1

解答　(1) $\dfrac{\pi}{3}$　(2) $\dfrac{13}{6}\pi$　(3) $-\dfrac{41}{12}\pi$　(4) $45°$　(5) $-210°$　(6) $1380°$

解説

(1) $\dfrac{\pi}{180}\times 60=\dfrac{\pi}{3}$（ラジアン）　(2) $\dfrac{\pi}{180}\times 390=\dfrac{13}{6}\pi$（ラジアン）

(3) $\dfrac{\pi}{180}\times(-615)=-\dfrac{41}{12}\pi$（ラジアン）

(4) $\dfrac{180}{\pi}\times\dfrac{\pi}{4}=45$　　よって　$45°$

(5) $\dfrac{180}{\pi}\times\left(-\dfrac{7}{6}\pi\right)=-210$　　よって　$-210°$

(6) $\dfrac{180}{\pi}\times\dfrac{23}{3}\pi=1380$　　よって　$1380°$

2

解答　(1) $\sin\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{8}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$\tan\dfrac{8}{3}\pi=-\sqrt{3}$

(2) $\sin\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=-1$

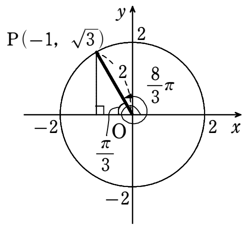
解説

(1) 右の図で円の半径が $r=2$ のとき，
点Ｐの座標は　$(-1,\ \sqrt{3})$

よって　$\sin\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$\tan\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

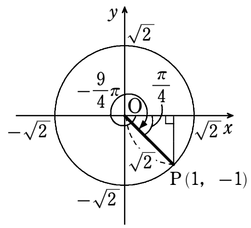


(2) 右の図で円の半径が $r=\sqrt{2}$ のとき，
点Ｐの座標は　$(1,\ -1)$

よって　$\sin\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=\dfrac{-1}{1}=-1$



3

解答　(1) $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(2) $\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解説

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　$\sin\theta<0$

よって　$\sin\theta=-\sqrt{\dfrac{5}{9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\div\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+(-1)^2}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ であるから　$\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

4

解答　(1) $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{13}{27}$　(2) $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を２乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\left(\dfrac{1}{9}-1\right)\div 2=-\dfrac{4}{9}$

また　
$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\\&=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{4}{9}\right)\right\}=\frac{13}{27}\end{aligned}$$

(2) (1)から　
$$\begin{aligned}(\sin\theta-\cos\theta)^2&=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=1-2\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{17}{9}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

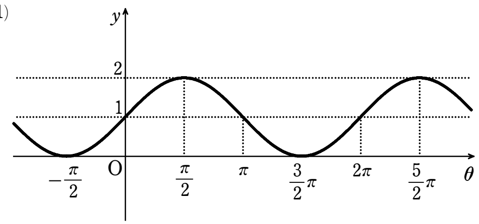
$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ では，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$ であり　$\sin\theta-\cos\theta>0$

よって，①から　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

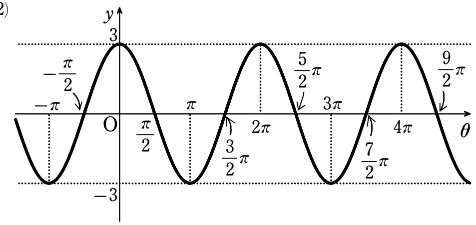
5

解答　(1) ［図］，周期 2π　(2) ［図］，周期 2π　(3) ［図］，周期 2π
(4) ［図］，周期 3π

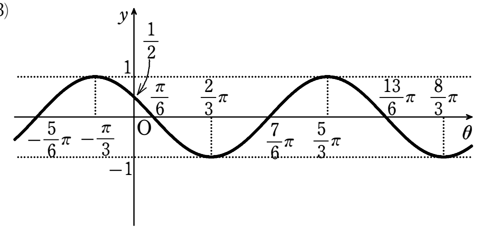
(1)



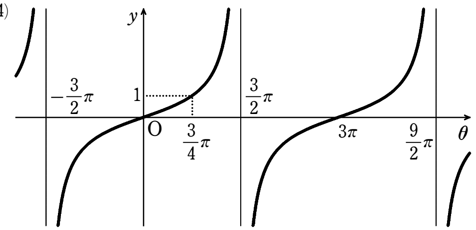
(2)



(3)

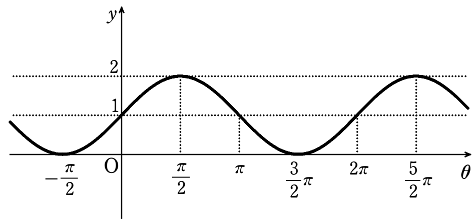


(4)

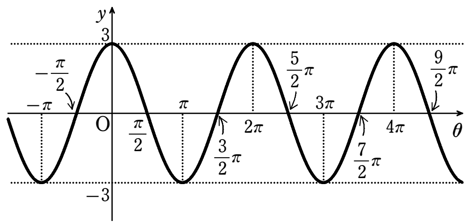


解説

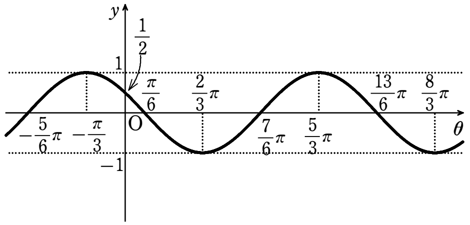
(1)　$y=\sin\theta+1$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に１だけ平行移動したもので，［図］のようになる。周期は　2π



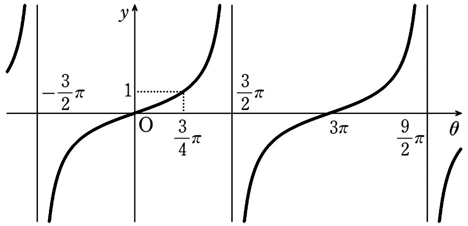
(2)　$y=3\cos\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向に３倍に拡大したもので，［図］のようになる。周期は　2π



(3)　$y=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，［図］のようになる。周期は　2π

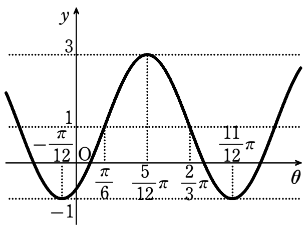


(4)　$y=\tan\frac{\theta}{3}$ のグラフは，$y=\tan\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向に３倍に拡大したもので，［図］のようになる。周期は　$\pi\div\frac{1}{3}=3\pi$



6

解答　［図］



解説

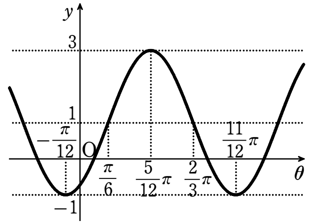
$y=2\sin 2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1$ と変形できるから

$y=2\sin 2\theta$（周期 π）のグラフを

θ 軸方向に $\frac{\pi}{6}$，y 軸方向に１

だけ平行移動する。

よって，グラフは右の図。



参考　点 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ を原点とみて，$y=2\sin 2\theta$ のグラフをかくとよい。

7

解答　$0\leqq\theta<2\pi$ のときの解，θ の範囲に制限がないときの解の順に示した。
なお，n は整数とする。

(1)　$\theta=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$；$\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi$，$\frac{3}{4}\pi+2n\pi$

(2)　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{11}{6}\pi$；$\theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi$，$\frac{11}{6}\pi+2n\pi$

(3)　$\theta=\frac{5}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$；$\theta=\frac{5}{6}\pi+n\pi$

解説

n は整数とする。

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$

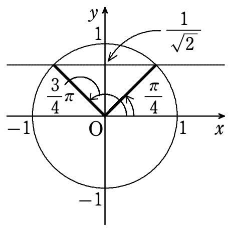
θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi$，$\frac{3}{4}\pi+2n\pi$

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{11}{6}\pi$

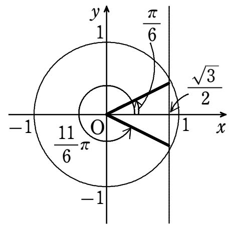
θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi$，$\frac{11}{6}\pi+2n\pi$

参考　θ の範囲に制限がないときの解は，$\theta=\pm\frac{\pi}{6}+2n\pi$ と表すこともできる。

(1)



(2)

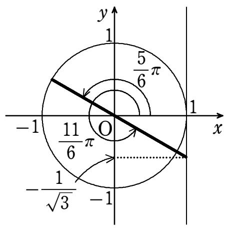


(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から

$\theta=\frac{5}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$

θ の範囲に制限がないとき

$\theta=\frac{5}{6}\pi+n\pi$



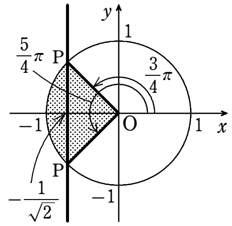
8

解答　(1)　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$　　(2)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

(3)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1)　不等式を変形して　　$\cos\theta\leqq-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の

値は　　$\theta=\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$

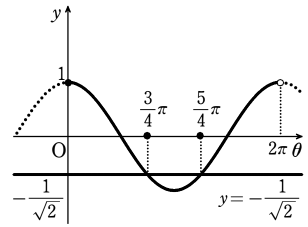
よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

ゆえに，θ の値の範囲は

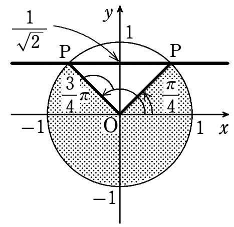
$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$

別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\cos\theta$（$0\leqq\theta<2\pi$）のグラフが，直線 $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から　　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$



(2)　不等式を変形して　　$\sin\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は

$\theta=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

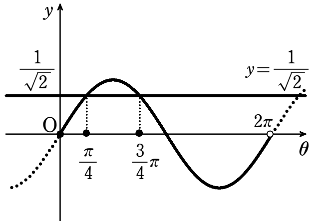
ゆえに，θ の値の範囲は

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\quad \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$$



(3)　不等式を変形して　$\tan\theta<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

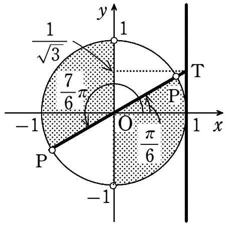
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{6},\quad \frac{7}{6}\pi$$

よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

ゆえに，θ の値の範囲は

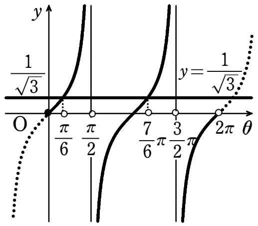
$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$$



別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\tan\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$$



$\boxed{1}$

解答　(1) $\dfrac{\pi}{6}$　(2) $\dfrac{\pi}{4}$　(3) $\dfrac{\pi}{3}$　(4) $\dfrac{\pi}{2}$　(5) $270°$　(6) $135°$　(7) $24°$　(8) $360°$

解説

(1) $30\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{6}$　　(2) $45\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{4}$

(3) $60\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{3}$　　(4) $90\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{2}$

(5) $\dfrac{3}{2}\pi\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=270°$　　(6) $\dfrac{3}{4}\pi\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=135°$

(7) $\dfrac{2}{15}\pi\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=24°$　　(8) $2\pi\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=360°$

$\boxed{2}$

解答　(1) $\sin\dfrac{23}{6}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{23}{6}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\dfrac{23}{6}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\sin\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=-1$

解説

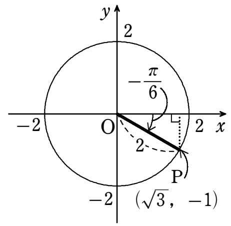
(1) $\dfrac{23}{6}\pi=-\dfrac{\pi}{6}+2\cdot2\pi$

図で，円の半径が $r=2$ のとき，点 P の座標は $(\sqrt{3},\ -1)$

よって　$\sin\dfrac{23}{6}\pi=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$,

$\cos\dfrac{23}{6}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\dfrac{23}{6}\pi=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



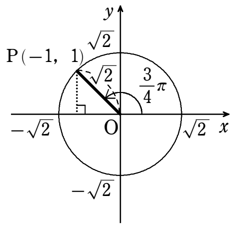
(2) $-\dfrac{5}{4}\pi=\dfrac{3}{4}\pi-2\pi$

図で，円の半径が $r=\sqrt{2}$ のとき，点 P の座標は $(-1,\ 1)$

よって　$\sin\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\tan\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{-1}=-1$



$\boxed{3}$

解答　(1) $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$　(2) $\sin\theta=-\dfrac{4}{\sqrt{17}}$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

解説

(1) $\pi<\theta<2\pi$ であるから　$\sin\theta<0$

よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{3}{5}\div\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{3}{4}$

(2) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+4^2=17$　　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{17}$

θ の動径が第３象限にあるから　$\cos\theta<0$

ゆえに　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{17}}=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=4\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\dfrac{4}{\sqrt{17}}$

$\boxed{4}$

解答　順に

(1) $-\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$　(2) $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を２乗して

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$　ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{8}$

また　
$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}=\frac{9\sqrt{3}}{16}\end{aligned}$$

(2) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を２乗して

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

よって　$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

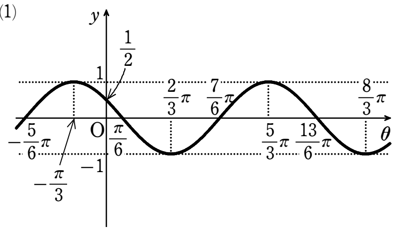
また　
$$\begin{aligned}\sin^3\theta-\cos^3\theta&=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

$\boxed{5}$

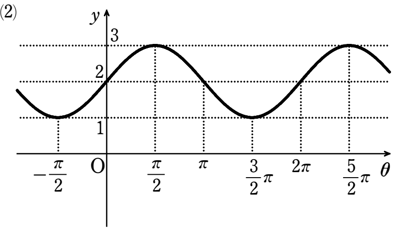
解答　(1) ［図］周期は 2π　(2) ［図］周期は 2π　(3) ［図］周期は π

(4) ［図］周期は π

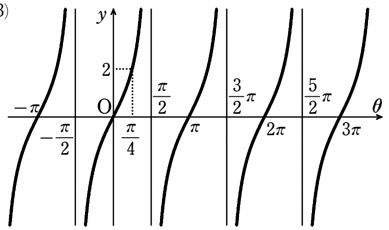
(1)



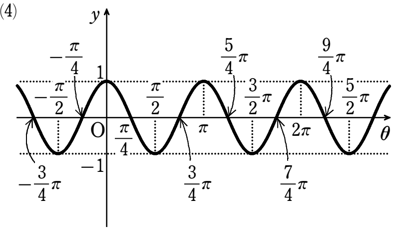
(2)



(3)



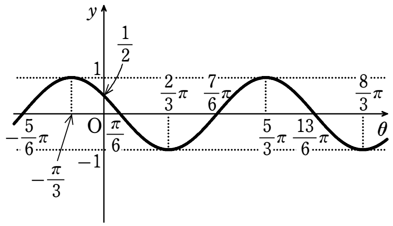
(4)



解説

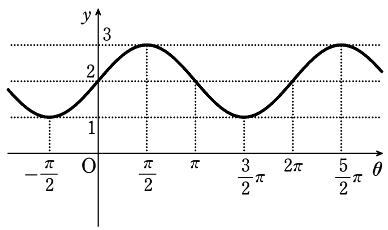
(1)　$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，グラフは右の図。

また，周期は　2π



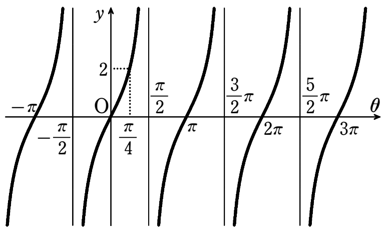
(2)　$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に２だけ平行移動したもので，グラフは右の図。

また，周期は　2π



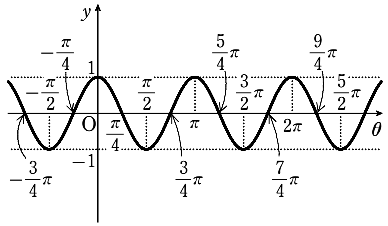
(3)　$y=\tan\theta$ のグラフを y 軸方向に２倍に拡大したもので，グラフは右の図。

また，周期は　π



(4)　$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもので，グラフは右の図。

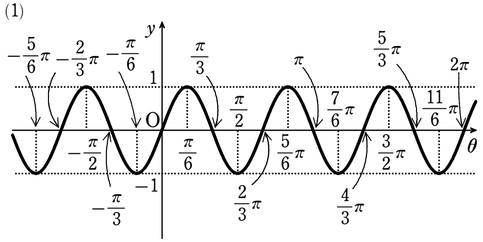
また，周期は　π



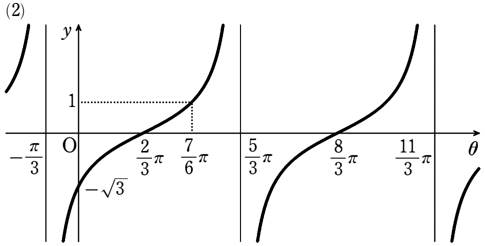
6

解答　(1)　周期 $\frac{2}{3}\pi$，[図]　　(2)　周期 2π，[図]　　(3)　周期 π，[図]

