$ を通るためには，右の図から，x 軸方向に -2 だけ平行移動すればよい。

よって，求める 2 次関数は

$y=\{x-(-2)-2\}^2-1$

すなわち　$y=x^2-1$

別解　C を x 軸方向に p だけ平行移動したグラフが表す 2 次関数は

$y=(x-p)^2-4(x-p)+3$　……①

① のグラフが点 A $(0,\ -1)$ を通るとき

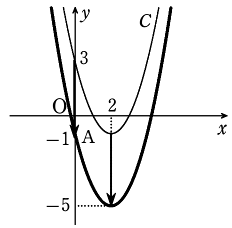
$-1=(0-p)^2-4(0-p)+3$

よって　　$p^2+4p+4=0$

これを解いて　　$(p+2)^2=0$　　ゆえに　　$p=-2$

このとき ① は　　$y=(x+2)^2-4(x+2)+3$

すなわち　　$y=x^2-1$



(2)　グラフ C が点 A $(0,\ -1)$ を通るためには，右の図から，y 軸方向に -4 だけ平行移動すればよい。

よって，求める 2 次関数は

$y-(-4)=x^2-4x+3$

すなわち　$y=x^2-4x-1$

別解　C を y 軸方向に q だけ平行移動したグラフが表す 2 次関数は

$y=x^2-4x+3+q$　……②

② のグラフが点 A $(0,\ -1)$ を通るとき

$-1=0^2-4\cdot 0+3+q$　　よって　　$q=-4$

このとき ② は　　$y=x^2-4x+3-4$

すなわち　　$y=x^2-4x-1$

2

解答　(ア)　$-x^2-2x-2$　　(イ)　y 軸

解説

$f(x)=-x^2+2x-2$ とおくと，① は

$y=f(x)$

① を原点に関して対称に移動して得られる放物線 ③ の方程式は

$-y=f(-x)$

すなわち　$y=-f(-x)$

③ を x 軸に関して対称に移動して得られる放物線 ② の方程式は

$-y=-f(-x)$

すなわち　$y=f(-x)$

ゆえに　$y=-(-x)^2+2(-x)-2=-x^2-2x-2$

ところで，放物線 ② の方程式は $y=f(-x)$ であるから，② は ① を y 軸に関して対称に

移動したものである。

(ア)　$-x^2-2x-2$　　(イ)　y 軸

$\boxed{3}$

解答　(ア)　-2　　(イ)　$-\dfrac{3}{5}$　　(ウ)　$\dfrac{7}{5}$　　(エ)　-7

解説

$G: y=x^2-2(a+2)x+a^2-a+1$

$=\{x-(a+2)\}^2-(a+2)^2+a^2-a+1$

$=\{x-(a+2)\}^2-5a-3$　……①

よって，G の軸は直線 $x=a+2$，頂点は点 $(a+2,\ -5a-3)$ である。
G が y 軸に関して対称になるのは，G の軸が y 軸に一致するときである。

よって　　$a+2=0$　　　ゆえに　　$a={}^{ア}-2$

また，G の頂点が x 軸上にあるのは $-5a-3=0$ すなわち $a={}^{イ}-\dfrac{3}{5}$ のとき。

$a=-2$，$a=-\dfrac{3}{5}$ をそれぞれ①に代入することにより，G_1，G_2 をグラフにもつ２次関数はそれぞれ

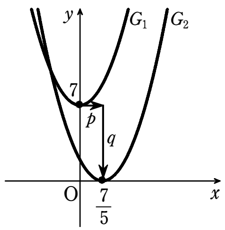
$G_1: y=x^2+7$，　$G_2: y=\left(x-\dfrac{7}{5}\right)^2$

よって，G_1 の頂点は　　点 $(0,\ 7)$，

G_2 の頂点は　　点 $\left(\dfrac{7}{5},\ 0\right)$

G_1 を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動し，G_2 に重なるとすると　　$0+p=\dfrac{7}{5}$，$7+q=0$

よって　　　　$p={}^{ウ}\dfrac{7}{5}$，$q={}^{エ}-7$



$\boxed{4}$

解答　$a=-4$，$b=8$ または $a=1$，$b=-2$

解説

放物線 $y=x^2+2ax+b$ が点 $(1,\ 1)$ を通るから

$1=1+2a+b$　　すなわち　　$b=-2a$　……①

よって，放物線の方程式は

$y=x^2+2ax-2a=(x+a)^2-a^2-2a$

と変形できるから，頂点は

点 $(-a,\ -a^2-2a)$

頂点が直線 $y=-x-4$ 上にあるとき

$-a^2-2a=-(-a)-4$　　　よって　　$a^2+3a-4=0$

ゆえに　　$(a+4)(a-1)=0$　　　したがって　　$a=-4,\ 1$

①から　　$a=-4$ のとき　$b=8$，　$a=1$ のとき　$b=-2$

以上から　　$a=-4$，$b=8$　または　$a=1$，$b=-2$

$\boxed{1}$

解答　$y=2(x+1)^2-5$，$y=2(x-2)^2+1$　($y=2x^2+4x-3$，$y=2x^2-8x+9$)

解説

求める放物線は，放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，その頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから，その方程式は

$y=2(x-p)^2+2p-3$　……①

と表される。これが点 $(1,\ 3)$ を通るから

$3=2(1-p)^2+2p-3$

整理して　　$p^2-p-2=0$

よって　　$(p+1)(p-2)=0$　　　ゆえに　　$p=-1,\ 2$

①に代入して　　$y=2(x+1)^2-5$，$y=2(x-2)^2+1$

($y=2x^2+4x-3$，$y=2x^2-8x+9$　でもよい)

$\boxed{2}$

解答　順に $y=x^2-6x+11$，$y=-x^2-6x-9$

解説

C の方程式を変形すると　$y=(x-1)^2+2$

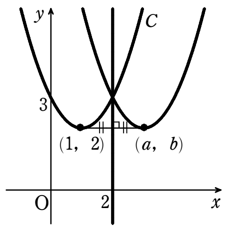
よって，C の頂点の座標は　$(1,\ 2)$

(前半)　直線 $x=2$ に関して，点 $(1,\ 2)$ と対称な点の座標を $(a,\ b)$ とすると　$\dfrac{1+a}{2}=2$，$b=2$

よって　$a=3$，$b=2$

したがって，直線 $x=2$ に関して，C と対称な曲線は，２次の係数が１，頂点が点 $(3,\ 2)$ の放物線であるから，その方程式は　$y=(x-3)^2+2$

すなわち　$y=x^2-6x+11$

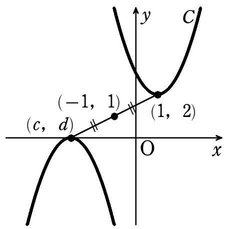


(後半)　点 $(-1,\ 1)$ に関して，点 $(1,\ 2)$ と対称な点の座標を $(c,\ d)$ とすると　$\dfrac{1+c}{2}=-1$，$\dfrac{2+d}{2}=1$

よって　$c=-3$，$d=0$

したがって，点 $(-1,\ 1)$ に関して，C と対称な曲線は，２次の係数が -1，頂点が点 $(-3,\ 0)$ の放物線であるから，その方程式は　$y=-(x+3)^2$

すなわち　$y=-x^2-6x-9$



$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=-2$ で最小値 -4，最大値はない

(2)　$x=-1$ で最大値 4，最小値はない

解説

(1)　関数の式を変形すると　　$y=(x+2)^2-4$

したがって，$x=-2$ で最小値 -4 をとる。

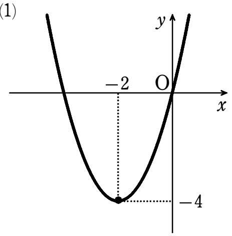
また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。

(2)　関数の式を変形すると　　$y=-3(x+1)^2+4$

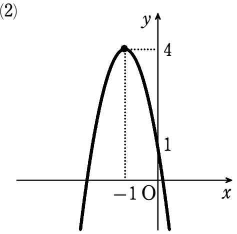
したがって，$x=-1$ で最大値 4 をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。

(1)



(2)



$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=0$ で最大値 5，$x=2$ で最小値 -3

(2)　$x=1$ で最大値 3，$x=-1$ で最小値 -9

解説

(1)　関数の式を変形すると

$y=2(x-2)^2-3$　$(0\leqq x\leqq 3)$

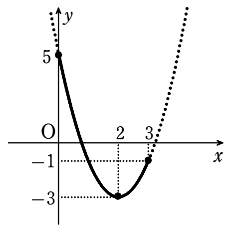
よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

したがって

$x=0$ で最大値 5

$x=2$ で最小値 -3

をとる。



(2)　関数の式を変形すると

$y=-(x-3)^2+7$　$(-1\leqq x\leqq 1)$

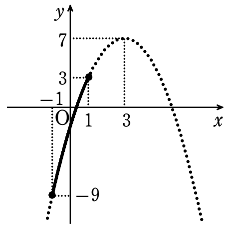
よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

したがって

$x=1$ で最大値 3

$x=-1$ で最小値 -9

をとる。



$\boxed{3}$

解答　$a=6$，最小値 2

解説

関数の式を変形すると

$$y=(x-2)^2+a-4 \quad (0\leqq x\leqq 5)$$

よって，この関数は

$x=5$ で最大値 $a+5$

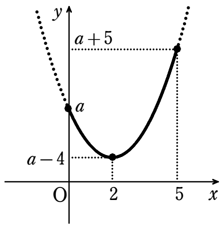
$x=2$ で最小値 $a-4$

をとる。

最大値が 11 であるとき　　$a+5=11$

ゆえに　　$a=6$

したがって，最小値は　　$6-4=2$



$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=-6$，$y=-3$ で最大値 18

(2)　$0\leqq x\leqq 4$；$x=0$，$y=4$ または $x=4$，$y=0$ で最大値 16,

$x=y=2$ で最小値 8

解説

(1)　$x+2y+12=0$ から　　$x=-2y-12$　……①

よって　　$xy=(-2y-12)y=-2(y^2+6y)$

$=-2(y+3)^2+18$

ゆえに，xy は $y=-3$ で最大値 18 をとる。

① から，$y=-3$ のとき　　$x=-2\cdot(-3)-12=-6$

したがって　　$x=-6$，$y=-3$ で最大値 18

(2)　$x+y=4$ から　　$y=4-x$　……①

$y\geqq 0$ から　　$4-x\geqq 0$　　　よって　　$x\leqq 4$

$x\geqq 0$ と合わせて　　$0\leqq x\leqq 4$　……②

また　　$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2$

$=2x^2-8x+16$

$=2(x-2)^2+8$

よって，② の範囲の x について x^2+y^2 は

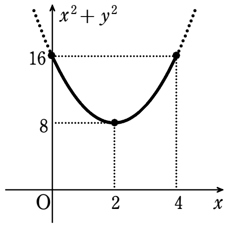
$x=0$ または $x=4$ で最大値 16 をとり，$x=2$ で

最小値 8 をとる。

① から　　$x=0$ のとき $y=4$

$x=4$ のとき $y=0$

$x=2$ のとき $y=2$



以上から，x のとりうる値の範囲は $0\leqq x\leqq 4$ であり，x^2+y^2 は

$x=0$，$y=4$ または $x=4$，$y=0$ で最大値 16 をとり，

$x=y=2$ で最小値 8 をとる。

$\boxed{5}$

解答　(1)　$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -5　　(2)　$x=7$，$y=2$ のとき最小値 -3

解説

(1)　$P=x^2+4x+3y^2-6y+2=(x+2)^2-2^2+3y^2-6y+2$

$=(x+2)^2+3(y-1)^2-3\cdot 1^2-2=(x+2)^2+3(y-1)^2-5$

x，y は実数であるから　　$(x+2)^2\geqq 0$，$(y-1)^2\geqq 0$

よって，P は $x+2=0$，$y-1=0$ のとき最小となる。

ゆえに　　$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -5

(2)　$Q=x^2-2(3y+1)x+10y^2+2y+2$

$=\{x-(3y+1)\}^2-(3y+1)^2+10y^2+2y+2$

$=\{x-(3y+1)\}^2+y^2-4y+1$

$=\{x-(3y+1)\}^2+(y-2)^2-2^2+1$

$=\{x-(3y+1)\}^2+(y-2)^2-3$

x，y は実数であるから　　$\{x-(3y+1)\}^2\geqq 0$，$(y-2)^2\geqq 0$

よって，Q は $x-(3y+1)=0$，$y-2=0$ のとき最小となる。

$x-(3y+1)=0$，$y-2=0$ を解くと　　$x=7$，$y=2$

ゆえに　　$x=7$，$y=2$ のとき最小値 -3

$\boxed{6}$

解答　$S=-\dfrac{5}{6}x^2+10x$ $(0<x<12)$，S は $x=6$ で最大値 30 をとる

解説

A から辺 BC に垂線 AH を引き，$\mathrm{EF}=x$，$\mathrm{DE}=y$ とすると

$$\mathrm{EH}=\frac{x}{2}$$

$0<\dfrac{x}{2}<6$ であるから　　$0<x<12$

△ABH∽△DBE であるから

$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}=\mathrm{DE}:\mathrm{EB}$

すなわち　　$10:6=y:\left(6-\dfrac{x}{2}\right)$

よって　　$6y=10\left(6-\dfrac{x}{2}\right)$　　　ゆえに　$y=10-\dfrac{5}{6}x$

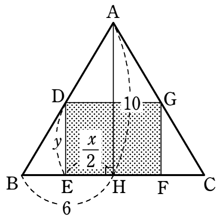
したがって，長方形の面積 S は

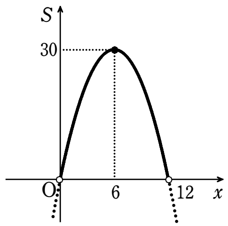
$$S=xy=x\left(10-\frac{5}{6}x\right)=-\frac{5}{6}x^2+10x$$

$$=-\frac{5}{6}(x^2-12x)=-\frac{5}{6}\{(x-6)^2-6^2\}$$

$$=-\frac{5}{6}(x-6)^2+30 \quad (0<x<12)$$

よって，S は $x=6$ で最大値 30 をとる。





$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=1$ で最小値 -4，最大値はない

(2)　$x=\dfrac{1}{4}$ で最大値 $\dfrac{1}{8}$，最小値はない

(3)　$x=-\dfrac{2}{3}$ で最小値 $-\dfrac{7}{3}$，最大値はない

(4)　$x=\dfrac{3}{4}$ で最大値 $-\dfrac{31}{8}$，最小値はない

解説

(1)　$x^2-2x-3=\{(x-1)^2-1^2\}-3$

$=(x-1)^2-1-3$

ゆえに，この 2 次関数は

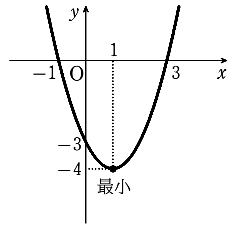
$y=(x-1)^2-4$

と表される。

グラフは下に凸の放物線で，頂点は点 $(1,\ -4)$ である。

よって，$x=1$ で最小値 -4 をとる。

また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。



(2)　$-2x^2+x=-2\left\{\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right\}=-2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

ゆえに，この 2 次関数は

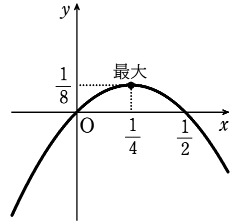
$y=-2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}$

と表される。

グラフは上に凸の放物線で，頂点は点 $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8}\right)$ である。

よって，$x=\dfrac{1}{4}$ で最大値 $\dfrac{1}{8}$ をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。



(3)　$3x^2+4x-1=3\left\{\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}-1$

$=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-1$

ゆえに，この 2 次関数は

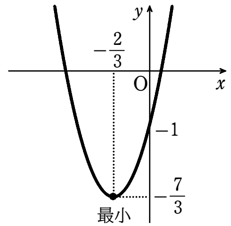
$y=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3}$

と表される。

グラフは下に凸の放物線で，頂点は点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{7}{3}\right)$ である。

よって，$x=-\dfrac{2}{3}$ で最小値 $-\dfrac{7}{3}$ をとる。

また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。



(4)　$-2x^2+3x-5=-2\left\{\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}-5$

$=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-5$

ゆえに，この２次関数は

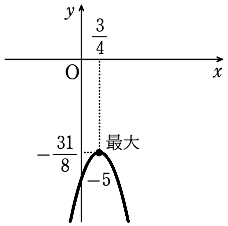
$$y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{31}{8}$$

と表される。

グラフは上に凸の放物線で，頂点は点 $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{31}{8}\right)$ である。

よって，$x=\frac{3}{4}$ で最大値 $-\frac{31}{8}$ をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。



$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=1$ のとき最大値 0，$x=-2$ のとき最小値 -9

(2)　$x=-1$ のとき最大値 4，$x=1$ のとき最小値 0

(3)　$x=0$ のとき最大値 8，$x=\frac{3}{2}$ のとき最小値 -1

(4)　$x=0$ のとき最大値 4，$x=-2$ のとき最小値 -2

(5)　$x=1$ のとき最大値 0；$x=-1$，3 のとき最小値 -4

解説

(1)　$y=x^2+4x-5=(x^2+4x)-5$

$=(x^2+4x+2^2-2^2)-5$

$=(x^2+4x+2^2)-2^2-5$

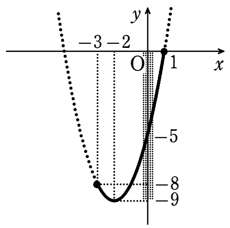
$=(x+2)^2-9$

この関数のグラフは，右の図の実線部分である。

よって，値域は　　$-9\leqq y\leqq 0$

したがって　　$x=1$　のとき最大値 0，

$x=-2$ のとき最小値 -9



(2)　$y=-x^2-2x+3=-(x^2+2x)+3$

$=-(x^2+2x+1^2-1^2)+3$

$=-(x^2+2x+1^2)+1^2+3$

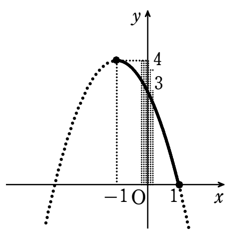
$=-(x+1)^2+4$

この関数のグラフは，右の図の実線部分である。

よって，値域は　　$0\leqq y\leqq 4$

したがって　　$x=-1$ のとき最大値 4，

$x=1$　のとき最小値 0



(3)　$y=4x^2-12x+8$

$=4(x^2-3x)+8$

$=4\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+8$

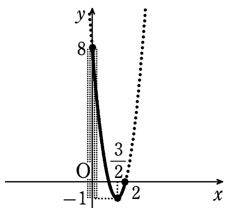
$=4\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+8$

$=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-1$

この関数のグラフは，右図の実線部分である。

よって，値域は　　$-1\leqq y\leqq 8$

したがって　　$x=0$　のとき最大値 8，



$x=\frac{3}{2}$ のとき最小値 -1

(4)　$y=x^2+5x+4$

$=(x^2+5x)+4$

$=\left\{x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}+4$

$=\left\{x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{5}{2}\right)^2+4$

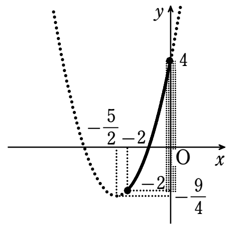
$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

この関数のグラフは，右図の実線部分である。

よって，値域は　　$-2\leqq y\leqq 4$

したがって　　$x=0$　のとき最大値 4，

$x=-2$ のとき最小値 -2



(5)　$y=-x^2+2x-1$

$=-(x^2-2x)-1$

$=-(x^2-2x+1^2-1^2)-1$

$=-(x^2-2x+1^2)+1^2-1$

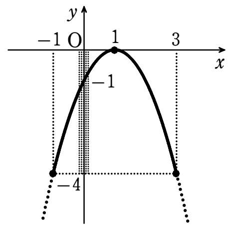
$=-(x-1)^2$

この関数のグラフは，右図の実線部分である。

よって，値域は　　$-4\leqq y\leqq 0$

したがって　　$x=1$　　のとき最大値 0，

$x=-1$，3 のとき最小値 -4



$\boxed{3}$

解答　$c=-7$，$x=3$ で最大値 2

解説

$y=-x^2+6x+c=-(x-3)^2+9+c$

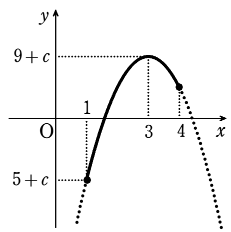
よって，この関数は $x=1$ で最小値をとる。

$x=1$ のとき　　$y=-1^2+6\cdot1+c=5+c$

最小値が -2 であるとき　　$5+c=-2$

したがって　　$c=-7$

このとき，$x=3$ で最大値 $9+c=2$ をとる。



$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$

(2)　$x=3$，$y=0$ で最大値 9；$x=\frac{3}{5}$，$y=-\frac{6}{5}$ で最小値 $\frac{9}{5}$

解説

(1)　$x+2y+3=0$ から　　$x=-2y-3$

よって　　$xy=(-2y-3)y=-2y^2-3y=-2\left(y+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

ゆえに，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。このとき　　$x=-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)-3=-\frac{3}{2}$

したがって　$x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$

(2)　$x-2y=3$ から　　$x=2y+3$　……①

よって　　$x^2+y^2=(2y+3)^2+y^2=5y^2+12y+9$

$=5\left\{\left(y+\frac{6}{5}\right)^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2\right\}+9$

$=5\left(y+\frac{6}{5}\right)^2+\frac{9}{5}$　……②

$x\geqq0$ と ① から　　$2y+3\geqq0$

$y\leqq0$ と合わせて　　$-\frac{3}{2}\leqq y\leqq0$

この範囲において，② は

$y=0$ で最大値 9，$y=-\frac{6}{5}$ で最小値 $\frac{9}{5}$

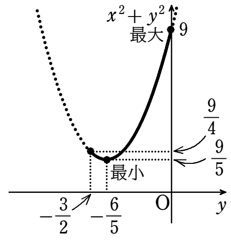
をとる。① から

$y=0$ のとき　　$x=3$

$y=-\frac{6}{5}$ のとき　$x=2\left(-\frac{6}{5}\right)+3=\frac{3}{5}$

したがって，$x=3$，$y=0$　　で最大値 9，

$x=\frac{3}{5}$，$y=-\frac{6}{5}$ で最小値 $\frac{9}{5}$ をとる。



$\boxed{5}$

解答　(1)　$x=1$，$y=-5$ のとき最小値 -29　　(2)　$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -8

解説

(1)　$P=2x^2-4x+y^2+10y-2=2(x-1)^2-2\cdot1^2+y^2+10y-2$

$=2(x-1)^2+(y+5)^2-5^2-4=2(x-1)^2+(y+5)^2-29$

x，y は実数であるから　　$(x-1)^2\geqq0$，$(y+5)^2\geqq0$

よって，P は $x-1=0$，$y+5=0$ のとき最小となる。

ゆえに　　$x=1$，$y=-5$ のとき最小値 -29

(2)　$Q=x^2-2(y-3)x+5y^2-14y+5=\{x-(y-3)\}^2-(y-3)^2+5y^2-14y+5$

$=\{x-(y-3)\}^2+4y^2-8y-4=\{x-(y-3)\}^2+4(y-1)^2-4\cdot1^2-4$

$=\{x-(y-3)\}^2+4(y-1)^2-8$

x，y は実数であるから　　$\{x-(y-3)\}^2\geqq0$，$(y-1)^2\geqq0$

よって，Q は $x-(y-3)=0$，$y-1=0$ のとき最小となる。

$x-(y-3)=0$，$y-1=0$ を解くと　　$x=-2$，$y=1$

ゆえに　　$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -8

$\boxed{6}$

解答　縦の長さが 2 のとき最大値 12

解説

右の図のように点 D ～ H をとり，長方形の縦の長さを x とする。

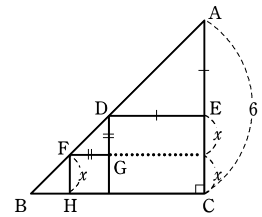
$0<\mathrm{EC}<6$ であるから　　$0<2x<6$

よって　　$0<x<3$　……①

$\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{GDF}$，

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{DFG}$

であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{ADE}$，$\triangle\mathrm{DFG}$ は相似で，すべて直角二等辺三角形である。



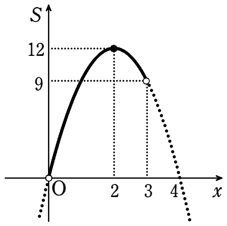
ゆえに　$DE=AE=6-2x$，　$FG=DG=x$

長方形の面積の和を S とすると

$$\begin{aligned}S&=DE\cdot EC+FG\cdot FH\\&=(6-2x)\cdot 2x+x\cdot x\\&=-3x^2+12x\\&=-3(x-2)^2+12\end{aligned}$$

① の範囲で，S は $x=2$ で最大値 12 をとる。

よって，2 つの長方形の面積の和は，長方形の縦の長さが 2 のとき最大値 12 をとる。



$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=3$ で最大値 10，$x=0$ で最小値 1

(2)　$x=2$ で最大値 2，$x=0$，4 で最小値 -2

(3)　$x=1$ で最大値 5，$x=0$ で最小値 -1

(4)　$x=1$ で最大値 -2，$x=-1$ で最小値 -14

(5)　$x=3$ で最大値 1，$x=\dfrac{3}{2}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$

(6)　$x=\dfrac{9}{4}$ で最大値 $\dfrac{81}{8}$，最小値はない

解説

(1)　$y=x^2+1$ $(-1\leqq x\leqq 3)$ のグラフは右の図の実線部分である。

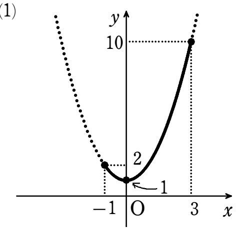
したがって

$x=3$ で最大値 10

$x=0$ で最小値 1

をとる。

(1)



(2)　関数の式を変形すると

$$y=-(x-2)^2+2\quad(0\leqq x\leqq 4)$$

よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

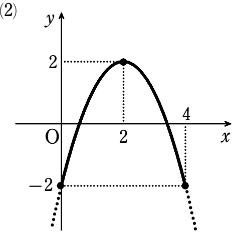
したがって

$x=2$ で最大値 2

$x=0$，4 で最小値 -2

をとる。

(2)



(3)　関数の式を変形すると

$$y=2(x+1)^2-3\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

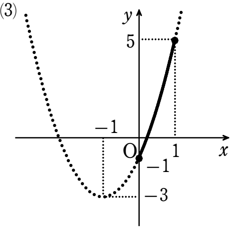
したがって

$x=1$ で最大値 5

$x=0$ で最小値 -1

をとる。

(3)



(4)　関数の式を変形すると

$$y=-3(x-1)^2-2\quad(-1\leqq x\leqq 2)$$

よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

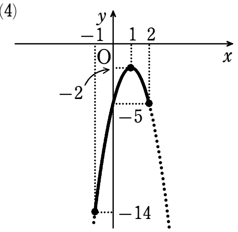
したがって

$x=1$ で最大値 -2

$x=-1$ で最小値 -14

をとる。

(4)



(5)　関数の式を変形すると

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\quad(1<x\leqq 3)$$

よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

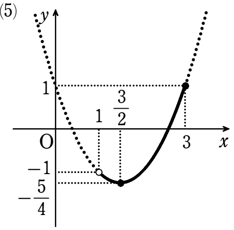
したがって

$x=3$ で最大値 1

$x=\dfrac{3}{2}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$

をとる。

(5)



(6)　関数の式を変形すると

$$y=-2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{81}{8}\quad(0<x<3)$$

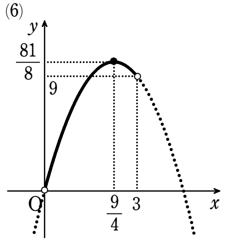
よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

したがって

$x=\dfrac{9}{4}$ で最大値 $\dfrac{81}{8}$ をとる。

最小値はない。

(6)



$\boxed{2}$

解答　$a=4$，$b=1$

解説

関数の式を変形すると　　$y=3\left(x-\dfrac{a-2}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}(a-2)^2+b$

この関数のグラフは下に凸の放物線であるから，y は $x=\dfrac{a-2}{2}$ のとき最小値

$-\dfrac{3}{4}(a-2)^2+b$ をとる。

よって　　$\dfrac{a-2}{2}=1$ ……①，$-\dfrac{3}{4}(a-2)^2+b=-2$ ……②

① を解くと　　$a=4$　　　よって，② から　　$b=-2+\dfrac{3}{4}(4-2)^2=-2+3=1$

別解　$x=1$ で最小値 -2 をとるから，求める 2 次関数は　$y=3(x-1)^2-2$

と表される。右辺を展開して　　$y=3x^2-6x+1$

$y=3x^2-(3a-6)x+b$ と係数を比較して　　$3a-6=6$，$b=1$

よって　　$a=4$，$b=1$

$\boxed{3}$

解答　$a=\dfrac{7}{2}$，$b=4$ または $a=-\dfrac{7}{2}$，$b=-10$

解説

関数の式を変形して　　$f(x)=a(x-2)^2-4a+b$

[1]　$a=0$ のとき，$f(x)=b$ となり，条件を満たさない。

[2]　$a>0$ のとき，グラフは下に凸の放物線となるから，$1\leqq x\leqq 4$ の範囲で $f(x)$ は

$x=4$ で最大値 $f(4)=b$，$x=2$ で最小値 $f(2)=-4a+b$　　をとる。

したがって　　$b=4$，$-4a+b=-10$　　　これを解いて　　$a=\dfrac{7}{2}$，$b=4$

これは $a>0$ を満たす。

[3]　$a<0$ のとき，グラフは上に凸の放物線となるから，$1\leqq x\leqq 4$ の範囲で $f(x)$ は

$x=2$ で最大値 $f(2)=-4a+b$，$x=4$ で最小値 $f(4)=b$ 　をとる。

したがって　$-4a+b=4$，$b=-10$ 　これを解いて　$a=-\dfrac{7}{2}$，$b=-10$

これは $a<0$ を満たす。

以上から　$a=\dfrac{7}{2}$，$b=4$ または $a=-\dfrac{7}{2}$，$b=-10$

$\boxed{4}$

$\boxed{解答}$ $n=-2$ のとき最大値 22

(解説)

$$f(n)=-3\left\{n^2+2\cdot\frac{7}{3}n+\left(\frac{7}{3}\right)^2-\left(\frac{7}{3}\right)^2\right\}+6=-3\left(n+\frac{7}{3}\right)^2+\frac{67}{3}$$

よって　$n=-\dfrac{7}{3}$ で最大値をとる。

n は整数で $-\dfrac{7}{3}=-2.3\cdots$ であるから　$-\dfrac{7}{3}$ に最も近い整数は -2

すなわち $n=-2$ で最大値をとる。$f(-2)=-3\cdot(-2)^2-14\cdot(-2)+6=22$

したがって，最大値は 22，　そのとき $n=-2$

$\boxed{5}$

$\boxed{解答}$ (1)　$m(k)=-4k^2+24k$　　(2)　$k=3$，最大値 36

(解説)

(1)　$y=x^2+4kx+24k$ を変形すると

$y=(x+2k)^2-4k^2+24k$

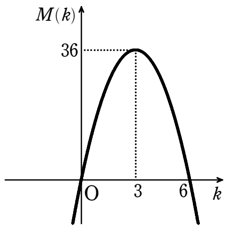
ゆえに　$m(k)=-4k^2+24k$

(2)　$m(k)=-4(k-3)^2+36$

よって，$m(k)$ を最大にする k の値は

$k=3$

$m(k)$ の最大値は　36



$\boxed{6}$

$\boxed{解答}$ (1)　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$　　(2)　$x=2$，$y=1$ のとき最小値 12

(解説)

(1)　$a+b=1$ から　$b=1-a$ ……①

$b>0$ であるから　$1-a>0$　ゆえに　$a<1$

$a>0$ と合わせて　$0<a<1$ ……②

$a^3+b^3=t$ とおくと

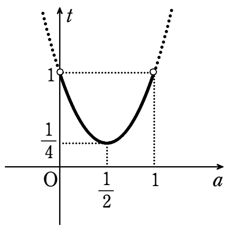
$$t=a^3+(1-a)^3=3a^2-3a+1=3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

② の範囲において，t は

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$　をとる。

① から，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき　$b=\dfrac{1}{2}$

したがって　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$



(2)　$x+2y+3z=6$ から　$3z=6-x-2y$

ゆえに　$x^2+4y^2+9z^2=x^2+4y^2+(6-x-2y)^2$

$=2x^2+4xy+8y^2-12x-24y+36$

$=2x^2+4(y-3)x+8y^2-24y+36$

$=2\{x+(y-3)\}^2+6y^2-12y+18$

$=2(x+y-3)^2+6(y-1)^2+12$

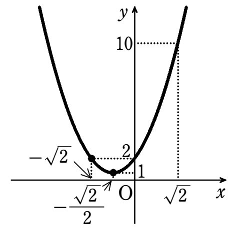
x，y は実数であるから　$(x+y-3)^2\geqq 0$，$(y-1)^2\geqq 0$

よって，$x^2+4y^2+9z^2$ は，$x+y-3=0$，$y-1=0$ すなわち $x=2$，$y=1$ のときに最小となる。

したがって　$x=2$，$y=1$ のとき最小値 12

$\boxed{1}$

$\boxed{解答}$ $a=2\sqrt{2}$，$b=2$，[図]



(解説)

関数の式を変形すると

$$f(x)=2\left(x+\frac{a}{4}\right)^2+b-\frac{a^2}{8}$$

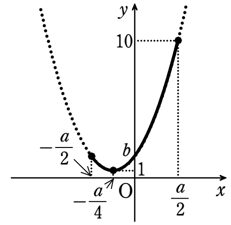
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線

$x=-\dfrac{a}{4}$，頂点は点 $\left(-\dfrac{a}{4},\ b-\dfrac{a^2}{8}\right)$ である。

$a>0$ より $-\dfrac{a}{2}<-\dfrac{a}{4}<\dfrac{a}{2}$ であるから，

$-\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq\dfrac{a}{2}$ の範囲において，$f(x)$ は $x=\dfrac{a}{2}$ で最大と

なり，$x=-\dfrac{a}{4}$ で最小となる。



ゆえに　$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=10$，$f\left(-\dfrac{a}{4}\right)=1$

よって　$a^2+b=10$ ……①，$b-\dfrac{a^2}{8}=1$ ……②

①，② から b を消去して　$\dfrac{9}{8}a^2+1=10$

これを解くと　$a=\pm 2\sqrt{2}$

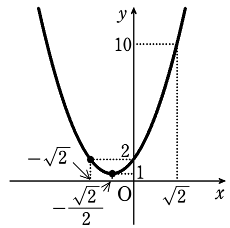
$a>0$ であるから　$a=2\sqrt{2}$

① に代入して　$b=2$

このとき　$f(x)=2x^2+2\sqrt{2}\,x+2$

$=2\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1$

よって，グラフは右の図のようになる。



$\boxed{2}$

$\boxed{解答}$ $x=4$，$y=3$ のとき最大値 -3

(解説)

$P=4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7$ とする。

x，y が隣り合う整数のとき　$y=x+1$　または　$y=x-1$

[1]　$y=x+1$ のとき

$P=4x^2+12(x+1)^2-12x(x+1)+4x-18(x+1)+7$

$=4x^2-2x+1=4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

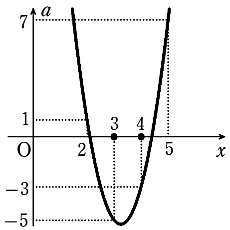
よって，$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7=a$ を満たす負の実数 a は存在しない。

[2]　$y=x-1$ のとき

$P=4x^2+12(x-1)^2-12x(x-1)+4x-18(x-1)+7$

$=4x^2-26x+37=4\left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\frac{21}{4}$

よって，$a=4\left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\frac{21}{4}$ のグラフは右の図のようになる。



a は負の実数，x は整数であるから，グラフより a は $x=4$ のとき最大値 -3 をとる。

したがって，a は $x=4$，$y=3$ のとき最大値 -3 をとる。

[1]，[2] から，a は $x=4$，$y=3$ のとき最大値 -3 をとる。

1

解答　(1)　$a<0$ のとき $x=0$ で最小値 0，$0\leqq a\leqq 2$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^2$，$2<a$ のとき $x=2$ で最小値 $8-8a$

(2)　$a<1$ のとき $x=2$ で最大値 $8-8a$，$a=1$ のとき $x=0$，2 で最大値 0，$1<a$ のとき $x=0$ で最大値 0

解説

$y=2x^2-4ax=2(x-a)^2-2a^2$

$x=0$ のとき $y=0$，　$x=2$ のとき $y=8-8a$，　$x=a$ のとき $y=-2a^2$

(1)　[1]　$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 0

[2]　$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2$

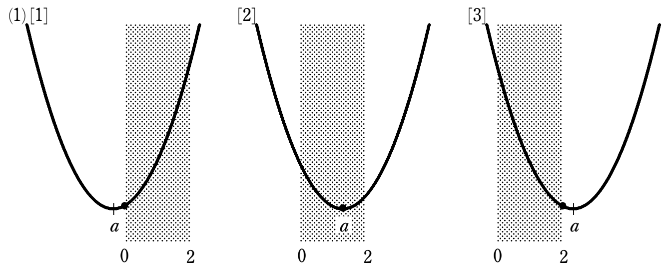
[3]　$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $8-8a$

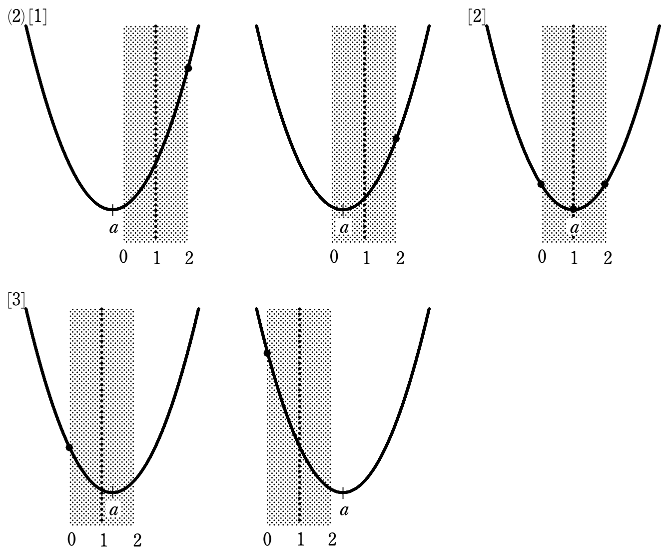
(2)　定義域の中央の値は 1

[1]　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $8-8a$

[2]　$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 0

[3]　$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 0





2

解答　(1)　$a<0$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$x=1$ で最小値 0

$1<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-2a+1

(2)　$a<\frac{1}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-2a+1

$a=\frac{1}{2}$ のとき　$x=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2

解説

$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$　$(a\leqq x\leqq a+1)$

$x=a$ のとき　$y=a^2-2a+1$，$x=a+1$ のとき　$y=a^2$，$x=1$ のとき　$y=0$

(1)　[1]　$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a+1$ で最小値 a^2　をとる。

[2]　$a\leqq 1\leqq a+1$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

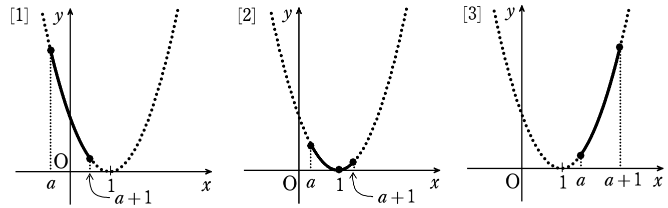
グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=1$ で最小値 0　をとる。

[3]　$1<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 a^2-2a+1　をとる。



(2)　定義域の中央の値は　$a+\frac{1}{2}$

[1]　$a+\frac{1}{2}<1$ すなわち $a<\frac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最大値 a^2-2a+1　をとる。

[2]　$a+\frac{1}{2}=1$ すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

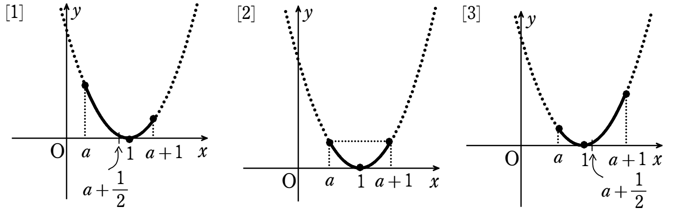
このとき，軸は定義域の中央にあり，$x=a$，$x=a+1$ における y の値が一致する。

よって，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$　をとる。

[3]　$1<a+\frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2}<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a+1$ で最大値 a^2　をとる。



$\boxed{3}$

解答　(1)　$a<1$ のとき　$g(a)=a^2-a-3$,　$1\leqq a\leqq 2$ のとき　$g(a)=a-4$,

$a>2$ のとき　$g(a)=a^2-3a$

(2)　$a=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{13}{4}$

解説

(1)　$f(x)=(x-2)^2+a-4$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ である。

また　$f(a)=a^2-4a+a=a^2-3a$,

$f(a+1)=(a+1)^2-4(a+1)+a=a^2-a-3$

[1]　$a+1<2$ すなわち $a<1$ のとき

$g(a)=f(a+1)=a^2-a-3$

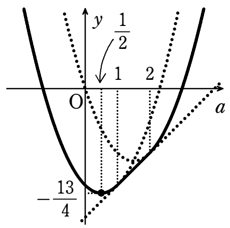
[2]　$a\leqq 2\leqq a+1$ すなわち $1\leqq a\leqq 2$ のとき

$g(a)=f(2)=a-4$

[3]　$a>2$ のとき

$g(a)=f(a)=a^2-3a$

(2)　$g(a)=\begin{cases}\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4} & (a<1)\\ a-4 & (1\leqq a\leqq 2)\\ \left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4} & (a>2)\end{cases}$



よって，$y=g(a)$ のグラフは，右の図の実線部分のようになる。

ゆえに，$g(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{13}{4}$ をとる。

$\boxed{4}$

解答　$x=0$ のとき最大値 0，最小値はない

解説

$x^2=t$ とおくと　$t\geqq 0$

y を t の式で表すと

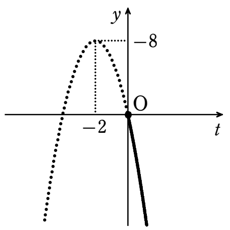
$y=-2t^2-8t$

$=-2(t+2)^2+8$

$t\geqq 0$ の範囲において，y は $t=0$ のとき最大となり，最小値はない。

よって　$x=0$ のとき最大値 0,

最小値はない。



$\boxed{5}$

解答　(1)　最大値はない，$x=1$ で最小値 -4

(2)　$x=-1$ のとき最大値 1，$x=-1+\sqrt{3}$ のとき最小値 -8

解説

(1)　$x^2-2x=t$ とおくと

$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$

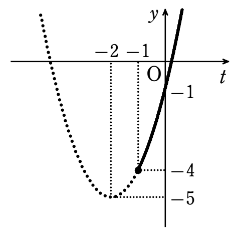
よって　$t\geqq -1$

また　$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$

$=t^2+4t-1$

$=(t+2)^2-5$

このグラフは，[図] の実線部分のようになる。



したがって，y は

$t=-1$ すなわち $x=1$ で最小値 -4 をとる。

最大値はない。

(2)　$x^2+2x=t$ とおくと

$t=(x+1)^2-1$

$-2\leqq x\leqq 1$ から　$-1\leqq t\leqq 3$　……①

y を t の式で表すと

$y=t^2-4t-4$

$=(t-2)^2-8$

① の範囲において，y は

$t=-1$ で最大値 1,

$t=2$　で最小値 -8　をとる。

$t=-1$ のとき　$(x+1)^2-1=-1$

ゆえに　$(x+1)^2=0$　よって　$x=-1$

$t=2$ のとき　$(x+1)^2-1=2$

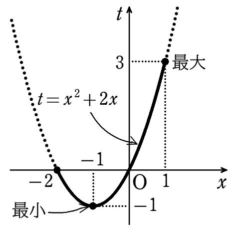
これを解いて　$x=-1\pm\sqrt{3}$

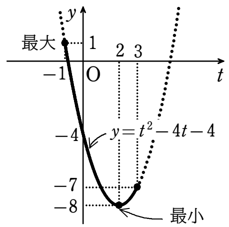
$-2\leqq x\leqq 1$ を満たす解は

$x=-1+\sqrt{3}$

以上から　$x=-1$ のとき最大値 1,

$x=-1+\sqrt{3}$ のとき最小値 -8





$\boxed{1}$

解答　(1)　$a<0$ のとき $x=0$ で最大値 $-a$，$0\leqq a\leqq 1$ のとき $x=2a$ で最大値 $4a^2-a$,

$1<a$ のとき $x=2$ で最大値 $7a-4$

(2)　$a<\dfrac{1}{2}$ のとき $x=2$ で最小値 $7a-4$，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき $x=0$，2 で最小値 $-\dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{1}{2}<a$ のとき $x=0$ で最小値 $-a$

解説

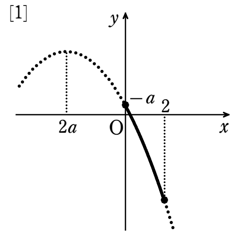
$y=-x^2+4ax-a=-(x-2a)^2+4a^2-a$　$(0\leqq x\leqq 2)$

$x=0$ のとき　$y=-a$，$x=2$ のとき　$y=7a-4$，$x=2a$ のとき　$y=4a^2-a$

(1)　[1]　$2a<0$ すなわち $a<0$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最大値 $-a$　をとる。



[2]　$0\leqq 2a\leqq 2$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

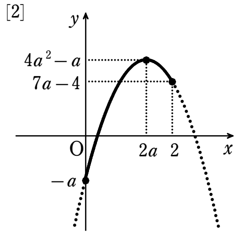
グラフは [図] の実線部分のようになる。

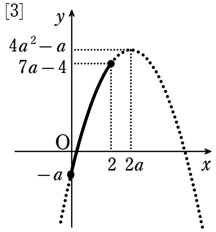
よって，$x=2a$ で最大値 $4a^2-a$　をとる。

[3]　$2<2a$　すなわち $1<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最大値 $7a-4$　をとる。



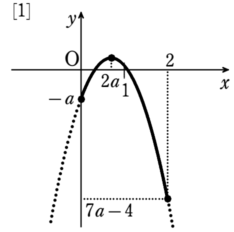


(2)　定義域の中央の値は 1

[1]　$2a<1$ すなわち $a<\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最小値 $7a-4$　をとる。



[2]　$2a=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{2}$ のとき

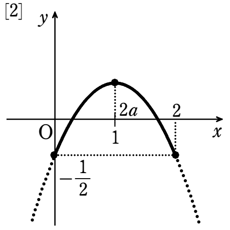
グラフは [図] の実線部分のようになる。

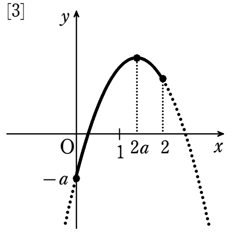
よって，$x=0$，2 で最小値 $-\dfrac{1}{2}$　をとる。

[3]　$2a>1$ すなわち $a>\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最小値 $-a$　をとる。





$\boxed{2}$

解答　(1)　$a<1$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2-2a-2,
$1\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=2$ で最小値 -3,
$2<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-4a+1

(2)　$a<\frac{3}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a+1,

$a=\frac{3}{2}$ のとき　$x=\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{11}{4}$,

$a>\frac{3}{2}$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a-2

解説

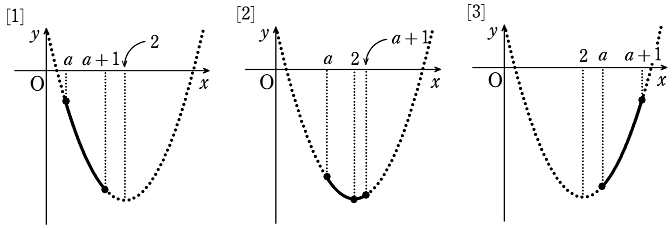
関数の式を変形すると　　$y=(x-2)^2-3$　$(a\leqq x\leqq a+1)$

また　　$x=a$ のとき　$y=a^2-4a+1$,　　$x=a+1$ のとき　$y=a^2-2a-2$,
$x=2$ のとき　$y=-3$

(1)　[1]　$a+1<2$ すなわち $a<1$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。
よって　　$x=a+1$ で最小値 a^2-2a-2

[2]　$a\leqq 2\leqq a+1$ すなわち $1\leqq a\leqq 2$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。
よって　　$x=2$ で最小値 -3

[3]　$2<a$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。
よって　　$x=a$ で最小値 a^2-4a+1



(2)　定義域の中央の値は $a+\frac{1}{2}$

[1]　$a+\frac{1}{2}<2$ すなわち $a<\frac{3}{2}$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

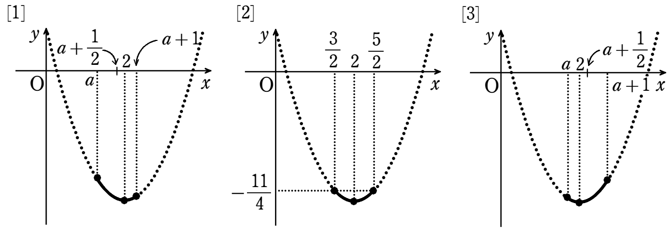
よって　　$x=a$ で最大値 a^2-4a+1

[2]　$a+\frac{1}{2}=2$ すなわち $a=\frac{3}{2}$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{11}{4}$

[3]　$a+\frac{1}{2}>2$ すなわち $a>\frac{3}{2}$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a-2



$\boxed{3}$

解答　(1)　$a<-1$ のとき　$g(a)=a^2+3a-8$,　　$-1\leqq a\leqq 3$ のとき　$g(a)=a-9$,
$3<a$ のとき　$g(a)=a^2-5a$
$a<1$ のとき　$G(a)=a^2-5a$,　　$a=1$ のとき　$G(a)=-4$,
$a>1$ のとき　$G(a)=a^2+3a-8$

(2)　$g(a)$ の最小値は $a=-\frac{3}{2}$ のとき $-\frac{41}{4}$，$G(a)$ の最小値は $a=1$ のとき -4

解説

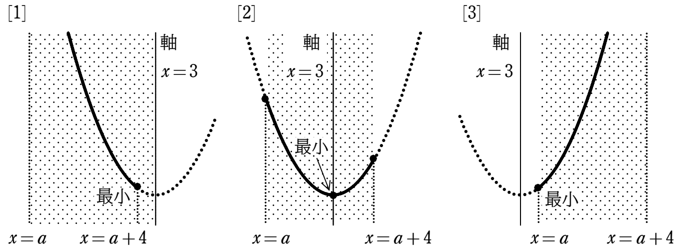
(1)　関数の式を変形すると　　$f(x)=x^2-6x+a=(x-3)^2+a-9$
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=3$ である。
また，$a\leqq x\leqq a+4$ の中央の値は　　$x=a+2$
$f(a)=a^2-6a+a=a^2-5a$,
$f(a+4)=(a+4-3)^2+a-9=a^2+3a-8$

最小値 $g(a)$ について

[1]　$a+4<3$　すなわち　$a<-1$ のとき　　　$g(a)=f(a+4)=a^2+3a-8$

[2]　$a\leqq 3\leqq a+4$　すなわち　$-1\leqq a\leqq 3$ のとき　　$g(a)=f(3)=a-9$

[3]　$3<a$ のとき　　$g(a)=f(a)=a^2-5a$

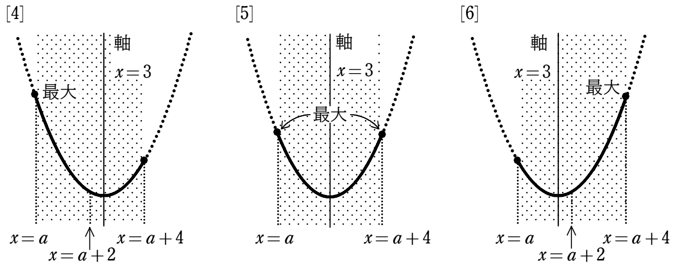


最大値 $G(a)$ について

[4]　$a+2<3$　すなわち　$a<1$ のとき　　$G(a)=f(a)=a^2-5a$

[5]　$3=a+2$　すなわち　$a=1$ のとき　　$G(a)=f(1)=f(5)=-4$

[6]　$a+2>3$　すなわち　$a>1$ のとき　　$G(a)=f(a+4)=a^2+3a-8$



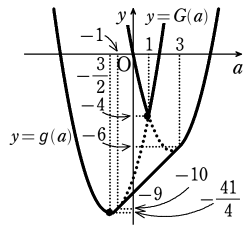
(2)　$f(a)=a^2-5a=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

$f(a+4)=a^2+3a-8=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{41}{4}$

$y=g(a)$，$y=G(a)$ のグラフをかくと，右の図のようになる。したがって，

$g(a)$ の最小値は　　$a=-\frac{3}{2}$ のとき　$-\frac{41}{4}$

$G(a)$ の最小値は　　$a=1$ のとき　-4



$\boxed{4}$

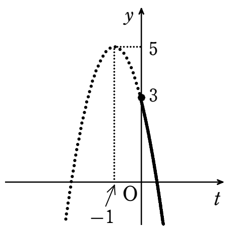
解答　(1)　$x=0$ のとき最大値 3，最小値はない
(2)　$x=\pm 1$ で最大値 5，最小値はない

解説

(1)　$t=x^2$ とおくと
$t\geqq 0$　……①

また　　$y=-2(x^2)^2-4x^2+3$
$=-2t^2-4t+3$
$=-2(t+1)^2+5$

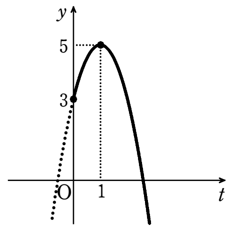
よって，① の範囲の t について，y は $t=0$
すなわち $x=0$ のとき最大値 3 をとる。
最小値はない。



(2)　$x^2=t$ とおくと，$x^2\geqq 0$ であるから，t の変域は　　$t\geqq 0$　……①

また　　$y=-2t^2+4t+3$
$=-2(t-1)^2+5$

① における t の関数 y のグラフは，右の図の実線部分である。
① の範囲で，y は
$t=1$ で最大値 5 をとり，最小値はない。
$t=1$ のとき　　$x^2=1$
これを解いて　　$x=\pm 1$
したがって，$x=\pm 1$ で最大値 5 をとり，最小値はない。



$\boxed{5}$

解答　(1)　$x=\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{71}{64}$，最小値はない

(2)　$x=3$ のとき最大値 3，$x=3\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 -6

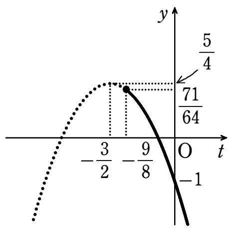
解説

(1)　$2x^2-3x=t$ とおくと　　$t=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$

よって，t の変域は　　$t \geqq -\dfrac{9}{8}$　……①

また　　$y=-t^2-3t-1$

$=-\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$



① における t の関数 y のグラフは，右の図の実線部分である。

① の範囲で，y は

$t=-\dfrac{9}{8}$ で最大値 $\dfrac{71}{64}$ をとり，最小値はない。

$t=-\dfrac{9}{8}$ のとき　　$-\dfrac{9}{8}=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$

すなわち　　$\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2=0$　　よって　　$x=\dfrac{3}{4}$

したがって，$x=\dfrac{3}{4}$ で最大値 $\dfrac{71}{64}$ をとり，最小値はない。

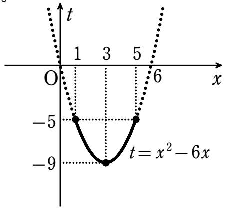
(2)　$x^2-6x=t$ とおくと　　$t=(x-3)^2-9$

$1 \leqq x \leqq 5$ であるから　　$-9 \leqq t \leqq -5$　……①

y を t の式で表すと

$y=t^2+12t+30$

$=(t+6)^2-6$



① の範囲において，y は $t=-9$ で最大値 3，

$t=-6$ で最小値 -6 をとる。

$t=-9$ のとき　　$(x-3)^2-9=-9$

ゆえに　　$(x-3)^2=0$

よって　　$x=3$

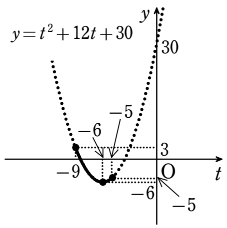
$t=-6$ のとき　　$(x-3)^2-9=-6$

ゆえに　　$(x-3)^2=3$

よって　　$x=3\pm\sqrt{3}$

以上から　　$x=3$ のとき最大値 3，

$x=3\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 -6



$\boxed{1}$

解答　(1)　$1<a<2$ のとき　$x=a$ で最大値 $-2a^2+8a+1$，

$2 \leqq a$ のとき　$x=2$ で最大値 9

(2)　$1<a<3$ のとき　$x=1$ で最小値 7，

$a=3$ のとき　$x=1$，3 で最小値 7，

$a>3$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2+8a+1$

解説

関数の式を変形すると　　$y=-2(x-2)^2+9$　$(1 \leqq x \leqq a)$

また　　$x=1$ のとき　$y=7$，　$x=a$ のとき　$y=-2a^2+8a+1$，

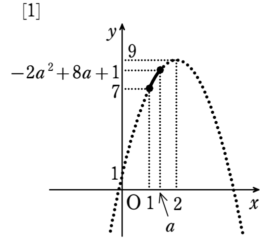
$x=2$ のとき　$y=9$

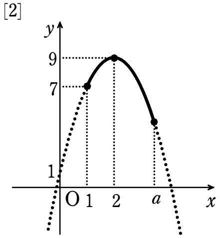
(1)　[1]　$1<a<2$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=a$ で最大値 $-2a^2+8a+1$