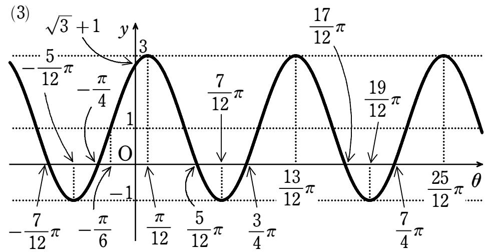
(1)



(2)



(3)



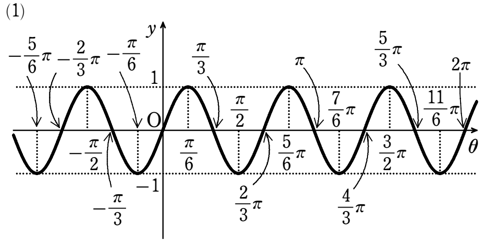
解説

(1)　$\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 3\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

したがって，$y=\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフは，$y=\cos 3\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。

周期は　$2\pi\div 3=\frac{2}{3}\pi$　　　グラフは[図]

(1)

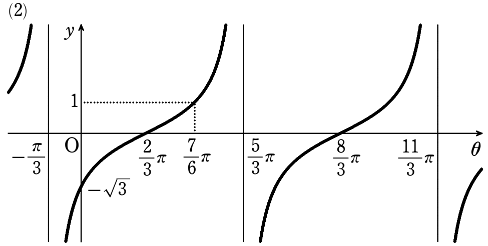


(2)　$\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$

したがって，$y=\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\tan\frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{2}{3}\pi$ だけ平行移動したものである。

周期は　$\pi\div\frac{1}{2}=2\pi$　　　グラフは[図]

(2)

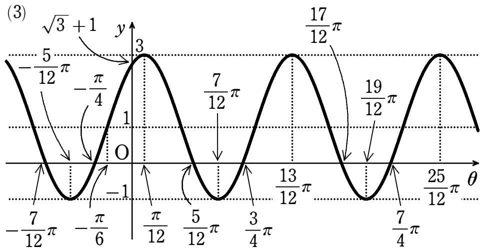


(3)　$2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+1=2\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1$

したがって，$y=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+1$ のグラフは，$y=2\sin 2\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$，y 軸方向に１だけ平行移動したものである。

周期は　$2\pi\div2=\pi$　　グラフは[図]

(3)



$\boxed{7}$

解答　$0\leqq\theta<2\pi$ のときの解；θ の範囲に制限がないときの解　の順に示す。

なお，n は整数とする。

(1)　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$；$\theta=\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ \frac{2}{3}\pi+2n\pi$

(2)　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$；$\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ \frac{7}{4}\pi+2n\pi$　（または $\theta=\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi$）

(3)　$\theta=\pi$；$\theta=(2n+1)\pi$

(4)　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$；$\theta=\frac{\pi}{6}+n\pi$

(5)　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$；$\theta=\frac{2}{3}\pi+2n\pi,\ \frac{4}{3}\pi+2n\pi$　（または $\theta=\pm\frac{2}{3}\pi+2n\pi$）

(6)　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$；$\theta=\frac{3}{4}\pi+n\pi$

解説

n は整数とする。

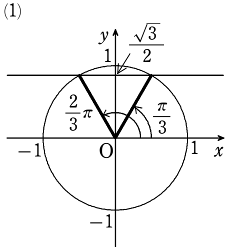
(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ \frac{2}{3}\pi+2n\pi$

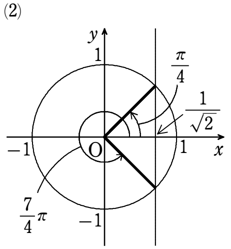
(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ \frac{7}{4}\pi+2n\pi$

(1)



(2)



参考　θ の範囲に制限がないときは $\theta=\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi$ と表すこともできる。

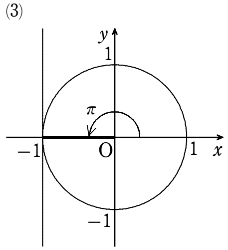
(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\pi+2n\pi$　すなわち　$\theta=(2n+1)\pi$

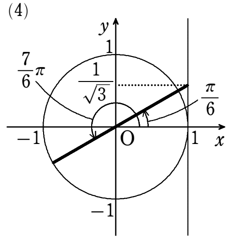
(4)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\frac{\pi}{6}+n\pi$

(3)



(4)



(5)　$2\cos\theta+1=0$ から　　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\frac{2}{3}\pi+2n\pi,\ \frac{4}{3}\pi+2n\pi$

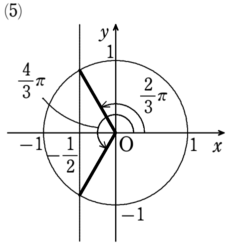
参考　θ の範囲に制限がないときは $\theta=\pm\frac{2}{3}\pi+2n\pi$ と表すこともできる。

(6)　$\tan\theta+1=0$ から　　$\tan\theta=-1$

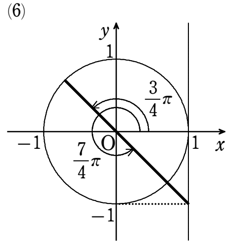
$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\frac{3}{4}\pi+n\pi$

(5)



(6)



$\boxed{8}$

解答　(1)　$0\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$　　(2)　$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{11}{6}\pi$

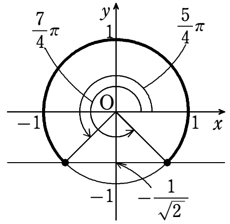
(3)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

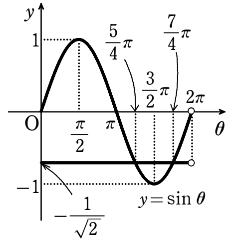
解説

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta+1\geqq0$ から　　$\sin\theta\geqq-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は　　$\theta=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

図から，不等式の解は　　$0\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

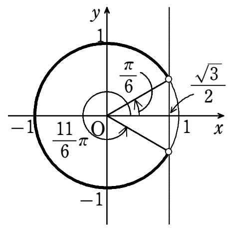


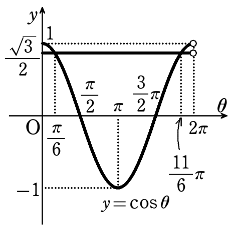


(2)　$2\cos\theta-\sqrt{3}<0$ から　　$\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値は　　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$

図から，不等式の解は　　$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{11}{6}\pi$

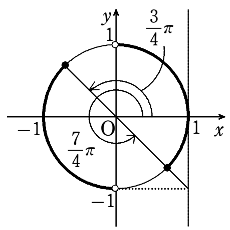


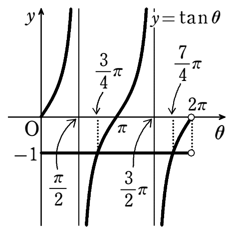


(3)　$\tan\theta+1\geqq0$ から　　$\tan\theta\geqq-1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\tan\theta=-1$ を満たす θ の値は　　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

図から，不等式の解は　　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$





1

解答　(1)　$l=\frac{3}{2}\pi$，$S=\frac{9}{2}\pi$　　(2)　$l=\frac{20}{3}\pi$，$S=\frac{80}{3}\pi$

解説

(1)　$l=6\times\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$，$S=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$

別解　$S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\pi\times6=\frac{9}{2}\pi$

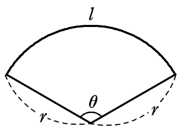
(2)　$l=8\times\frac{5}{6}\pi=\frac{20}{3}\pi$，$S=\frac{1}{2}\times8^2\times\frac{5}{6}\pi=\frac{80}{3}\pi$

別解　$S=\frac{1}{2}\times\frac{20}{3}\pi\times8=\frac{80}{3}\pi$

2［芝浦工業大］

解答　(ア)　3　　(イ)　2　　(ウ)　9

解説



扇形の半径を r cm，中心角を θ ラジアン，面積を S cm^2，弧の長さを l cm とすると

$l=r\theta$ ……①，　$S=\frac{1}{2}rl$ ……②

扇形の周囲の長さが 12 cm であるから　　$2r+l=12$

よって　　$l=12-2r$　……③

$r>0$，$l>0$ であるから　　$0<r<6$

③を②に代入して　　$S=\frac{1}{2}r(12-2r)=6r-r^2=-(r-3)^2+9$

$0<r<6$ の範囲で，S は $r={}^{ア}3$ のとき最大値 ${}^{ウ}9$ (cm^2) をとる。

このとき，中心角は①，③から　　$\theta=\frac{l}{r}=\frac{12-2\cdot3}{3}={}^{イ}2$ (ラジアン)

3

解答　(1)　0　　(2)　1

解説

(1)　$\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right\}=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

よって　　(与式)$=\cos\theta+(-\sin\theta)+(-\cos\theta)+\sin\theta=0$

(2)　(与式)$=(-\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)+\cos\theta\cdot\cos\theta$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

4

解答　(1)　略　　(2)　1

解説

(1)　$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta}$

したがって　　$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}$

(2)　$\cos^2\theta+\sin\theta-\tan\theta(1-\sin\theta)\cos\theta=\cos^2\theta+\sin\theta-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1-\sin\theta)\cos\theta$

$=\cos^2\theta+\sin\theta-\sin\theta(1-\sin\theta)$

$=\cos^2\theta+\sin\theta-\sin\theta+\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

5

解答　(1)　$\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)　$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　または

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解説

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから　　$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

(1)　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

$\sin\theta-\cos\theta>0$ であるから　　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

よって　　$\sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1)の結果とこの式から，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めると

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　または

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

6

解答　(ア)　3　　(イ)　$-\frac{19}{6}$

解説

解と係数の関係により

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$　……①，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{8}$　……②

①の両辺を2乗すると　　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

②を代入すると　　$1+2\left(-\frac{a}{8}\right)=\frac{1}{4}$

ゆえに　　$a={}^{ア}3$

よって，②から　　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

したがって　　$\frac{\sin^2\theta+1}{\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta+1}{\sin\theta}=\frac{\sin^3\theta+\sin\theta+\cos^3\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{2}\right\}\div\left(-\frac{3}{8}\right)={}^{イ}-\frac{19}{6}$

1

解答　$\sin0<\sin3<\sin1<\sin2$

解説

関数 $\sin x$ は，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で増加，$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ で減少する。

$\sin0=0$

$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$　であるから　　$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin1<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{2}<2<\frac{2}{3}\pi$ であるから　　$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin2<1$

$\frac{3}{4}\pi<3<\pi$　であるから　　$0<\sin3<\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$\sin0<\sin3<\sin1<\sin2$

2

解答　3

解説

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ の両辺を平方すると　　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

ゆえに　　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$　　　よって　　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$

$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2(\sin\theta\cos\theta)^2$

$=1^2-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$

$\sin^5\theta+\cos^5\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^3\theta+\cos^3\theta)-(\sin\theta\cos\theta)^2(\sin\theta+\cos\theta)$

$=1\cdot\frac{5\sqrt{2}}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{19\sqrt{2}}{32}$

よって　　(与式)$=5\cdot\frac{19\sqrt{2}}{32}\div\frac{5\sqrt{2}}{8}-2\cdot\frac{7}{8}=\frac{19}{4}-\frac{7}{4}=3$

3

解答　$\frac{1}{2}$

解説

$\sin\theta+\cos\theta=u$　……①，　$\sin\theta\cos\theta=v$　……②　とおく。

①の両辺を2乗して　　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=u^2$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　　$1+2\sin\theta\cos\theta=u^2$

②を代入して　　$1+2v=u^2$　　　ゆえに　　$v=\frac{u^2-1}{2}$　……③

①の両辺を3乗して　　$\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=u^3$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{11}{16}$ であるから　　$\frac{11}{16}+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=u^3$

①，②を代入して　　$\frac{11}{16}+3uv=u^3$

③を代入して　　$\frac{11}{16}+\frac{3u(u^2-1)}{2}=u^3$　　　整理すると　　$8u^3-24u+11=0$

よって　$(2u-1)(4u^2+2u-11)=0$

ゆえに　$u=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm3\sqrt{5}}{4}$　……④

また，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は２次方程式 $t^2-ut+v=0$ の２つの実数解であるから，判別式を D とすると　$D=(-u)^2-4v\geqq0$

③を代入して　$u^2-2(u^2-1)\geqq0$　　よって　$u^2\leqq2$

ここで　$\left(\dfrac{-1\pm3\sqrt{5}}{4}\right)^2-2=\dfrac{14\mp6\sqrt{5}}{16}\geqq\dfrac{7-3\sqrt{5}}{8}=\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{45}}{8}>0$　（複号同順）

したがって，④の解のうちで $u^2\leqq2$ を満たす値は　$u=\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{4}$

解答　$x=\dfrac{5}{3}\pi$，$y=\dfrac{7}{6}\pi$

解説

$\begin{cases}\cos x-\sin y=1 & \cdots\cdots ①\\ \cos y+\sin x=-\sqrt{3} & \cdots\cdots ②\end{cases}$　とする。

①から　$\cos x=\sin y+1$　……③

②から　$\sin x=-\cos y-\sqrt{3}$　……④

これらを $\sin^2x+\cos^2x=1$ に代入すると

$$(-\cos y-\sqrt{3})^2+(\sin y+1)^2=1$$

よって　$\cos^2y+2\sqrt{3}\cos y+3+\sin^2y+2\sin y+1=1$

ゆえに　$\sin y=-\sqrt{3}\cos y-2$　……⑤

これを $\sin^2y+\cos^2y=1$ に代入すると

$$(-\sqrt{3}\cos y-2)^2+\cos^2y=1$$

$$4\cos^2y+4\sqrt{3}\cos y+3=0$$

よって　$(2\cos y+\sqrt{3})^2=0$

したがって　$\cos y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……⑥

よって，④から　$\sin x=-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……⑦

⑤から　$\sin y=-\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-2=-\dfrac{1}{2}$　……⑧

⑧を③に代入して　$\cos x=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$　……⑨

$0\leqq x<2\pi$ であるから，⑦，⑨より　$x=\dfrac{5}{3}\pi$

$0\leqq y<2\pi$ であるから，⑥，⑧より　$y=\dfrac{7}{6}\pi$

$\boxed{5}$

解答　略

解説

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

よって　$\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\theta\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$=\sin^2\theta+\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2-\sin\theta\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=\sin^2\theta+\left(\frac{1}{4}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)-\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$=\frac{3}{4}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\frac{3}{4}$$

したがって，θ に無関係な定数である。

$\boxed{6}$

解答　(1)　(ア)　$\dfrac{2}{3}\pi$　　(イ)　3　　(2)　12π

解説

(1)　周期は　$\dfrac{2\pi}{3}=$ ア $\dfrac{2}{3}\pi$

また，$-1\leqq\sin3\theta\leqq1$ であるから　$-1\leqq2\sin3\theta+1\leqq3$

よって，$f(\theta)$ の最大値は　イ 3

(2)　$\sin\dfrac{x}{2}$ の周期は　$2\times2\pi=4\pi$

$\sin\dfrac{x}{3}$ の周期は　$3\times2\pi=6\pi$

4と6の最小公倍数は12であるから，求める周期は　12π

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\theta=\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi$　　(2)　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　　(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{24},\ \dfrac{7}{24}\pi,\ \dfrac{25}{24}\pi,\ \dfrac{31}{24}\pi$

(4)　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

解説

(1)　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと　$\sin t=-\dfrac{1}{2}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{4}\leqq t<\dfrac{9}{4}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　$t=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

すなわち　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　よって　$\theta=\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi$

(2)　$\theta+\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\cos t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}<2\pi+\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{7}{3}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　$t=\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$

すなわち　$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$　よって　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

(3)　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと　$\sin t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{6}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{6}<4\pi+\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{25}{6}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　$t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \dfrac{11}{4}\pi$

すなわち　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \dfrac{11}{4}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{24},\ \dfrac{7}{24}\pi,\ \dfrac{25}{24}\pi,\ \dfrac{31}{24}\pi$

(4)　$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\tan t=-\sqrt{3}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{3}<4\pi-\dfrac{\pi}{3}$

すなわち　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{11}{3}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　$t=-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi$

すなわち　$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi$

よって　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{7}{12}\pi<\theta<2\pi$　　(2)　$\dfrac{7}{12}\pi<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{19}{12}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

(3)　$\dfrac{7}{24}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{11}{24}\pi$，$\dfrac{31}{24}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{35}{24}\pi$

解説

(1)　$\theta+\frac{\pi}{6}=t$ とおくと　　$\sin t<\frac{1}{\sqrt{2}}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}<2\pi+\frac{\pi}{6}$　　すなわち　　$\frac{\pi}{6}\leqq t<\frac{13}{6}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　　$\frac{\pi}{6}\leqq t<\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi<t<\frac{13}{6}\pi$