[2]　$2 \leqq a$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=2$ で最大値 9



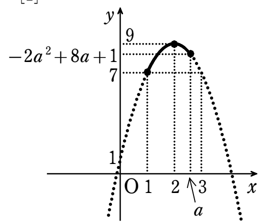


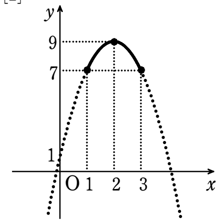
(2)　[1]　$1<a<3$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=1$ で最小値 7

[2]　$a=3$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=1$，3 で最小値 7

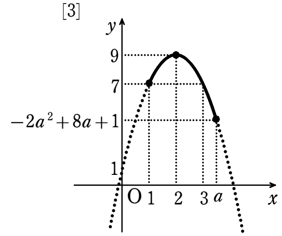




[3]　$a>3$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって

$x=a$ で最小値 $-2a^2+8a+1$



$\boxed{2}$

解答　(1)　$a<-2$ のとき　$M=a^2-a-1$，　$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき　$M=\dfrac{5}{4}a^2$，

$0<a$ のとき　$M=a^2$　　(2)　$a=-2$，$\sqrt{5}$

解説

(1)　関数の式を変形すると　　$y=-\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}a^2$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

また　　$x=0$ のとき　$y=a^2$，　$x=1$ のとき　$y=a^2-a-1$，

$x=-\dfrac{a}{2}$ のとき　$y=\dfrac{5}{4}a^2$

[1]　$-\dfrac{a}{2}<0$ すなわち $0<a$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

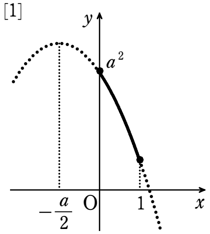
よって，y は $x=0$ で最大となるから　　$M=a^2$

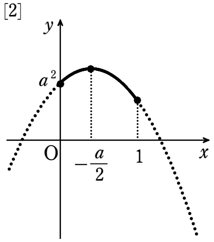
[2]　$0 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 1$ すなわち $-2 \leqq a \leqq 0$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

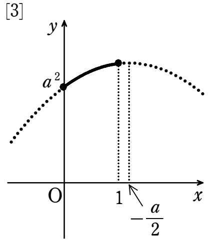
よって，y は $x=-\dfrac{a}{2}$ で最大となるから　　$M=\dfrac{5}{4}a^2$

[3]　$1<-\dfrac{a}{2}$ すなわち $a<-2$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって，y は $x=1$ で最大となるから　　$M=a^2-a-1$







以上をまとめて

$a<-2$ のとき　$M=a^2-a-1$，　$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき　$M=\dfrac{5}{4}a^2$，

$0<a$ のとき　$M=a^2$

(2)　(1) の結果を利用する。

[1]　$a<-2$ のとき，$M=5$ から　　$a^2-a-1=5$　　よって　　$a^2-a-6=0$

左辺を因数分解して　　$(a+2)(a-3)=0$　　ゆえに　　$a=-2$，3

これらは $a<-2$ を満たさない。

[2]　$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき，$M=5$ から　　$\dfrac{5}{4}a^2=5$　　よって　　$a^2=4$

これを解いて　$a=\pm 2$　　$-2 \leqq a \leqq 0$ を満たすのは　$a=-2$

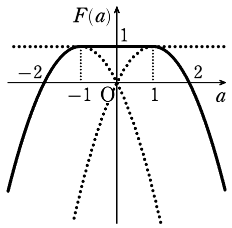
[3]　$0<a$ のとき，$M=5$ から　$a^2=5$

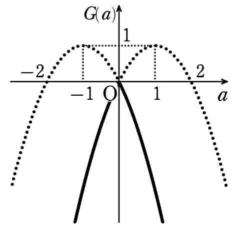
これを解いて　$a=\pm\sqrt{5}$　　$a>0$ を満たすのは　$a=\sqrt{5}$

[1]～[3] から，求める a の値は　$a=-2,\ \sqrt{5}$

$\boxed{3}$

解答　［図］





解説

$$f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$$

ゆえに，２次関数 $f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=1$ である。

$a \leqq x \leqq a+2$ の中央は　$x=a+1$

また　$f(a)=-a^2+2a$

$f(a+2)=-(a+1)^2+1=-a^2-2a$

$F(a)$ について

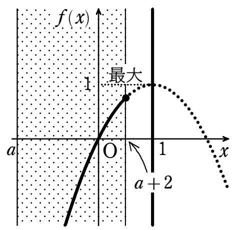
[1]　$a+2<1$ すなわち　$a<-1$ のとき

$x=a+2$ で最大値をとるから

$F(a)=f(a+2)$

$=-a^2-2a$

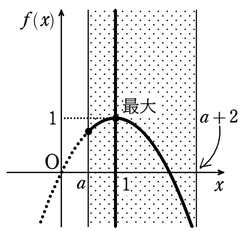
よって　$F(a)=-(a+1)^2+1$



[2]　$a \leqq 1 \leqq a+2$ すなわち　$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき

$x=1$ で最大値をとるから

$F(a)=f(1)=1$



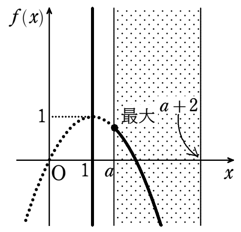
[3]　$a>1$ のとき

$x=a$ で最大値をとるから

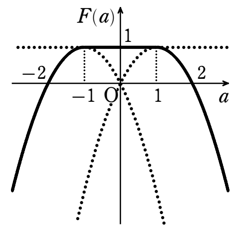
$F(a)=f(a)$

$=-a^2+2a$

よって　$F(a)=-(a-1)^2+1$



[1]～[3] から，a の関数 $F(a)$ のグラフは右の図の実線部分である。



$G(a)$ について

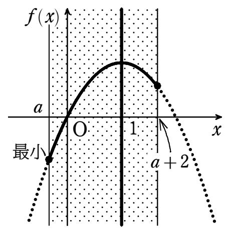
[4]　$a+1<1$ すなわち　$a<0$ のとき

$x=a$ で最小値をとるから

$G(a)=f(a)$

$=-a^2+2a$

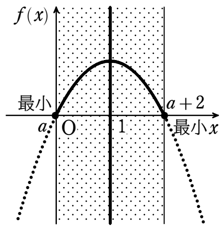
よって　$G(a)=-(a-1)^2+1$



[5]　$a+1=1$ すなわち　$a=0$ のとき

$x=0,\ 2$ で最小値をとるから

$G(a)=f(0)=f(2)=0$



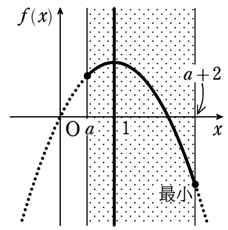
[6]　$1<a+1$ すなわち　$a>0$ のとき

$x=a+2$ で最小値をとるから

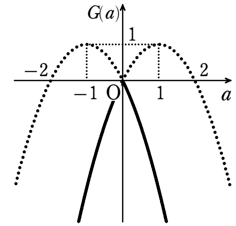
$G(a)=f(a+2)$

$=-a^2-2a$

よって　$G(a)=-(a+1)^2+1$



[4]～[6] から，a の関数 $G(a)$ のグラフは右の図の実線部分である。



$\boxed{4}$

解答　$m=4a^2+4a$，$a=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 -1

解説

$y=-x^2+4ax+4a$ を変形すると　$y=-(x-2a)^2+4a^2+4a$

よって，y は $x=2a$ で最大値 $4a^2+4a$ をとるから　$m=4a^2+4a$

これを変形すると　$m=4\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2-1$

したがって，m は $a=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 -1 をとる。

$\boxed{5}$

解答　$a=10-2\sqrt{5}$，$4+2\sqrt{5}$

解説

$$y=x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$$

よって，$y=x^2-ax$ のグラフは下に凸である放物線で，軸は直線 $x=\dfrac{a}{2}$，頂点の座標は

$\left(\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}\right)$ である。

$f(x)=x^2-ax$ とする。

[1]　$\dfrac{a}{2}<2$ すなわち $a<4$ のとき

最大値は　$f(5)=5^2-5a=-5a+25$

最小値は　$f(2)=2^2-2a=-2a+4$

よって　　$d=-5a+25-(-2a+4)=-3a+21$

$-3a+21=5$ とすると　　$a=\dfrac{16}{3}$

これは $a<4$ を満たさない。

[2]　$2\leqq\dfrac{a}{2}\leqq\dfrac{7}{2}$ すなわち $4\leqq a\leqq 7$ のとき

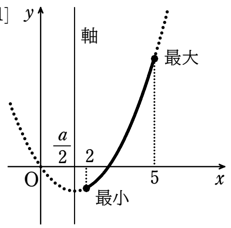
最大値は　$f(5)=-5a+25$，　最小値は　$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}$

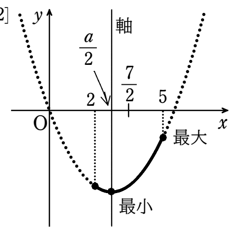
よって　　$d=-5a+25-\left(-\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{a^2}{4}-5a+25$

$\dfrac{a^2}{4}-5a+25=5$ とすると　　$a^2-20a+80=0$

これを解くと　　$a=10\pm2\sqrt{5}$

$4\leqq a\leqq 7$ を満たすのは　　$a=10-2\sqrt{5}$

[1]


[2]


[3]　$\dfrac{7}{2}<\dfrac{a}{2}\leqq5$ すなわち $7<a\leqq10$ のとき

最大値は　$f(2)=-2a+4$，最小値は　$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}$

よって　　$d=-2a+4-\left(-\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{a^2}{4}-2a+4$

$\dfrac{a^2}{4}-2a+4=5$ とすると　　$a^2-8a-4=0$

これを解くと　　$a=4\pm2\sqrt{5}$

$7<a\leqq10$ を満たすのは　　$a=4+2\sqrt{5}$

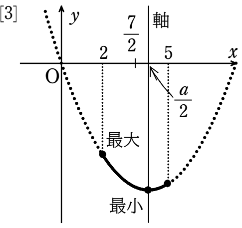
[4]　$\dfrac{a}{2}>5$ すなわち $a>10$ のとき

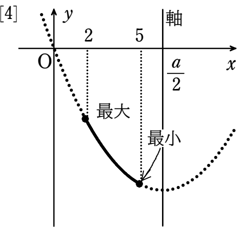
最大値は　$f(2)=-2a+4$，最小値は　$f(5)=-5a+25$

よって　　$d=-2a+4-(-5a+25)=3a-21$

$3a-21=5$ とすると　　$a=\dfrac{26}{3}$

これは $a>10$ を満たさない。

[3]


[4]


[1]～[4] から，求める a の値は　　$a=10-2\sqrt{5}$，$4+2\sqrt{5}$

$\boxed{1}$

解答　$a<-4$ のとき $\dfrac{a^2}{4}+4$，$a\geqq-4$ のとき $-2a$

解説

$x\geqq2$ のとき　　$f(x)=x^2-a(x-2)+\dfrac{a^2}{4}=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+2a$

したがって，頂点は　点 $\left(\dfrac{a}{2},\ 2a\right)$

$x<2$ のとき　　$f(x)=x^2+a(x-2)+\dfrac{a^2}{4}=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-2a$

したがって，頂点は　点 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -2a\right)$

[1]　$\dfrac{a}{2}\geqq2$ すなわち $a\geqq4$ のとき

図 [1] から，$x=-\dfrac{a}{2}$ で最小値 $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$

をとる。

[2]　$\dfrac{a}{2}<2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq2$ すなわち $-4\leqq a<4$

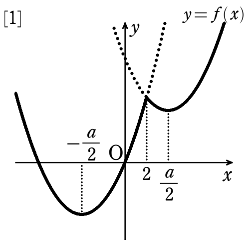
のとき

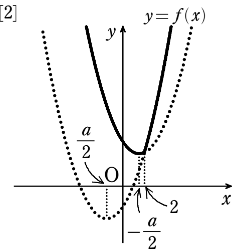
図 [2] から，$x=-\dfrac{a}{2}$ で最小値 $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$

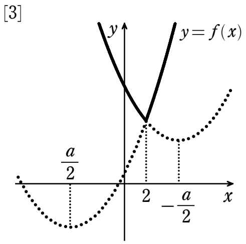
をとる。

[3]　$-\dfrac{a}{2}>2$ すなわち $a<-4$ のとき

図 [3] から，$x=2$ で最小値 $f(2)=\dfrac{a^2}{4}+4$ をとる。

[1]


[2]


[3]


[1]～[3] から　　$a<-4$ のとき　最小値 $\dfrac{a^2}{4}+4$

$a\geqq-4$ のとき　最小値 $-2a$

$\boxed{2}$

解答　$a=-\dfrac{14}{3}$，$b=1$

解説

$$y=x^2+ax+b=\left\{x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{a}{2}\right)^2+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$$

よって，グラフは頂点が点 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}+b\right)$，軸が直線 $x=-\dfrac{a}{2}$ で，下に凸の放物線

である。

ここで，$f(x)=x^2+ax+b$ とおく。

また，定義域 $0\leqq x\leqq 3$ の中央は $\frac{3}{2}$，

定義域 $0\leqq x\leqq 6$ の中央は 3 である。

[1] $-\frac{a}{2}\leqq\frac{3}{2}$ すなわち $a\geqq-3$ のとき

$0\leqq x\leqq 3$ の範囲では，$x=3$ で最大値をとるから

$f(3)=9+3a+b=1$

すなわち　$3a+b=-8$ ……①

$0\leqq x\leqq 6$ の範囲では，$x=6$ で最大値をとるから

$f(6)=36+6a+b=9$

すなわち　$6a+b=-27$ ……②

②−① から　$3a=-19$

よって　$a=-\frac{19}{3}$

これは，$a\geqq-3$ を満たさない。

[2] $\frac{3}{2}<-\frac{a}{2}<3$ すなわち $-6<a<-3$ のとき

$0\leqq x\leqq 3$ の範囲では，$x=0$ で最大値をとるから

$f(0)=b=1$ ……③

$0\leqq x\leqq 6$ の範囲では，$x=6$ で最大値をとるから

$f(6)=36+6a+b=9$ ……④

③ を ④ に代入して　$6a=-28$

よって　$a=-\frac{14}{3}$

これは，$-6<a<-3$ を満たす。

[3] $3\leqq-\frac{a}{2}$ すなわち $a\leqq-6$ のとき

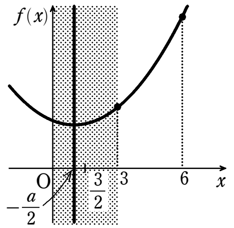
$0\leqq x\leqq 3$ の範囲では，$x=0$ で最大値をとる。

また，$0\leqq x\leqq 6$ の範囲でも，$x=0$ で最大値をとり，

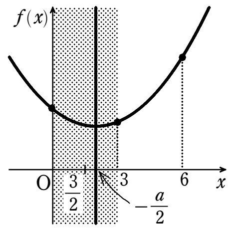
条件を満たさない。

[1]～[3] から　$a=-\frac{14}{3}$，$b=1$

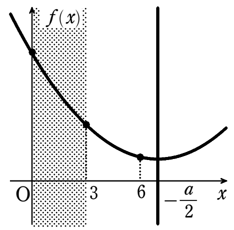
[1]



[2]



[3]



$\boxed{3}$

解答　(1) $x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$ のとき最大値 $\frac{29}{4}$，$x=2$ のとき最小値 1

(2) $x=0$ のとき最大値 10；$x=1$，3 のとき最小値 1

解説

(1) $x^2-4x=t$ とおくと　$t=(x-2)^2-4$

$0\leqq x\leqq 4$ であるから，t の変域は　$-4\leqq t\leqq 0$ ……①

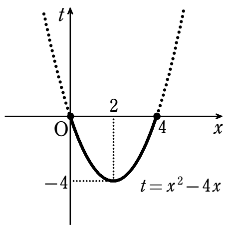
また　$y=\{(x^2-4x)+3\}\{-(x^2-4x)+2\}-2(x^2-4x)-1$

$=(t+3)(-t+2)-2t-1=-t^2-3t+5$

$=-\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$

したがって，① の範囲において，y は

$t=-\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{29}{4}$，$t=-4$ で最小値 1



をとる。

$t=-\frac{3}{2}$ のとき　$x^2-4x=-\frac{3}{2}$

よって　$2x^2-8x+3=0$

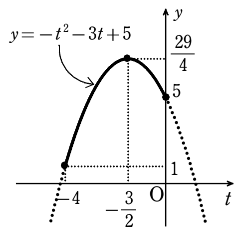
これを解いて　$x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$

$t=-4$ のとき　$x^2-4x=-4$

よって　$(x-2)^2=0$　ゆえに　$x=2$

よって　$x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$ のとき最大値 $\frac{29}{4}$，

$x=2$ のとき最小値 1



(2) $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ であるから，関数 $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 3$ における値域は

$1\leqq f(x)\leqq 5$

また　$f(f(x))=\{f(x)\}^2-4f(x)+5$

$=\{f(x)-2\}^2+1$

よって，$1\leqq f(x)\leqq 5$ の範囲において，$f(f(x))$ は，

$f(x)=5$ で最大値 10，$f(x)=2$ で最小値 1 をとる。

$f(x)=5$ のとき　$x^2-4x+5=5$

ゆえに　$x^2-4x=0$

これを解いて　$x=0$，4

$0\leqq x\leqq 3$ を満たすものは　$x=0$

$f(x)=2$ のとき　$x^2-4x+5=2$

よって　$x^2-4x+3=0$

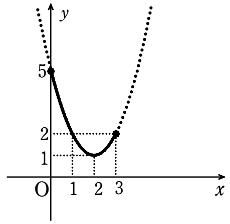
これを解いて　$x=1$，3

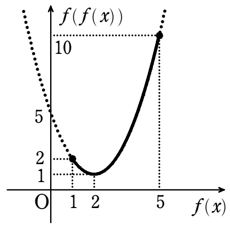
$x=1$，3 はともに $0\leqq x\leqq 3$ を満たす。

ゆえに　$x=0$ のとき最大値 10；

$x=1$，3 のとき最小値 1

$y=f(x)$ のグラフ





$\boxed{4}$

解答　(1) $p\geqq\frac{1}{3}$ のとき $m=-3p+2$，$p<\frac{1}{3}$ のとき $m=-9p^2+3p+1$

(2) $p=\frac{1}{6}$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$

解説

(1) $t=x^2-2x$ とおくと　$t=(x-1)^2-1$

t のとりうる値の範囲は　$t\geqq-1$

また　$y=(x^2-2x)^2+6p(x^2-2x)+3p+1$

$=t^2+6pt+3p+1$

$=(t+3p)^2-9p^2+3p+1$

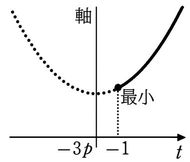
ゆえに，$y=t^2+6pt+3p+1$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-3p$ である。

[1] $-3p\leqq-1$ すなわち $p\geqq\frac{1}{3}$ のとき

y は $t=-1$ で最小値をとる。

よって　$m=(-1)^2+6p\cdot(-1)+3p+1$

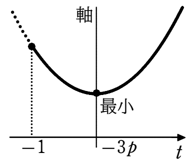
$=-3p+2$



[2] $-3p>-1$ すなわち $p<\frac{1}{3}$ のとき

y は $t=-3p$ で最小値をとる。

よって　$m=-9p^2+3p+1$

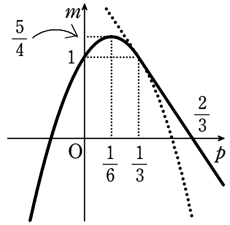


[1]，[2] から　$m=\begin{cases}-9p^2+3p+1 & \left(p<\frac{1}{3}\right)\\ -3p+2 & \left(p\geqq\frac{1}{3}\right)\end{cases}$

(2) $p<\frac{1}{3}$ のとき

$m=-9p^2+3p+1=-9\left(p-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{4}$

よって，p の関数 m のグラフは，右の図のようになるから，m は $p=\frac{1}{6}$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$ をとる。



$\boxed{1}$

解答　(1)　$k \geqq -\frac{5}{8}$　　(2)　$k=\frac{16}{3}$，$x=-\frac{4}{3}$

解説

２次方程式の判別式を D とする。

(1)　２次方程式が実数解をもつための条件は　　$D \geqq 0$

よって　　$D=(2k-1)^2-4\cdot1\cdot(k^2-3k-1)=8k+5 \geqq 0$

ゆえに　　$k \geqq -\frac{5}{8}$

(2)　２次方程式が重解をもつための条件は　　$D=0$

よって　　$\frac{D}{4}=4^2-3\cdot k=16-3k=0$　　　ゆえに　　$k=\frac{16}{3}$

また，重解は　　$x=-\frac{8}{2\cdot3}=-\frac{4}{3}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$(3-\sqrt{13}$，$0)$，$(3+\sqrt{13}$，$0)$　　(2)　$\left(\frac{1}{2}，0\right)$

解説

(1)　２次方程式 $x^2-6x-4=0$ の解は

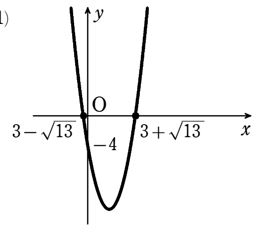
$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{52}}{2}=3\pm\sqrt{13}$$

よって，共有点の座標は

$(3-\sqrt{13}$，$0)$，$(3+\sqrt{13}$，$0)$

(1)



(2)　２次方程式 $-4x^2+4x-1=0$

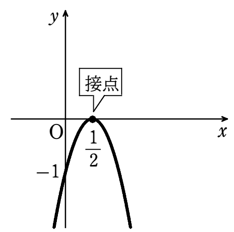
すなわち，$4x^2-4x+1=0$ の解は

左辺を因数分解して　　$(2x-1)^2=0$

ゆえに　　$2x-1=0$　　よって　　$x=\frac{1}{2}$

共有点の座標は　　$\left(\frac{1}{2}，0\right)$

(2)



$\boxed{3}$

解答　(1)　$k>3$　　(2)　$k=3$，接点の座標は $(3，0)$

解説

この２次関数の係数について

$D=(-2k)^2-4\cdot1\cdot(k^2-k+3)=4k-12=4(k-3)$　　とする。

(1)　グラフが x 軸と異なる２点で交わるための条件は　　$D>0$

よって　　$4(k-3)>0$　　　したがって　　$k>3$

(2)　グラフが x 軸と接するための条件は　　$D=0$

よって　　$4(k-3)=0$　　　したがって　　$k=3$

このとき，接点の x 座標は　　$x=-\frac{-2k}{2\cdot1}=k=3$

ゆえに，接点の座標は　　$(3，0)$

$\boxed{4}$

解答　$k<\frac{5}{2}$ のとき２個，$k=\frac{5}{2}$ のとき１個，$k>\frac{5}{2}$ のとき０個

解説

２次関数 $y=x^2-2x+2k-4$ について

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(2k-4)=-2k+5$

とすると，放物線 $y=x^2-2x+2k-4$ と x 軸の共有点の個数は

$D>0$　すなわち　$k<\frac{5}{2}$ のとき　２個

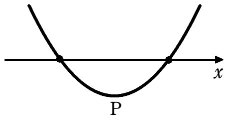
$D=0$　すなわち　$k=\frac{5}{2}$ のとき　１個

$D<0$　すなわち　$k>\frac{5}{2}$ のとき　０個

別解　$y=(x-1)^2+2k-5$ であるから，この放物線は下に凸で

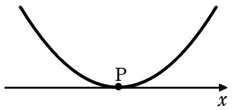
頂点Ｐの y 座標は $2k-5$ である。

Ｐが x 軸の下側にあるとき，共有点の個数は２個である。



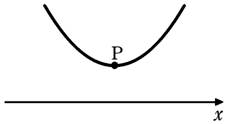
よって　$2k-5<0$　すなわち　$k<\frac{5}{2}$ のとき　２個

Ｐが x 軸上にあるとき，共有点の個数は１個である。



よって　$2k-5=0$　すなわち　$k=\frac{5}{2}$ のとき　１個

Ｐが x 軸の上側にあるとき，共有点の個数は０個である。



よって　$2k-5>0$　すなわち　$k>\frac{5}{2}$ のとき　０個

$\boxed{5}$

解答　(1)　$(-1，1)$，$(2，4)$　　(2)　$(2，0)$　　(3)　共有点はない

解説

(1)　$y=x^2$　……①，　$y=x+2$　……②

①，②から y を消去すると　　$x^2=x+2$　すなわち　$x^2-x-2=0$

よって　　$(x+1)(x-2)=0$　　　ゆえに　$x=-1，2$

②から　　$x=-1$ のとき $y=1$，　$x=2$ のとき $y=4$

したがって，共有点の座標は　　$(-1，1)$，$(2，4)$

(2)　$y=x^2-2x$　……①，　$y=2x-4$　……②

①，②から y を消去すると　　$x^2-2x=2x-4$　すなわち　$x^2-4x+4=0$

よって　　$(x-2)^2=0$　　　　ゆえに　$x=2$　　　このとき，②から　$y=0$

したがって，共有点の座標は　　$(2，0)$

(3)　$y=x^2+2x-1$　……①，　$y=x-2$　……②

①，②から y を消去すると　　$x^2+2x-1=x-2$　すなわち　$x^2+x+1=0$

この２次方程式について，判別式を D とすると　　$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

したがって，共有点はない。

$\boxed{6}$

解答　(1)　$a=4$　　(2)　$a>7$

解説

(1)　$y=x^2-2x+a$ ……①，$y=2x$ ……②とおく。

①，②から y を消去すると　　$x^2-2x+a=2x$

整理すると　　$x^2-4x+a=0$　……③

③について，判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot a=4-a$

放物線①と直線②が接するための条件は，２次方程式③が重解をもつことであるから　　$D=0$　　すなわち　　$a=4$

(2)　$y=x^2-2x+a$ ……①，$y=2x+3$ ……②とおく。

①，②から y を消去すると　　$x^2-2x+a=2x+3$

整理すると　　$x^2-4x+a-3=0$　……③

③について，判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(a-3)=-a+7$

放物線①と直線②が共有点をもたないための条件は，２次方程式③が実数解をもたないことであるから

$D<0$　　すなわち　　$a>7$

1

解答　(1)　$m<\dfrac{25}{4}$　　(2)　$m>\dfrac{17}{8}$　　(3)　$m\leqq 2$

解説

(1)　この２次方程式の判別式を D とすると

$$D=5^2-4\cdot1\cdot m=-4m+25$$

２次方程式が異なる２つの実数解をもつのは $D>0$ のときであるから

$$-4m+25>0$$

これを解いて　$m<\dfrac{25}{4}$

(2)　この２次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(m-1)=-8m+17$$

２次方程式が実数解をもたないのは $D<0$ のときであるから

$$-8m+17<0$$

これを解いて　$m>\dfrac{17}{8}$

(3)　この２次方程式の判別式を D とすると

$$D=6^2-4\cdot3\cdot(2m-1)=-24m+48$$

２次方程式が実数解をもつのは $D\geqq0$ のときであるから

$$-24m+48\geqq0$$

これを解いて　$m\leqq2$

2

解答　(1)　$\left(\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$　　(2)　$(1,\ 0)$