すなわち　　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$

よって　　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{12}$，$\frac{7}{12}\pi<\theta<2\pi$

(2)　$\theta-\frac{\pi}{3}=t$ とおくと　　$\tan t>1$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<2\pi-\frac{\pi}{3}$　　すなわち　　$-\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{5}{3}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　　$\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{4}\pi<t<\frac{3}{2}\pi$

すなわち　　$\frac{\pi}{4}<\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{4}\pi<\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{3}{2}\pi$

よって　　$\frac{7}{12}\pi<\theta<\frac{5}{6}\pi$，$\frac{19}{12}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

(3)　$2\theta+\frac{\pi}{4}=t$ とおくと　　$\cos t\leqq-\frac{\sqrt{3}}{2}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$\frac{\pi}{4}\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}<4\pi+\frac{\pi}{4}$　　すなわち　　$\frac{\pi}{4}\leqq t<\frac{17}{4}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　　$\frac{5}{6}\pi\leqq t\leqq\frac{7}{6}\pi$，$\frac{17}{6}\pi\leqq t\leqq\frac{19}{6}\pi$

すなわち　　$\frac{5}{6}\pi\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{7}{6}\pi$，$\frac{17}{6}\pi\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{19}{6}\pi$

よって　　$\frac{7}{24}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{24}\pi$，$\frac{31}{24}\pi\leqq\theta\leqq\frac{35}{24}\pi$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$　　(2)　$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi$

(3)　$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$　　(4)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1)　方程式を変形すると　　$2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=2$

整理して　　$2\cos^2\theta+\cos\theta=0$　　ゆえに　　$\cos\theta(2\cos\theta+1)=0$

よって　　$\cos\theta=0,\ -\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\cos\theta=0$ を解くと　　$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ を解くと　$\theta=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

したがって，解は　　$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$

(2)　方程式を変形すると　　$2(1-\sin^2\theta)-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$

整理して　　$2\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta-3=0$

ゆえに　　$(\sin\theta+\sqrt{3})(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$

$\sin\theta+\sqrt{3}\neq0$ であるから　　$2\sin\theta-\sqrt{3}=0$　　よって　　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で解くと　　$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi$

(3)　不等式を変形すると　　$5\cos\theta+2(1-\cos^2\theta)\geqq-1$

整理して　　$2\cos^2\theta-5\cos\theta-3\leqq0$　　ゆえに　　$(\cos\theta-3)(2\cos\theta+1)\leqq0$

$\cos\theta-3<0$ であるから　　$2\cos\theta+1\geqq0$　　よって　　$\cos\theta\geqq-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で解くと　　$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$

(4)　不等式を変形すると　　$\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)+\sin\theta<0$

整理して　　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1<0$　　ゆえに　　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)<0$

よって　　$-1<\sin\theta<\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で解くと　　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 -1，$\theta=\frac{3}{2}\pi$ で最小値 -3

(2)　$\theta=0$ で最大値 4，$\theta=\pi$ で最小値 -2

(3)　$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 1，$\theta=\frac{4}{3}\pi$ で最小値 $-\sqrt{3}-1$

(4)　$\theta=-\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\sqrt{3}+1$，$\theta=\frac{\pi}{4}$ で最小値 0

解説

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$-1\leqq\sin\theta\leqq1$

よって，$\sin\theta=t$ とおくと，関数は　　$y=t-2$　$(-1\leqq t\leqq1)$

したがって

$t=1$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 -1，$t=-1$ すなわち $\theta=\frac{3}{2}\pi$ で最小値 -3

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

よって，$\cos\theta=t$ とおくと，関数は　　$y=3t+1$　$(-1\leqq t\leqq1)$

したがって

$t=1$ すなわち $\theta=0$ で最大値 4，$t=-1$ すなわち $\theta=\pi$ で最小値 -2

(3)　$0\leqq\theta\leqq\frac{4}{3}\pi$ から　　$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\theta\leqq1$

よって，$\sin\theta=t$ とおくと，関数は　　$y=2t-1$　$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq1\right)$

したがって

$t=1$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 1，

$t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta=\frac{4}{3}\pi$ で最小値 $-\sqrt{3}-1$

(4)　$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ から　　$-\sqrt{3}\leqq\tan\theta\leqq1$

よって，$\tan\theta=t$ とおくと，関数は　　$y=-t+1$　$(-\sqrt{3}\leqq t\leqq1)$

したがって

$t=-\sqrt{3}$ すなわち $\theta=-\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\sqrt{3}+1$，

$t=1$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{4}$ で最小値 0

$\boxed{5}$

解答　$\theta=\frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$ で最大値 $\frac{7}{2}$；$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最小値 -1

解説

$y=2\cos^2\theta-2\sin\theta+1=2(1-\sin^2\theta)-2\sin\theta+1$

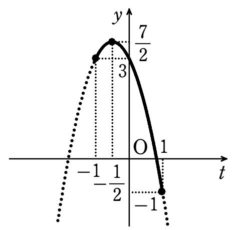
$=-2\sin^2\theta-2\sin\theta+3$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$-1\leqq t\leqq1$　……①

y を t で表すと

$y=-2t^2-2t+3=-2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$



①の範囲において y は，$t=-\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{7}{2}$，

$t=1$ で最小値 -1 をとる。

また，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$t=-\frac{1}{2}$ のとき　$\theta=\frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$，　$t=1$ のとき　$\theta=\frac{\pi}{2}$

よって　　$\theta=\frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$ で最大値 $\frac{7}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最小値 -1

1

解答　(1)　$\theta=0,\ \frac{5}{3}\pi$　(2)　$\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{19}{12}\pi$　(3)　$\theta=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$　(4)　$\theta=\frac{7}{6}\pi$

(5)　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　(6)　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

解説

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

よって，方程式 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

ゆえに　$\theta=0,\ \frac{5}{3}\pi$

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$

よって，方程式 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ から　$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{19}{12}\pi$

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

よって，方程式 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ から　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(4)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$

よって，方程式 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-1$ から　$\theta-\frac{\pi}{6}=\pi$　ゆえに　$\theta=\frac{7}{6}\pi$

(5)　$x=2\theta-\frac{\pi}{3}$ とおく。

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\frac{\pi}{3}\leqq2\theta-\frac{\pi}{3}<2\times2\pi-\frac{\pi}{3}$

すなわち　$-\frac{\pi}{3}\leqq x<\frac{11}{3}\pi$　……①

①の範囲で $\tan x=\sqrt{3}$ を解くと　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi$

すなわち　$2\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi$

よって　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(6)　$2\theta-\frac{\pi}{3}=x$ とおくと　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\frac{\pi}{3}\leqq x<4\pi-\frac{\pi}{3}$

よって　$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ から　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi$

すなわち　$2\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

2

解答　(1)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$　(2)　$\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$

(3)　$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$　(4)　$\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<\frac{23}{12}\pi$

(5)　$\frac{\pi}{12}<\theta\leqq\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{12}\pi<\theta\leqq\frac{2}{3}\pi,\ \frac{13}{12}\pi<\theta\leqq\frac{7}{6}\pi,\ \frac{19}{12}\pi<\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$

(6)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{12},\ \frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{13}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

よって，不等式 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

ゆえに　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$

よって，不等式 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)>1$ から　$\frac{\pi}{4}<\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi<\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{3}{2}\pi$

ゆえに　$\frac{5}{12}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{17}{12}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$

よって，不等式 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\frac{5}{6}\pi<\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{7}{6}\pi$

ゆえに　$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

(4)　$x=2\theta+\frac{\pi}{3}$ とおく。

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\frac{\pi}{3}\leqq2\theta+\frac{\pi}{3}<2\times2\pi+\frac{\pi}{3}$

すなわち　$\frac{\pi}{3}\leqq x<\frac{13}{3}\pi$　……①

①の範囲で $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと　$\frac{11}{6}\pi<x<\frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi<x<\frac{25}{6}\pi$

すなわち　$\frac{11}{6}\pi<2\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{13}{6}\pi,\ \frac{23}{6}\pi<2\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{25}{6}\pi$

よって　$\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<\frac{23}{12}\pi$

(5)　$x=2\theta-\frac{2}{3}\pi$ とおく。

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\frac{2}{3}\pi\leqq2\theta-\frac{2}{3}\pi<2\times2\pi-\frac{2}{3}\pi$

すなわち　$-\frac{2}{3}\pi\leqq x<\frac{10}{3}\pi$　……①

①の範囲で $\tan x\leqq-\sqrt{3}$ を解くと

$-\frac{\pi}{2}<x\leqq-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}<x\leqq\frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<x\leqq\frac{5}{3}\pi,\ \frac{5}{2}\pi<x\leqq\frac{8}{3}\pi$

すなわち　$-\frac{\pi}{2}<2\theta-\frac{2}{3}\pi\leqq-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}<2\theta-\frac{2}{3}\pi\leqq\frac{2}{3}\pi,$

$\frac{3}{2}\pi<2\theta-\frac{2}{3}\pi\leqq\frac{5}{3}\pi,\ \frac{5}{2}\pi<2\theta-\frac{2}{3}\pi\leqq\frac{8}{3}\pi$

よって　$\frac{\pi}{12}<\theta\leqq\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{12}\pi<\theta\leqq\frac{2}{3}\pi,\ \frac{13}{12}\pi<\theta\leqq\frac{7}{6}\pi,\ \frac{19}{12}\pi<\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$

(6)　$2\theta+\frac{\pi}{6}=x$ とおくと　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\frac{\pi}{6}\leqq x<4\pi+\frac{\pi}{6}$

よって　$\cos x>\frac{1}{2}$ から　$\frac{\pi}{6}\leqq x<\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi<x<\frac{7}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi<x<\frac{25}{6}\pi$

ゆえに　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{12},\ \frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{13}{12}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

3

解答　(1)　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$　(2)　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi$

(3)　$\theta=0,\ \frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \pi\leqq\theta<2\pi$　(4)　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

解説

(1)　方程式から　$(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$

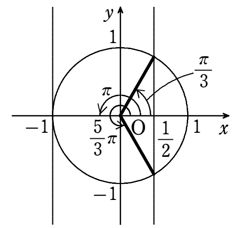
よって　$\cos\theta=-1,\ \frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから,

$\cos\theta=-1$ より　$\theta=\pi$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

したがって，解は　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$



(2)　方程式から　$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta-3=0$

整理して　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

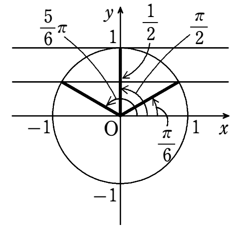
ゆえに　$(\sin\theta-1)(2\sin\theta-1)=0$

よって　$\sin\theta=1,\ \frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\sin\theta=1$ より　$\theta=\frac{\pi}{2}$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi$



(3)　不等式から　$2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\leqq0$

整理して　$2\sin^2\theta-\sin\theta\geqq0$

よって　$\sin\theta(2\sin\theta-1)\geqq0$

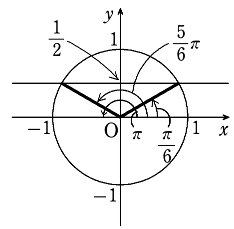
ゆえに　$\sin\theta\leqq0,\ \frac{1}{2}\leqq\sin\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから,

$\sin\theta\leqq0$ より　$\theta=0,\ \pi\leqq\theta<2\pi$

$\sin\theta\geqq\frac{1}{2}$ より　$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta=0,\ \frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \pi\leqq\theta<2\pi$



(4)　方程式から　$2\sin\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3$

ゆえに　$2\sin^2\theta=-3\cos\theta$　かつ　$\cos\theta\neq 0$

よって　$2(1-\cos^2\theta)=-3\cos\theta$

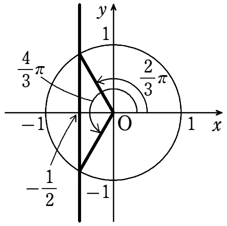
整理して　$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2=0$

ゆえに　$(\cos\theta-2)(2\cos\theta+1)=0$

$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから，常に $\cos\theta-2<0$ である。

よって　$2\cos\theta+1=0$　すなわち　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$



$\boxed{4}$

解答　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 -2，$\theta=\pi$ のとき最小値 -5

(2)　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき最大値 1，$\theta=0$ のとき最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$

(4)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\sqrt{3}$，$\theta=0$ のとき最小値 $-\sqrt{3}$

解説

(1)　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ から　$-1\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

よって，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 -2

$\cos\theta=-1$ のとき最小値 -5　をとる。

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\cos\theta=-1$ のとき　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ から　$\theta=\pi$

ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 -2，$\theta=\pi$ のとき最小値 -5

(2)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\pi$

よって，$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ は

$\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき最大値 1

$\theta-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\theta=0$ のとき最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　をとる。

(3)　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$\dfrac{\pi}{6}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$y=\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ は

$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$　をとる。

(4)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ より　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{\pi}{3}$

よって，$y=\tan\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ は

$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\sqrt{3}$

$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$\theta=0$ のとき最小値 $-\sqrt{3}$　をとる。

$\boxed{5}$

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$；$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2

解説

$y=\cos^2\theta+\sin\theta-1=(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-1$

$=-\sin^2\theta+\sin\theta$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$-1\leqq t\leqq 1$　……①

y を t の式で表すと　$y=-t^2+t=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

① の範囲において，y は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$，

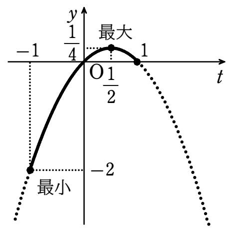
$t=-1$ のとき最小値 -2 をとる。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$t=\dfrac{1}{2}$ となるのは，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$t=-1$ となるのは，$\sin\theta=-1$ から　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$；$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2



$\boxed{1}$

解答　(1)　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$

解説

(1)　$\cos\theta=0$ は与式を満たさないから　$\cos\theta\neq 0$

与式の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると　$1+\sqrt{3}\tan\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

よって　$1+\sqrt{3}\tan\theta=1+\tan^2\theta$

ゆえに　$\tan^2\theta-\sqrt{3}\tan\theta=0$

変形して　$\tan\theta(\tan\theta-\sqrt{3})=0$

これを解いて　$\tan\theta=0,\ \sqrt{3}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(2)　$2\cos\theta-3\tan\theta>0$ から　$2\cos\theta-\dfrac{3\sin\theta}{\cos\theta}>0$　……①

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$\cos\theta<0$

① の両辺に $\cos\theta$ (<0) を掛けて

$2\cos^2\theta-3\sin\theta<0$

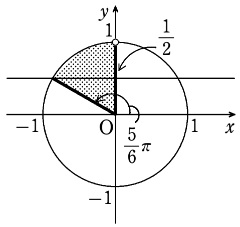
よって　$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta<0$

ゆえに　$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

すなわち　$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)>0$

$\sin\theta+2>0$ であるから　$\sin\theta>\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$



$\boxed{2}$

解答　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 $-\dfrac{1}{4}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$

解説

$y=-\sin^2\theta-\cos\theta=-(1-\cos^2\theta)-\cos\theta$

$=\cos^2\theta-\cos\theta-1$

$\cos\theta=t$ とおくと，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……①

y を t で表すと

$y=t^2-t-1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

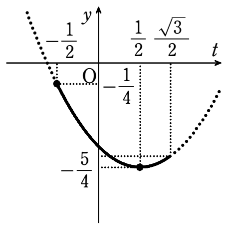
① の範囲において，y は $t=-\dfrac{1}{2}$ で最大値 $-\dfrac{1}{4}$，

$t=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$ をとる。

また，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 $-\dfrac{1}{4}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$



3

解答　$a>-\frac{1}{2}$ のとき $2a+2$，$a\leqq-\frac{1}{2}$ のとき 1

解説

$y=2a\cos\theta+2-\sin^2\theta=2a\cos\theta+2-(1-\cos^2\theta)=\cos^2\theta+2a\cos\theta+1$

$\cos\theta=x$ とおくと　$y=x^2+2ax+1$

$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　$0\leqq x\leqq 1$ ……①

$f(x)=x^2+2ax+1$ とすると　$f(x)=(x+a)^2+1-a^2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-a$

また，区間①の中央の値は $\frac{1}{2}$，$f(0)=1$，$f(1)=2a+2$

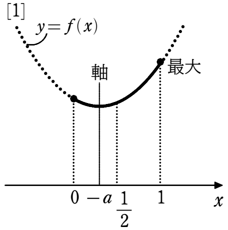
[1]　$-a<\frac{1}{2}$　すなわち　$a>-\frac{1}{2}$ のとき

最大値は　$f(1)=2a+2$

[2]　$-a=\frac{1}{2}$　すなわち　$a=-\frac{1}{2}$ のとき

最大値は　$f(0)=f(1)=1$

[1]



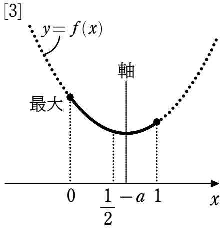
[3]　$-a>\frac{1}{2}$　すなわち　$a<-\frac{1}{2}$ のとき