解説

(1)　共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2+3x-2=0$ の実数解である。

これを解くと　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

よって，共有点の座標は　$\left(\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$

(2)　共有点の x 座標は，２次方程式 $-x^2+2x-1=0$ の実数解である。

両辺に -1 を掛けて　$x^2-2x+1=0$

これを解くと　$x=1$

よって，共有点の座標は　$(1,\ 0)$

3

解答　(1)　$k>2$　　(2)　$k=2$，接点の座標は $(-1,\ 0)$

解説

この２次関数の係数について

$$D=\{2(k-1)\}^2-4\cdot1\cdot(k^2-3)=-8k+16=-8(k-2)$$　とする。

(1)　グラフが x 軸と共有点をもたないための条件は　$D<0$

よって　$-8(k-2)<0$　　したがって　$k>2$

(2)　グラフが x 軸と接するための条件は　$D=0$

よって　$-8(k-2)=0$　　したがって　$k=2$

このとき，接点の x 座標は　$x=-\dfrac{2(k-1)}{2\cdot1}=-k+1=-1$

ゆえに，接点の座標は　$(-1,\ 0)$

4

解答　$k<2$ のとき２個，$k=2$ のとき１個，$k>2$ のとき０個

解説

$y=2x^2-4x+2k-2$ の係数について

$$D=(-4)^2-4\cdot2\cdot(2k-2)=16-8(2k-2)=16(2-k)$$

とする。この符号を調べると

$D>0$ となるのは，$2-k>0$　すなわち　$k<2$ のとき。

$D=0$ となるのは，$2-k=0$　すなわち　$k=2$ のとき。

$D<0$ となるのは，$2-k<0$　すなわち　$k>2$ のとき。

よって，この２次関数のグラフと x 軸の共有点の個数は

$k<2$ のとき　２個，　$k=2$ のとき　１個，　$k>2$ のとき　０個

5

解答　(1)　$(-3,\ 9)$，$(2,\ 4)$　　(2)　$(-4,\ 1)$　　(3)　共有点はない

解説

(1)　$y=x^2$　……①，　$y=-x+6$　……②

①，② から y を消去すると　$x^2=-x+6$　すなわち　$x^2+x-6=0$

よって　$(x+3)(x-2)=0$　　ゆえに　$x=-3,\ 2$

② から　$x=-3$ のとき $y=9$，　$x=2$ のとき $y=4$

したがって，共有点の座標は　$(-3,\ 9)$，$(2,\ 4)$

(2)　$y=x^2+6x+9$　……①，　$y=-2x-7$　……②

①，② から y を消去すると　$x^2+6x+9=-2x-7$　すなわち　$x^2+8x+16=0$

よって　$(x+4)^2=0$　　ゆえに　$x=-4$　　このとき，② から　$y=1$

したがって，共有点の座標は　$(-4,\ 1)$

(3)　$y=x^2+2$　……①，　$y=2x-6$　……②

①，② から y を消去すると　$x^2+2=2x-6$　すなわち　$x^2-2x+8=0$

この２次方程式について，判別式を D とすると　$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot8=-28<0$

したがって，共有点はない。

6

解答　(1)　$m=4$　　(2)　$m<\dfrac{61}{4}$

解説

(1)　$y=x^2-3x+m$　……①，　$y=x$　……②

①，② から y を消去すると　$x^2-3x+m=x$

よって　$x^2-4x+m=0$

この２次方程式の判別式を D とすると，放物線 ① が直線 ② と接するための必要十分条件は　$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot m=0$　すなわち　$16-4m=0$

これを解いて　$m=4$

(2)　$y=x^2-3x+m$　……①，　$y=4x+3$　……②

①，② から y を消去すると　$x^2-3x+m=4x+3$

よって　$x^2-7x+m-3=0$

この２次方程式の判別式を D とすると，放物線 ① と直線 ② が異なる２点で交わるための必要十分条件は

$$D=(-7)^2-4\cdot1\cdot(m-3)>0$$　これを解いて　$m<\dfrac{61}{4}$

1

解答　(1)　$-7\leqq m<2$，$2<m$　　(2)　$m=-2,\ -1,\ 3$

解説

２次方程式の判別式を D とする。

(1)　２次方程式であるから　$m-2\neq0$　　よって　$m\neq2$

２次方程式が実数解をもつための条件は $D\geqq0$ であるから

$$\frac{D}{4}=\{-(m+1)\}^2-(m-2)(m+3)=m+7\geqq0$$

ゆえに　$m\geqq-7$　　よって　$-7\leqq m<2$，$2<m$

(2)　$m+1=0$ すなわち $m=-1$ のとき　$-4x-7=0$

よって，ただ１つの実数解 $x=-\dfrac{7}{4}$ をもつ。

$m\neq-1$ のとき

２次方程式がただ１つの実数解をもつための条件は $D=0$ であるから

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m+1)(2m-5)=-m^2+m+6=0$$

ゆえに　$(m+2)(m-3)=0$　　これを解いて　$m=-2,\ 3$

これらは $m\neq-1$ を満たす。

以上から，ただ１つの実数解をもつとき　$m=-2,\ -1,\ 3$

2

解答　(ア)　$\dfrac{5}{4}$　　(イ)　$\dfrac{3}{2}$

解説

判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(1-2k)^2-1\cdot(k+1)=4k^2-5k=k(4k-5)$

方程式が重解をもつから　$D=0$　　よって　$k(4k-5)=0$

ゆえに　$k=0,\ \dfrac{5}{4}$

このとき，重解は　$x=-\dfrac{2-4k}{2\cdot1}=2k-1$

$k=0,\ \dfrac{5}{4}$ のうち $2k-1>0$ を満たすものは　$k={}^{ア}\dfrac{5}{4}$

このとき，重解は　$2\cdot\dfrac{5}{4}-1={}^{イ}\dfrac{3}{2}$

3

解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{33}}{2}$　　(2)　$k=6,\ -2$

解説

(1)　$-2x^2-3x+3=0$ とすると　$2x^2+3x-3=0$

ゆえに　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$

よって，放物線が x 軸から切り取る線分の長さは

$$\frac{-3+\sqrt{33}}{4}-\frac{-3-\sqrt{33}}{4}=\frac{\sqrt{33}}{2}$$

(2)　$x^2-(k+2)x+2k=0$ とすると　$(x-2)(x-k)=0$　　よって　$x=2,\ k$

ゆえに，放物線が x 軸から切り取る線分の長さは　$|k-2|$

よって　$|k-2|=4$　　すなわち　$k-2=\pm4$　　したがって　$k=6,\ -2$

4

解答　$a=-2$，$b=4$

解説

$y=x^2+ax+b$ ……①，　$y=2x$ ……②，　$y=-4x+3$ ……③　とする。

①，② から y を消去すると　$x^2+ax+b=2x$

よって　$x^2+(a-2)x+b=0$

① と ② が接するとき，この２次方程式の判別式が０になるから

$$(a-2)^2-4\cdot 1\cdot b=0$$

ゆえに　$a^2-4a-4b+4=0$ ……④

①，③ から y を消去すると　$x^2+ax+b=-4x+3$

よって　$x^2+(a+4)x+b-3=0$

① と ③ が接するとき，この２次方程式の判別式が０になるから

$$(a+4)^2-4\cdot 1\cdot(b-3)=0$$

ゆえに　$a^2+8a-4b+28=0$ ……⑤

④−⑤ から　$-12a-24=0$　　これを解いて　$a=-2$

これを ④ に代入すると　$16-4b=0$　　ゆえに　$b=4$

したがって　$a=-2$，$b=4$

5

解答　$a<1$，$1<a<\dfrac{4}{3}$ のとき２個；$a=1$，$\dfrac{4}{3}$ のとき１個；$a>\dfrac{4}{3}$ のとき０個

解説

$x^2-4=a(x+1)^2$ とおくと　$(a-1)x^2+2ax+a+4=0$ ……①

この方程式の実数解の個数が，求める共有点の個数である。

[1]　$a=1$ のとき

① は　$2x+5=0$　　これを解いて　$x=-\dfrac{5}{2}$

よって，２つのグラフの共有点は　１個

[2]　$a\fallingdotseq 1$ のとき

① について　$\dfrac{D}{4}=a^2-(a-1)(a+4)=-3a+4$

$D>0$ すなわち $a<\dfrac{4}{3}$ のとき

$a\fallingdotseq 1$ であるから　$a<1$，$1<a<\dfrac{4}{3}$

このとき，２つのグラフの共有点は　２個

$D=0$ すなわち $a=\dfrac{4}{3}$ のとき

２つのグラフの共有点は　１個

$D<0$ すなわち $a>\dfrac{4}{3}$ のとき

２つのグラフは共有点をもたない。

[1]，[2] から，２つのグラフの共有点の個数は

$a<1$，$1<a<\dfrac{4}{3}$ のとき　２個　　$a=1$，$\dfrac{4}{3}$ のとき　１個　　$a>\dfrac{4}{3}$ のとき　０個

1

解答　$k=-6$，共通解 $x=2$

解説

共通解を $x=\alpha$ とおいて，方程式にそれぞれ代入すると

$$2\alpha^2+k\alpha+4=0 \text{ ……①，} \quad \alpha^2+\alpha+k=0 \text{ ……②}$$

①−②×2 から　$(k-2)\alpha+4-2k=0$　　ゆえに　$(k-2)(\alpha-2)=0$

よって　$k=2$　または　$\alpha=2$

[1]　$k=2$ のとき

２つの方程式はともに $x^2+x+2=0$ で，同じ方程式になる。

ところが，判別式を D とすると $D=1^2-4\cdot 1\cdot 2=-7<0$ であるから，実数解をもたない。

[2]　$\alpha=2$ のとき

② から　$2^2+2+k=0$　　よって　$k=-6$

このとき，２つの方程式は $2x^2-6x+4=0$，$x^2+x-6=0$ となり，$x=2$ は共通解である。

以上から　$k=-6$，共通解は $x=2$

2

解答　(1)　$q\geqq-\dfrac{49}{16}$　　(2)　$(2,\ -4)$ または $\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{9}{4}\right)$　　(3)　$(-4,\ -1)$

解説

(1)　$y=x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2}{4}+q$ であるから，放物線 $y=x^2+px+q$ の頂点は

点 $\left(-\dfrac{p}{2},\ -\dfrac{p^2}{4}+q\right)$

これが直線 $y=-\dfrac{1}{2}x-3$ 上にあるから　$-\dfrac{p^2}{4}+q=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{p}{2}\right)-3$

よって　$q=\dfrac{1}{4}p^2+\dfrac{1}{4}p-3$ ……①　　すなわち　$q=\dfrac{1}{4}\left(p+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{49}{16}$

したがって　$q\geqq-\dfrac{49}{16}$

(2)　放物線 $y=x^2+px+q$ が原点 $(0,\ 0)$ を通過するとき　$q=0$

① に代入して整理すると　$p^2+p-12=0$

よって　$(p+4)(p-3)=0$　　ゆえに　$p=-4,\ 3$

したがって，求める頂点の座標は　$(2,\ -4)$　または　$\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{9}{4}\right)$

(3)　放物線は x 軸と異なる２点で交わるから，$x^2+px+q=0$ の判別式を D とすると

$$D=p^2-4q>0$$

$x^2+px+q=0$ を解くと　$x=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

放物線と x 軸の２つの交点間の距離が２であるから

$$\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}-\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=2$$

よって　$\sqrt{p^2-4q}=2$　　両辺を平方して　$p^2-4q=4$

ゆえに　$q=\dfrac{1}{4}p^2-1$ ……②

① に代入して整理すると　$p=8$　　このとき，② から　$q=15$

$p=8$，$q=15$ は $p^2-4q>0$ を満たす。

したがって，求める頂点の座標は　$(-4,\ -1)$

別解　２次方程式 $x^2+px+q=0$ の２つの解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-p$，　$\alpha\beta=q$ ……①

放物線と x 軸の２つの交点間の距離を l とすると　$l=\beta-\alpha$

$l=2$ のとき　$\beta-\alpha=2$　　両辺を平方して　$(\beta-\alpha)^2=2^2$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ であるから，① より

$(-p)^2-4q=4$　すなわち　$p^2-4q=4$　(以後，上と同じ)

$\boxed{1}$

解答　(1)　$2\leqq x\leqq 6$　　(2)　$x<-3,\ 6<x$　　(3)　$-1<x<8$

(4)　$x\leqq 2-\sqrt{7},\ 2+\sqrt{7}\leqq x$　　(5)　$\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

(6)　$x<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<x$　　(7)　$x\leqq -2-\sqrt{10},\ -2+\sqrt{10}\leqq x$

解説

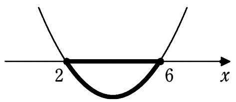
(1)　$x^2-8x+12=0$ を解く。

左辺を因数分解すると　$(x-2)(x-6)=0$

よって　$x=2,\ 6$

したがって，この２次不等式の解は

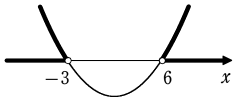
$2\leqq x\leqq 6$



(2)　$x^2-3x-18=0$ を解くと　$x=-3,\ 6$

よって，$x^2-3x-18>0$ の解は

$x<-3,\ 6<x$



(3)　両辺に -1 を掛けて

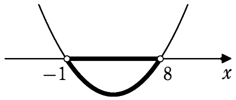
$x^2-7x-8<0$

$x^2-7x-8=0$ を解くと

$x=-1,\ 8$

よって，$-x^2+7x+8>0$ の解は

$-1<x<8$

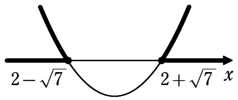


(4)　$x^2-4x-3=0$ を解くと

$x=2\pm\sqrt{7}$

よって，$x^2-4x-3\geqq 0$ の解は

$x\leqq 2-\sqrt{7},\ 2+\sqrt{7}\leqq x$



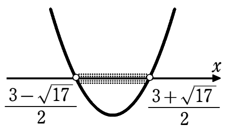
(5)　両辺に -1 を掛けて　$x^2-3x-2<0$

$x^2-3x-2=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

よって，不等式の解は

$\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$



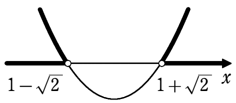
(6)　移項すると　$x^2-2x-1>0$

$x^2-2x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-1)}}{1}=1\pm\sqrt{2}$$

よって，この２次不等式の解は

$x<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<x$



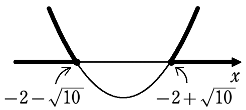
(7)　展開すると　$x^2-4x\leqq 2x^2-6$

式を整理すると　$x^2+4x-6\geqq 0$

$x^2+4x-6=0$ を解くと　$x=-2\pm\sqrt{10}$

よって，この２次不等式の解は

$x\leqq -2-\sqrt{10},\ -2+\sqrt{10}\leqq x$



$\boxed{2}$

解答　(1)　-5 以外のすべての実数　　(2)　すべての実数　　(3)　解はない

(4)　$x=\dfrac{1}{3}$　　(5)　すべての実数　　(6)　解はない

解説

(1)　$x^2+10x+25=(x+5)^2$ であるから，不等式は　$(x+5)^2>0$

よって，解は　-5 以外のすべての実数

(2)　$x^2-12x+36=(x-6)^2$ であるから，不等式は　$(x-6)^2\geqq 0$

よって，解は　すべての実数

(3)　$4x^2-4x+1=(2x-1)^2$ であるから，不等式は　$(2x-1)^2<0$

よって，解は　ない

(4)　整理すると　$9x^2-6x+1\leqq 0$

$9x^2-6x+1=(3x-1)^2$ であるから，不等式は　$(3x-1)^2\leqq 0$

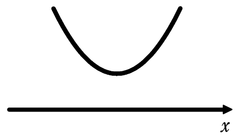
よって，解は　$x=\dfrac{1}{3}$

(5)　$2x^2-8x+13>0$ について

$D=(-8)^2-4\cdot 2\cdot 13=-40<0$

かつ，x^2 の係数は正である。

よって，与えられた不等式の解は　すべての実数



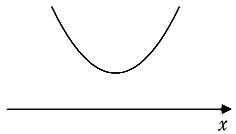
(6)　両辺を３で割って整理すると　$x^2-2x+2\leqq 0$

$x^2-2x+2\leqq 0$ について

$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2=-4<0$

かつ，x^2 の係数は正である。

よって，解はない



$\boxed{3}$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{2}<x\leqq 2$　　(2)　$x\leqq -4,\ \dfrac{1}{2}\leqq x<2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}<x$

解説

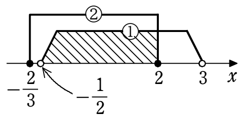
(1)　$2x^2-5x-3<0$ から　$(2x+1)(x-3)<0$

よって　$-\dfrac{1}{2}<x<3$　……①

$3x^2-4x-4\leqq 0$ から　$(3x+2)(x-2)\leqq 0$

よって　$-\dfrac{2}{3}\leqq x\leqq 2$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$-\dfrac{1}{2}<x\leqq 2$



(2)　$\begin{cases}2-3x-2x^2\leqq 4x-2 & \cdots\cdots ①\\ 4x-2<x^2 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$2x^2+7x-4\geqq 0$

よって　$(x+4)(2x-1)\geqq 0$

ゆえに　$x\leqq -4,\ \dfrac{1}{2}\leqq x$　……③

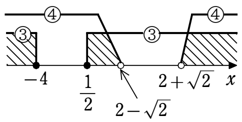
② から　$x^2-4x+2>0$

これを解くと，$x^2-4x+2=0$ の解が $x=2\pm\sqrt{2}$

であるから　$x<2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}<x$　……④

③，④ の共通範囲を求めて

$x\leqq -4,\ \dfrac{1}{2}\leqq x<2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}<x$



$\boxed{4}$

解答　$a=-1,\ b=-6$

解説

条件から，$y=ax^2+5x+b$ のグラフは $2<x<3$ の範囲で x 軸より上方にある。

すなわち，上に凸の放物線で，2 点 $(2,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を通る

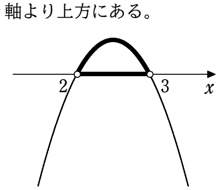
から　$a<0$　……①

$4a+10+b=0$　……②

$9a+15+b=0$　……③

②，③ を連立して解くと

$a=-1,\ b=-6$　　これは ① を満たす。



$\boxed{5}$

解答　(1)　$-2<m<2$　　(2)　$-8<m<0$

解説

(1)　２次不等式 $x^2-mx+1>0$ の x^2 の係数が正であるから，解がすべての実数であるための必要十分条件は　$D=(-m)^2-4\cdot 1\cdot 1<0$

すなわち　$m^2-4<0$　　これを解いて　$-2<m<2$

(2)　２次不等式 $-x^2+mx+2m<0$ の x^2 の係数が負であるから，解がすべての実数であるための必要十分条件は　$D=m^2-4\cdot(-1)\cdot 2m<0$

すなわち　$m(m+8)<0$　　これを解いて　$-8<m<0$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$a<x<a+1$

(2)　$a<2$ のとき $x<a,\ 2<x$；$a=2$ のとき 2 以外のすべての実数；

$2<a$ のとき $x<2,\ a<x$

解説

(1)　$x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$ から　$(x-a)\{x-(a+1)\}<0$

よって　$a<x<a+1$

(2)　$x^2-(a+2)x+2a>0$ から　$(x-a)(x-2)>0$

a と 2 の大小で場合を分ける。

[1]　$a<2$ のとき　$x<a,\ 2<x$

[2]　$a=2$ のとき

不等式は $(x-2)^2>0$ となる。

よって，求める解は　2 以外のすべての実数

[3]　$2<a$ のとき　$x<2,\ a<x$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x<-6,\ 1<x$　　(2)　$-5\leqq x\leqq -3$　　(3)　$x<1,\ \dfrac{3}{2}<x$

(4)　$-\dfrac{1}{2}<x<2$　　(5)　$x<\dfrac{5-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}<x$

(6)　$-2-\sqrt{2}\leqq x\leqq -2+\sqrt{2}$　　(7)　$2-\sqrt{11}\leqq x\leqq 2+\sqrt{11}$

(8)　$2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$　　(9)　$-\dfrac{5}{2}<x<1$　　(10)　$x<0,\ 2<x$

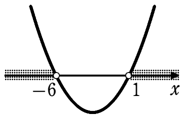
解説

(1)　$x^2+5x-6>0$ の左辺を因数分解して

$(x+6)(x-1)>0$

したがって

$x<-6,\ 1<x$

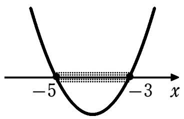


(2)　$x^2+8x+15\leqq 0$ の左辺を因数分解して

$(x+5)(x+3)\leqq 0$

したがって

$-5\leqq x\leqq -3$

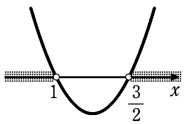


(3)　$2x^2-5x+3>0$ の左辺を因数分解して

$(x-1)(2x-3)>0$

すなわち　$2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)>0$

よって　$x<1,\ \dfrac{3}{2}<x$



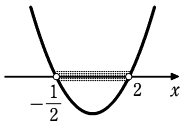
(4)　$2(x^2-1)<3x$ から　$2x^2-3x-2<0$

左辺を因数分解して

$(2x+1)(x-2)<0$

すなわち　$2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-2)<0$

よって　$-\dfrac{1}{2}<x<2$



(5)　$-x^2+5x-5<0$ の両辺に -1 を掛けて

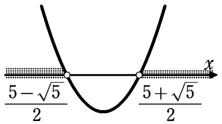
$x^2-5x+5>0$

$x^2-5x+5=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって，不等式の解は

$x<\dfrac{5-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}<x$

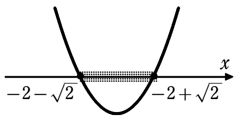


(6)　$x^2+4x+2=0$ を解くと

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot 2}}{1}$$

$=-2\pm\sqrt{2}$

よって，不等式の解は



$-2-\sqrt{2}\leqq x\leqq -2+\sqrt{2}$

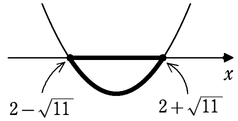
(7)　整理して　$-x^2+4x+7\geqq 0$

両辺に -1 を掛けて　$x^2-4x-7\leqq 0$

$x^2-4x-7=0$ を解くと　$x=2\pm\sqrt{11}$

よって，与えられた２次不等式の解は

$2-\sqrt{11}\leqq x\leqq 2+\sqrt{11}$



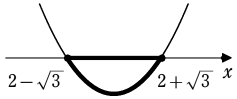
(8)　移項して整理すると　$x^2-4x+1\leqq 0$

$x^2-4x+1=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 1}}{1}=2\pm\sqrt{3}$$

よって，この２次不等式の解は

$2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$



(9)　右辺を展開すると　$3x^2<x^2-3x+5$

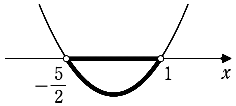
移項して整理すると　$2x^2+3x-5<0$

$2x^2+3x-5=0$ を解く。

左辺を因数分解すると　$(x-1)(2x+5)=0$

よって　$x=1,\ -\dfrac{5}{2}$

したがって，この２次不等式の解は　$-\dfrac{5}{2}<x<1$

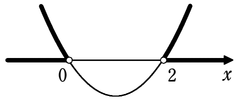


(10)　展開すると　$4x^2+4x+1+24>x^2+10x+25$

式を整理すると　$x^2-2x>0$

$x^2-2x=0$ を解くと　$x=0,\ 2$

よって，この２次不等式の解は　$x<0,\ 2<x$



$\boxed{2}$

解答　(1)　４以外のすべての実数　　(2)　$x=-\dfrac{1}{2}$　　(3)　すべての実数

(4)　解はない

解説

(1)　$x^2-8x+16=(x-4)^2$ から，不等式は　$(x-4)^2>0$

よって，解は　４以外のすべての実数

(2)　$4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ から，不等式は　$(2x+1)^2\leqq 0$

よって，解は　$x=-\dfrac{1}{2}$

(3)　$x^2-4x+8=(x-2)^2+4$ から，不等式は　$(x-2)^2+4\geqq 0$

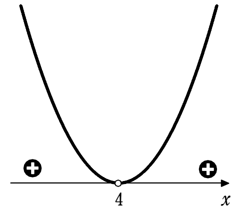
よって，解は　すべての実数

(4)　不等式の両辺に -1 を掛けて　$3x^2-12x+13\leqq 0$

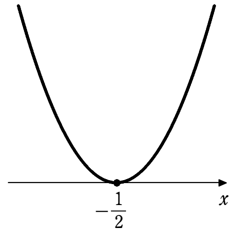
$3x^2-12x+13=3(x-2)^2+1$ から，不等式は　$3(x-2)^2+1\leqq 0$

よって，解は　ない

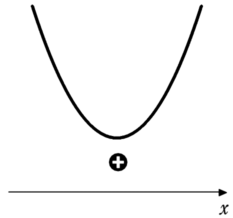
(1)



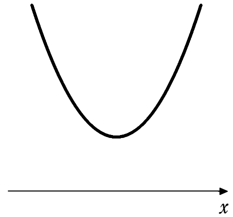
(2)



(3)



(4)



$\boxed{3}$

解答　(1)　$1<x<3,\ 4<x<5$　　(2)　$x\leqq -4,\ 3<x$　　(3)　$2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$

(4)　$-2<x\leqq 2,\ 4\leqq x<8$

解説

(1)　$\begin{cases} x^2-6x+5<0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-7x+12>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

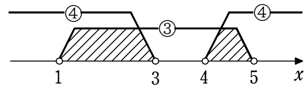
① から　$(x-1)(x-5)<0$

よって　$1<x<5$　……③

② から　$(x-3)(x-4)>0$

よって　$x<3,\ 4<x$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて　$1<x<3,\ 4<x<5$



(2)　$\begin{cases} x^2+4x\geqq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-9>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

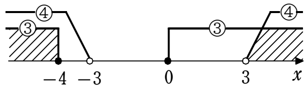
① から　$x(x+4)\geqq 0$

よって　$x\leqq -4,\ 0\leqq x$　……③

② から　$(x+3)(x-3)>0$

よって　$x<-3,\ 3<x$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて　$x\leqq -4,\ 3<x$



(3)　$\begin{cases} 1-4x+x^2\leqq 0 & \cdots\cdots ① \\ -3x^2+11x+4>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x^2-4x+1\leqq 0$

$x^2-4x+1=0$ を解くと　$x=2\pm\sqrt{3}$

よって，① の解は　$2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$　……③

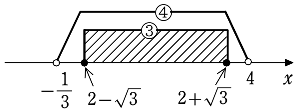
② から　$3x^2-11x-4<0$

$3x^2-11x-4=0$ を解くと　$x=-\frac{1}{3},\ 4$

よって，② の解は　$-\frac{1}{3}<x<4$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$



(4)　$-8\leqq x^2-6x<16$ から　$\begin{cases} -8\leqq x^2-6x & \cdots\cdots① \\ x^2-6x<16 & \cdots\cdots② \end{cases}$

① から　$x^2-6x+8\geqq 0$　　よって　$(x-2)(x-4)\geqq 0$

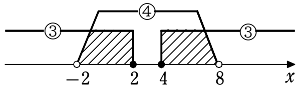
ゆえに　$x\leqq 2,\ 4\leqq x$　……③

② から　$x^2-6x-16<0$

よって　$(x+2)(x-8)<0$

ゆえに　$-2<x<8$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて　$-2<x\leqq 2,\ 4\leqq x<8$



$\boxed{4}$

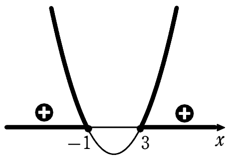
解答　(1)　$a=-2,\ b=-3$　　(2)　$a=-2,\ b=4$

解説

(1)　条件から，2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフは，$x\leqq -1,\ 3\leqq x$ のときだけ x 軸を含む上側にある。すなわち，下に凸の放物線で 2 点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を通るから

$1-a+b=0,\ 9+3a+b=0$

これを解いて　$a=-2,\ b=-3$



別解　$x\leqq -1,\ 3\leqq x$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$(x+1)(x-3)\geqq 0$

左辺を展開して　$x^2-2x-3\geqq 0$

x^2 の係数は 1 であるから，$x^2+ax+b\geqq 0$ の係数と比較して　$a=-2,\ b=-3$

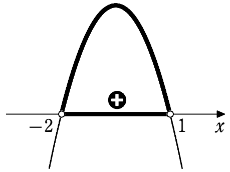
(2)　条件から，2 次関数 $y=ax^2-2x+b$ のグラフは，$-2<x<1$ のときだけ x 軸の上側にある。すなわち，上に凸の放物線で 2 点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ 0)$ を通るから

$a<0,\ 0=4a+4+b$　……①

$0=a-2+b$　……②

①，② を解いて　$a=-2,\ b=4$

これは，$a<0$ を満たす。



$\boxed{5}$

解答　(1)　$1-2\sqrt{3}<m<1+2\sqrt{3}$　　(2)　$m\leqq -1,\ 0\leqq m$

解説

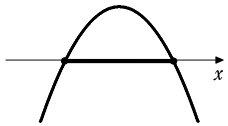
(1)　x^2 の係数は正であるから，この 2 次不等式の解がすべての実数となるための必要十分条件は　$D=\{-(m-1)\}^2-4\cdot 1\cdot 3<0$　すなわち　$m^2-2m-11<0$

これを解いて　$1-2\sqrt{3}<m<1+2\sqrt{3}$

(2)　この 2 次不等式が解をもつための必要十分条件は，$y=-x^2+2mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつことである。

すなわち　$D=(2m)^2-4\cdot(-1)\cdot m\geqq 0$

よって　$4(m^2+m)\geqq 0$



ゆえに　$m(m+1)\geqq 0$

したがって　$m\leqq -1,\ 0\leqq m$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$a>-1$ のとき　$x<-a,\ 1<x$

$a=-1$ のとき　1 以外のすべての実数

$a<-1$ のとき　$x<1,\ -a<x$

(2)　$a>0$ のとき　$-a\leqq x\leqq 2a$，　$a=0$ のとき　$x=0$

$a<0$ のとき　$2a\leqq x\leqq -a$

解説

(1)　左辺を因数分解すると　$(x+a)(x-1)>0$　……①

[1]　$-a<1$ すなわち $a>-1$ のとき

① の解は　$x<-a,\ 1<x$

[2]　$-a=1$ すなわち $a=-1$ のとき

① は $(x-1)^2>0$ となり，解は　1 以外のすべての実数。

[3]　$-a>1$ すなわち $a<-1$ のとき

① の解は　$x<1,\ -a<x$

(2)　左辺を因数分解すると　$(x+a)(x-2a)\leqq 0$　……①

[1]　$-a<2a$ すなわち $a>0$ のとき

① の解は　$-a\leqq x\leqq 2a$

[2]　$-a=2a$ すなわち $a=0$ のとき

① は $x^2\leqq 0$ となり，解は　$x=0$

[3]　$-a>2a$ すなわち $a<0$ のとき

① の解は　$2a\leqq x\leqq -a$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x<-5,\ 4<x$　　(2)　$x\leqq -2,\ 0\leqq x$

解説

(1)　[1]　$x\geqq 1$ のとき　$x^2-3(x-1)>7$

よって　$x^2-3x-4>0$

ゆえに　$(x+1)(x-4)>0$

よって　$x<-1,\ 4<x$

$x\geqq 1$ との共通範囲は　$x>4$　……①

[2]　$x<1$ のとき　$x^2+3(x-1)>7$

よって　$x^2+3x-10>0$

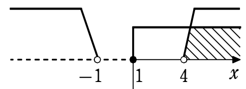
ゆえに　$(x+5)(x-2)>0$

よって　$x<-5,\ 2<x$

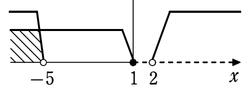
$x<1$ との共通範囲は　$x<-5$　……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　$x<-5,\ 4<x$

[1]



[2]



(2)　$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ であるから

$x^2-2x-3\geqq 0$ の解は　$x\leqq -1,\ 3\leqq x$

$x^2-2x-3<0$ の解は　$-1<x<3$

[1]　$x\leqq -1,\ 3\leqq x$ のとき，不等式は

$x^2-2x-3\geqq 3-x$

ゆえに　$x^2-x-6\geqq 0$

よって　$(x+2)(x-3)\geqq 0$

したがって　$x\leqq -2,\ 3\leqq x$　……①

これは $x\leqq -1,\ 3\leqq x$ を満たす。

[2]　$-1<x<3$ のとき，不等式は

$-(x^2-2x-3)\geqq 3-x$

ゆえに　$x^2-3x\leqq 0$

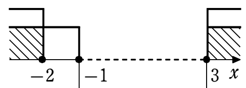
よって　$x(x-3)\leqq 0$

したがって　$0\leqq x\leqq 3$

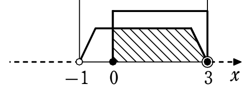
$-1<x<3$ との共通範囲は　$0\leqq x<3$　……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　$x\leqq -2,\ 0\leqq x$

[1]



[2]



別解　不等式から　$x^2-2x-3\leqq -(3-x)$　または　$3-x\leqq x^2-2x-3$

$x^2-2x-3\leqq -(3-x)$ を解くと　$0\leqq x\leqq 3$　……①

$3-x\leqq x^2-2x-3$ を解くと　$x\leqq -2,\ 3\leqq x$　……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　$x\leqq -2,\ 0\leqq x$

$\boxed{2}$

解答　$m<2,\ 10<m$ のとき 2 個，　$m=2,\ 10$ のとき 1 個，　$2<m<10$ のとき 0 個

解説

$y=x^2+(m-4)x+m-1$ について

$$D=(m-4)^2-4\cdot 1\cdot(m-1)=m^2-12m+20$$
$$=(m-2)(m-10)$$

この符号を調べると

$m<2,\ 10<m$ のとき　$D>0$　　このとき，共有点の個数は　2 個

$m=2,\ 10$ のとき　$D=0$　　このとき，共有点の個数は　1 個

$2<m<10$ のとき　$D<0$　　このとき，共有点の個数は　0 個

3

解答　(1)　$p\leqq -2,\ 2\leqq p$　(2)　$p\leqq 0,\ 4\leqq p$　(3)　$p\leqq -2,\ 4\leqq p$
(4)　$p\leqq 0,\ 2\leqq p$

解説

2つの2次方程式 $x^2+px+1=0$ ……①，$x^2+px+p=0$ ……② の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると　$D_1=p^2-4\cdot1\cdot1=p^2-4$

$D_2=p^2-4\cdot1\cdot p=p^2-4p$

(1)　① が実数解をもつための必要十分条件は

$D_1\geqq 0$　すなわち　$p^2-4\geqq 0$

よって　$(p+2)(p-2)\geqq 0$　ゆえに　$p\leqq -2,\ 2\leqq p$ ……③

(2)　② が実数解をもつための必要十分条件は

$D_2\geqq 0$　すなわち　$p^2-4p\geqq 0$

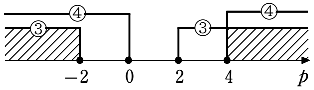
よって　$p(p-4)\geqq 0$　ゆえに　$p\leqq 0,\ 4\leqq p$ ……④

(3)　①，② がともに実数解をもつための必要十分条件は

$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$

よって，③ と ④ の共通範囲を求めて

$p\leqq -2,\ 4\leqq p$

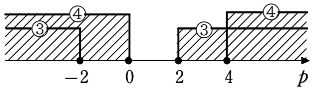


(4)　①，② のうち，少なくとも一方が実数解をもつための必要十分条件は

$D_1\geqq 0$ または $D_2\geqq 0$

よって，③ または ④ の範囲を求めて

$p\leqq 0,\ 2\leqq p$



4

解答　$a>1$

解説

この2次不等式の解がすべての実数であるための必要十分条件は

x^2 の係数について　$a>0$ ……①

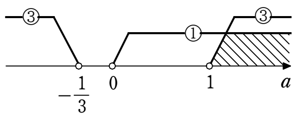
かつ　$D=(a-1)^2-4\cdot a(a-1)<0$ ……②

② から　$(a-1)\{(a-1)-4a\}<0$

すなわち　$(a-1)(-3a-1)<0$

よって　$(a-1)(3a+1)>0$

ゆえに　$a<-\frac{1}{3},\ 1<a$ ……③



① と ③ の共通範囲を求めて　$a>1$

5

解答　(ア)　-8　(イ)　15

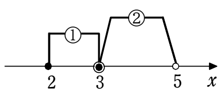
解説

不等式 ① から　$(x-2)(x-3)\leqq 0$　これを解いて　$2\leqq x\leqq 3$

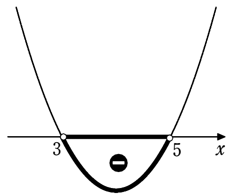
①，② を同時に満たす x の値はなく，① または ② を満たす x の値の範囲が $2\leqq x<5$ であるから，

不等式 ② の解は　$3<x<5$ ……[A]

となる。



[A] は，2次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフが $3<x<5$ のときだけ x 軸の下側にあること，すなわち下に凸の放物線が2点 (3, 0)，(5, 0) を通ることと同じである。



ゆえに　$3^2+3a+b=0$ ……③

$5^2+5a+b=0$ ……④

④−③ から　$2a+16=0$

よって　$a={}^{ア}-8$

これを ③ に代入して　$9-24+b=0$

よって　$b={}^{イ}15$

別解　(後半)　$3<x<5$ を解とする2次不等式の1つは　$(x-3)(x-5)<0$

左辺を展開して　$x^2-8x+15<0$ ……⑤

② と ⑤ の係数を比較して　$a={}^{ア}-8,\ b={}^{イ}15$

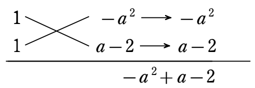
6

解答　$-2<a<1$ のとき　$a^2\leqq x\leqq -a+2$；$a=-2$ のとき　$x=4$；
$a=1$ のとき　$x=1$；$a<-2,\ 1<a$ のとき　$-a+2\leqq x\leqq a^2$

解説

不等式から　$x^2-(a^2-a+2)x-a^2(a-2)\leqq 0$

したがって　$(x-a^2)\{x+(a-2)\}\leqq 0$ ……①



[1]　$a^2<-(a-2)$ のとき

$a^2+a-2<0$ から　$(a+2)(a-1)<0$

よって　$-2<a<1$

このとき，① の解は　$a^2\leqq x\leqq -a+2$

[2]　$a^2=-(a-2)$ のとき

$a^2+a-2=0$ から　$(a+2)(a-1)=0$

よって　$a=-2,\ 1$

$a=-2$ のとき　① は $(x-4)^2\leqq 0$ となり　$x=4$

$a=1$ のとき　① は $(x-1)^2\leqq 0$ となり　$x=1$

[3]　$a^2>-(a-2)$ のとき

$a^2+a-2>0$ から　$(a+2)(a-1)>0$

よって　$a<-2,\ 1<a$

このとき，① の解は　$-a+2\leqq x\leqq a^2$

以上から　$-2<a<1$ のとき　$a^2\leqq x\leqq -a+2$

$a=-2$ のとき　$x=4$

$a=1$ のとき　$x=1$

$a<-2,\ 1<a$ のとき　$-a+2\leqq x\leqq a^2$

1

解答　$x<-\sqrt{5},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{5}<x$

解説

$x^2=t$ とおくと，不等式は　$2t^2-11t+5>0$

ゆえに　$(t-5)(2t-1)>0$　これを解くと　$t<\frac{1}{2},\ 5<t$

$x^2\geqq 0$ であるから　$t\geqq 0$

よって　$0\leqq t<\frac{1}{2},\ 5<t$　すなわち　$0\leqq x^2<\frac{1}{2},\ 5<x^2$

$0\leqq x^2<\frac{1}{2}$ を解くと

$0\leqq x^2$ から　x はすべての実数

$x^2<\frac{1}{2}$ から　$x^2-\frac{1}{2}<0$　因数分解して　$\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$

ゆえに　$-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

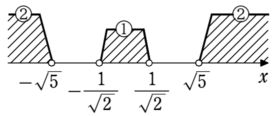
よって，$0\leqq x^2<\frac{1}{2}$ の解は　$-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ……①

$5<x^2$ を解くと　$x^2-5>0$　因数分解して　$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})>0$

ゆえに　$x<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<x$ ……②

よって，① と ② の範囲を合わせて

$x<-\sqrt{5},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{5}<x$



2

解答　$x=2,\ y=0$ で最大値 12，$x=-1,\ y=\pm\sqrt{3}$ で最小値 -6

解説

$x^2+y^2=4$ から　$y^2=4-x^2$ ……①

$y^2\geqq 0$ であるから　$4-x^2\geqq 0$

よって　$(x+2)(x-2)\leqq 0$　ゆえに　$-2\leqq x\leqq 2$ ……②

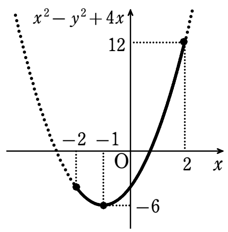
$x^2-y^2+4x=x^2-(4-x^2)+4x$

$=2x^2+4x-4=2(x+1)^2-6$

よって，② の範囲の x について，x^2-y^2+4x は

$x=2$　で最大値 12，

$x=-1$ で最小値 -6　をとる。



① から

$x=2$　のとき　$y^2=0$　よって　$y=0$

$x=-1$ のとき　$y^2=3$　よって　$y=\pm\sqrt{3}$

したがって　$x=2,\ y=0$ で最大値 12

$x=-1,\ y=\pm\sqrt{3}$ で最小値 -6

$\boxed{3}$

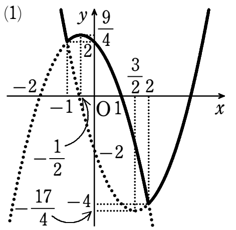
解答 (1) ［図］

(2) $k<-4$ のとき 0 個；$k=-4$ のとき 1 個；

$-4<k<2$，$\dfrac{9}{4}<k$ のとき 2 個；

$k=2$，$\dfrac{9}{4}$ のとき 3 個；$2<k<\dfrac{9}{4}$ のとき 4 個

(1)



解説

(1) $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ であるから

$x\leqq-1$，$2\leqq x$ のとき

$y=(x^2-x-2)-2x=x^2-3x-2$

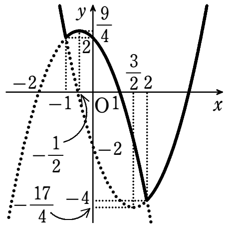
$=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{17}{4}$

$-1<x<2$ のとき

$y=-(x^2-x-2)-2x=-x^2-x+2$

$=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

よって，グラフは図の実線部分である。



(2) 方程式を変形して　$|x^2-x-2|-2x=k$

よって，(1) で求めたグラフと直線 $y=k$ の共有点を調べて

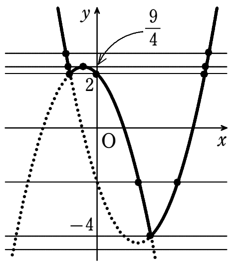
$k<-4$ のとき 0 個

$k=-4$ のとき 1 個

$-4<k<2$，$\dfrac{9}{4}<k$ のとき 2 個

$k=2$，$\dfrac{9}{4}$ のとき 3 個

$2<k<\dfrac{9}{4}$ のとき 4 個



$\boxed{4}$

解答 (1) ① の解は $a<x<a+3$；

② の解は $0<a<\dfrac{3}{4}$ のとき $2a-3<x<-2a$，$a=\dfrac{3}{4}$ のとき解はない，

$\dfrac{3}{4}<a<4$ のとき $-2a<x<2a-3$

(2) $3<a<4$　(3) $0<a\leqq\dfrac{7}{2}$

解説

(1) ① から　$(x-a)\{x-(a+3)\}<0$

$a<a+3$ であるから，① の解は　$a<x<a+3$　……③

② から　$(x+2a)\{x-(2a-3)\}<0$

$-2a>2a-3$，$-2a=2a-3$，$-2a<2a-3$ を満たす a の値または a の値の範囲は，

それぞれ　$a<\dfrac{3}{4}$，$a=\dfrac{3}{4}$，$a>\dfrac{3}{4}$

よって，$0<a<4$ に注意して，② の解は

$0<a<\dfrac{3}{4}$ のとき　$2a-3<x<-2a$　……④

$a=\dfrac{3}{4}$ のとき，$\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2<0$ となり　解はない　……⑤

$\dfrac{3}{4}<a<4$ のとき　$-2a<x<2a-3$　……⑥

(2) $-2a<0<a$ であるから，③，④ を同時に満たす x は存在しない。

また，③，⑤ を同時に満たす x も存在しない。

③，⑥ を同時に満たす x が存在するのは，$a<2a-3$ のときである。

$a<2a-3$ を解くと　$a>3$

よって，$a>3$ と $\dfrac{3}{4}<a<4$ の共通範囲を求めて　$3<a<4$

(3) [1] (2) と同様に考えると，$2a-3\leqq a$ すなわち $0<a\leqq3$ のとき ①，② を同時に満たす x は存在しない。すなわち，題意を満たす。

[2] $3<a<4$ のとき，$3<a$ から　$a+3<2a$　よって　$a<2a-3$

また，$2\cdot3-3<2a-3<2\cdot4-3$ から　$3<2a-3<5$　……⑦

$3+3<a+3<4+3$ から　$6<a+3<7$　……⑧

⑦，⑧ から　$2a-3<a+3$

よって，①，② を同時に満たす x の範囲は　$a<x<2a-3$

このとき，題意を満たすための条件は　$2a-3\leqq4$　ゆえに　$a\leqq\dfrac{7}{2}$

$3<a<4$ との共通範囲を求めて　$3<a\leqq\dfrac{7}{2}$

[1]，[2] を合わせて，求める範囲は　$0<a\leqq\dfrac{7}{2}$

$\boxed{5}$

解答 $a=15$

解説

$6x^2-(16a+7)x+(2a+1)(5a+2)<0$ から　$\{2x-(2a+1)\}\{3x-(5a+2)\}<0$

よって　$\left(x-\dfrac{2a+1}{2}\right)\left(x-\dfrac{5a+2}{3}\right)<0$　……①

ここで　$\dfrac{5a+2}{3}-\dfrac{2a+1}{2}=\dfrac{4a+1}{6}>0$　（$a>0$ から）

ゆえに　$\dfrac{2a+1}{2}<\dfrac{5a+2}{3}$

したがって，① を解くと　$\dfrac{2a+1}{2}<x<\dfrac{5a+2}{3}$　……②

これを満たす整数 x が 10 個であるためには，$9<\dfrac{5a+2}{3}-\dfrac{2a+1}{2}\leqq11$ であることが必要である。

このとき　$9<\dfrac{4a+1}{6}\leqq11$　すなわち　$\dfrac{53}{4}<a\leqq\dfrac{65}{4}$

a は整数であるから　$14\leqq a\leqq16$

[1] $a=14$ のとき，② から　$\dfrac{29}{2}<x<24$

これを満たす整数 x は 9 個ある。

[2] $a=15$ のとき，② から　$\dfrac{31}{2}<x<\dfrac{77}{3}$

これを満たす整数 x は 10 個ある。

[3] $a=16$ のとき，② から　$\dfrac{33}{2}<x<\dfrac{82}{3}$

これを満たす整数 x は 11 個ある。

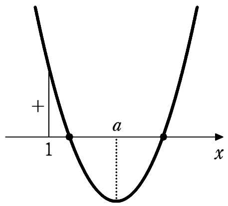
[1]～[3] から，求める整数 a の値は　$a=15$

1

解答　(1)　$2<a<\sqrt{5}$　　(2)　$m>10$

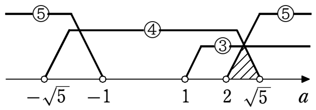
解説

(1)　$f(x)=x^2-2ax+2a^2-5$ とする。
$y=f(x)$のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。
このグラフが x 軸の $x>1$ の部分と，異なる２点で交わるのは

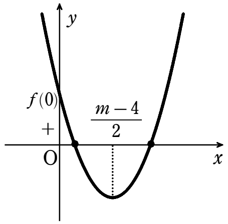


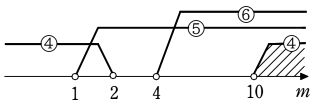
$$\begin{cases} D=(-2a)^2-4\cdot1\cdot(2a^2-5)>0 & \cdots\cdots① \\ f(1)=1-2a+2a^2-5>0 & \cdots\cdots② \\ \text{軸について}\quad a>1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

の３つが同時に成り立つときである。
① から　$-4(a^2-5)>0$
よって　$a^2-5<0$
これを解いて　$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$　……④
② から　$2(a^2-a-2)>0$
よって　$a^2-a-2>0$
これを解いて　$a<-1,\ 2<a$　……⑤
③，④，⑤ の共通範囲を求めて　$2<a<\sqrt{5}$



(2)　$f(x)=x^2-(m-4)x+m-1$ とおく。
２次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると
$$D=\{-(m-4)\}^2-4\cdot1\cdot(m-1)$$
$$=m^2-12m+20=(m-2)(m-10)$$
放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=\frac{m-4}{2}$ である。
方程式 $f(x)=0$ が異なる２つの正の解をもつことと，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と異なる２点で交わることは同じである。
したがって，次の３つが同時に成り立てばよい。
$D>0$　……①
$f(0)=m-1>0$　……②
軸について　$\frac{m-4}{2}>0$　……③
① から　$(m-2)(m-10)>0$
よって　$m<2,\ 10<m$　……④
② から　$m>1$　……⑤
③ から　$m>4$　……⑥
④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて　$m>10$



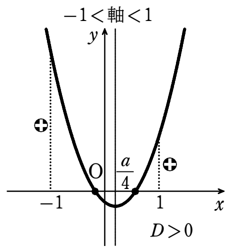


2

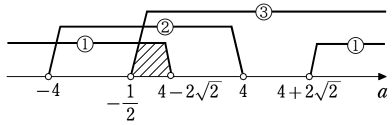
解答　$-\frac{1}{2}<a<4-2\sqrt{2}$

解説

判別式を D とし，$f(x)=2x^2-ax+a-1$ とする。
題意を満たすための条件は，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $-1<x<1$ の部分と，異なる２点で交わることである。
したがって，次の [1] ～ [4] が同時に成り立つ。



[1]　$D=(-a)^2-4\cdot2(a-1)=a^2-8a+8>0$
$a^2-8a+8=0$ を解くと　$a=4\pm2\sqrt{2}$
よって，$a^2-8a+8>0$ の解は
$a<4-2\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2}<a$　……①
[2]　放物線の軸は直線 $x=\frac{a}{4}$ で，この軸について
$-1<\frac{a}{4}<1$　　よって　$-4<a<4$　……②
[3]　$f(-1)>0$ から　$2\cdot(-1)^2-a\cdot(-1)+a-1>0$
よって　$a>-\frac{1}{2}$　……③
[4]　$f(1)>0$ から
$2\cdot1^2-a\cdot1+a-1=1>0$
これは常に成り立つ。
①～③ の共通範囲から
$-\frac{1}{2}<a<4-2\sqrt{2}$

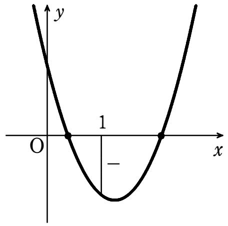


3

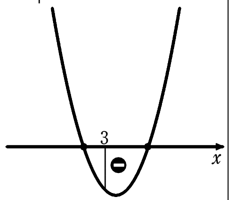
解答　(1)　$a>3$　　(2)　$a<-\frac{9}{2}$

解説

(1)　$f(x)=x^2-2ax+a+2$ とする。
放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $x<1$ と $x>1$ のそれぞれの範囲において１点ずつ交わるのは
$f(1)=-a+3<0$
が成り立つときである。
よって　$a>3$



(2)　$f(x)=2x^2+ax+a$ とする。
$f(x)=0$ が３より大きい解と３より小さい解をもつための条件は　$f(3)<0$
ゆえに　$2\cdot3^2+a\cdot3+a<0$
整理して　$2a+9<0$
したがって　$a<-\frac{9}{2}$

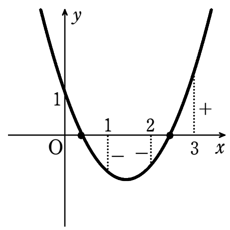


4

解答　$\frac{5}{2}<a<\frac{10}{3}$

解説

$f(x)=x^2-ax+1$ とおく。
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$f(0)=1>0$ であるから，２次方程式 $f(x)=0$ の１つの解が０と１の間にあり，他の解が２と３の間にあるのは
$f(1)<0$　かつ　$f(2)<0$　かつ　$f(3)>0$
のときである。
よって　$2-a<0,\ 5-2a<0,\ 10-3a>0$
これを解いて　$\frac{5}{2}<a<\frac{10}{3}$

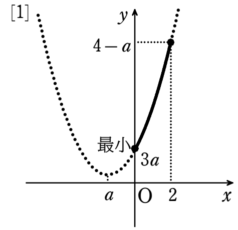


5

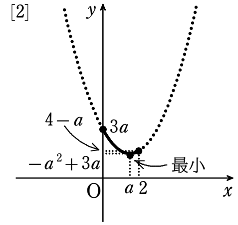
解答　$0<a<4$

解説

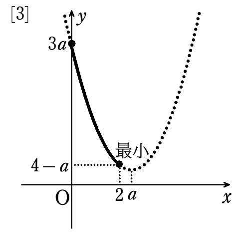
求める条件は，$0\leqq x\leqq2$ の範囲における $f(x)=x^2-2ax+3a$ の最小値が正であることである。
$f(x)=(x-a)^2-a^2+3a$ であるから，軸は直線 $x=a$
[1]　$a<0$ のとき
$f(x)$ は $x=0$ で最小となる。
よって　$f(0)=3a>0$
これは，$a<0$ を満たさない。



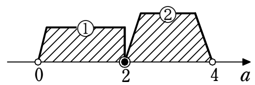
[2]　$0\leqq a\leqq2$ のとき
$f(x)$ は $x=a$ で最小となる。
よって　$f(a)=-a^2+3a>0$
すなわち　$a^2-3a<0$
これを解くと，$a(a-3)<0$ から　$0<a<3$
これと $0\leqq a\leqq2$ の共通範囲は
$0<a\leqq2$　……①



[3]　$2<a$ のとき
$f(x)$ は $x=2$ で最小となる。
よって　$f(2)=4-a>0$
ゆえに　$a<4$
これと $2<a$ の共通範囲は
$2<a<4$　……②



求める a の値の範囲は，① と ② を合わせて
$0<a<4$



1

解答 (1) (ア) $m<-2\sqrt{2}$ (イ) $2\sqrt{2}<m<3$ (2) $m>2$

(3) (ア) $m>3$ (イ) $m<-1,\ 3<m<\dfrac{19}{6}$

解説

(1) $f(x)=x^2+mx+2$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-\dfrac{m}{2}$ である。

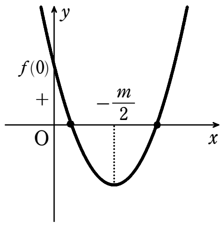
(ア) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる２点で交わるのは

$D=m^2-4\cdot1\cdot2>0$ ……①

軸について $-\dfrac{m}{2}>0$ ……②

$f(0)=2>0$ ……③

の３つが同時に成り立つときである。



①から $m^2-8>0$

すなわち $(m+2\sqrt{2})(m-2\sqrt{2})>0$

ゆえに $m<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<m$ ……④

②から $m<0$ ……⑤

③は常に成り立つ。

よって，④，⑤の共通範囲を求めて $m<-2\sqrt{2}$

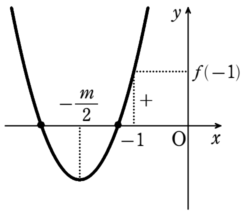
(イ) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x<-1$ の部分が異なる２点で交わるのは

$D=m^2-4\cdot1\cdot2>0$ ……①

軸について $-\dfrac{m}{2}<-1$ ……②

$f(-1)=1-m+2>0$ ……③

の３つが同時に成り立つときである。

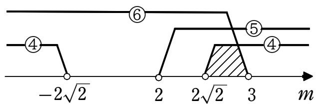


①から $m<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<m$ ……④

②から $m>2$ ……⑤

③から $m<3$ ……⑥

よって，④，⑤，⑥の共通範囲を求めて $2\sqrt{2}<m<3$



(2) $f(x)=x^2+2(m-1)x+3-m$ とする。

これを変形すると

$f(x)=\{x+(m-1)\}^2-m^2+m+2$

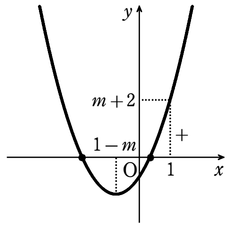
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=1-m$ である。

また $D=\{2(m-1)\}^2-4\cdot1\cdot(3-m)$

$=4(m^2-m-2)$

$=4(m+1)(m-2)$

放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $x<1$ の部分と，異なる２点で交わるのは，次の[1]，[2]，[3]が同時に成り立つときである。