最大値は　$f(0)=1$

よって　$a>-\frac{1}{2}$ のとき $2a+2$，

$a\leqq-\frac{1}{2}$ のとき 1

[3]



1

解答　$a<-2$ のとき 0 個，$a=-2$ のとき 1 個，$-2<a<0$ のとき 2 個，

$a=0$ のとき 3 個，$0<a<\frac{9}{8}$ のとき 4 個，$a=\frac{9}{8}$ のとき 2 個，

$\frac{9}{8}<a$ のとき 0 個

解説

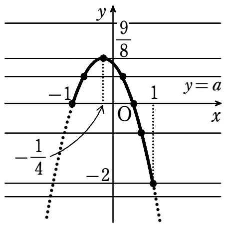
$\sin\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq x\leqq 1$

方程式は　$2(1-x^2)-x-a-1=0$

ゆえに　$-2x^2-x+1=a$

$f(x)=-2x^2-x+1$ とすると　$f(x)=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

$y=f(x)$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べると



$a<-2$，$\frac{9}{8}<a$ のとき　0 個

$a=\frac{9}{8}$，$-2<a<0$ のとき

$-1<x<1$ の範囲に 1 個

$0<a<\frac{9}{8}$ のとき

$-1<x<1$ の範囲に 2 個

$a=0$ のとき

$-1<x<1$ の範囲に 1 個と，$x=-1$ のときの 1 個

$a=-2$ のとき　$x=1$ のときの 1 個

$\sin\theta=x$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解の個数は

$x=\pm1$ のとき 1 個，　$-1<x<1$ のとき　2 個

したがって，求める解の個数は

$a<-2$ のとき 0 個，$a=-2$ のとき 1 個，

$-2<a<0$ のとき 2 個，$a=0$ のとき 3 個，

$0<a<\frac{9}{8}$ のとき 4 個，$a=\frac{9}{8}$ のとき 2 個，

$\frac{9}{8}<a$ のとき 0 個。

2

解答　$k\leqq-5$，$-1+\sqrt{7}\leqq k$

解説

$\sin\theta=x$ とおくと，$-1\leqq x\leqq 1$ であり，方程式は

$2(1-x^2)+2kx+k-5=0$　すなわち　$2x^2-2kx-k+3=0$

この左辺を $f(x)$ とすると，求める条件は，方程式 $f(x)=0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつことである。

これは，放物線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点について，次の [1] または [2] または [3] が成り立つことと同じである。

[1]　放物線 $y=f(x)$ が $-1<x<1$ の範囲で，x 軸と異なる 2 点で交わる，または接する。

このための条件は　$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(-k+3)=k^2+2k-6\geqq 0$

$k^2+2k-6=0$ の解は　$k=-1\pm\sqrt{7}$

よって，$k^2+2k-6\geqq 0$ の解は　$k\leqq-1-\sqrt{7}$，$-1+\sqrt{7}\leqq k$ ……①

軸 $x=\frac{k}{2}$ について　$-1<\frac{k}{2}<1$

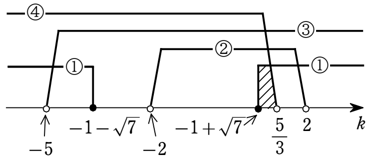
すなわち　$-2<k<2$ ……②

$f(-1)=k+5>0$ から

$k>-5$ ……③

$f(1)=-3k+5>0$ から

$k<\frac{5}{3}$ ……④



①～④の共通範囲を求めて　$-1+\sqrt{7}\leqq k<\frac{5}{3}$

[2]　放物線 $y=f(x)$ が $-1<x<1$ の範囲で，x 軸とただ 1 点で交わり，他の 1 点は $x<-1$，$1<x$ の範囲にある。

このための条件は　$f(-1)f(1)<0$

したがって　$(k+5)(-3k+5)<0$

ゆえに　$(k+5)(3k-5)>0$　　よって　$k<-5$，$\frac{5}{3}<k$

[3]　放物線 $y=f(x)$ が x 軸と $x=-1$ または $x=1$ で交わる。

$f(-1)=0$ または $f(1)=0$ から　$k=-5$ または $k=\frac{5}{3}$

求める k の値の範囲は，[1]，[2]，[3] を合わせて

$k\leqq-5$，$-1+\sqrt{7}\leqq k$

3

解答　$-4\leqq k\leqq\frac{1}{2}$

解説

不等式から　$2(1-\cos^2\theta)+4k\cos\theta+3k-4\leqq 0$

整理すると　$2\cos^2\theta-4k\cos\theta-3k+2\geqq 0$ ……①

ここで，$\cos\theta=x$ とおくと　$-1\leqq x\leqq 1$ ……②

① を x の式で表すと　$2x^2-4kx-3k+2\geqq 0$

$f(x)=2x^2-4kx-3k+2$ とする。

不等式①が常に成り立つための条件は，②の範囲における $f(x)$ の最小値が 0 以上となることである。

$f(x)=2(x-k)^2-2k^2-3k+2$ であるから，最小値を m とすると

$k\leqq-1$ のとき　$m=f(-1)=k+4\geqq 0$

よって　$-4\leqq k\leqq-1$ ……③

$-1<k<1$ のとき　$m=f(k)=-2k^2-3k+2\geqq 0$

これを解いて　$-2\leqq k\leqq\frac{1}{2}$

$-1<k<1$ であるから　$-1<k\leqq\frac{1}{2}$ ……④

$k\geqq 1$ のとき　$m=f(1)=4-7k\geqq 0$

これと $k\geqq 1$ を満たす k は存在しない。

求める k の値の範囲は，③，④ を合わせて　$-4\leqq k\leqq\frac{1}{2}$

1

解答　(1)　$\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　(2)　$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$　　(3)　$\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

解説

(1)　$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2)　$\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\dfrac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$$

別解　$\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\div\left(1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

(3)　$\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

別解　$\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2

解答　(1)　$\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{2+2\sqrt{42}}{15}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$

(2)　$\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{3}$，$\tan(\alpha-\beta)=-3$

解説

(1)　α は鋭角であるから　　$\cos\alpha>0$

よって　　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

β は鈍角であるから　　$\sin\beta>0$

よって　　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

したがって　　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=-\frac{2+2\sqrt{42}}{15}$$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$$

(2)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{1+(-2)}{1-1\cdot(-2)}=-\dfrac{1}{3}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{1-(-2)}{1+1\cdot(-2)}=-3$

3

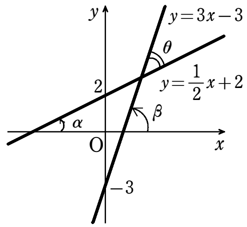
解答　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

解説

$x-2y+4=0$ から　　$y=\dfrac{1}{2}x+2$

$3x-y-3=0$ から　　$y=3x-3$

右の図のように，２直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，$\theta=\beta-\alpha$ である。



$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=3$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

4

解答　$\sin 2\alpha=\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$，$\cos 2\alpha=\dfrac{23}{25}$，$\tan 2\alpha=\dfrac{4\sqrt{6}}{23}$

解説

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{23}{25}$$

$\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　　$\cos\alpha<0$

よって　　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

ゆえに　　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\left(-\dfrac{1}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)=\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$

また　　$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{4\sqrt{6}}{25}\div\dfrac{23}{25}=\dfrac{4\sqrt{6}}{23}$

参考　２倍角の公式を用いて，$\tan 2\alpha$ を求めてもよいが，上の解答と比べると計算が少し複雑になる。

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(-\frac{1}{5}\right)\div\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)=\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

よって　　$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}}{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2}=\dfrac{24}{23\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{23}$

5

解答　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$　　(2)　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

解説

(1)　方程式から　　$2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

ゆえに　　$\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$

よって　　$\cos\theta=0$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$\cos\theta=0$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

以上から，解は　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$

(2)　不等式から　　$2\cos^2\theta-1-3\cos\theta+2\geqq 0$

整理すると　　$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1\geqq 0$

ゆえに　　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)\geqq 0$

$0\leqq\theta<2\pi$ では，$\cos\theta-1\leqq 0$ であるから　　$\cos\theta-1=0$，$2\cos\theta-1\leqq 0$

よって　　$\cos\theta=1$，$\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

したがって，解は　　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

6

解答　順に　$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，2

解説

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{4}{5}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{1}{5}$$

$0<\alpha<\pi$ から　　$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるから　　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また　　$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2$

$\boxed{1}$

解答 (1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(2) $2+\sqrt{3}$　(3) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

解説

(1) $\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

別解 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\div\left(1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

別解 $\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\boxed{2}$

解答 順に

(1) $\dfrac{2(1-\sqrt{42})}{15}$，$-\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$　(2) $\dfrac{63}{65}$，$-\dfrac{16}{65}$　(3) $-\dfrac{1}{3}$，3

解説

(1) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\beta>0$

よって　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

ゆえに

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{2(1-\sqrt{42})}{15}$$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$$

(2) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\sin\alpha>0$

よって　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\beta>0$

よって　$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$

ゆえに

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}=\frac{63}{65}$$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{16}{65}$$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-2+1}{1-(-2)\cdot 1}=-\dfrac{1}{3}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-2-1}{1+(-2)\cdot 1}=3$

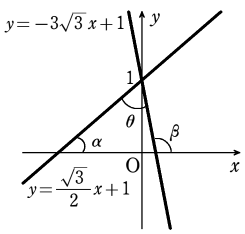
$\boxed{3}$

解答 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

解説

2直線の方程式を変形すると

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+1,\quad y=-3\sqrt{3}x+1$$



図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める鋭角 θ は

$$\theta=\beta-\alpha$$

$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\beta=-3\sqrt{3}$ で，

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$$=\left(-3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\div\left\{1+(-3\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\sqrt{3}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

別解 2直線は垂直でないから　$\tan\theta=\left|\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-(-3\sqrt{3})}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-3\sqrt{3})}\right|=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{7}{2}=\sqrt{3}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\boxed{4}$

解答 順に

(1) $\dfrac{7}{9}$，$-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$，$-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$　(2) $\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，$3\sqrt{7}$

解説

(1) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{7}{9}$

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

また　$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

(2) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2-1=\dfrac{1}{8}$

$\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　$\sin\alpha<0$

よって　$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

ゆえに　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

また　$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=3\sqrt{7}$

$\boxed{5}$

解答 (1) $x=0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$　(2) $x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(3) $0\leqq x<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi$　(4) $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

解説

(1) $\sin 2x=\sqrt{2}\sin x$ から　$2\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin x$

よって　$\sin x(2\cos x-\sqrt{2})=0$

ゆえに　$\sin x=0$　または　$\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\sin x=0$ より　$x=0,\ \pi$

$\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$

したがって，解は　$x=0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

(2) $\cos 2x=3\cos x-2$ から　$2\cos^2x-1=3\cos x-2$

よって　$2\cos^2x-3\cos x+1=0$　ゆえに　$(\cos x-1)(2\cos x-1)=0$

したがって　$\cos x=1,\ \dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\cos x=1$ より　$x=0$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ より　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，解は　$x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(3) $\cos 2x>\sin x$ から　$1-2\sin^2x>\sin x$

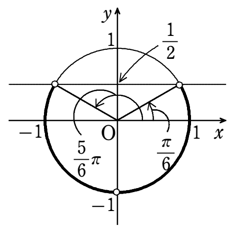
よって　$2\sin^2x+\sin x-1<0$

ゆえに　$(\sin x+1)(2\sin x-1)<0$

したがって　$-1<\sin x<\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，解は

$$0\leqq x<\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<x<2\pi$$



(4) $\sin 2x>\cos x$ から　$2\sin x\cos x>\cos x$

よって　$\cos x(2\sin x-1)>0$

ゆえに　$(\cos x>0$ かつ $2\sin x-1>0)$　または　$(\cos x<0$ かつ $2\sin x-1<0)$

すなわち　$\left(\cos x>0 \text{ かつ } \sin x>\dfrac{1}{2}\right)$ ……①

　　または　$\left(\cos x<0 \text{ かつ } \sin x<\dfrac{1}{2}\right)$ ……②

$0\leqq x<2\pi$ であるから，① より　$\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi\right)$ かつ $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，② より　$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$ かつ $\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<2\pi\right)$

よって　$\dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

ゆえに，解は　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\sin 2\alpha=\dfrac{120}{169}$，$\cos 2\alpha=-\dfrac{119}{169}$，$\tan 2\alpha=-\dfrac{120}{119}$，

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{3}$

(2)　$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，$\tan 2\theta=-\dfrac{24}{7}$

解説

(1)　$0<\alpha<\pi$ であるから　$\sin\alpha>0$

ゆえに　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$

よって　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{5}{13}=\dfrac{120}{169}$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\left(\dfrac{5}{13}\right)^2-1=-\dfrac{119}{169}$

$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{120}{169}\div\left(-\dfrac{119}{169}\right)=-\dfrac{120}{119}$

また，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$

よって　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{13}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{18}{13}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\div\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{2}{3}$

(2)　$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$ から　$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{4}$

また，$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ から　$\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

分母を払って　$1+\cos\theta=4(1-\cos\theta)$

これを解いて　$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

次に　$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot\dfrac{4}{3}}{1-\dfrac{16}{9}}=\dfrac{24}{9-16}=-\dfrac{24}{7}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　(第１辺)$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta)$

$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1$

(第２辺)$=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\beta)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1$

(第３辺)$=\cos^2\beta-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1$

よって　(第１辺)＝(第２辺)＝(第３辺)

(2)　(左辺)$=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=$(右辺)

$\boxed{2}$

解答　$\dfrac{5}{4}\pi$

解説

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2+5}{1-2\cdot 5}=-\dfrac{7}{9}$

$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\dfrac{-\dfrac{7}{9}+8}{1-\left(-\dfrac{7}{9}\right)\cdot 8}=1$

ここで，$\sqrt{3}<2<5<8$ であるから　$\tan\dfrac{\pi}{3}<\tan\alpha<\tan\beta<\tan\gamma$

α，β，γ は鋭角であるから　$\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\beta<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\pi<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{3}{2}\pi$

ゆえに，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$ から　$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$

$\boxed{3}$

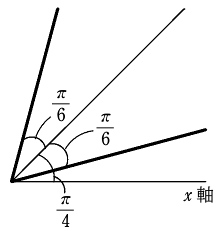
解答　$y=(2+\sqrt{3})x-2-\sqrt{3}$，$y=(2-\sqrt{3})x-2+\sqrt{3}$

解説

直線 $y=x-1$ の傾きは１であるから，この直線と x 軸の正の向きとのなす角は　$\dfrac{\pi}{4}$

よって，求める直線の傾きは

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)$　または　$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)$



これを計算すると

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\dfrac{\pi}{6}}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

したがって，求める直線の方程式は

$y=(2+\sqrt{3})(x-1)$，$y=(2-\sqrt{3})(x-1)$

すなわち　$y=(2+\sqrt{3})x-2-\sqrt{3}$，$y=(2-\sqrt{3})x-2+\sqrt{3}$

$\boxed{4}$

解答　$x=\frac{\pi}{2}$ で最大値 3，$x=-\frac{\pi}{6}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

解説

$y=2\sin x-(1-2\sin^2 x)=2\sin^2 x+2\sin x-1$

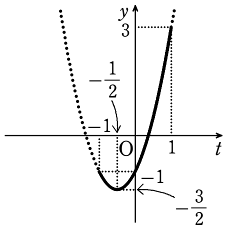
$\sin x=t$ とおくと，$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ から　$-1 \leqq t \leqq 1$

また　$y=2t^2+2t-1=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

よって

$t=1$ で最大値 3，$t=-\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

をとる。



$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ であるから

$t=1$ のとき $x=\frac{\pi}{2}$，$t=-\frac{1}{2}$ のとき $x=-\frac{\pi}{6}$

したがって

$x=\frac{\pi}{2}$ で最大値 3，$x=-\frac{\pi}{6}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

解説

(1)　$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$

$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$

(2)　$\theta=36^\circ$ のとき　$5\theta=180^\circ$

よって　$\sin 2\theta=\sin(5\theta-3\theta)=\sin(180^\circ-3\theta)=\sin 3\theta$

(3)　(2) から，$\theta=36^\circ$ のとき　$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$\sin\theta=\sin 36^\circ \neq 0$ であるから，両辺を $\sin\theta$ で割って

$2\cos\theta=3-4\sin^2\theta$

$2\cos\theta=3-4(1-\cos^2\theta)$

$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

よって　$\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\cos\theta=\cos 36^\circ>0$ であるから

$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　すなわち　$\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{6}$

解答　略

解説

$\tan B\tan C=1$ から　$\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\frac{\sin C}{\cos C}=1$

両辺に $\cos B\cos C$ を掛けて　$\sin B\sin C=\cos B\cos C$

よって　$\cos B\cos C-\sin B\sin C=0$　ゆえに　$\cos(B+C)=0$

$0<B+C<\pi$ であるから　$B+C=\frac{\pi}{2}$

よって　$A=\pi-(B+C)=\frac{\pi}{2}$

したがって，△ABC は ∠A が直角である直角三角形である。

$\boxed{1}$

解答　$\sin 2x+\cos 2x=\frac{7}{5}$，$\sin 2x=\frac{3}{5}$，$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{82}{9}$