[1] グラフが x 軸と異なる２点で交わる。

$D>0$ から

$m<-1,\ 2<m$ ……①

[2] 軸 $x=1-m$ について $1-m<1$

すなわち $m>0$ ……②

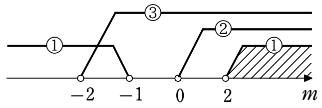
[3] $f(1)>0$ すなわち $1^2+2(m-1)\cdot1+3-m>0$

よって $m+2>0$

したがって $m>-2$ ……③

①，②，③の共通範囲を求めて

$m>2$



(3) $f(x)=x^2+2mx+2m+3$ とおく。

これを変形すると $f(x)=(x+m)^2-m^2+2m+3$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-m$ である。

また，２次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(2m)^2-4(2m+3)=4(m^2-2m-3)=4(m+1)(m-3)$

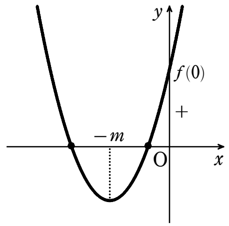
(ア) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の負の部分が異なる２点で交わることと同じである。

したがって，次の３つが同時に成り立てばよい。

$D=4(m+1)(m-3)>0$ ……①

軸について $-m<0$ ……②

$f(0)=2m+3>0$ ……③



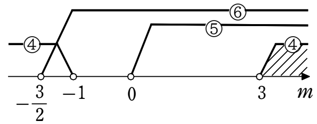
①から $m<-1,\ 3<m$ ……④

②から $m>0$ ……⑤

③から $m>-\dfrac{3}{2}$ ……⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて

$m>3$

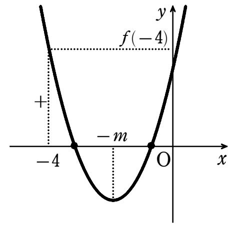


(イ) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x>-4$ の部分が異なる２点で交わることと同じである。したがって，次の３つが同時に成り立てばよい。

$D=4(m+1)(m-3)>0$ ……①

軸について $-m>-4$ ……②

$f(-4)=-6m+19>0$ ……③



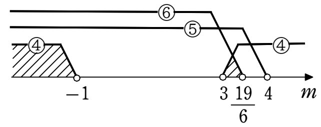
①から $m<-1,\ 3<m$ ……④

②から $m<4$ ……⑤

③から $m<\dfrac{19}{6}$ ……⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて

$m<-1,\ 3<m<\dfrac{19}{6}$



2

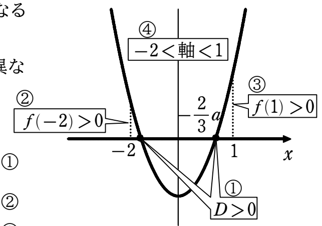
解答 (1) $\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}<a<0$ (2) $3<a\leqq\dfrac{7}{2}$

解説

(1) $f(x)=3x^2+4ax+a^2+a$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とする。

方程式 $f(x)=0$ が $-2<x<1$ の範囲に異なる２つの実数解をもつための条件は，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $-2<x<1$ の部分と，異なる２点で交わることと同じである。

よって，次のことが同時に成り立つ。



$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=(2a)^2-3(a^2+a)>0 & \cdots\cdots ① \\ f(-2)=a^2-7a+12>0 & \cdots\cdots ② \\ f(1)=a^2+5a+3>0 & \cdots\cdots ③ \\ \text{軸について}\ -2<-\dfrac{2}{3}a<1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

①から $a(a-3)>0$ よって $a<0,\ 3<a$

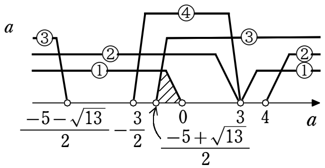
②から $(a-3)(a-4)>0$

よって $a<3,\ 4<a$

③から $a<\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}<a$

④から $-\dfrac{3}{2}<a<3$

共通範囲を求めて $\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}<a<0$



(2) $f(x)=x^2-2ax+2a+3$ とする。

方程式 $f(x)=0$ が $1\leqq x\leqq5$ の範囲に異なる２つの実数解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $1\leqq x\leqq5$ の部分と，異なる２点で交わることである。

したがって，次の[1]～[4]が同時に成り立つ。

[1] $f(x)=0$ の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(2a+3)=a^2-2a-3>0$

よって $a<-1,\ 3<a$ ……①

[2] 軸は直線 $x=a$ で，この軸について $1<a<5$ ……②

[3]　$f(1)=1^2-2a\cdot1+2a+3=4\geqq0$

これは常に成り立つ。

[4]　$f(5)=5^2-2a\cdot5+2a+3=-8a+28\geqq0$

よって　$a\leqq\dfrac{7}{2}$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$3<a\leqq\dfrac{7}{2}$

別解　(定数 a を分離する解法)

与式から　$x^2+3=2a(x-1)$

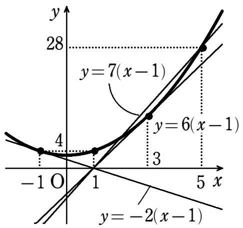
放物線 $y=x^2+3$ と，定点 $(1,\ 0)$ を通る直線 $y=2a(x-1)$ が接するとき，

$D=0$ であるから　$\dfrac{D}{4}=a^2-2a-3=0$

よって　$a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき，接点の x 座標は　$x=-1$

$a=3$ のとき，接点の x 座標は　$x=3$



放物線 $y=x^2+3$ と直線 $y=2a(x-1)$ の共有点の x 座標に着目すると，求める a の値の範囲は，図より　$6<2a\leqq7$

よって　$3<a\leqq\dfrac{7}{2}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$m<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<m$　　(2)　$a>1$

解説

(1)　$f(x)=x^2+2(m-1)x+3-m^2$ とおく。

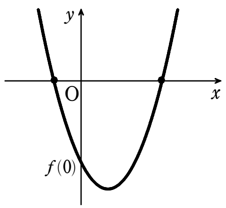
放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，放物線が y 軸の負の部分と交わるときである。

したがって　$f(0)<0$　すなわち　$3-m^2<0$

よって　$m^2-3>0$

ゆえに　$(m+\sqrt{3})(m-\sqrt{3})>0$

したがって　$m<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<m$

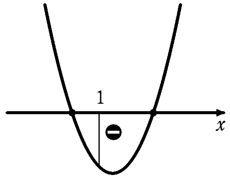


(2)　$f(x)=x^2-4ax+3a$ とする。

方程式 $f(x)=0$ が 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつための条件は　$f(1)<0$

ゆえに　$1-a<0$

よって　$a>1$



$\boxed{4}$

解答　(1)　$0<a<1$　　(2)　$1<a<\dfrac{3}{2}$

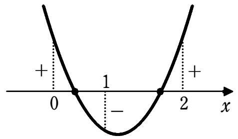
解説

(1)　$f(x)=2x^2-3x+a$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，与えられた 2 次方程式の 1 つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 1 と 2 の間にあるのは

$f(0)>0$　かつ　$f(1)<0$　かつ　$f(2)>0$

のときである。



$f(0)>0$ から　$a>0$　……①

$f(1)<0$ から　$-1+a<0$

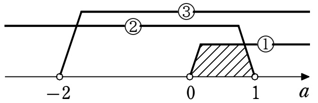
ゆえに　$a<1$　……②

$f(2)>0$ から　$2+a>0$

ゆえに　$a>-2$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$0<a<1$



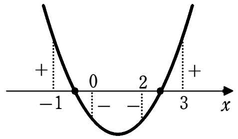
(2)　$f(x)=2ax^2-(a+2)x-5$ とおく。

$a>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$f(0)=-5<0$ である。

よって，与えられた 2 次方程式の 1 つの解が -1 と 0 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるのは

$f(-1)>0$　かつ　$f(2)<0$　かつ　$f(3)>0$

のときである。



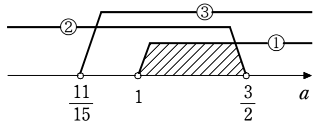
$f(-1)>0$ から　$3a-3>0$　　ゆえに　$a>1$　……①

$f(2)<0$ から　$6a-9<0$　　ゆえに　$a<\dfrac{3}{2}$　……②

$f(3)>0$ から　$15a-11>0$　　ゆえに　$a>\dfrac{11}{15}$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$1<a<\dfrac{3}{2}$



$\boxed{5}$

解答　$-6<m<3$

解説

求める条件は，$0\leqq x\leqq8$ における $f(x)=x^2-2mx+m+6$ の最小値が正となることである。$f(x)=(x-m)^2-m^2+m+6$ であるから，軸は　直線 $x=m$

[1]　$m<0$ のとき，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq8$ で増加するから，最小値は　$f(0)=m+6$

ゆえに　$m+6>0$　　よって　$m>-6$

$m<0$ であるから　$-6<m<0$　……①

[2]　$0\leqq m\leqq8$ のとき，最小値は　$f(m)=-m^2+m+6$

ゆえに　$-m^2+m+6>0$　すなわち　$m^2-m-6<0$

これを解くと，$(m+2)(m-3)<0$ から　$-2<m<3$

$0\leqq m\leqq8$ であるから　$0\leqq m<3$　……②

[3]　$8<m$ のとき，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq8$ で減少するから，最小値は　$f(8)=-15m+70$

ゆえに，$-15m+70>0$ から　$m<\dfrac{14}{3}$　　これは $8<m$ を満たさない。

求める m の値の範囲は，①，② を合わせて　$-6<m<3$

$\boxed{1}$

解答　$-1<a<0,\ \dfrac{7}{2}<a<4$

解説

$f(x)=ax^2+2(a-2)x+2a-7$，

$\dfrac{D}{4}=(a-2)^2-a\cdot(2a-7)=-a^2+3a+4=-(a+1)(a-4)$

とする。

求める条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わることである。

[1]　$a>0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは下に凸であるから，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わるための条件は

$\dfrac{D}{4}=-(a+1)(a-4)>0$　……①

$y=f(x)$ の軸は $x=-\dfrac{a-2}{a}$ で　$-\dfrac{a-2}{a}<0$　……②

$f(0)=2a-7>0$　……③

の 3 つが同時に成り立つことである。

① から　$-1<a<4$

$a>0$ と ② から　$a>2$

③ から　$a>\dfrac{7}{2}$

これらと $a>0$ との共通範囲は　$\dfrac{7}{2}<a<4$

[2]　$a<0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは上に凸であるから，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わるための条件は

$\dfrac{D}{4}=-(a+1)(a-4)>0$　……④

$y=f(x)$ の軸について　$-\dfrac{a-2}{a}<0$　……⑤

$f(0)=2a-7<0$　……⑥

の 3 つが同時に成り立つことである。

④ から　$-1<a<4$

$a<0$ と ⑤ から　$a<2$

⑥ から　$a<\dfrac{7}{2}$

これらと $a<0$ との共通範囲は　$-1<a<0$ である。

したがって，条件を満たす a の値の範囲は

$-1<a<0,\ \dfrac{7}{2}<a<4$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a\leqq-\dfrac{21}{16}$　　(2)　$a\geqq-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

解説

$x^2-6x+8\leqq0$ から　$(x-2)(x-4)\leqq0$

よって　$2\leqq x\leqq4$

(1)　条件を満たすためには，$2\leqq x\leqq4$ が $x^2+4ax+5\leqq0$ の解に含まれればよい。

$f(x)=x^2+4ax+5$ とおくと　$f(2)\leqq 0$，$f(4)\leqq 0$

したがって　$2^2+4a\cdot 2+5\leqq 0$ より　$a\leqq -\dfrac{9}{8}$

$4^2+4a\cdot 4+5\leqq 0$ より　$a\leqq -\dfrac{21}{16}$

よって　$a\leqq -\dfrac{21}{16}$

(2)　$f(x)=(x+2a)^2-4a^2+5$ であるから $f(x)$ の軸は　$x=-2a$

$2\leqq x\leqq 4$ において $f(x)\geqq 0$ となるためには，$f(x)$ の軸に着目して

$-2a<2$ すなわち $a>-1$ のとき　$f(2)=2^2+4a\cdot 2+5\geqq 0$ より

$a\geqq -\dfrac{9}{8}$　よって　$a>-1$

$2\leqq -2a\leqq 4$ すなわち $-2\leqq a\leqq -1$ のとき　$-4a^2+5\geqq 0$ より

$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\leqq a\leqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$　よって　$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\leqq a\leqq -1$

$4<-2a$ すなわち $a<-2$ のとき　$f(4)=4^2+4a\cdot 4+5\geqq 0$

このとき a の解はない。

以上から　$a\geqq -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

1

解答　$2\leqq a<3$

解説

判別式を D とし，$f(x)=x^2+(2-a)x+4-2a$ とする。

$f(-1)=-a+3$，$f(1)=-3a+7$

[1]　２つの解がともに $-1<x<1$ の範囲にあるための条件は

$$\begin{cases} D=(2-a)^2-4\cdot 1\cdot(4-2a)\geqq 0 \quad \cdots\cdots ① \\ \text{軸 } x=-\dfrac{2-a}{2} \text{ について } \quad -1<-\dfrac{2-a}{2}<1 \quad \cdots\cdots ② \\ f(-1)=-a+3>0 \ \cdots\cdots ③,\quad f(1)=-3a+7>0 \ \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

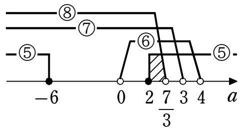
①から　$a^2+4a-12\geqq 0$　よって　$(a-2)(a+6)\geqq 0$

ゆえに　$a\leqq -6$，$2\leqq a$ ……⑤

②～④を解くと，解は順に

$0<a<4$ ……⑥，$a<3$ ……⑦，

$a<\dfrac{7}{3}$ ……⑧



⑤～⑧の共通範囲は　$2\leqq a<\dfrac{7}{3}$

[2]　解の１つが $-1<x<1$，他の解が $x<-1$ または $1<x$ にあるための条件は

$f(-1)f(1)<0$　ゆえに　$(-a+3)(-3a+7)<0$

よって　$(a-3)(3a-7)<0$　ゆえに　$\dfrac{7}{3}<a<3$

[3]　解の１つが $x=-1$ のときは　$f(-1)=0$

よって　$-a+3=0$　ゆえに　$a=3$

このとき，方程式は　$x^2-x-2=0$　よって　$(x+1)(x-2)=0$

ゆえに，他の解は $x=2$ となり，条件を満たさない。

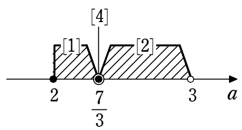
[4]　解の１つが $x=1$ のときは　$f(1)=0$

よって　$-3a+7=0$　ゆえに　$a=\dfrac{7}{3}$

このとき，方程式は　$3x^2-x-2=0$

よって　$(x-1)(3x+2)=0$

ゆえに，他の解は $x=-\dfrac{2}{3}$ となり，条件を満たす。



[1]～[4]から　$2\leqq a<3$

2

解答　略

解説

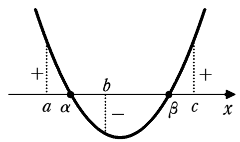
$f(x)=(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)$ とする。

$a<b<c$ であるから

$f(a)=(a-b)(a-c)>0$

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$



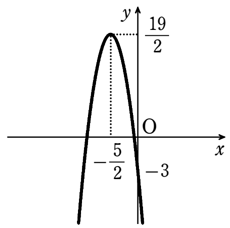
よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のような下に凸の放物線であり，$a<x<b$ および $b<x<c$ の範囲で x 軸と交わる。

ゆえに，与えられた２次方程式 $f(x)=0$ は異なる２つの解をもち，２つの解のうち１つは a と b の間にあり，他の１つは b と c の間にある。

1

解答　(1)　[図]，軸 $x=-\dfrac{5}{2}$，頂点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{19}{2}\right)$

(2)　$a=\pm\dfrac{3}{2}$



解説

(1)　$f(x)=-2x^2-10x-3=-2(x^2+5x)-3$

$=-2\left\{\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right\}-3$

$=-2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+2\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-3$

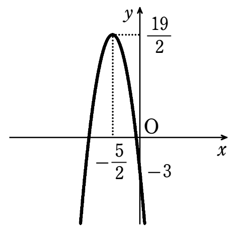
$=-2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{19}{2}$

よって，$y=f(x)$ は　$y=-2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{19}{2}$

したがって，この関数のグラフは右の図のような放物線である。

また，軸は　直線 $x=-\dfrac{5}{2}$，

頂点は　点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{19}{2}\right)$



(2)　$f(x)=-2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{19}{2}$ であるから

$f\left(a-\dfrac{5}{2}\right)=-2\left\{\left(a-\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{5}{2}\right\}^2+\dfrac{19}{2}=-2a^2+\dfrac{19}{2}$

よって，$f\left(a-\dfrac{5}{2}\right)=5$ から　$-2a^2+\dfrac{19}{2}=5$

すなわち　$a^2=\dfrac{9}{4}$　ゆえに　$a=\pm\dfrac{3}{2}$

2

解答　$a=7$，$b=3$

解説

放物線 $y=x^2+ax+b$ を原点に関して対称移動すると

$-y=(-x)^2+a(-x)+b$

すなわち　$y=-x^2+ax-b$

さらに，この放物線を y 軸方向に８だけ平行移動すると

$y-8=-x^2+ax-b$

すなわち　$y=-x^2+ax-b+8$

これが $y=-x^2+7x+5$ に一致するから

$a=7$，$-b+8=5$

よって　$a=7$，$b=3$

別解　移動後の放物線 $y=-x^2+7x+5$ を y 軸方向に -8 だけ平行移動すると

$y-(-8)=-x^2+7x+5$

すなわち　$y=-x^2+7x-3$

さらに，この放物線を原点に関して対称移動すると

$-y=-(-x)^2+7(-x)-3$

すなわち　$y=x^2+7x+3$

これが移動前の放物線 $y=x^2+ax+b$ と一致するから

$a=7,\ b=3$

$\boxed{3}$

解答　$y=-\dfrac{3}{4}(x+1)^2+5\ \left(y=-\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{17}{4}\right)$

解説

最大値が５であるから，求める２次関数は

$$y=a(x-p)^2+5\ (a<0)$$

と表される。

そのグラフが２点 $(-3,\ 2)$，$(1,\ 2)$ を通るから

$2=a(-3-p)^2+5$　すなわち　$a(3+p)^2=-3$

$2=a(1-p)^2+5$　すなわち　$a(1-p)^2=-3$

これを解くと　$a(3+p)^2=a(1-p)^2$

$a<0$ から　$9+6p+p^2=1-2p+p^2$

よって　$p=-1$

$a(3+p)^2=-3$ に代入して　$a(3-1)^2=-3$

ゆえに　$4a=-3$　　よって　$a=-\dfrac{3}{4}$

これは，$a<0$ を満たす。

ゆえに，求める２次関数は

$$y=-\frac{3}{4}(x+1)^2+5\quad \left(y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{17}{4}\ \text{でもよい}\right)$$

別解　（p の求め方）

通過する２点の y 座標が等しいから，軸は２点を結ぶ線分の中点を通る。

よって，軸の直線は　$x=\dfrac{-3+1}{2}=-1$

ゆえに　$p=-1$

$\boxed{4}$

解答　(1)　最大値 5，最小値 -4　　(2)　$2<y\leqq\dfrac{10}{3}$

解説

(1)　この関数の式は

$y=(x-2)^2-4\ (0<x\leqq5)$

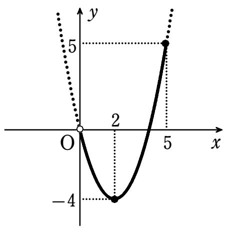
と変形され，そのグラフは右の図の実線の部分である。

よって，この関数は

$x=5$ で最大値 5,

$x=2$ で最小値 -4

をとる。



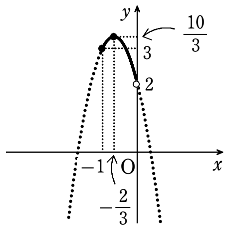
(2)　この関数の式は

$y=-3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{10}{3}\ (-1\leqq x<0)$

と変形され，そのグラフは右の図の実線の部分である。

よって，この関数の値域は

$2<y\leqq\dfrac{10}{3}$



$\boxed{5}$

解答　$20\sqrt{2}$

解説

長方形の縦と横の長さをそれぞれ x，y とする。

$2x+2y=80$ であるから　$y=40-x$

辺の長さは正の数であるから　$x>0$　かつ　$40-x>0$

すなわち　$0<x<40$　…… ①

三平方の定理により　$l^2=x^2+y^2=x^2+(40-x)^2=2x^2-80x+1600$

$=2(x-20)^2+800$

よって，① において，l^2 は $x=20$ で最小値 800 をとる。

$l>0$ であるから，l^2 が最小のとき，l も最小となる。

したがって，l の最小値は　$\sqrt{800}=20\sqrt{2}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$0<a<3$ のとき　$x=a$ で最大値 $-a^2+6a$，$a\geqq3$ のとき　$x=3$ で最大値 9

(2)　$0<a<6$ のとき　$x=0$ で最小値 0，$a=6$ のとき　$x=0,\ 6$ で最小値 0，

$a>6$ のとき　$x=a$ で最小値 $-a^2+6a$

解説

$y=-x^2+6x$ を変形すると　$y=-(x-3)^2+9$

(1)　[1]　$0<a<3$ のとき　グラフは図 ① のようになる。

よって　$x=a$ で最大値 $-a^2+6a$

[2]　$a\geqq3$ のとき　グラフは図 ②，③，④ のようになる。

よって　$x=3$ で最大値 9

(2)　定義域の中央の値は　$\dfrac{a}{2}$

[1]　$0<\dfrac{a}{2}<3$ すなわち $0<a<6$ のとき

グラフは図 ①，② のようになる。

よって　$x=0$ で最小値 0

[2]　$\dfrac{a}{2}=3$ すなわち $a=6$ のとき

グラフは図 ③ のようになる。

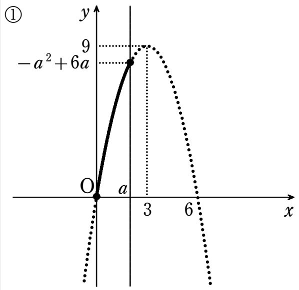
よって　$x=0,\ 6$ で最小値 0

[3]　$3<\dfrac{a}{2}$ すなわち $a>6$ のとき

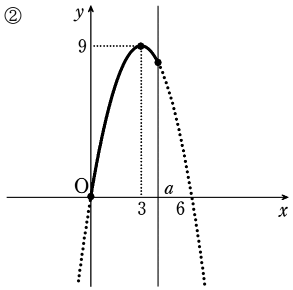
グラフは図 ④ のようになる。

よって　$x=a$ で最小値 $-a^2+6a$

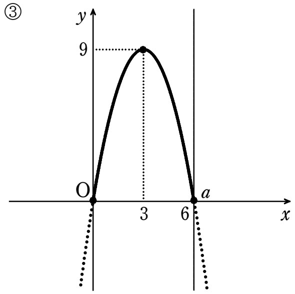
①



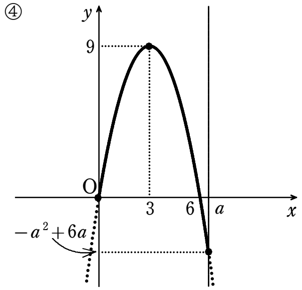
②



③



④



$\boxed{7}$

解答　(1)　$a=1$ のとき $(0,\ 1)$，$a=5$ のとき $(-2,\ -1)$

(2)　$k>-\dfrac{1}{2}$ のとき２個，$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき１個，$k<-\dfrac{1}{2}$ のとき０個

解説

(1)　$y=x^2+ax+a$ と $y=x+1$ から y を消去して

$x^2+ax+a=x+1$

整理すると　$x^2+(a-1)x+a-1=0$　…… ①

２次方程式 ① の判別式を D とすると

$D=(a-1)^2-4(a-1)=(a-1)(a-5)$

与えられた放物線と直線が接するための必要十分条件は　$D=0$

ゆえに　$(a-1)(a-5)=0$　　よって　$a=1,\ 5$

このとき，① の重解は　$x=-\dfrac{a-1}{2\cdot1}=\dfrac{1-a}{2}$

$a=1$ のとき　$x=0$　　このとき　$y=1$

したがって，接点の座標は　$(0,\ 1)$

$a=5$ のとき　$x=-2$　　このとき　$y=-1$

したがって，接点の座標は　$(-2,\ -1)$

(2)　$y=x^2-2kx$ と $y=2x-k^2$ から y を消去して

$x^2-2kx=2x-k^2$

整理すると　$x^2-2(k+1)x+k^2=0$　…… ①

２次方程式 ① の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-1\cdot k^2=2k+1$

$D>0$　すなわち　$2k+1>0$ となるのは　　$k>-\dfrac{1}{2}$

$D=0$　すなわち　$2k+1=0$ となるのは　　$k=-\dfrac{1}{2}$

$D<0$　すなわち　$2k+1<0$ となるのは　　$k<-\dfrac{1}{2}$

よって，求める共有点の個数は

$k>-\dfrac{1}{2}$ のとき２個，$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき１個，$k<-\dfrac{1}{2}$ のとき０個

8

解答　$-2\leqq x<-\dfrac{1}{3}$，$1<x\leqq 2$

解説

$x^2\leqq 4$ から　　$x^2-4\leqq 0$　　　すなわち　　$(x+2)(x-2)\leqq 0$

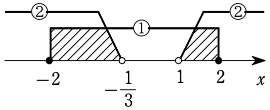
よって　　$-2\leqq x\leqq 2$ ……①

$3x^2-2x>1$ から　　$3x^2-2x-1>0$　　　すなわち　　$(3x+1)(x-1)>0$

よって　　$x<-\dfrac{1}{3}$，$1<x$ ……②

①と②の共通範囲を求めて

$-2\leqq x<-\dfrac{1}{3}$，$1<x\leqq 2$



9

解答　(1)　$-2<m<2$　　(2)　$-8<m<0$　　(3)　$-2<a<6$

解説

(1)　x^2 の係数は正であるから，x 軸と共有点をもたないための必要十分条件は

$D=m^2-4\cdot 1\cdot 1<0$　　　ゆえに　　$m^2-4<0$

これを解いて　　$-2<m<2$

(2)　解がすべての実数であるための条件は　　$D=(-m)^2-4\cdot 1\cdot(-2m)<0$

すなわち　　$m(m+8)<0$　　　これを解いて　　$-8<m<0$

(3)　x^2 の係数は正であるから，常に不等式が成り立つ条件は

$D=a^2-4\cdot 1\cdot(a+3)<0$

よって　　$a^2-4a-12<0$　　　ゆえに　　$(a+2)(a-6)<0$

したがって，求める a の値の範囲は　　$-2<a<6$

10

解答　$m<-\dfrac{1}{2}$

解説

２次不等式 $mx^2-3x+m-4<0$ がすべての実数 x で成り立つための条件は，$m<0$ であり，２次方程式 $mx^2-3x+m-4=0$ の判別式 D について，$D<0$ が成り立つことである。

$D=(-3)^2-4\cdot m\cdot(m-4)=-4m^2+16m+9$ であるから，$D<0$ より

$-4m^2+16m+9<0$　　　よって　$4m^2-16m-9>0$

すなわち　$(2m+1)(2m-9)>0$　　ゆえに　$m<-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{9}{2}<m$

$m<0$ であるから　　$m<-\dfrac{1}{2}$

11

解答　(1)　$m<-14$　　(2)　$-14<m\leqq 2$　　(3)　$m>22$

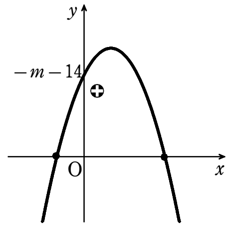
解説

$f(x)=-x^2+(m-10)x-m-14$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(m-10)^2-4\cdot(-1)\cdot(-m-14)$

$=m^2-24m+44$

$=(m-2)(m-22)$



(1)　$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，$f(0)=-m-14>0$ のときである。

したがって　　$m<-14$

(2)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分とのみ共有点をもつのは，次の[1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が共有点をもつから

$D=(m-2)(m-22)\geqq 0$

よって　　$m\leqq 2$，$22\leqq m$　……①

[2]　グラフの軸は直線 $x=\dfrac{m-10}{2}$ で，この軸について　　$\dfrac{m-10}{2}<0$

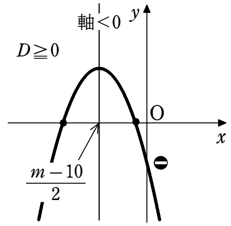
よって　　$m<10$　……②

[3]　$f(0)<0$ であるから　　$-m-14<0$

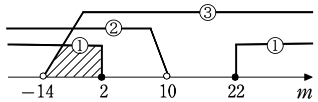
よって　　$m>-14$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて

$-14<m\leqq 2$



（x 軸に接する場合も含める）



(3)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x>1$ の部分と，異なる２点で交わるのは，次の[1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が異なる２点で交わるから

$D=(m-2)(m-22)>0$

よって　　$m<2$，$22<m$　……①

[2]　グラフの軸：直線 $x=\dfrac{m-10}{2}$ について

$\dfrac{m-10}{2}>1$　　　よって　　$m>12$　……②

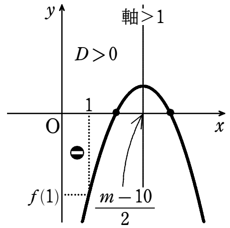
[3]　$f(1)<0$ から

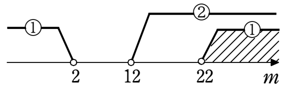
$-1+m-10-m-14=-25<0$

これは常に成り立つ。

①，②の共通範囲を求めて

$m>22$

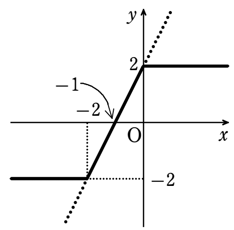




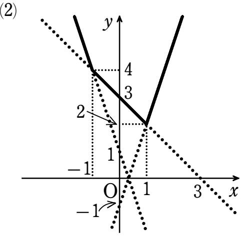
1

解答　(1)　[図] の実線部分　　(2)　[図] の実線部分

(1)



(2)



解説

(1)　$x<-2$ のとき

$y=-(x+2)-(-x)$

$=-2$

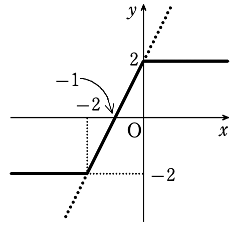
$-2\leqq x<0$ のとき

$y=(x+2)-(-x)=2x+2$

$0\leqq x$ のとき

$y=x+2-x=2$

よって，グラフは右の図の実線部分。



(2)　$x<-1$ のとき

$y=-(x+1)-2(x-1)$

$=-3x+1$

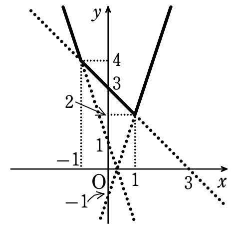
$-1\leqq x<1$ のとき

$y=x+1-2(x-1)=-x+3$

$1\leqq x$ のとき

$y=x+1+2(x-1)=3x-1$

よって，グラフは右の図の実線部分。



2

解答　$x=-\dfrac{3}{2}$ で最小値 $-\dfrac{25}{2}$，最大値はない

解説

$y=2(x-1)(x+4)$ を変形すると

$y=2(x^2+3x-4)=2\left\{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}-8$

$=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{25}{2}$

また　$x=-3$ のとき　　$y=-8$

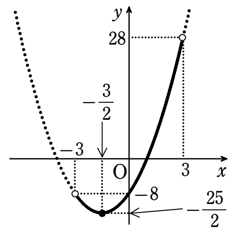
$x=3$　のとき　　$y=28$

与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

よって，グラフから

$x=-\dfrac{3}{2}$ で　最小値 $-\dfrac{25}{2}$ をとり，

最大値はない。



3

解答　$a=2\sqrt{3}$，$b=\frac{3}{2}$

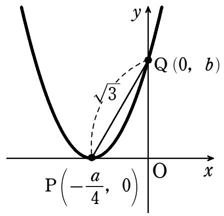
解説

$y=2x^2+ax+b$ から　$y=2\left(x+\frac{a}{4}\right)^2+b-\frac{a^2}{8}$

この2次関数のグラフが x 軸と接するから

$$b-\frac{a^2}{8}=0\quad\cdots\cdots①$$

このとき，Pの座標は　$\left(-\frac{a}{4},\ 0\right)$



また，Qの座標は　$(0,\ b)$

$PQ=\sqrt{3}$ より，$PQ^2=3$ であるから

$\left(-\frac{a}{4}-0\right)^2+(0-b)^2=3$　　すなわち　$\frac{a^2}{16}+b^2=3$　……②

①から　$a^2=8b$　……③

これを②に代入して整理すると　$2b^2+b-6=0$　　よって　$(2b-3)(b+2)=0$

上のグラフより，$b>0$ であるから　$b=\frac{3}{2}$　　③に代入して　$a^2=8\cdot\frac{3}{2}=12$

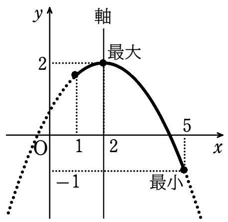
$a>0$ であるから　$a=2\sqrt{3}$

4

解答　(1)　$y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+2$　$\left(y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\right)$　　(2)　$a=-1$，$b=2$，$c=3$

解説

(1)　$1\leqq x\leqq 5$ の範囲で $x=2$ のとき最大値2をとるから，この2次関数のグラフは上に凸で，頂点は点 $(2,\ 2)$ である。



よって，求める2次関数は

$y=a(x-2)^2+2$，$a<0$　と表される。

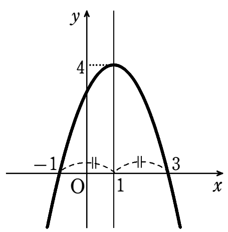
ゆえに，$1\leqq x\leqq 5$ の範囲で，y は $x=5$ のとき最小になる。$x=5$ のとき $y=-1$ であるから

$-1=a(5-2)^2+2$　　よって　$a=-\frac{1}{3}$

これは $a<0$ を満たす。ゆえに，求める2次関数は

$y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+2$　$\left(y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\ \text{でもよい}\right)$

(2)　$f(-1)=f(3)=0$ であるから，放物線 $y=f(x)$ の軸は，2点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を結ぶ線分の中点 $(1,\ 0)$ を通る。



ゆえに，$f(x)$ は $x=1$ で最大値4をとる。よって，

$f(x)$ は　$f(x)=a(x-1)^2+4$，$a<0$　と表される。

$f(-1)=0$ から　$4a+4=0$

したがって　$a=-1$　　これは $a<0$ を満たす。

ゆえに　$f(x)=-(x-1)^2+4$

よって　$f(x)=-x^2+2x+3$

したがって　$b=2$，$c=3$

別解　$f(-1)=f(3)=0$ であるから，$f(x)=a(x+1)(x-3)$ と表される。

$a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)=a(x-1)^2-4a$ であるから

$f(x)=a(x-1)^2-4a$

最大値が4であるから　$a<0$　かつ　$-4a=4$

よって　$a=-1$　　これは $a<0$ を満たす。

したがって　$f(x)=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$

ゆえに　$a=-1$，$b=2$，$c=3$

5

解答　(ア)　4　(イ)　77　(ウ)　3　(エ)　$-4\leqq y\leqq 5$

解説

$t=x^2-2x$ から　$t^2=(x^2-2x)^2=x^4-4x^3+4x^2$

よって　$y=x^4-4x^3+8x=(x^4-4x^3+4x^2)-4x^2+8x$

$=(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)=t^2-{}^{ア}4t$

$x=1+2\sqrt{3}$ のとき

$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$

$=\{(1+2\sqrt{3})-1\}^2-1=(2\sqrt{3})^2-1=11$

ゆえに　$y=t^2-4t=11^2-4\cdot 11={}^{イ}77$

また，$y=5$ のとき　$t^2-4t=5$

これを解いて　$t=-1,\ 5$

$t=-1$ のとき　$x^2-2x=-1$

これを満たす実数 x の値は，$x=1$ の　1個

$t=5$ のとき　$x^2-2x=5$

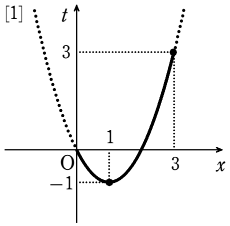
これを満たす実数 x の値は，$x=1\pm\sqrt{6}$ の　2個

したがって，$y=5$ となる実数 x の値は　$1+2={}^{ウ}3$（個）

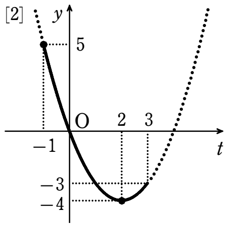
$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$ であるから，$0\leqq x\leqq 3$ のとき，t のとりうる値の範囲は，下の図[1]より　$-1\leqq t\leqq 3$

さらに，$y=t^2-4t=(t-2)^2-4$ であるから，$0\leqq x\leqq 3$ すなわち $-1\leqq t\leqq 3$ のとき，y のとりうる値の範囲は，下の図[2]より　${}^{エ}-4\leqq y\leqq 5$

[1]



[2]



6

解答　$x=0$，$y=0$ で最小値2

解説

$f(x,\ y)=x^2-4xy+5y^2+2y+2$

$=\{(x-2y)^2-(2y)^2\}+5y^2+2y+2$

$=(x-2y)^2+y^2+2y+2$

$=(x-2y)^2+\{(y+1)^2-1^2\}+2$

$=(x-2y)^2+(y+1)^2+1$

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき　$y+1\geqq 1$，$x-2y$ は任意の実数

よって　$(y+1)^2\geqq 1$，$(x-2y)^2\geqq 0$　　ゆえに　$f(x,\ y)\geqq 2$

したがって，$y+1=1$，$x-2y=0$，すなわち $x=0$，$y=0$ で最小値2をとる。

7

解答　(1)　$a<0$ のとき $-a$，$0\leqq a\leqq 10$ のとき $\frac{a^2}{4}-a$，$10<a$ のとき $-25+4a$

(2)　$a=-3,\ 6$

解説

(1)　関数の式を変形すると　$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-a$

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=\frac{a}{2}$，頂点は点 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4}-a\right)$ である。

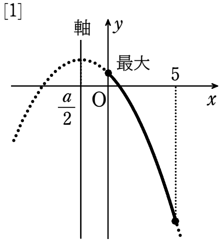
よって，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 5$ における最大値は

[1]　$\frac{a}{2}<0$　すなわち　$a<0$ のとき　$f(0)=-a$

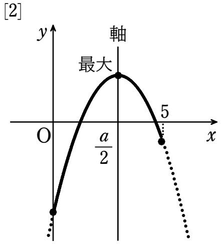
[2]　$0\leqq\frac{a}{2}\leqq 5$　すなわち　$0\leqq a\leqq 10$ のとき　$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}-a$

[3]　$5<\frac{a}{2}$　すなわち　$10<a$ のとき　$f(5)=-25+4a$

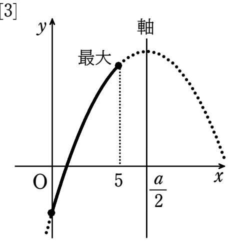
[1]



[2]



[3]



(2)　[1]　$a<0$ のとき，$f(x)$ の最大値が3であるとすると　$-a=3$

よって　$a=-3$　　これは $a<0$ を満たす。

[2]　$0\leqq a\leqq 10$ のとき，$f(x)$ の最大値が3であるとすると　$\frac{a^2}{4}-a=3$

よって　$a^2-4a-12=0$　　ゆえに　$(a+2)(a-6)=0$

$0\leqq a\leqq 10$ であるから　$a=6$

[3]　$10<a$ のとき，$f(x)$ の最大値が3であるとすると　$-25+4a=3$

よって　$a=7$　　これは $10<a$ を満たさず，不適。

[1]〜[3]から，求める a の値は　$a=-3,\ 6$

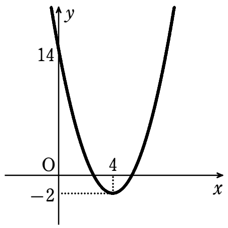
8

解答　(1)　$g(x)=x^2-8x+14$，[図]　(2)　[図]

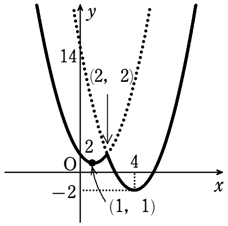
(3)　$0<a<1$ のとき $m=a^2-2a+2$，$1\leqq a<4-\sqrt{3}$ のとき $m=1$，

$4-\sqrt{3}\leqq a<4$ のとき $m=a^2-8a+14$，$4\leqq a$ のとき $m=-2$

(1)



(2)



(解説)

(1) $y-(-3)=f(x-3)$ から

$y=f(x-3)-3$

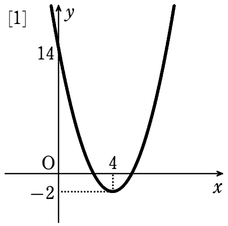
$=(x-3)^2-2(x-3)+2-3$

$=x^2-8x+14$

よって　$g(x)=x^2-8x+14$

$x^2-8x+14=(x-4)^2-2$ であるから，$y=g(x)$ のグラフは右の図 [1] のようになる。

[1]



(2) $f(x)-g(x)=x^2-2x+2-(x^2-8x+14)$

$=6x-12=6(x-2)$

よって

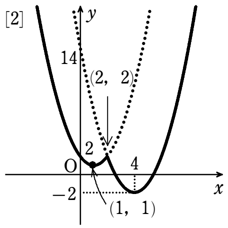
$x\leqq 2$ のとき　$f(x)\leqq g(x)$，

$x>2$ のとき　$f(x)>g(x)$

ゆえに　$h(x)=\begin{cases}x^2-2x+2 & (x\leqq 2)\\ x^2-8x+14 & (x>2)\end{cases}$

したがって，$y=h(x)$ のグラフは右の図 [2] の実線部分。

[2]



(3) $x^2-8x+14=1$ とすると　$x^2-8x+13=0$

これを解くと　$x=4\pm\sqrt{3}$

したがって

$0<a<1$ のとき

$m=h(a)=a^2-2a+2$

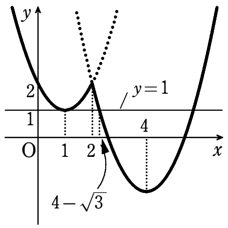
$1\leqq a<4-\sqrt{3}$ のとき

$m=h(1)=1$

$4-\sqrt{3}\leqq a<4$ のとき

$m=h(a)=a^2-8a+14$

$4\leqq a$ のとき　$m=h(4)=-2$



9

(解答) (1) $3<a<4$　(2) $1<a\leqq 3$，$4\leqq a<6$

(解説)

①，②，③ の判別式をそれぞれ D_1，D_2，D_3 とすると

$D_1=a^2-4(a+3)=a^2-4a-12=(a+2)(a-6)$

$\dfrac{D_2}{4}=\{-(a-2)\}^2-a=a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$

$\dfrac{D_3}{4}=2^2-(a^2-a-2)=-(a^2-a-6)=-(a+2)(a-3)$

(1) ①，②，③ がいずれも実数解をもたないための条件は

$D_1<0$　かつ　$D_2<0$　かつ　$D_3<0$

$D_1<0$ から　$(a+2)(a-6)<0$

よって　$-2<a<6$　…… ④

$D_2<0$ から　$(a-1)(a-4)<0$

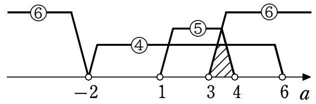
よって　$1<a<4$　…… ⑤

$D_3<0$ から　$-(a+2)(a-3)<0$

よって　$a<-2$，$3<a$　…… ⑥

④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて

$3<a<4$



(2) 方程式 ①，②，③ が実数解をもつための条件は，それぞれ

$D_1\geqq 0$，　$D_2\geqq 0$，　$D_3\geqq 0$

$D_1\geqq 0$ から　$a\leqq -2$，$6\leqq a$　…… ⑦

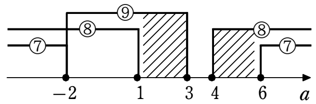
$D_2\geqq 0$ から　$a\leqq 1$，$4\leqq a$　…… ⑧

$D_3\geqq 0$ から　$-2\leqq a\leqq 3$　…… ⑨

⑦，⑧，⑨ のうち，1 つだけが成り立つ a の値の範囲が求めるものである。

したがって，右の図から

$1<a\leqq 3$，$4\leqq a<6$



10

(解答) 順に $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$，$-1<a<0$

(解説)

(前半) $y=|x(x-4)|$ …… ①，$y=-\dfrac{9}{2}x+4$ …… ② とする。

$x(x-4)\geqq 0$ の解は　$x\leqq 0$，$4\leqq x$

$x(x-4)<0$ の解は　$0<x<4$

ゆえに，① は

$x\leqq 0$，$4\leqq x$ のとき　$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$

$0<x<4$ のとき　$y=-(x^2-4x)=-(x-2)^2+4$

よって，① のグラフは図の太線部分のようになる。

図から，① のグラフと直線 ② の共有点の x 座標が正となるのは，$0<x<4$ のときである。

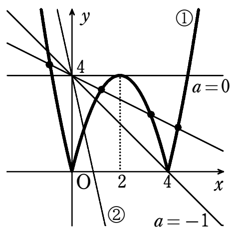
$-(x^2-4x)=-\dfrac{9}{2}x+4$ とすると　$2x^2-17x+8=0$

すなわち　$(x-8)(2x-1)=0$

$0<x<4$ であるから　$x=\dfrac{1}{2}$

このとき，② から　$y=\dfrac{7}{4}$

よって，求める点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$



(後半) ① のグラフと直線 $y=ax+4$ が 4 つの共有点をもつような a の値の範囲を，図から調べると，

直線 $y=ax+4$ が点 $(2,\ 4)$ を通るとき　$a=0$

直線 $y=ax+4$ が点 $(4,\ 0)$ を通るとき　$a=-1$

であるから　$-1<a<0$

11

(解答) $k\leqq -1$，$2<k$

(解説)

$(k^2-1)x^2+2(k+1)x+3>0$ が x のすべての実数の値に対して成り立つ条件は

[1] $k^2-1>0$　かつ　$D=\{2(k+1)\}^2-4(k^2-1)\cdot 3<0$　または

[2] $k^2-1=0$　かつ　$2(k+1)=0$

[1] から　$(k+1)(k-1)>0$　かつ　$-8(k+1)(k-2)<0$

すなわち　$k<-1$，$1<k$　かつ　$k<-1$，$2<k$

よって　$k<-1$，$2<k$

[2] から　$k=-1$

したがって，[1]，[2] から求める k の値の範囲は　$k\leqq -1$，$2<k$

12

(解答) $0\leqq a<1$，$5<a\leqq 6$

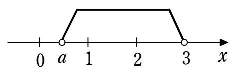
(解説)

2 次不等式の左辺を因数分解すると　$(x-a)(x-3)<0$ …… ①

[1] $a<3$ のとき，① の解は　$a<x<3$

これを満たす整数 x がちょうど 2 個あるとき，その整数 x は 1，2 となる。

よって　$0\leqq a<1$



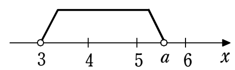
[2] $a=3$ のとき，① は $(x-3)^2<0$ となるから，解はない。

よって，条件を満たさない。

[3] $a>3$ のとき，① の解は　$3<x<a$

これを満たす整数 x がちょうど 2 個あるとき，その整数 x は 4，5 となる。

よって　$5<a\leqq 6$



以上から，求める a の値の範囲は　$0\leqq a<1$，$5<a\leqq 6$

1

解答　(1)　$n=0,\ 1$　　(2)　$0 \leqq x < 2$　　(3)　$x=\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　$n^2-n-\dfrac{5}{4}=0$ を解くと　$n=\dfrac{1\pm\sqrt{6}}{2}$

よって，$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす n の範囲は　$\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<n<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$

ここで，$2<\sqrt{6}<3$ であるから　$-1<\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<-\dfrac{1}{2}$，　$\dfrac{3}{2}<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}<2$

ゆえに，$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ すなわち $\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<n<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$ を満たす整数 n は

$n=0,\ 1$

(2)　$[x]=n$ とおくと，不等式は　$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$

これを満たす整数 n は，(1) より　$n=0,\ 1$

$n=0$ すなわち $[x]=0$ のとき　$0 \leqq x<1$

$n=1$ すなわち $[x]=1$ のとき　$1 \leqq x<2$

よって，求める x の範囲は　$0 \leqq x<2$

(3)　(i)　$0 \leqq x<1$ のとき

$[x]=0$ であるから，方程式は　$x^2-\dfrac{5}{4}=0$　　これを解くと　$x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

これらは，$0 \leqq x<1$ を満たさないから不適。

(ii)　$1 \leqq x<2$ のとき

$[x]=1$ であるから，方程式は　$x^2-\dfrac{9}{4}=0$　　これを解くと　$x=\pm\dfrac{3}{2}$

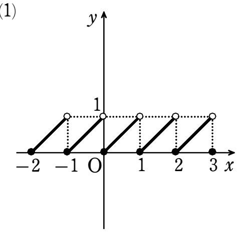
$1 \leqq x<2$ であるから　$x=\dfrac{3}{2}$

(i)，(ii) より，求める x は　$x=\dfrac{3}{2}$

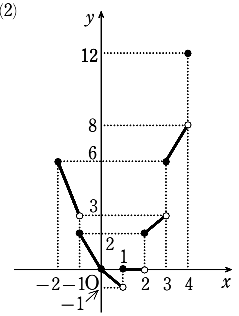
2

解答　(1)　[図]　　(2)　[図]

(1)



(2)



解説

(1)　$y=x-[x]$　$(-2 \leqq x \leqq 3)$

$-2 \leqq x<-1$ のとき　$[x]=-2$　　よって　$y=x+2$

$-1 \leqq x<0$ のとき　$[x]=-1$　　よって　$y=x+1$

$0 \leqq x<1$ のとき　$[x]=0$　　よって　$y=x$

$1 \leqq x<2$ のとき　$[x]=1$

よって　$y=x-1$

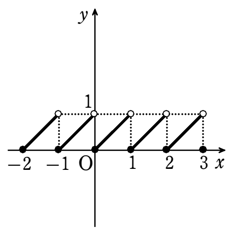
$2 \leqq x<3$ のとき　$[x]=2$

よって　$y=x-2$

$x=3$　のとき　$[x]=3$

よって　$y=0$

グラフは右の図のようになる。



(2)　$y=x[x-1]$　$(-2 \leqq x \leqq 4)$

n を整数とする。

$n \leqq x<n+1$ のとき，$[x-1]=n-1$ であるから

$y=(n-1)x$

$-2 \leqq x<-1$ のとき　$y=-3x$

$-1 \leqq x<0$　のとき　$y=-2x$

$0 \leqq x<1$　のとき　$y=-x$

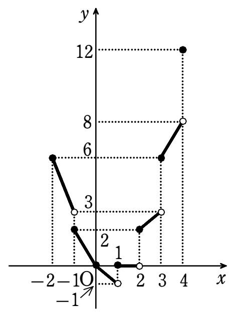
$1 \leqq x<2$　のとき　$y=0$

$2 \leqq x<3$　のとき　$y=x$

$3 \leqq x<4$　のとき　$y=2x$

$x=4$　　のとき　$y=12$

グラフは右の図のようになる。



3

解答　(1)　$y=-6\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$　$(y=-6x^2-18x-14)$

(2)　$(a,\ b)=(-4,\ 1),\ (-12,\ 9)$　　(3)　$p=-1,\ q=\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　$2x^2+6x+4=2(x^2+3x)+4=2\left\{x^2+3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}-2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+4=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

よって，放物線 $y=2x^2+6x+4$ の頂点は点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ であり，求める 2 次関数は

$y=a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$ と表される。

このグラフが点 $(-1,\ -2)$ を通るから　$-2=a\left(-1+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

これを解くと　$a=-6$

よって，求める 2 次関数は　$y=-6\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$　($y=-6x^2-18x-14$ でもよい)

(2)　放物線 $y=4x^2+ax+b$ は点 $(1,\ 1)$ を通るから　$1=4+a+b$

よって　$b=-a-3$　……①

また，x 軸に接するから，2 次方程式 $4x^2+ax+b=0$ の判別式を D とすると

$D=a^2-4\cdot4b=0$　すなわち　$a^2-16b=0$

この等式に ① を代入して　$a^2+16a+48=0$

よって　$(a+4)(a+12)=0$　　ゆえに　$a=-4,\ -12$

① から　$a=-4$ のとき $b=1$，　$a=-12$ のとき $b=9$

ゆえに　$(a,\ b)=(-4,\ 1),\ (-12,\ 9)$

別解　放物線 $y=4x^2+ax+b$ は x 軸に接するから，その方程式は $y=4(x-p)^2$ と表される。

点 $(1,\ 1)$ を通るから　$1=4(1-p)^2$

よって　$\pm1=2(1-p)$　　ゆえに　$p=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$　……①

$y=4(x-p)^2$ から　$y=4x^2-8px+4p^2$

これが $y=4x^2+ax+b$ と一致するから　$a=-8p,\ b=4p^2$

① を代入して　$(a,\ b)=(-4,\ 1),\ (-12,\ 9)$

(3)　放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線の方程式は

$y=\dfrac{1}{2}(x-p)^2+q$　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x^2-px+\dfrac{1}{2}p^2+q$　……①

と表される。

① と $y=-x$，① と $y=3x$ をそれぞれ連立させて

$\dfrac{1}{2}x^2-px+\dfrac{1}{2}p^2+q=-x$，　$\dfrac{1}{2}x^2-px+\dfrac{1}{2}p^2+q=3x$

よって　$x^2-2(p-1)x+p^2+2q=0$　……②，

$x^2-2(p+3)x+p^2+2q=0$　……③

② の判別式を D_1，③ の判別式を D_2 とすると

$\dfrac{D_1}{4}=\{-(p-1)\}^2-(p^2+2q)=-2p-2q+1$

$\dfrac{D_2}{4}=\{-(p+3)\}^2-(p^2+2q)=6p-2q+9$

放物線 ① が直線 $y=-x$ と直線 $y=3x$ の両方に接するための条件は

$D_1=0,\ D_2=0$

よって　$-2p-2q+1=0,\ 6p-2q+9=0$

この 2 式を連立して解くと　$p=-1,\ q=\dfrac{3}{2}$

4

解答　最大値 4，最小値 0

解説

(与式)$=\{x+(y-1)\}^2+\{x-(y-1)\}^2=2\{x^2+(y-1)^2\}$

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において，x^2 は

$x=1$ で最大値 1，$x=0$ で最小値 0 をとり，

$0 \leqq y \leqq 1$ の範囲において，$(y-1)^2$ は

$y=0$ で最大値 1，$y=1$ で最小値 0 をとる。

よって，与式は　$x=1,\ y=0$ のとき最大値 $2(1+1)=4$，

$x=0,\ y=1$ のとき最小値 $2(0+0)=0$　　をとる。

5

解答　(1)　$-2-2\sqrt{2} \leqq a \leqq -2+2\sqrt{2}$　　(2)　$a \leqq -6+4\sqrt{3}$

解説

(1)　$f(x)=(x-1)^2+1$，　$g(x)=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}+a$

求める条件は　$[f(x)$ の最小値$] \geqq [g(x)$ の最大値$]$

よって　$1 \geqq \dfrac{a^2}{4}+a$　　ゆえに　$a^2+4a-4 \leqq 0$

これを解くと　$-2-2\sqrt{2} \leqq a \leqq -2+2\sqrt{2}$

(2) $f(x)-g(x)=h(x)$ とおくと

$$h(x)=2x^2-(a+2)x+2-a=2\left(x-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{1}{8}(a+2)^2+2-a$$
$$=2\left(x-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}$$

$y=h(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=\dfrac{a+2}{4}$ である。

求める条件は，$0\leqq x\leqq 1$ において　$h(x)\geqq 0$

[1] $\dfrac{a+2}{4}<0$ すなわち $a<-2$ のとき

求める条件は　$h(0)\geqq 0$　すなわち　$2-a\geqq 0$

よって　$a\leqq 2$

$a<-2$ との共通範囲は　$a<-2$　……①

[2] $0\leqq\dfrac{a+2}{4}\leqq 1$ すなわち $-2\leqq a\leqq 2$ のとき

求める条件は　$-\dfrac{1}{8}a^2-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{3}{2}\geqq 0$