解説

$\sin 4x=\frac{24}{25}$ から　$2\sin 2x\cos 2x=\frac{24}{25}$

ゆえに　$\sin 2x\cos 2x=\frac{12}{25}$

このとき　$(\sin 2x+\cos 2x)^2=1+2\sin 2x\cos 2x=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$

$0<2x<\frac{\pi}{4}$ であるから　$\sin 2x+\cos 2x>0$

よって　$\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{\frac{49}{25}}=\frac{7}{5}$

したがって，$\sin 2x$，$\cos 2x$ は 2 次方程式 $t^2-\frac{7}{5}t+\frac{12}{25}=0$ すなわち $25t^2-35t+12=0$ の 2 つの解である。

この方程式を解くと，$(5t-3)(5t-4)=0$ から　$t=\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$

$0<2x<\frac{\pi}{4}$ であるから　$\sin 2x<\cos 2x$

よって　$\sin 2x=\frac{3}{5}$，$\cos 2x=\frac{4}{5}$

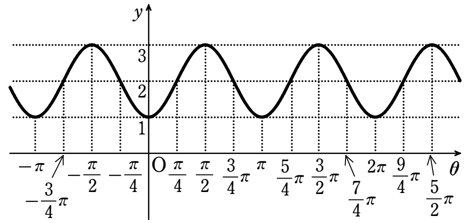
次に，$\cos 2x=\frac{4}{5}$ から　$2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\frac{4}{5}$

ゆえに　$\cos^2 x=\frac{9}{10}$，$\sin^2 x=\frac{1}{10}$

よって　$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{9}+9=\frac{82}{9}$

$\boxed{2}$

解答



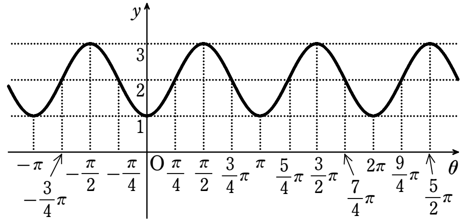
解説

半角の公式から

$$3\sin^2\theta+\cos^2\theta=3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$=-\cos 2\theta+2$$

よって，$y=3\sin^2\theta+\cos^2\theta$ のグラフは，$y=\cos 2\theta$ のグラフを θ 軸に関して対称移動した後，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，[図] のようになる。



3

解答　(1) $-\dfrac{59}{72}$　(2) 略　(3) $\dfrac{5}{13}$

解説

(1) $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ の両辺をそれぞれ平方すると

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots ①$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{9}\quad\cdots\cdots ②$$

①＋② から

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=\frac{13}{36}$$

よって　$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{13}{36}$

ゆえに　$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{59}{72}$

すなわち　$\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{59}{72}$

(2) $(\text{左辺})=(2\cos^2x-1)+(2\cos^2y-1)=2(\cos^2x+\cos^2y-1)$

$(\text{右辺})=2(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$

$$\begin{aligned}&=2\{(\cos x\cos y)^2-(\sin x\sin y)^2\}\\&=2(\cos^2x\cos^2y-\sin^2x\sin^2y)\\&=2\{\cos^2x\cos^2y-(1-\cos^2x)(1-\cos^2y)\}\\&=2\{\cos^2x\cos^2y-1+\cos^2x+\cos^2y-\cos^2x\cos^2y\}\\&=2(\cos^2x+\cos^2y-1)\end{aligned}$$

よって　(左辺)＝(右辺)

(3) (2) の等式から　$\cos2\alpha+\cos2\beta=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

(1) の結果を代入して　$\cos2\alpha+\cos2\beta=-\dfrac{59}{36}\cos(\alpha+\beta)\quad\cdots\cdots ③$

①－② から

$$(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\cos^2\beta-\sin^2\beta)=\frac{5}{36}$$

すなわち　$\cos2\alpha+\cos2\beta+2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{36}$

③ を代入して　$-\dfrac{59}{36}\cos(\alpha+\beta)+2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{36}$

よって　$\dfrac{13}{36}\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{36}$　　したがって　$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{13}$

4

解答　(1) (ア) $8t^4-8t^2+1$　(イ) $4t(1-2t^2)$　(ウ) $16t^5-20t^3+5t$

(2) (エ) $4t^2+2t-1$　(オ) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(3) (カ) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$　(キ) $\theta=\dfrac{\pi}{10},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{9}{10}\pi$

解説

(1) $\cos4\theta=2\cos^22\theta-1=2(1-2\sin^2\theta)^2-1=2(1-2t^2)^2-1={}^{ア}8t^4-8t^2+1$

$\sin4\theta=2\sin2\theta\cos2\theta=2\cdot2\sin\theta\cos\theta(1-2\sin^2\theta)={}^{イ}4t(1-2t^2)\cos\theta$

$\sin5\theta=\sin(4\theta+\theta)=\sin4\theta\cos\theta+\cos4\theta\sin\theta$

$$\begin{aligned}&=4t(1-2t^2)\cos^2\theta+(8t^4-8t^2+1)t\\&=4t(1-2t^2)(1-t^2)+(8t^4-8t^2+1)t={}^{ウ}16t^5-20t^3+5t\end{aligned}$$

(2) $16t^5-20t^3+5t-1=(t-1)(16t^4+16t^3-4t^2-4t+1)=(t-1)({}^{エ}4t^2+2t-1)^2$

ここで，$(t-1)(4t^2+2t-1)^2=0$ を解くと　$t=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\sin\dfrac{\pi}{10}<1$ であるから　$\sin\dfrac{\pi}{10}={}^{オ}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(3) $8t^4-8t^2+1-t=0$ から　$(t-1)(8t^3+8t^2-1)=0$

すなわち　$(t-1)(2t+1)(4t^2+2t-1)=0$

これを解くと　$t={}^{カ}1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\theta<\pi$ において，$0<\sin\theta\leqq1$ であるから　$t=1,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$t=1$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　　$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ のとき，(2) から　$\theta=\dfrac{\pi}{10},\ \dfrac{9}{10}\pi$

したがって　$\theta={}^{キ}\dfrac{\pi}{10},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{9}{10}\pi$

1

解答　(1) $2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$　(2) $\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$　ただし　$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

解説

(1) $\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

P$(-1,\ \sqrt{3})$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は $\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$$=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$

(2) P$(1,\ -1)$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は $-\dfrac{\pi}{4}$

よって　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) P$(2,\ 3)$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

また，線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

よって　$2\sin\theta+3\cos\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

2

解答　$x=\dfrac{11}{6}\pi$ で最大値 2，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 -2

解説

$$y=2\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{2}{3}\pi+\cos x\sin\frac{2}{3}\pi\right)=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{2}{3}\pi\leqq x+\dfrac{2}{3}\pi<\dfrac{8}{3}\pi$ であるから

$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)\leqq1$　　よって　$-2\leqq y\leqq2$

$\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=-1$ のとき　$x+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$　　よって　$x=\dfrac{5}{6}\pi$

$\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=1$　のとき　$x+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{5}{2}\pi$　　よって　$x=\dfrac{11}{6}\pi$

したがって　$x=\dfrac{11}{6}\pi$ で最大値 2，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 -2

3

解答　(1) $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3}$　(2) $\dfrac{2}{3}\pi<\theta<\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ であるから，方程式は　$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

すなわち　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

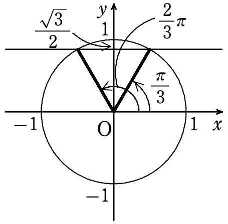
$\theta+\frac{\pi}{3}=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{3}\leqq t<2\pi+\frac{\pi}{3}$

この範囲で $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

よって，解は　$\theta=t-\frac{\pi}{3}$ より　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3}$



(2)　不等式から　$\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta+1<0$

$\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta=2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ であるから，不等式は

$2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1<0$　すなわち　$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)<-\frac{1}{2}$

$2\theta-\frac{\pi}{6}=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$-\frac{\pi}{6}\leqq t<4\pi-\frac{\pi}{6}$

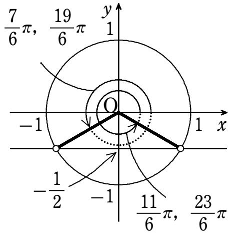
この範囲で $\sin t<-\frac{1}{2}$ を解くと

$\frac{7}{6}\pi<t<\frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi<t<\frac{23}{6}\pi$

すなわち　$\frac{7}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi,$

$\frac{19}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{23}{6}\pi$

よって　$\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi,\ \frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$



4

解答　(1)　$y=t^2-t+2$　(2)　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　(3)　最大値 $4+\sqrt{2}$，最小値 $\frac{7}{4}$

解説

(1)　$\sin x+\cos x=t$ の両辺を２乗すると　$\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x=t^2$

よって　$2\sin x\cos x=t^2-1$

ゆえに　$y=(t^2-1)-t+3=t^2-t+2$　……①

(2)　$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

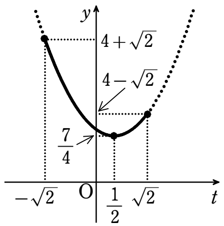
$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　……②

(3)　①を変形すると　$y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

②の範囲で，y は

$t=-\sqrt{2}$ で最大値 $4+\sqrt{2}$，

$t=\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{7}{4}$　をとる。



5

解答　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ で最大値 4，$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ で最小値 0

解説

$y=\frac{1-\cos2x}{2}+\sqrt{3}\sin2x+3\cdot\frac{1+\cos2x}{2}$

$=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x+2=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6}\leqq2x+\frac{\pi}{6}<\frac{25}{6}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq1$

よって　$0\leqq y\leqq4$

また，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi$　すなわち　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$　すなわち　$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

ゆえに，この関数は　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ で最大値 4，$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ で最小値 0　をとる。

別解　$y=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2=\left\{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2=4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$　であるから　最大値 4，最小値 0

6

解答　(ア)　$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$　(イ)　$\frac{\sqrt{6}}{2}$　(ウ)　$\frac{1}{8}$

解説

(ア)　$\sin75°\cos15°=\frac{1}{2}\{\sin(75°+15°)+\sin(75°-15°)\}$

$=\frac{1}{2}(\sin90°+\sin60°)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

(イ)　$\sin75°+\sin15°=2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2}$

$=2\sin45°\cos30°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(ウ)　$\cos20°\cos40°\cos80°=\frac{1}{2}\{\cos60°+\cos(-20°)\}\cos80°$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos20°\right)\cos80°=\frac{1}{4}\cos80°+\frac{1}{2}\cos20°\cos80°$

$=\frac{1}{4}\cos80°+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos100°+\cos(-60°)\}$

$=\frac{1}{4}\cos80°+\frac{1}{4}\cos100°+\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{4}\cos80°+\frac{1}{4}\cos(180°-80°)+\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{4}\cos80°-\frac{1}{4}\cos80°+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

1

解答　(1)　$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$　(2)　$2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$　(3)　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(4)　$2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

解説

(1)　$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$ であるから

$\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left\{\sin\theta\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\theta\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

(2)　$\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるから

$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

(3)　$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ であるから

$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}$

$=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(4)　$\sqrt{(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$　であるから

$\sqrt{6}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$

$=2\sqrt{2}\left\{\sin\theta\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\theta\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

2

解答　(1)　$x=\frac{\pi}{6}$ で最大値 2，$x=\frac{7}{6}\pi$ で最小値 -2

(2)　$x=\pi$ で最大値 1，$x=\frac{7}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$

解説

(1)　$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

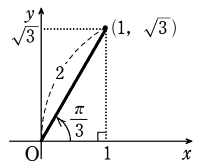
$0\leqq x<2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

よって，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ がとる値の範囲は

$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$ であるから　$-2\leqq y\leqq2$

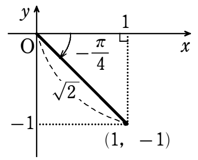
ゆえに



$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $x=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 2

$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $x=\dfrac{7}{6}\pi$ で最小値 -2

(2)　$y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$



$\pi\leqq x<2\pi$ のとき

$\dfrac{3}{4}\pi\leqq x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7}{4}\pi$

よって，$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ がとる値の範囲は

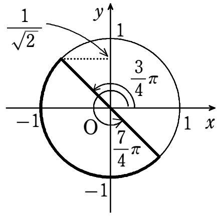
$-1\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

であるから　$-\sqrt{2}\leqq y\leqq 1$

ゆえに

$x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{4}\pi$ すなわち $x=\pi$ で最大値 1

$x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $x=\dfrac{7}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$



3

解答　(1)　$x=\dfrac{\pi}{6}$　(2)　$x=\dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi$　(3)　$\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{4}{3}\pi$

(4)　$0\leqq x<\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi<x<2\pi$

解説

(1)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ であるから，方程式は

$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2$　すなわち　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

$x+\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\sin t=1$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき

$\dfrac{\pi}{3}\leqq t<2\pi+\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{7}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t=\dfrac{\pi}{2}$

すなわち　$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　よって　$x=\dfrac{\pi}{6}$

(2)　$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから，方程式は

$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$　すなわち　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x-\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと　$\sin t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき

$-\dfrac{\pi}{6}\leqq t<2\pi-\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{11}{6}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

すなわち　$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$　よって　$x=\dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi$

(3)　$\sin x\geqq\sqrt{3}\cos x$ から　$\sin x-\sqrt{3}\cos x\geqq 0$

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ であるから，不等式は　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\geqq 0$

$x-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$2\sin t\geqq 0$　ゆえに　$\sin t\geqq 0$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき

$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<2\pi-\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{5}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$0\leqq t\leqq\pi$

すなわち　$0\leqq x-\dfrac{\pi}{3}\leqq\pi$　よって　$\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{4}{3}\pi$

(4)　$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから，不等式は

$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>1$　すなわち　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>\dfrac{1}{2}$

$x+\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと　$\sin t>\dfrac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき

$\dfrac{\pi}{4}\leqq t<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{4}\leqq t<\dfrac{9}{4}\pi$

この範囲で，① を解くと　$\dfrac{\pi}{4}\leqq t<\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi<t<\dfrac{9}{4}\pi$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$

よって　$0\leqq x<\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi<x<2\pi$

4

解答　(1)　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$　(2)　最大値 2，最小値 $-\dfrac{1}{4}$

解説

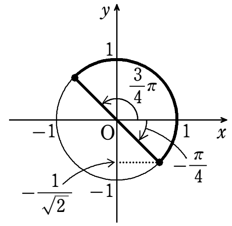
(1)　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$

ゆえに　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって　$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

すなわち　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$



(2)　$y=\cos\theta-\sin 2\theta-\sin\theta+1$

$=\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta+1$

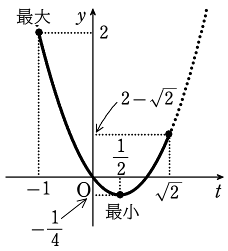
$=(\sin\theta-\cos\theta)^2-(\sin\theta-\cos\theta)$

y を t の式で表すと

$y=t^2-t=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲において，y は $t=-1$ のとき

最大値 2，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{4}$ をとる。



5

解答　$x=\dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{11}{8}\pi$ で最大値 $2\sqrt{2}+1$，　$x=\dfrac{7}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$ で最小値 $-2\sqrt{2}+1$

解説

$y=3\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}+2\sin 2x-\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$=2\sin 2x-2\cos 2x+1=2(\sin 2x-\cos 2x)+1$

$=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{15}{4}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-2\sqrt{2}+1\leqq y\leqq 2\sqrt{2}+1$

$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ のとき　$2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$　よって　$x=\dfrac{7}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$

$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$　のとき　$2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi$　よって　$x=\dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{11}{8}\pi$

したがって　$x=\dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{11}{8}\pi$ で最大値 $2\sqrt{2}+1$

$x=\dfrac{7}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$ で最小値 $-2\sqrt{2}+1$

6

解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$　(2)　$\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$　(3)　$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(4)　$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解説

(1)　$\cos 75^\circ\cos 45^\circ=\dfrac{1}{2}\{\cos(75^\circ+45^\circ)+\cos(75^\circ-45^\circ)\}=\dfrac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 30^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

(2)　$\sin 75^\circ\sin 45^\circ=-\dfrac{1}{2}(\cos 120^\circ-\cos 30^\circ)=-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

(3)　$\sin 105^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\dfrac{105^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{105^\circ-15^\circ}{2}=2\sin 60^\circ\cos 45^\circ$

$=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(4)　$\cos 105^\circ-\cos 15^\circ=-2\sin 60^\circ\sin 45^\circ=-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $\sqrt{3}$，$\theta=0$ のとき最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

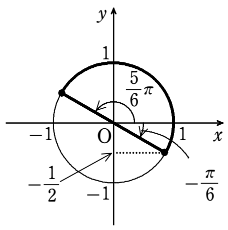
(2)　$\theta=\pi$ で最大値 $\frac{1}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ で最小値 -1

解説

(1)　$y=\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sin\theta=\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$



$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　　$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$

よって　　$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

したがって

$\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$　　すなわち　$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $\sqrt{3}$

$\theta-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$　すなわち　$\theta=0$ のとき最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)-\cos\theta=\sin\theta\cos\frac{5}{6}\pi+\cos\theta\sin\frac{5}{6}\pi-\cos\theta$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta-\cos\theta$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta=\sin\left(\theta+\frac{7}{6}\pi\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　　$\frac{7}{6}\pi\leqq\theta+\frac{7}{6}\pi\leqq\frac{13}{6}\pi$

よって　　$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{7}{6}\pi\right)\leqq\frac{1}{2}$

ゆえに　　$\theta+\frac{7}{6}\pi=\frac{13}{6}\pi$　すなわち　$\theta=\pi$ で最大値 $\frac{1}{2}$

$\theta+\frac{7}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{3}$ で最小値 -1

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\frac{\sqrt{3}}{8}$　　(2)　0

解説

(1)　$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=-\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 20^\circ)\sin 80^\circ$

$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{2}\sin 80^\circ\cos 20^\circ$

$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{4}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)$

$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{4}\sin(180^\circ-80^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{8}$

$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

(2)　$\cos 10^\circ+\cos 110^\circ+\cos 130^\circ=2\cos 60^\circ\cos 50^\circ+\cos 130^\circ$

$=\cos 50^\circ+\cos(180^\circ-50^\circ)$

$=\cos 50^\circ-\cos 50^\circ=0$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$　　(2)　$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

解説

(1)　$\cos 3x+\cos x=0$ から　　$2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=0$

すなわち　　$2\cos 2x\cos x=0$

よって　　$\cos 2x=0$　または　$\cos x=0$

$0\leqq x<2\pi$ から　　$0\leqq 2x<4\pi$

ゆえに，$\cos 2x=0$ から　　$2x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$

よって　　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

また，$\cos x=0$ から　　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

したがって，解は　　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

別解　3倍角の公式により，$\cos 3x=-3\cos x+4\cos^3 x$ であるから，方程式は

$(-3\cos x+4\cos^3 x)+\cos x=0$

$4\cos^3 x-2\cos x=0$

$2\cos x(2\cos^2 x-1)=0$

よって　　$\cos x=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\cos x=0$ より　　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より　　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$

$\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ より　　$x=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

したがって，解は　　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

(2)　$\sin x-\sin 2x+\sin 3x=(\sin 3x+\sin x)-\sin 2x=2\sin 2x\cos x-\sin 2x$

$=\sin 2x(2\cos x-1)$

ゆえに，方程式は　　$\sin 2x(2\cos x-1)=0$

よって　　$\sin 2x=0$　または　$\cos x=\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ から　　$0\leqq 2x<4\pi$

ゆえに，$\sin 2x=0$ から　　$2x=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

よって　　$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$

また，$\cos x=\frac{1}{2}$ から　　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

したがって，解は　　$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

別解　$\sin 2x=0$ は次のように解いてもよい。

$\sin 2x=0$ から　　$2\sin x\cos x=0$

よって　　$\sin x=0$　または　$\cos x=0$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\sin x=0$ より　　$x=0,\ \pi$

$\cos x=0$ より　　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\boxed{4}$

解答　$x=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3}{4}$，$x=\frac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\frac{1}{4}$

解説

$y=\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left\{\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$=-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$\frac{\pi}{3}\leqq 2x+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{7}{3}\pi$ であるから　　$-1\leqq\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

ゆえに　　$-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\leqq y\leqq -\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{4}$　　すなわち　　$-\frac{1}{4}\leqq y\leqq\frac{3}{4}$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ のとき　　$2x+\frac{\pi}{3}=\pi$　　よって　　$x=\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ のとき　　$2x+\frac{\pi}{3}=2\pi$　　よって　　$x=\frac{5}{6}\pi$

したがって　　$x=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3}{4}$，$x=\frac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\frac{1}{4}$

$\boxed{5}$

解答　$a=-1$，$b=\sqrt{3}$；最大値は 2

解説

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$ から　　$a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

よって　　$a+\sqrt{3}b=2$　……①

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ から　　$a\cdot 0+b\cdot 1=\sqrt{3}$

よって　　$b=\sqrt{3}$

これを ① に代入して　　$a+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2$

よって　　$a=-1$

ゆえに　　$a=-1$，$b=\sqrt{3}$

したがって　　$f(x)=-\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$-1\leqq\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$ であるから，$f(x)$ の最大値は　　2

$\boxed{1}$

解答　略

解説

$\sin 2A+\sin 2B=2\sin(A+B)\cos(A-B)$

また，$C=\pi-(A+B)$ であるから

$\sin 2C=\sin 2\{\pi-(A+B)\}=\sin\{2\pi-2(A+B)\}$

$=\sin\{-2(A+B)\}=-\sin 2(A+B)$

$=-2\sin(A+B)\cos(A+B)$

よって　左辺 $=2\sin(A+B)\cos(A-B)-2\sin(A+B)\cos(A+B)$

$=2\sin(A+B)\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2\sin(\pi-C)\times\{-2\sin A\sin(-B)\}$

$=4\sin A\sin B\sin C=$ 右辺

$\boxed{2}$

解答　$a=\dfrac{6\pm\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6\mp\sqrt{14}}{2}$（複号同順）

解説

$$f(\theta)=a\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+(a-b)\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+b\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$=\frac{a-b}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta)+\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{\sqrt{2}}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{a+b}{2}$$

[1]　$a>b$ のとき　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから

最大値は　$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$，最小値は　$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$

したがって，求める条件は　$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3+\sqrt{7}$　……①

$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3-\sqrt{7}$　……②

①＋② から　$a+b=6$　　(①－②)$\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から　$a-b=\sqrt{14}$

この２式を連立して解くと　$a=\dfrac{6+\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6-\sqrt{14}}{2}$

[2]　$a=b$ のとき

$f(\theta)=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a$ となり，$f(\theta)$ は常に一定の値 a をとるから，最大値 $3+\sqrt{7}$，最小値 $3-\sqrt{7}$ となることはない。

[3]　$a<b$ のとき

最大値は　$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$，最小値は　$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$

したがって，求める条件は　$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3+\sqrt{7}$　……③

$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3-\sqrt{7}$　……④

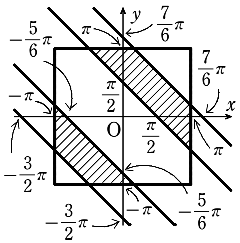
③＋④ から　$a+b=6$　　(④－③)$\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から　$a-b=-\sqrt{14}$

この２式を連立して解くと　$a=\dfrac{6-\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6+\sqrt{14}}{2}$

以上から　$a=\dfrac{6\pm\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6\mp\sqrt{14}}{2}$（複号同順）

$\boxed{3}$

解答　[図] 境界線を含む



解説

$|x|\leqq\pi$ から　$-\pi\leqq x\leqq\pi$　……①

$|y|\leqq\pi$ から　$-\pi\leqq y\leqq\pi$　……②

また，$\sin(x+y)-\sqrt{3}\cos(x+y)\geqq 1$ から　$2\sin\left(x+y-\dfrac{\pi}{3}\right)\geqq 1$

ゆえに　$\sin\left(x+y-\dfrac{\pi}{3}\right)\geqq\dfrac{1}{2}$　……③

①＋② から　$-2\pi\leqq x+y\leqq 2\pi$

よって　$-2\pi-\dfrac{\pi}{3}\leqq x+y-\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\pi-\dfrac{\pi}{3}$

すなわち　$-\dfrac{7}{3}\pi\leqq x+y-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

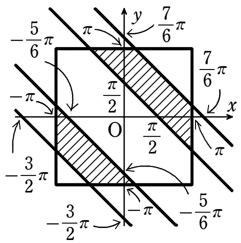
この範囲で不等式 ③ を解くと

$-\dfrac{11}{6}\pi\leqq x+y-\dfrac{\pi}{3}\leqq-\dfrac{7}{6}\pi$

または　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x+y-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

したがって　$-\dfrac{3}{2}\pi\leqq x+y\leqq-\dfrac{5}{6}\pi$

または　$\dfrac{\pi}{2}\leqq x+y\leqq\dfrac{7}{6}\pi$



ゆえに，求める領域は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

$\boxed{4}$

解答　(1)（ア）2　（イ）-1　(2)　$2\leqq k<\sqrt{5}$

解説

(1)　$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\alpha\leqq 2\pi$ であるから　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha-\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\pi-\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　$-2\leqq 2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 2$

よって　$-2\leqq\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha\leqq 2$

$-1\leqq 1-(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)\leqq 3$

ゆえに　$0\leqq|1-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha|\leqq 3$

よって　$-1\leqq 2-|1-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha|\leqq 2$

したがって，最大値は ${}^{ア}2$，最小値は ${}^{イ}-1$

(2)　$f(x)=\sin x+2\cos x$ とすると

$$f(x)=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$$

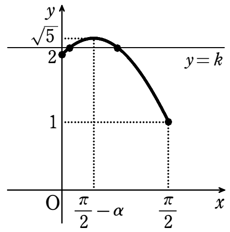
ただし，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}+\alpha$

したがって，$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき，$f(x)$ は増加し，

$\dfrac{\pi}{2}\leqq x+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ すなわち $\dfrac{\pi}{2}-\alpha\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)$ は減少する。

また，$f(0)=2$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ であり，$x=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ で $f(x)$ は最大値 $\sqrt{5}$ をとる。



ゆえに，$y=f(x)$　$\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフの概形は，右の図のようになる。

与えられた方程式が異なる２個の解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる２つの共有点をもつ条件と同じである。

よって，求める k の値の範囲は，図から

$2\leqq k<\sqrt{5}$

1

解答 (1) $(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

(2) $(a,\ \sin\theta,\ \cos\theta)=(1,\ 0,\ -1),\ \left(\frac{1}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$

解説

(1) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{5}$

したがって　$\cos^2\theta=\frac{5}{9}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\mp\frac{2}{3}$　(複号同順)

よって　$(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

(2) $\begin{cases}2\sin\theta-\cos\theta=1 & \cdots\cdots ①\\ \sin\theta-\cos\theta=a & \cdots\cdots ②\end{cases}$ とする。

① から　$\cos\theta=2\sin\theta-1$ ……③

③ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して　$\sin^2\theta+(2\sin\theta-1)^2=1$

整理して　$5\sin^2\theta-4\sin\theta=0$

よって　$\sin\theta(5\sin\theta-4)=0$

ゆえに　$\sin\theta=0,\ \frac{4}{5}$

[1] $\sin\theta=0$ のとき　③ から　$\cos\theta=-1$

このとき，② から　$a=0-(-1)=1$

[2] $\sin\theta=\frac{4}{5}$ のとき　③ から　$\cos\theta=2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$

このとき，② から　$a=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$

以上から　$a=1$，$\sin\theta=0$，$\cos\theta=-1$

または　$a=\frac{1}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$

2

解答 (1) 2　(2) (ア) 2　(イ) 5　(ウ) 3　(エ) 7　(3) -1

解説

(1) (与式)$=\cos^2\theta\cdot\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=\cos^2\theta\cdot\frac{2}{1-\sin^2\theta}$

$=\cos^2\theta\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}=2$

(2) (与式)$=\frac{4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-9\cos^2\theta-8\sin\theta\cos\theta}{7(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-\sin^2\theta+17\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{4\sin^2\theta-8\sin\theta\cos\theta-5\cos^2\theta}{6\sin^2\theta+17\sin\theta\cos\theta+7\cos^2\theta}$

$=\frac{(2\sin\theta+\cos\theta)(2\sin\theta-5\cos\theta)}{(2\sin\theta+\cos\theta)(3\sin\theta+7\cos\theta)}$

$=\frac{2\sin\theta-5\cos\theta}{3\sin\theta+7\cos\theta}=\frac{2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-5}{3\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+7}=\frac{{}^{ア}2\tan\theta-{}^{イ}5}{{}^{ウ}3\tan\theta+{}^{エ}7}$

(3) $2(\cos^6\theta+\sin^6\theta)-3(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$

$=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)-3(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$

$=-(\cos^4\theta+2\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)=-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2=-1$

3

解答 (1) $\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$　(2) $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

解説

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$ であるから，

方程式は　$1+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin\theta$

ゆえに　$\sin\theta(2\cos\theta-1)=0$

よって　$\sin\theta=0$　または　$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\sin\theta=0$ より　$\theta=0,\ \pi$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

したがって，解は　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$

(2) 不等式から　$4\sqrt{3}(1-\cos^2\theta)+(6-2\sqrt{3})\cos\theta+3-4\sqrt{3}>0$

整理して　$4\sqrt{3}\cos^2\theta+(2\sqrt{3}-6)\cos\theta-3<0$

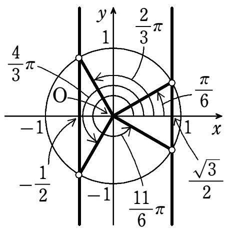
$4\cos^2\theta+2(1-\sqrt{3})\cos\theta-\sqrt{3}<0$

ゆえに　$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-\sqrt{3})<0$

よって　$-\frac{1}{2}<\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，解は

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$



4

解答 $\sin\theta=\frac{2}{3}$，$a=2$

解説

解と係数の関係により

$\sin\theta+\cos2\theta=\frac{21}{27}=\frac{7}{9}$ ……①，　$\sin\theta\cos2\theta=\frac{a}{27}$ ……②

① から　$\sin\theta+1-2\sin^2\theta=\frac{7}{9}$

よって　$18\sin^2\theta-9\sin\theta-2=0$

したがって　$(3\sin\theta-2)(6\sin\theta+1)=0$ ……③

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\frac{1}{2}<\sin\theta<1$

ゆえに，③ から　$\sin\theta=\frac{2}{3}$

よって，① から　$\cos2\theta=\frac{7}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$

したがって，② から　$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{a}{27}$　ゆえに　$a=2$

5

解答 (1) $x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ のとき最大値 4；$x=\frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -5　(2) $3<a<4$

解説

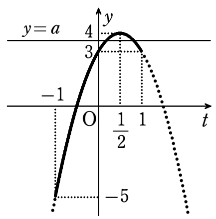
(1) $f(x)=2\sin^2x+4\sin x+3(1-2\sin^2x)=-4\sin^2x+4\sin x+3$

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ から　$-1\leqq t\leqq1$

$y=f(x)$ とし，y を t の式で表すと

$y=-4t^2+4t+3$

$=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4$



$-1\leqq t\leqq1$ の範囲において，y は

$t=\frac{1}{2}$ で最大値 4，$t=-1$ で最小値 -5

をとる。$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=\frac{1}{2}$ となるのは，$\sin x=\frac{1}{2}$ から　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

$t=-1$ となるのは，$\sin x=-1$ から　$x=\frac{3}{2}\pi$

のときである。したがって

$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ のとき最大値 4；$x=\frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -5

(2) $\sin x=t$ を満たす x $(0\leqq x<2\pi)$ の個数は次のようになる。

$-1<t<1$ のとき　2 個

$t=-1,\ 1$ のとき　1 個

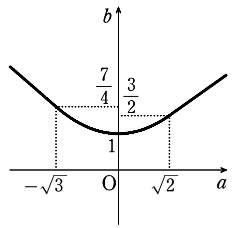
$t<-1,\ 1<t$ のとき　0 個

よって，$f(x)=a$ が相異なる 4 個の解をもつための条件は，放物線 $y=-4t^2+4t+3$ と直線 $y=a$ が $-1<t<1$ の範囲で異なる 2 個の共有点をもつことである。

(1) の図から，求める a の値の範囲は　$3<a<4$

6

解答 ［図］ $a=0$ のとき最小値 1



解説

$y=(1-\sin^2\theta)+a\sin\theta=-\sin^2\theta+a\sin\theta+1$

$\sin\theta=x$ とおくと，$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ から　$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$

y を x の式で表すと　$y=-x^2+ax+1$

この右辺を $f(x)$ とすると　$f(x)=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}+1$

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=\dfrac{a}{2}$ である。

[1]　$\dfrac{a}{2}\leqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $a\leqq-\sqrt{3}$ のとき

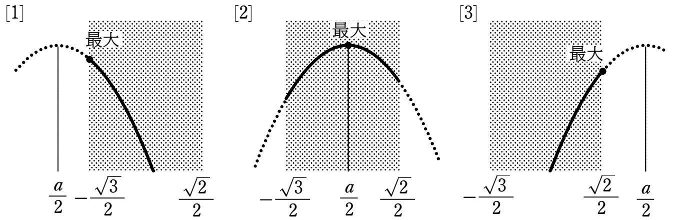
$$M(a)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{4}$$

[2]　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{a}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ すなわち $-\sqrt{3}<a<\sqrt{2}$ のとき

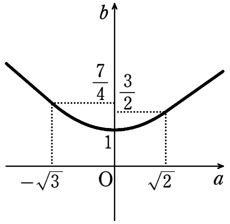
$$M(a)=f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}+1$$