ゆえに　$a^2+12a-12\leqq 0$

これを解くと　$-6-4\sqrt{3}\leqq a\leqq -6+4\sqrt{3}$

$-2\leqq a\leqq 2$ との共通範囲は　$-2\leqq a\leqq -6+4\sqrt{3}$　……②

[3] $1<\dfrac{a+2}{4}$ すなわち $a>2$ のとき

求める条件は　$h(1)\geqq 0$　すなわち　$2-a-2+2-a\geqq 0$

よって　$a\leqq 1$　　$a>2$ との共通範囲はない。

以上から，求める a の値の範囲は，①，② を合わせて　$a\leqq -6+4\sqrt{3}$

$\boxed{6}$

解答 (1) $t\geqq 1$　(2) $a<1$ のとき $m=1-a$，$a\geqq 1$ のとき $m=-a^2+a$

解説

(1) $t=x^2+2x+2$ から　$t=(x+1)^2+1$

よって，x がすべての実数値をとって変化するとき，t のとりうる値の範囲は　$t\geqq 1$

(2) $f(x)$ を変数 t の式で表すと

$$f(x)=t^2-2at+a$$
$$=(t-a)^2-a^2+a$$

$y=(t-a)^2-a^2+a$ $(t\geqq 1)$ ……①

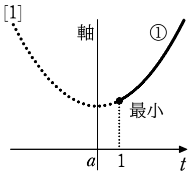
とする。

[1] $a<1$ のとき

① のグラフは右の図のようになり，y は $t=1$ で最小値をとる。

よって　$m=1^2-2a\cdot 1+a$
$=1-a$

[1]

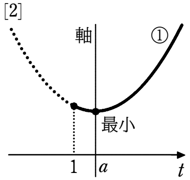


[2] $1\leqq a$ のとき

① のグラフは右の図のようになり，y は $t=a$ で最小値をとる。

よって　$m=-a^2+a$

[2]



[1]，[2] から

$a<1$ のとき　$m=1-a$，

$a\geqq 1$ のとき　$m=-a^2+a$

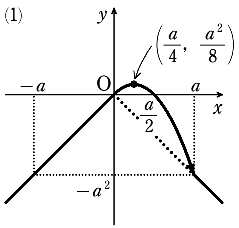
$\boxed{7}$

解答 (1) [図] の実線部分

(2) $0<a\leqq\dfrac{4}{3}$ のとき $M(a)=\dfrac{a^2}{8}$，

$a>\dfrac{4}{3}$ のとき $M(a)=-a^2+3a-2$

(1)



解説

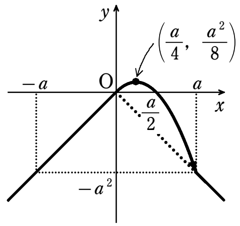
(1) $a>0$ であるから

[1] $x<0$ のとき

$f(x)=x\{-(x-a)-(-x)\}$
$=x(-x+a+x)=ax$

[2] $0\leqq x<a$ のとき

$f(x)=x\{-(x-a)-x\}=x(-x+a-x)$
$=-2x^2+ax=-2\left(x-\dfrac{a}{4}\right)^2+\dfrac{a^2}{8}$



[3] $a\leqq x$ のとき　$f(x)=x(x-a-x)=-ax$

したがって，グラフは図の実線部分のようになる。

(2) (1) の図から，定義域が実数全体のとき，$f(x)$ は $x=\dfrac{a}{4}$ で最大となる。

$\dfrac{a}{4}$ と $a+1$，$a-1$ の大小関係を調べると，$a>0$ であるから

$(a+1)-\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{4}a+1>0$　よって，常に $\dfrac{a}{4}<a+1$ が成り立つ。

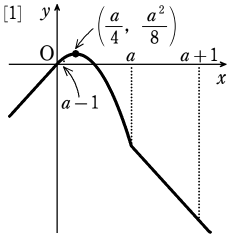
また　$(a-1)-\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{4}a-1=\dfrac{3}{4}\left(a-\dfrac{4}{3}\right)$

[1] $0<a\leqq\dfrac{4}{3}$ のとき　$a-1\leqq\dfrac{a}{4}$

$a-1\leqq\dfrac{a}{4}<a+1$ が成り立つから

$M(a)=f\left(\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{a^2}{8}$

[1]

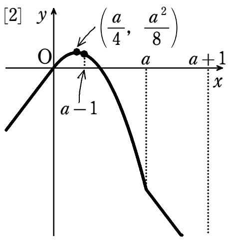


[2] $a>\dfrac{4}{3}$ のとき　$\dfrac{a}{4}<a-1$

$a-1<a$ であるから

$M(a)=f(a-1)$
$=-2(a-1)^2+a(a-1)$
$=-(a-1)(a-2)$
$=-a^2+3a-2$

[2]



$\boxed{8}$

解答 (1) $-3\leqq x\leqq 5$　(2) $k=0,\ -4$

解説

(1) 実数 α が方程式 ① の解となるための条件は

$\alpha^2+k\alpha+k^2+3k-9=0$　すなわち　$k^2+(\alpha+3)k+\alpha^2-9=0$　…… ②

を満たす実数 k が存在することである。

② を k の 2 次方程式とみて，その判別式を D とすると

$D=(\alpha+3)^2-4(\alpha^2-9)=-3\alpha^2+6\alpha+45$
$=-3(\alpha^2-2\alpha-15)=-3(\alpha+3)(\alpha-5)$

求める条件は，$D\geqq 0$ であるから　$(\alpha+3)(\alpha-5)\leqq 0$

これを解くと　$-3\leqq\alpha\leqq 5$

したがって，求める解の値の範囲は　$-3\leqq x\leqq 5$

(2) ① を x について解くと

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4(k^2+3k-9)}}{2}=\frac{-k\pm\sqrt{-3(k^2+4k-12)}}{2}$$

ここで，$-3(k^2+4k-12)=D'$ とおく。

① が異なる 2 つの整数解をもつとき，$D'>0$ から　$k^2+4k-12<0$

ゆえに　$(k+6)(k-2)<0$　　よって　$-6<k<2$

この不等式を満たす整数 k の値は

$k=-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$　…… ③

一方，方程式 ① は異なる 2 つの整数解をもつから，$x=\dfrac{-k\pm\sqrt{D'}}{2}$ において，D' は 0 でない平方数である。

$D'=48-3(k+2)^2$ と変形できるから，これに ③ の k の値を代入して D' が 0 でない平方数となるものを調べると　$k=0,\ -4$

$k=0$ のとき，$D'=6^2$ となるから　$x=\pm\dfrac{6}{2}=\pm 3$

$k=-4$ のとき，$D'=6^2$ となるから　$x=\dfrac{4\pm 6}{2}$　すなわち　$x=5,\ -1$

いずれの場合も，2 つの解は異なる整数となる。

以上により，求める k の値は　$k=0,\ -4$

$\boxed{9}$

解答 $a\leqq -1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}\leqq a$

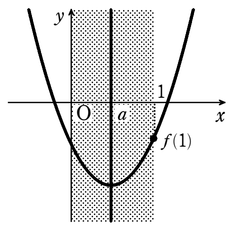
解説

$x(x-2a)\leqq a^2$ から　$x^2-2ax-a^2\leqq 0$

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)=x^2-2ax-a^2$ の最大値が 0 以下となる条件を求める。

$f(x)=(x-a)^2-2a^2$ であるから，軸は直線 $x=a$

変域の中央の値は　$\dfrac{1}{2}$



[1] $a<\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ の最大値は　$f(1)=1-2a-a^2$

よって　$1-2a-a^2\leqq 0$

ゆえに　$a^2+2a-1\geqq 0$

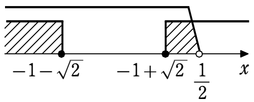
$a^2+2a-1=0$ を解くと

$a=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-1)}=-1\pm\sqrt{2}$

よって，$a^2+2a-1\geqq 0$ の解は

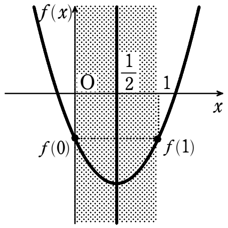
$a\leqq -1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}\leqq a$

これと $a<\frac{1}{2}$ の共通範囲は



$a\leqq -1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}\leqq a<\frac{1}{2}$ ……①

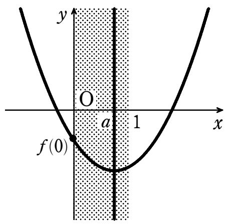
[2] $a=\frac{1}{2}$ のとき



$f(x)$ の最大値は　$f(0)=f(1)=-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}\leqq 0$ であるから　$a=\frac{1}{2}$ ……②

[3] $\frac{1}{2}<a$ のとき



$f(x)$ の最大値は　$f(0)=-a^2$

$-a^2\leqq 0$ は常に成り立つから　$\frac{1}{2}<a$ ……③

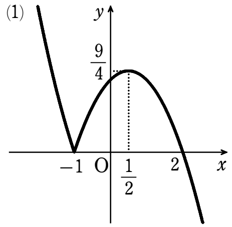
以上から，求める a の値の範囲は，①，②，③ を合わせて　$a\leqq -1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}\leqq a$

$\boxed{1}$

解答　(1) [図]　(2) $t=-\sqrt{2}$

(3) $t\leqq -\sqrt{2}$，$\frac{1}{2}\leqq t$

(1)



解説

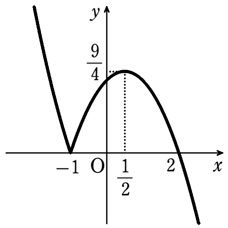
(1) $x<-1$ のとき

$f(x)=(2-x)\{-(x+1)\}=x^2-x-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

$x\geqq -1$ のとき

$f(x)=(2-x)(x+1)=-x^2+x+2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



(2) (1)のグラフから，最大値 $g(t)$ を与える x の値が2つあるとき，$t<-1<t+1$ ……① であり

$g(t)=f(t)=f(t+1)$ ……②

$t<-1$ のとき　$f(t)=t^2-t-2$

$t+1>-1$ のとき　$f(t+1)=-(t+1)^2+(t+1)+2=-t^2-t+2$

よって，② から　$t^2-t-2=-t^2-t+2$　　ゆえに　$t^2=2$

① より $-2<t<-1$ であるから　$t=-\sqrt{2}$

(3) $g(t)=f(t)$ となるのは，$f(x)$ が $t\leqq x\leqq t+1$ の範囲において，$x=t$（区間の左端）で最大値をとるときである。

(1)のグラフと(2)の結果から，$g(t)=f(t)$ を満たす t の範囲は　$t\leqq -\sqrt{2}$，$\frac{1}{2}\leqq t$

$\boxed{2}$

解答　$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<2$，$2<a<6+2\sqrt{10}$

解説

$y=|x^2+ax+2a|$ ……①，$y=a+1$ ……② とする。

方程式の実数解の個数は，① のグラフと直線 ② の共有点の個数に一致する。

まず　$x^2+ax+2a=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{8a-a^2}{4}$

$8a-a^2>0$ を解くと，$a(a-8)<0$ から　$0<a<8$

$8a-a^2=0$ を解くと，$a(a-8)=0$ から　$a=0$，8

$8a-a^2<0$ を解くと，$a(a-8)>0$ から　$a<0$，$8<a$

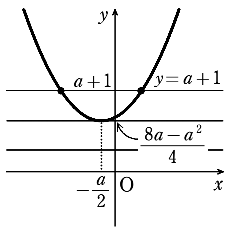
[1] $0<a<8$ のとき

すべての実数 x について　$x^2+ax+2a>0$

① のグラフは図のようになる。

よって，① のグラフと直線 ② が異なる 2 点で交わるための条件は

$a+1>\frac{8a-a^2}{4}$



整理すると　$a^2-4a+4>0$

したがって　$(a-2)^2>0$

この不等式の解は　$a\fallingdotseq 2$

$0<a<8$ との共通範囲は　$0<a<2$，$2<a<8$

[2] $a=0$ のとき，① は　$y=x^2$，　② は　$y=1$

$a=8$ のとき，① は　$y=(x+4)^2$，　② は　$y=9$

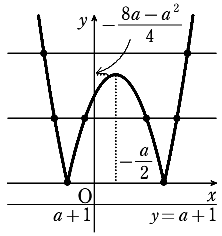
それぞれの場合について，① のグラフと直線 ② は異なる 2 点で交わるから，$a=0$，8 は条件を満たす。

[3] $a<0$，$8<a$ のとき

① のグラフは図のようになる。

よって，① のグラフと直線 ② が異なる 2 点で交わるための条件は　$a+1=0$　または

$a+1>-\frac{8a-a^2}{4}$ ……③



$a+1=0$ から　$a=-1$

③ を整理すると　$a^2-12a-4<0$

この不等式の解は　$6-2\sqrt{10}<a<6+2\sqrt{10}$

これと $a=-1$ と $a<0$，$8<a$ との共通範囲は

$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<0$，$8<a<6+2\sqrt{10}$

[1]，[2]，[3] から，求める a の値の範囲は

$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<2$，$2<a<6+2\sqrt{10}$

$\boxed{3}$

解答　(1) $x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，$y=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$

(2) $x=\sqrt{7}$，$y=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ のとき最大値 $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$

解説

$x^2-2xy+2y^2=4$ …… ① とする。

(1) $x+y=s$ とおくと　$y=-x+s$ ……②

これを ① に代入すると　$x^2-2x(-x+s)+2(-x+s)^2=4$

整理すると　$5x^2-6sx+2s^2-4=0$ ……③

x は実数であるから，x の 2 次方程式 ③ の判別式を D とすると　$D\geqq 0$

ここで　$\frac{D}{4}=(-3s)^2-5(2s^2-4)=-s^2+20$

よって　$-s^2+20\geqq 0$　　ゆえに　$-2\sqrt{5}\leqq s\leqq 2\sqrt{5}$

$s=2\sqrt{5}$ のとき $D=0$ で，③ は重解 $x=-\frac{-3s}{5}=\frac{3s}{5}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ をもつ。

このとき，② から　$y=-\frac{6\sqrt{5}}{5}+2\sqrt{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

よって，$x+y$ は $x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，$y=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$ をとる。

(2) $\frac{x}{y+4}=t$ とおくと　$x=t(y+4)$ ……④

これを ① に代入すると　$\{t(y+4)\}^2-2t(y+4)y+2y^2=4$

整理すると　$(t^2-2t+2)y^2+8t(t-1)y+16t^2-4=0$ ……⑤

ここで　$t^2-2t+2=(t-1)^2+1\geqq 1>0$

y は実数であるから，y の 2 次方程式 ⑤ の判別式を D' とすると　$D'\geqq 0$

ここで $\dfrac{D'}{4}=\{4t(t-1)\}^2-(t^2-2t+2)(16t^2-4)=-12t^2-8t+8$

よって $-12t^2-8t+8\geqq 0$ ゆえに $3t^2+2t-2\leqq 0$

したがって $\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

$t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ のとき $D'=0$ で，⑤は重解 $y=-\dfrac{4t(t-1)}{t^2-2t+2}$ をもつ。

このとき，$3t^2+2t-2=0$ が成り立つから $t^2=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}t$

ゆえに $y=-\dfrac{4t(t-1)}{\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}t\right)-2t+2}=-\dfrac{4t(t-1)}{-\dfrac{8}{3}(t-1)}=\dfrac{3}{2}t$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$

④から $x=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}+4\right)=\sqrt{7}$

よって，$\dfrac{x}{y+4}$ は $x=\sqrt{7}$，$y=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ をとる。

$\boxed{4}$

解答 $-2\leqq\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}\leqq 2$

解説

$\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}=k$ とおく。

分母を払って，x について整理すると $(k-1)x^2+(k-4)x+k-1=0$

$k\fallingdotseq 1$ のとき，x が実数であるためには，判別式 D について $D\geqq 0$

$D=(k-4)^2-4(k-1)^2=-3k^2+12=-3(k+2)(k-2)\geqq 0$

よって $-2\leqq k\leqq 2$ $(k\fallingdotseq 1)$

$k=1$ のとき $x=0$ (実数)

以上から $-2\leqq k\leqq 2$ すなわち $-2\leqq\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}\leqq 2$

$\boxed{5}$

解答 (1) 共通の解を x とする。

$a=0$ または $b=0$ のとき $x=0$；

$(a,\ b)=\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ のとき $x=-\dfrac{1}{2}$

(2) 略

解説

(1) 共通の解を α とすると

$\alpha^2+a\alpha+ab^2=0$ ……③，$\alpha^2+b\alpha+a^2b=0$ ……④

③−④から $(a-b)\alpha-ab(a-b)=0$

すなわち $(a-b)(\alpha-ab)=0$

$a\fallingdotseq b$ であるから $\alpha=ab$

これを③に代入すると $(ab)^2+a(ab)+ab^2=0$

すなわち $ab(ab+a+b)=0$

よって $a=0$ または $b=0$ または $ab+a+b=0$

[1] $a=0$ のとき

①は $x^2=0$ よって，$x=0$ を重解にもつ。

②は $x^2+bx=0$ よって $x=0,\ -b\ (\fallingdotseq 0)$

したがって，共通の解は $x=0$

[2] $b=0$ のとき

[1]と同様にして，①の解は $x=0,\ -a\ (\fallingdotseq 0)$

②は $x=0$ を重解にもつ。共通の解は $x=0$

[3] $a\fallingdotseq 0$，$b\fallingdotseq 0$，$ab+a+b=0$ のとき $ab=-(a+b)$ ……⑤

⑤を①に代入すると $x^2+ax-b(a+b)=0$

すなわち $(x+a+b)(x-b)=0$

⑤を②に代入すると $x^2+bx-a(a+b)=0$

すなわち $(x+a+b)(x-a)=0$

(ア) ①が重解をもつとき $-(a+b)=b$

⑤から $ab=b$ $b\fallingdotseq 0$ であるから $a=1$

このとき $2b+1=0$ よって $b=-\dfrac{1}{2}$

①は $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=0$，②は $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)=0$

したがって，共通の解は $x=-\dfrac{1}{2}$

(イ) ②が重解をもつとき $-(a+b)=a$

(ア)と同様にして $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=1$

①は $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)=0$，②は $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=0$

したがって，共通の解は $x=-\dfrac{1}{2}$

以上から，共通の解は $a=0$ または $b=0$ のとき $x=0$

$(a,\ b)=\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ のとき $x=-\dfrac{1}{2}$

(2) ①と②が共通の解をもち，どちらも重解をもたないのは，(1)の[3]の場合であり，共通でない解は a と b である。

$a>0$ かつ $b>0$ であると仮定すると $ab>0$

また，⑤により，$ab=-(a+b)<0$ となるが，これは矛盾である。

よって，a，b の少なくとも一方は負である。

したがって，題意は示された。

$\boxed{6}$

解答 (1) 略 (2) 略 (3) $\alpha<a<\beta<a+b$

解説

(1) 2次方程式の判別式を D とすると

$D=\{-(a+b)\}^2-4(ab-cd)=(a-b)^2+4cd$

a，b，c，d は正の実数であるから $(a-b)^2\geqq 0$，$4cd>0$

したがって $D>0$

よって，この2次方程式は異なる2つの実数解をもつ。

(2) $f(x)=x^2-(a+b)x+ab-cd$ とする。

2次方程式 $f(x)=0$ は，異なる2つの実数解をもつから，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる2点で交わる。

また，$y=f(x)$ のグラフの軸は 直線 $x=\dfrac{a+b}{2}$

a，b は正の実数であるから $\dfrac{a+b}{2}>0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは x 軸の正の部分と少なくとも1点で交わる。

すなわち，この2次方程式の2つの解のうち少なくとも1つは正の数である。

(3) $f(a)=a^2-(a+b)a+ab-cd=-cd$

c，d は正の実数であるから $f(a)<0$

$y=f(x)$ のグラフは $\alpha<x<\beta$ のときだけ x 軸の下側にある。

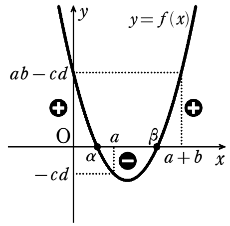
よって $\alpha<a<\beta$ ……①

また，$0<\alpha<\beta$ であるから $f(0)=ab-cd>0$

ゆえに $f(a+b)=ab-cd>0$

よって $\beta<a+b$ ……②

①，②から $\alpha<a<\beta<a+b$



$\boxed{7}$

解答 2個

解説

$\begin{cases} x^2-2kx+k<0 & \cdots\cdots① \\ kx^2-2x<0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①の左辺を $f(x)$ とすると $f(x)=(x-k)^2-k^2+k$

$k=1$ のとき，$f(x)=(x-1)^2$ となるから，①は解をもたない。

$k\geqq 2$ のとき，$-k^2+k=-k(k-1)<0$ であるから，①は解をもつ。 ……(*)

②から $x(kx-2)<0$ よって $0<x<\dfrac{2}{k}$ ……③

したがって，連立不等式①，②が解をもつための条件は，$f(x)=0$ が③の範囲で解をもつことである。

すなわち，$y=f(x)$ のグラフが③の範囲で x 軸と共有点をもつことである。

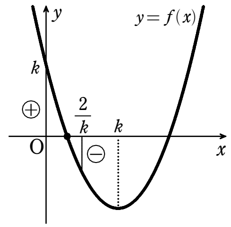
$k\geqq 2$ のとき，(*)により，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる2点で交わる。

また $f(0)=k>0$

軸について $x=k>\dfrac{2}{k}$

よって，$y=f(x)$ のグラフが③の範囲で x 軸と共有点をもつための条件は，③の範囲で x 軸と1点で交わることであり

$f\left(\dfrac{2}{k}\right)=\dfrac{4}{k^2}-4+k=\dfrac{k^3-4k^2+4}{k^2}<0$



したがって $k^3-4k^2+4<0$

すなわち $k^2(k-4)+4<0$

これは $k=2$，3のとき成り立ち，$k\geqq 4$ のときは成り立たない。

よって，求める自然数 k の個数は 2個

別解 $k\geqq 2$ のとき，①の解は $k-\sqrt{k^2-k}<x<k+\sqrt{k^2-k}$

よって，連立不等式①，②が解をもつための条件は

$k-\sqrt{k^2-k}<\dfrac{2}{k}$ すなわち $k-\dfrac{2}{k}<\sqrt{k^2-k}$

$k\geqq 2$ のとき，左辺は正であるから，両辺を2乗すると $k^2-4+\dfrac{4}{k^2}<k^2-k$

分母を払って整理すると　$k^3-4k^2+4<0$　(以後，上と同じ)

$\boxed{8}$

解答　$a\geqq 1$

解説

与えられた不等式を y について整理すると

$$y^2-(z+x)y+a(z^2+x^2)-zx\geqq 0$$

これが任意の実数 y に対して常に成り立つための条件は，y についての２次方程式 $y^2-(z+x)y+a(z^2+x^2)-zx=0$ の判別式を D_1 とすると，y^2 の係数が正であるから

$$D_1\leqq 0 \text{ すなわち } (z+x)^2-4\{a(z^2+x^2)-zx\}\leqq 0$$

これを z について整理すると

$$(1-4a)z^2+6xz+(1-4a)x^2\leqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$1-4a=0$ のとき，①は $6xz\leqq 0$ となるが，これは例えば $x=1$，$z=1$ のとき成り立たないから不適である。

$1-4a\neq 0$ のとき，z の方程式 $(1-4a)z^2+6xz+(1-4a)x^2=0$ の判別式を D_2 とすると，①が任意の実数 z に対して常に成り立つための条件は　$1-4a<0$　かつ　$D_2\leqq 0$

ゆえに　$1-4a<0$　かつ　$\frac{D_2}{4}=(3x)^2-(1-4a)\cdot(1-4a)x^2\leqq 0$

すなわち　$a>\frac{1}{4}$　かつ　$8(1-a)(1+2a)x^2\leqq 0$　……②

②が任意の実数 x に対して常に成り立つための条件は　$(1-a)(1+2a)\leqq 0$

すなわち　$(a-1)(2a+1)\geqq 0$　　よって　$a\leqq -\frac{1}{2}$，$1\leqq a$

これと $a>\frac{1}{4}$ の共通範囲を求めて　$a\geqq 1$

$\boxed{9}$

解答　$2\leqq a<2+2\sqrt{2}$

解説

$f(x)=(x+a)(x+2)$ から

$$f(f(x))=(f(x)+a)(f(x)+2)=\{(x+a)(x+2)+a\}\{(x+a)(x+2)+2\}$$
$$=\{x^2+(a+2)x+3a\}\{x^2+(a+2)x+2a+2\}$$

ここで，$a\geqq 2$ であるから　$x^2+(a+2)x+3a\geqq x^2+(a+2)x+2a+2$

また，$x^2+(a+2)x+3a$，$x^2+(a+2)x+2a+2$ の x^2 の係数はともに正であるから

すべての実数 x に対して　$f(f(x))>0$

$\iff$ すべての実数 x に対して

$x^2+(a+2)x+3a>0$　かつ　$x^2+(a+2)x+2a+2>0$

$\iff$ すべての実数 x に対して　$x^2+(a+2)x+2a+2>0$　……①

$x^2+(a+2)x+2a+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(a+2)^2-4\cdot 1\cdot(2a+2)=a^2-4a-4$$

①が成り立つための条件は　$D<0$

よって　$a^2-4a-4<0$　　ゆえに　$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$

$a\geqq 2$ であるから，求める a の値の範囲は　$2\leqq a<2+2\sqrt{2}$

$\boxed{10}$

解答　$x=-2,\ -\frac{2}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{6}{5}$

解説

条件(B)から　$f(x+2)=-f(x+1)+1=-\{-f(x)+1\}+1=f(x)$

よって，$f(x)$ は周期２の周期関数である。

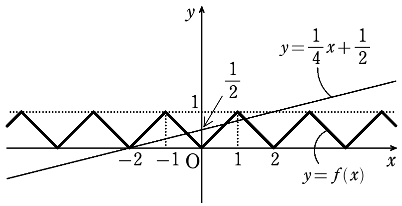
また，条件(A)，(B)から，$0\leqq x<1$ のとき　$f(x+1)=-f(x)+1=-x+1$

$x+1=X$ とおくと，$x=X-1$ であり

$$f(X)=-(X-1)+1=-X+2 \quad (1\leqq X<2)$$

ゆえに，$1\leqq x<2$ のとき　$f(x)=-x+2$

以上から，$y=f(x)$ のグラフは次の図の太線部分のようになる。



方程式 $f(x)-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0$ の解は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ の共有点の x 座標と一致する。共有点の x 座標は

[1]　$-2\leqq x<-1$ のとき　$x=-2$

[2]　$-1\leqq x<0$ のとき　$f(x)=-x$

$-x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0$ を解くと　$x=-\frac{2}{5}$

[3]　$0\leqq x<1$ のとき　$f(x)=x$

$x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0$ を解くと　$x=\frac{2}{3}$

[4]　$1\leqq x<2$ のとき　$f(x)=-x+2$

$-x+2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0$ を解くと　$x=\frac{6}{5}$

以上から，求める解は　$x=-2,\ -\frac{2}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{6}{5}$

$\boxed{11}$

解答　$k=4,\ 5$

解説

$5n^2-2kn+1<0$ ……①とし，$f(x)=5x^2-2kx+1$ とする。

$f(n)<0$ を満たす整数 n が存在するとき，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる２点で交わるから，$f(x)=0$ の判別式を D とすると　$D>0$

$\frac{D}{4}=(-k)^2-5\cdot 1=k^2-5$ であるから　$k^2-5>0$　すなわち　$k^2>5$

k は正の整数であるから　$k\geqq 3$

[1]　$k=3$ のとき

$$f(x)=5x^2-6x+1=(5x-1)(x-1)$$

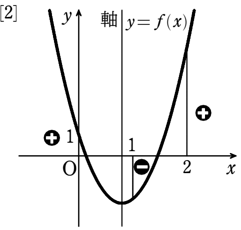
よって，①を満たす整数 n は存在しない。

[2]　$k=4$ のとき　$f(x)=5x^2-8x+1$

グラフの軸の直線 $x=\frac{4}{5}$ に最も近い整数は１で，

$$f(0)=1,\ f(1)=-2,\ f(2)=5$$

[2]



よって，①を満たす整数 n は $n=1$ のみである。

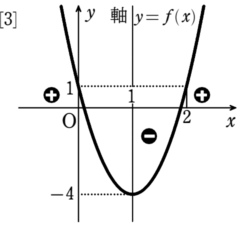
[3]　$k=5$ のとき　$f(x)=5x^2-10x+1$

グラフの軸は直線 $x=1$ で，

$$f(0)=1,\ f(1)=-4,\ f(2)=1$$

よって，①を満たす整数 n は $n=1$ のみである。

[3]



[4]　$k\geqq 6$ のとき

$$f(1)=2(3-k)<0,\ f(2)=21-4k<0$$

よって，①を満たす整数 n は２個以上ある。

[1]～[4]から，求める k の値は　$k=4,\ 5$