[3]　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\dfrac{a}{2}$ すなわち $\sqrt{2}\leqq a$ のとき

$$M(a)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{1}{2}$$



以上から，$b=M(a)$ のグラフは，右の図のようになる。
したがって，$M(a)$ は $a=0$ のとき最小値 1 をとる。



7

解答　(1)　証明略，$\cos 36^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　　(2)　証明略，$\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

解説

(1)　示すべき等式は，$\sin 108^\circ=\sin 72^\circ$ …… ① である。

① について　(左辺)$=\sin(180^\circ-72^\circ)=\sin 72^\circ=$(右辺)

よって，① すなわち $\sin 3\theta=\sin 2\theta$ が成り立つ。

この等式から　$3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\sin\theta=\sin 36^\circ\neq 0$ であるから，両辺を $\sin\theta$ で割って

$3-4\sin^2\theta=2\cos\theta$

ゆえに　$3-4(1-\cos^2\theta)=2\cos\theta$

整理して　$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

よって　$\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\cos 36^\circ<1$ であるから　$\cos 36^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

(2)　示すべき等式は，$\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$ …… ① である。

① について　(左辺)$=\sin(90^\circ-54^\circ)=\cos 54^\circ=$(右辺)

よって，① すなわち $\sin 2\theta=\cos 3\theta$ が成り立つ。

この等式から　$2\sin\theta\cos\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$

$\cos\theta=\cos 18^\circ\neq 0$ であるから，両辺を $\cos\theta$ で割って

$2\sin\theta=-3+4\cos^2\theta$

よって　$2\sin\theta=-3+4(1-\sin^2\theta)$

整理して　$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$

これを $\sin\theta$ について解くと　$\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

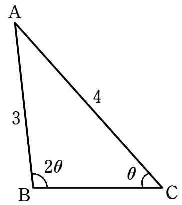
$0<\sin 18^\circ<1$ であるから　$\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

8

解答　(1)　$\dfrac{2}{3}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　(3)　$\dfrac{7\sqrt{5}}{27}$　　(4)　$\dfrac{7}{3}$

解説

(1)　正弦定理により　$\dfrac{3}{\sin\theta}=\dfrac{4}{\sin 2\theta}$



よって　$3\sin 2\theta=4\sin\theta$

ゆえに　$6\sin\theta\cos\theta=4\sin\theta$

すなわち　$2\sin\theta(3\cos\theta-2)=0$

$\sin\theta\neq 0$ であるから　$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

(2)　$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

(3)　3 倍角の公式から

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}-4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3$$
$$=\sqrt{5}-\frac{20\sqrt{5}}{27}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$$

(4)　$\angle\mathrm{A}=\pi-(\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C})=\pi-(2\theta+\theta)=\pi-3\theta$

よって，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{3}{\sin\theta}$

ゆえに　$\mathrm{BC}=\dfrac{3}{\sin\theta}\cdot\sin(\pi-3\theta)=\dfrac{3}{\sin\theta}\cdot\sin 3\theta=3\cdot\dfrac{3}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{7\sqrt{5}}{27}=\dfrac{7}{3}$

9

解答　$1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{6}$

解説

不等式から　$1-2\sin^2x+4a\sin x+2a^2-8a-9<0$

整理して　$2\sin^2x-4a\sin x-2a^2+8a+8>0$　…… ①

ここで，$\sin x=t$ とおくと　$-1\leqq t\leqq 1$　…… ②

① を t の式で表すと　$2t^2-4at-2a^2+8a+8>0$

よって　$t^2-2at-a^2+4a+4>0$

$f(t)=t^2-2at-a^2+4a+4$ とする。

不等式 ① の解がすべての実数であるための条件は，② の範囲における $f(t)$ の最小値が正となることである。

$f(t)=(t-a)^2-2a^2+4a+4$ であるから，軸は $t=a$

[1]　$a<-1$ のとき

$f(t)$ は ② の範囲で増加するから，求める条件は

$f(-1)=1+2a-a^2+4a+4>0$

ゆえに　$a^2-6a-5<0$

よって　$3-\sqrt{14}<a<3+\sqrt{14}$

これと $a<-1$ との共通範囲はない。

[2]　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき

求める条件は　$f(a)=-2a^2+4a+4>0$

ゆえに　$a^2-2a-2<0$

よって　$1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{3}$

$-1\leqq a\leqq 1$ との共通範囲は　$1-\sqrt{3}<a\leqq 1$

[3]　$a>1$ のとき

$f(t)$ は ② の範囲で減少するから，求める条件は

$f(1)=1-2a-a^2+4a+4>0$

ゆえに　$a^2-2a-5<0$

よって　$1-\sqrt{6}<a<1+\sqrt{6}$

$a>1$ との共通範囲は　$1<a<1+\sqrt{6}$

[1]～[3] の範囲を合わせて　$1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{6}$

10

解答　(ア)　$2+\sqrt{2}$　　(イ)　$2-\sqrt{2}$

解説

$x^2+y^2=1$ であるから，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくことができる。

$P=3x^2+2xy+y^2$ とすると

$$P=3\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$$
$$=3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sin 2\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$=\sin 2\theta+\cos 2\theta+2=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2$$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{17}{4}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-\sqrt{2}+2\leqq\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\leqq\sqrt{2}+2$

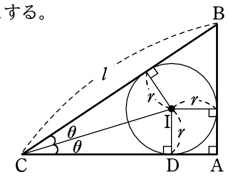
よって，P の最大値は ${}^{ア}2+\sqrt{2}$，最小値は ${}^{イ}2-\sqrt{2}$ である。

11 [立命館大]

解答　(1)　略　　(2)　$-\dfrac{l}{2}t^2+\dfrac{l}{2}t$，最大値 $\dfrac{l}{8}$

解説

(1)　△ABC の内心を I とし，円 I と辺 AC との接点を D とする。



$\angle\mathrm{C}=2\theta$ であるから　$\angle\mathrm{ICD}=\theta$

よって　$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}+\mathrm{DC}=\mathrm{ID}+\dfrac{\mathrm{ID}}{\tan\theta}$

$$=r\left(1+\frac{1}{\tan\theta}\right)=\frac{r(\tan\theta+1)}{\tan\theta}$$

また　$\mathrm{AC}=l\cos 2\theta$

ゆえに　$l\cos 2\theta=\dfrac{r(\tan\theta+1)}{\tan\theta}$

$\tan\theta+1\neq 0$ であるから　$r=\dfrac{l\cos 2\theta\tan\theta}{1+\tan\theta}$

(2)　$\tan\theta=t$ のとき　$\cos 2\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　　よって，(1) から

$$\frac{r}{1+\cos 2\theta}=\frac{1}{1+\cos 2\theta}\cdot\frac{l\cos 2\theta\tan\theta}{1+\tan\theta}=l\cdot\frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{(1-t^2)t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+t}=l\cdot\frac{(1-t)t}{2}$$

$$=-\frac{l}{2}t^2+\frac{l}{2}t=-\frac{l}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{l}{8}\quad\cdots\cdots①$$

$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$0<\tan\theta<1$　すなわち　$0<t<1$

この範囲において，① は，$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{l}{8}$ をとる。

12

解答　(1)　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi<x\leqq\pi$

解説

(1)　$\cos x+\cos 3x=0$ から　$2\cos 2x\cos x=0$

よって　$\cos 2x=0$　または　$\cos x=0$

$0\leqq x\leqq\pi$ から　$0\leqq 2x\leqq 2\pi$

ゆえに，$\cos 2x=0$ から　$2x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$　　よって　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

また　$\cos x=0$　から　$x=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，解は　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi$

(2)　$\cos x+\cos 3x+\cos 5x<0$ から　$\cos 3x+2\cos 3x\cos 2x<0$

よって　$\cos 3x(2\cos 2x+1)<0$

ゆえに　$\left(\cos 3x>0\text{ かつ }\cos 2x<-\dfrac{1}{2}\quad\cdots\cdots①\right)$　または

$\left(\cos 3x<0\text{ かつ }\cos 2x>-\dfrac{1}{2}\quad\cdots\cdots②\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ から　$0\leqq 2x\leqq 2\pi$，$0\leqq 3x\leqq 3\pi$

よって，① から　$\left(0\leqq 3x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi<3x<\dfrac{5}{2}\pi\right)$　かつ　$\left(\dfrac{2}{3}\pi<2x<\dfrac{4}{3}\pi\right)$

すなわち　$\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{5}{6}\pi\right)$　かつ　$\left(\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2}{3}\pi\right)$

よって　$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{2}{3}\pi$

また，② から　$\left(\dfrac{\pi}{2}<3x<\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi<3x\leqq 3\pi\right)$　かつ　$\left(0\leqq 2x<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<2x\leqq 2\pi\right)$

すなわち　$\left(\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi<x\leqq\pi\right)$　かつ　$\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi<x\leqq\pi\right)$

よって　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{6}\pi<x\leqq\pi$

したがって，解は　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi<x\leqq\pi$

1

解答　(1)　$1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$　　(2)　$a\geqq-\dfrac{1}{2}$

解説

$\tan x=t$ とおき，$g(t)=2at-t^2-2a$ とする。

(1)　$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t のとりうる値は　実数全体

よって，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)<1$ が常に成り立つための条件は，すべての実数 t に対して $g(t)<1$ が常に成り立つことである。

$g(t)=2at-t^2-2a=-(t-a)^2+a^2-2a$ であるから，t が実数全体を動くとき，

$g(t)$ は $t=a$ のとき最大値 a^2-2a をとる。

ゆえに，満たすべき条件は　$a^2-2a<1$　　すなわち　$a^2-2a-1<0$

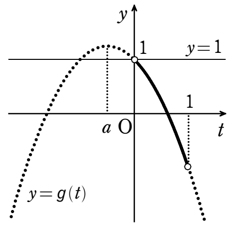
これを解くと　$1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

(2)　$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，t のとりうる値は　$0<t<1$

よって，$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)<1$ が常に成り立つための条件は，$0<t<1$ の範囲において常に $g(t)<1$ が成り立つことである。

[1]　$a\leqq 0$ のとき

区間 $0<t<1$ と軸の位置関係は右の図のようになる。



満たすべき条件は　$g(0)\leqq 1$

すなわち　$-2a\leqq 1$

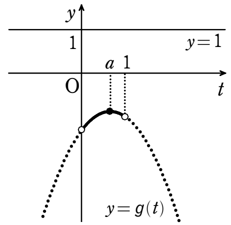
これを解くと　$a\geqq-\dfrac{1}{2}$

$a\leqq 0$ と共通範囲を求めると

$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 0$

[2]　$0<a<1$ のとき

区間 $0<t<1$ と軸の位置関係は右の図のようになる。



満たすべき条件は　$g(a)<1$

すなわち　$a^2-2a<1$

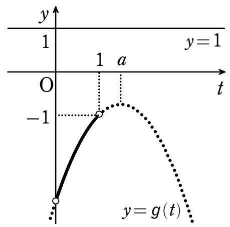
(1) より　$1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

$0<a<1$ と共通範囲を求めると

$0<a<1$

[3]　$a\geqq 1$ のとき

区間 $0<t<1$ と軸の位置関係は右の図のようになる。



満たすべき条件は　$g(1)\leqq 1$

すなわち　$-1\leqq 1$

これは，常に成り立つ。

$a\geqq 1$ と共通範囲を求めると

$a\geqq 1$

[1]～[3] より，求める a の範囲は　$a\geqq-\dfrac{1}{2}$

2

解答　(1)　$\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$，$\theta_2=\dfrac{2}{3}\pi$，$y_1=\dfrac{3}{4}$，$y_2=\dfrac{13}{4}$，$y_3=-\dfrac{5}{4}$，$y_4=-\dfrac{3}{4}$

(2)　a がとりうる値の範囲は $\dfrac{1}{3}<a<1$，

値域は $-a^2-1\leqq y\leqq a^2-4a+1$，$7a^2-1\leqq y\leqq a^2+4a+1$

(3)　a がとりうる値の範囲は $0<a\leqq\dfrac{1}{3}$，値域は $-a^2-1\leqq y\leqq a^2+4a+1$

解説

(1)　$y=2\cos^2\theta+4a\cos\theta+a^2-1$

$\cos\theta=t$ とおくと　$y=2t^2+4at+a^2-1$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，定義域は　$\dfrac{1}{2}\leqq|\cos\theta|$，$0\leqq\theta\leqq\pi$

$\dfrac{1}{2}\leqq|\cos\theta|$ から　$-1\leqq\cos\theta\leqq-\dfrac{1}{2}$　または　$\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq 1$

この不等式を $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で解くと　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$　または　$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\pi$

よって　$\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$，$\theta_2=\dfrac{2}{3}\pi$

また，(1) から　$y=2t^2+2t-\dfrac{3}{4}=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

θ が区間 A にあるとき　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$

y はこの区間で，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$，$t=1$ のとき最大値 $\dfrac{13}{4}$ をとる。

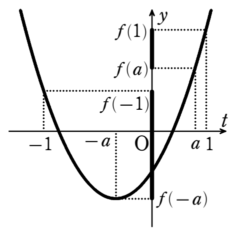
よって　$y_1=\dfrac{3}{4}$，$y_2=\dfrac{13}{4}$

θ が区間 B にあるとき　$-1\leqq t\leqq-\dfrac{1}{2}$

y はこの区間で，$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{5}{4}$，$t=-1$ のとき最大値 $-\dfrac{3}{4}$ をとる。

よって　$y_3=-\dfrac{5}{4}$，$y_4=-\dfrac{3}{4}$

(2)　$a\leqq|\cos\theta|$，$0\leqq\theta\leqq\pi$ から　$-1\leqq t\leqq-a$　または　$a\leqq t\leqq 1$



$f(t)=2t^2+4at+a^2-1$ とおく。

$f(t)=2(t+a)^2-a^2-1$ であるから，$y=f(t)$ のグラフの軸は　$t=-a$

$0<a<1$ から　$-1<-a<0$

右の図から，関数 y の値域が 2 つの区間になるのは，

$f(-1)<f(a)$ のときである。

$f(-1)<f(a)$ から　$a^2-4a+1<7a^2-1$

整理すると　$3a^2+2a-1>0$

よって　$(3a-1)(a+1)>0$　　ゆえに　$a<-1$，$\dfrac{1}{3}<a$

$0<a<1$ と合わせると，求める a の値の範囲は　$\dfrac{1}{3}<a<1$　$\cdots\cdots①$

このときの y の値域は　$f(-a)\leqq y\leqq f(-1)$，$f(a)\leqq y\leqq f(1)$

すなわち　$-a^2-1\leqq y\leqq a^2-4a+1$，$7a^2-1\leqq y\leqq a^2+4a+1$

(3)　関数 y の値域が 1 つの区間になるのは，$f(-1)\geqq f(a)$ のときである。

① から，$f(-1) \geqq f(a)$ となる a の値の範囲は　　$0<a \leqq \dfrac{1}{3}$

$y=f(t)$ のグラフの軸 $t=-a$ について，$-a<0$ であるから，$f(-1)<f(1)$ は常に成り立つ。よって，このときの y の値域は　　$f(-a) \leqq y \leqq f(1)$

すなわち　　$-a^2-1 \leqq y \leqq a^2+4a+1$

3

解答 (1) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　(2) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$　　(3) 略　　(4) 略

解説

(1) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$

であるから　　$\sin\alpha=\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(2) $\tan\alpha>\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{3}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

同様に　$\dfrac{\pi}{3}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{3}<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$　　……②

$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{7}{9}$$

また $\tan\gamma=8$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=1$$

①，② から　$\pi<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{3}{2}\pi$

よって　$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$

(3)
$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{3}{11}$$
$$\tan(\gamma-\beta)=\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta}=\frac{3}{41}$$

よって　$\tan(\beta-\alpha)>\tan(\gamma-\beta)$　……③

①，② から

$$-\frac{\pi}{6}<\beta-\alpha<\frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6}<\gamma-\beta<\frac{\pi}{6} \quad \cdots\cdots ④$$

$f(x)=\tan x$ は $-\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{6}$ の範囲で常に増加する。

したがって ③，④ から　　$\beta-\alpha>\gamma-\beta$

(4) (3) で示した不等式から　　$2\beta>\alpha+\gamma$

よって　　$3\beta=\beta+2\beta>\beta+\alpha+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$　　ゆえに　　$\beta>\dfrac{5\pi}{12}$

別解　$\tan\dfrac{5\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\dfrac{\pi}{6}}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{6}}=2+\sqrt{3}$

$\sqrt{3}<2$ により　　$\tan\dfrac{5\pi}{12}<4<\tan\beta$

$f(x)=\tan x$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に増加する。したがって　　$\beta>\dfrac{5\pi}{12}$

4

解答 (1) 略　　(2) 略　　(3) $\dfrac{2}{5}\pi$　　(4) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

解説

(1) $4x^2+2x-1=0$ を解いて

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$\alpha>\beta$ であるから

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \beta=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$1<\sqrt{5}<3$ であるから　　$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$　……①

$f(x)=\cos x$ は $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で常に減少し，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ である。

よって，① から $f(\theta)=\alpha$ すなわち $\cos\theta=\alpha$ となる θ が $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つだけ存在する。

(2) $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

よって　　$\cos2\theta=\beta$

(3) (1)，(2) から $\cos\theta$，$\cos2\theta$ は $4x^2+2x-1=0$ の解である。

よって，解と係数の関係から

$$\cos\theta+\cos2\theta=-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ②,$$
$$\cos\theta\cos2\theta=-\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ③$$

③ から　　$\dfrac{1}{2}(\cos3\theta+\cos\theta)=-\dfrac{1}{4}$

よって　　$\cos3\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　……④

②，④ から　　$\cos3\theta=\cos2\theta$

$\dfrac{2}{3}\pi \leqq 2\theta \leqq \pi$，$\pi \leqq 3\theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ であるから

$$3\theta=2\pi-2\theta$$

したがって　　$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$

(4) $\sin\dfrac{3\theta}{4}=\sin\dfrac{3\pi}{10}=-\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$=-\cos2\theta=-\beta$$

よって　　$\sin\dfrac{3\theta}{4}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

5

解答 (1) $x=\dfrac{\pi}{6}$

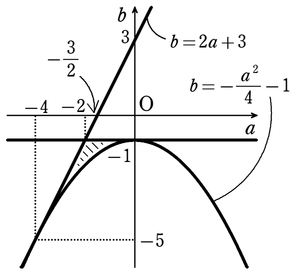
(2) $\cos3x=4\cos^3x-3\cos x$

(3) $-4<a<0$，$b>-\dfrac{a^2}{4}-1$，

$b<-1$，$b<2a+3$；

［図］ ただし，境界線は含まない

(3)



解説

(1) 与式から　　$2\sin x\cos x=\cos x$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos x>0$ から

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

よって　　$x=\dfrac{\pi}{6}$

(2) $\cos3x=\cos(2x+x)$
$$=\cos2x\cos x-\sin2x\sin x$$
$$=(2\cos^2x-1)\cos x-2(1-\cos^2x)\cos x$$
$$=4\cos^3x-3\cos x$$

(3) (2) から，条件式は

$$4\cos^3x-2a\sin x\cos x+(b-3)\cos x=0$$

よって　$\cos x(4\cos^2x-2a\sin x+b-3)=0$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\cos x \fallingdotseq 0$，また　$\cos^2x=1-\sin^2x$ から

$$4(1-\sin^2x)-2a\sin x+b-3=0$$

すなわち

$$\sin^2x+\frac{a}{2}\sin x-\frac{b+1}{4}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$\sin x=t$ とおくと $0<t<1$ で，① は

$$t^2+\frac{a}{2}t-\frac{b+1}{4}=0 \quad \cdots\cdots ②$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，t の値1つに対して x の値も1つであるから，求める条件は ② が $0<t<1$ において異なる2つの実数解をもつことである。

$$f(t)=t^2+\frac{a}{2}t-\frac{b+1}{4}=\left(t+\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{16}-\frac{b+1}{4}$$

とおくと，条件は

軸 $t=-\dfrac{a}{4}$ について　　$0<-\dfrac{a}{4}<1$

頂点の y 座標について　$-\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{b+1}{4}<0$

$f(0)>0$，$f(1)>0$

よって　　$-4<a<0$，$b>-\dfrac{a^2}{4}-1$，$b<-1$，$b<2a+3$

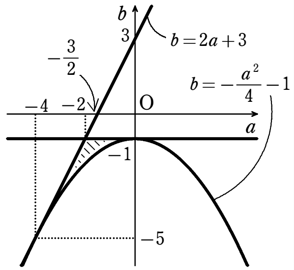
これらを ③ とする。

ここで　　$-\dfrac{a^2}{4}-1=2a+3$

とすると　　$(a+4)^2=0$

よって，放物線 $b=-\dfrac{a^2}{4}-1$ と直線 $b=2a+3$ は $a=-4$ で接する。

以上から，③ を満たす点 $(a,\ b)$ の集合は，図の斜線部分である。ただし，境界線は含まない。



6

解答　(1)　証明略，1　　(2)　$\dfrac{8}{3}$

解説

(1)　$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\pi-\gamma)=-\tan\gamma$$

よって　$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\tan\gamma$

ゆえに　$\tan\alpha+\tan\beta=-\tan\gamma(1-\tan\alpha\tan\beta)$

よって　$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

ゆえに　$\dfrac{1}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\beta\cdot\tan\gamma}+\dfrac{1}{\tan\gamma\cdot\tan\alpha}$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}=1$$

(2)　$\tan(x+y)+\tan(x-y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}+\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}(\tan x+\tan y)+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(\tan x-\tan y)$$

$$=2(\tan x+\tan y)+\frac{2}{3}(\tan x-\tan y)$$

$$=\frac{8}{3}\tan x+\frac{4}{3}\tan y$$

ここで，(相加平均)≧(相乗平均) から

$$\frac{8}{3}\tan x+\frac{4}{3}\tan y\geqq 2\sqrt{\frac{8}{3}\tan x\cdot\frac{4}{3}\tan y}$$

$$=2\sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

等号は，$\dfrac{8}{3}\tan x=\dfrac{4}{3}\tan y$ かつ $\tan x\tan y=\dfrac{1}{2}$，すなわち　$\tan x=\dfrac{1}{2}$ かつ $\tan y=1$ のとき成り立つ。

したがって，求める最小値は　　$\dfrac{8}{3}$

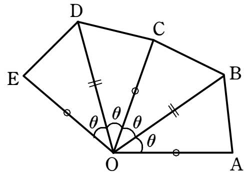
7

解答　$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

解説

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$0<3\theta<\frac{3}{2}\pi$$



よって，△OBE の内角 ∠BOE の大きさは 3θ，$2\pi-3\theta$ のどちらかになる。

OA＝OE であるから

$$\frac{\triangle\mathrm{OBE}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OE}|\sin3\theta|}{\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta}=\frac{|\sin3\theta|}{\sin\theta}=\frac{|3\sin\theta-4\sin^3\theta|}{\sin\theta}$$

$$=|3-4\sin^2\theta|$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$0<\sin\theta<1$

このとき，$3-4\sin^2\theta$ がとりうる値の範囲は　　$-1<3-4\sin^2\theta<3$

よって，$\dfrac{\triangle\mathrm{OBE}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\dfrac{3}{2}$ すなわち $|3-4\sin^2\theta|=\dfrac{3}{2}$ のとき

$3-4\sin^2\theta=\dfrac{3}{2}$　　　ゆえに　　$\sin^2\theta=\dfrac{3}{8}$

$\sin\theta>0$ であるから　　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　　すなわち　$\sin\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

8

解答　(1)　証明略，$A=B$　　(2)　証明略，$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$

解説

$A+B+C=\pi$ であるから　　$C=\pi-(A+B)$

(1)　(左辺)$=\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{A+B}{2}-\cos\dfrac{A-B}{2}\right)$

ここで　　$\cos\dfrac{A+B}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\sin\dfrac{C}{2}$

よって　　(右辺)−(左辺)$=\dfrac{1}{2}\left(1-\sin\dfrac{C}{2}\right)-\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)-\left\{-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{A-B}{2}\right)\geqq0$$

$\left(-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{A-B}{2}<\dfrac{\pi}{2}\right.$ より，$0<\cos\dfrac{A-B}{2}\leqq1$ であるから。$\left.\right)$

ここで，$1-\cos\dfrac{A-B}{2}=0$ とすると　　$\dfrac{A-B}{2}=0$

ゆえに，等号は $A=B$ のとき成り立つ。

(2)　$\sin\dfrac{C}{2}=t$ とおくと，$0<\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$0<t<1$

(1) から　　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{1}{2}\left(1-\sin\dfrac{C}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2}$

$$=\frac{1}{2}t(1-t)=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$$

$0<t<1$ の範囲において，$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $C=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{8}$ をとるから

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{8}$$

等号は，$A=B$ かつ $C=\dfrac{\pi}{3}$ すなわち $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ のとき成り立つ。

9

解答　(1)　$x=\dfrac{2}{5}\pi$　　(2)　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

(3)　$x=\dfrac{\pi}{8}$，$\dfrac{5}{8}\pi$，$\dfrac{2}{3}\pi$

解説

(1)　$\sin x+\sin2x+\sin3x+\sin4x=(\sin4x+\sin x)+(\sin3x+\sin2x)$

$$=2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{3}{2}x+2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}$$

$$=2\sin\frac{5}{2}x\left(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{5}{2}x\cdot2\cos x\cos\frac{x}{2}$$

ゆえに，方程式は　　$\sin\dfrac{5}{2}x\cdot\cos x\cdot\cos\dfrac{x}{2}=0$　……①

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ であるから　　$\cos x\neq0$，$\cos\dfrac{x}{2}\neq0$

よって，① から　　$\sin\dfrac{5}{2}x=0$

$0<\dfrac{5}{2}x<\dfrac{5}{4}\pi$ であるから，$\sin\dfrac{5}{2}x=0$ となるのは，$\dfrac{5}{2}x=\pi$ のときである。

したがって　　$x=\dfrac{2}{5}\pi$

(2)　$\cos3\theta+\sin2\theta+\cos\theta=(\cos3\theta+\cos\theta)+\sin2\theta$

$$=2\cos2\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta$$

$$=2\cos\theta(\cos2\theta+\sin\theta)$$

$$=2\cos\theta(1-2\sin^2\theta+\sin\theta)$$

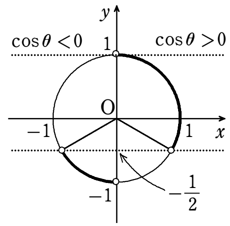
$$=-2\cos\theta(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)$$

したがって，不等式は

$$\cos\theta(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$$

ゆえに　　「$\cos\theta>0$，$-\dfrac{1}{2}<\sin\theta<1$」または

「$\cos\theta<0$，$\sin\theta<-\dfrac{1}{2}$」



よって

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$$

(3)　$\sin x+\sin2x+\sin3x=(\sin3x+\sin x)+\sin2x=2\sin2x\cos x+\sin2x$

$$=\sin2x(2\cos x+1)$$

$\cos x+\cos2x+\cos3x=(\cos3x+\cos x)+\cos2x=2\cos2x\cos x+\cos2x$

$$=\cos2x(2\cos x+1)$$

したがって，方程式は　　$\sin2x(2\cos x+1)=\cos2x(2\cos x+1)$

よって　　$(2\cos x+1)(\sin2x-\cos2x)=0$

ゆえに　　$\cos x=-\dfrac{1}{2}$　……①　または　$\sin2x=\cos2x$　……②

$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で，① を解くと　　$x=\dfrac{2}{3}\pi$

また，$\cos2x=0$ のとき　$\sin2x\neq0$ であるから，② は

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=1 \quad すなわち \quad \tan 2x=1$$

$0\leqq x\leqq\pi$ すなわち $0\leqq 2x\leqq 2\pi$ の範囲で，これを解くと

$$2x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi \quad すなわち \quad x=\frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi$$

したがって，求める解は　$x=\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{5}{8}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi$

$\boxed{10}$

解答　(1)　$f(x)=\left|t^2+t-\dfrac{9}{4}\right|$　(2)　$-1\leqq t\leqq\sqrt{3}$　(3)　$0\leqq f(x)\leqq\dfrac{5}{2}$，証明略

解説

(1)　$t^2=(-\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2=\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$

$\quad=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$

ゆえに　$2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=t^2-1$

よって　$f(x)=\left|t^2-1+t-\dfrac{5}{4}\right|=\left|t^2+t-\dfrac{9}{4}\right|$

(2)　$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+120^\circ)$

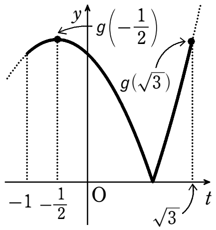
$0^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$ から　$120^\circ\leqq x+120^\circ\leqq 210^\circ$

よって　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin(x+120^\circ)\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　ゆえに　$-1\leqq t\leqq\sqrt{3}$

(3)　$g(t)=\left|t^2+t-\dfrac{9}{4}\right|$ とすると

$$g(t)=\left|\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}\right|$$

$-1\leqq t\leqq\sqrt{3}$ における $y=g(t)$ のグラフは，右の図の実線部分である。



$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\left|-\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2},$$

$$g(\sqrt{3})=\left|\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right|=\sqrt{3}+\frac{3}{4}$$

$\sqrt{3}+\dfrac{3}{4}<1.74+0.75=2.49<\dfrac{5}{2}$ から　$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)>g(\sqrt{3})$

したがって，$f(x)$ のとりうる値の範囲は　$0\leqq f(x)\leqq\dfrac{5}{2}$

$f(x)$ が最大値をとるのは $t=-\dfrac{1}{2}$ のときである。

このときの x を α とすると　$\sin(\alpha+120^\circ)=-\dfrac{1}{4}$

また　$\sin(60^\circ+120^\circ)=\sin 180^\circ=0$

$\sin(75^\circ+120^\circ)=\sin(180^\circ+15^\circ)=-\sin 15^\circ$

$\quad=-\sin(45^\circ-30^\circ)=-\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$\quad=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

更に　$\sin(\alpha+120^\circ)-\sin(75^\circ+120^\circ)=-\dfrac{1}{4}-\left(-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

$\quad=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})-1}{4}$

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-1^2=7-4\sqrt{3}=\sqrt{49}-\sqrt{48}>0$ であるから　$\sqrt{6}-\sqrt{2}>1$

よって　$-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<-\dfrac{1}{4}<0$

すなわち　$\sin(75^\circ+120^\circ)<\sin(\alpha+120^\circ)<\sin(60^\circ+120^\circ)$

$120^\circ\leqq\theta\leqq 210^\circ$ において，$\sin\theta$ は単調に減少するから

$60^\circ+120^\circ<\alpha+120^\circ<75^\circ+120^\circ$　すなわち　$60^\circ<\alpha<75^\circ$

よって，$f(x)$ が最大値をとる x は，$60^\circ<x<75^\circ$ を満たす。

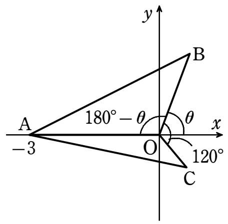
$\boxed{11}$

解答　(1)　$\theta=30^\circ$　(2)　$\sin\theta=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$ のとき最大値 $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

解説

(1)　△OAB と △OAC は辺 OA を共有するから，△OAB と △OAC の面積が等しいとき，それぞれの高さが等しい。

ここで，条件から，動径 OB と x 軸の正の向きとのなす角は　$180^\circ-(180^\circ-\theta)=\theta$



△OAB の高さは　$2\sin\theta$

△OAC の高さは　$\sin(120^\circ-\theta)$

ゆえに　$2\sin\theta=\sin(120^\circ-\theta)$　……①

よって　$2\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta$

ゆえに　$3\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$　……②

$\theta=90^\circ$ は①を満たさないから　$\theta\fallingdotseq 90^\circ$

②の両辺を $\cos\theta$ で割って　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0^\circ<\theta<120^\circ$ であるから　$\theta=30^\circ$

(2)　△OAB と △OAC の面積の和を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\left(2\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=\frac{3}{4}(5\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$$

$$=\frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)=\frac{3\sqrt{7}}{2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，$\cos\alpha=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$　$(0^\circ<\alpha<90^\circ)$

$0^\circ<\theta<120^\circ$，$0^\circ<\alpha<90^\circ$ より，$0^\circ<\theta+\alpha<210^\circ$ であるから，この範囲において，

S は $\theta+\alpha=90^\circ$ のとき最大となり，その最大値は　$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\sin 90^\circ=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\cdot 1=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

また，$\theta+\alpha=90^\circ$ のとき　$\sin\theta=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$

$\boxed{1}$

解答　$-\dfrac{1}{3}<a<0$ のとき 4 個；$a=-\dfrac{1}{3}$ のとき 3 個；

$a<-\dfrac{1}{3}$，$a=0$，$1<a$ のとき 2 個；$a=1$ のとき 1 個；$0<a<1$ のとき 0 個

解説

$\cos^2 x+2a\sin x-a-1=(1-\sin^2 x)+2a\sin x-a-1$

$\quad=-\sin^2 x+2a\sin x-a$

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq 1$　……①

方程式は　$-t^2+2at-a=0$　すなわち　$t^2-2at+a=0$

この方程式の①の範囲における実数解の個数を調べればよい。

ただし，$\sin x=t$ を満たす x は，$t\fallingdotseq\pm 1$ であれば 2 つあり，$t=\pm 1$ であれば 1 つある。

$f(t)=t^2-2at+a$ とすると　$f(t)=(t-a)^2+a-a^2$

$y=f(t)$ のグラフは下に凸の放物線であり，軸は直線 $t=a$，頂点は点 $(a,\ a-a^2)$ である。

[1]　$f(t)=0$ が $t=1$ を解にもつとき

$f(1)=1-a=0$ から　$a=1$

このとき，方程式は　$t^2-2t+1=0$　すなわち　$(t-1)^2=0$

この方程式の解は $t=1$ のただ 1 つである。

したがって，x の実数解は 1 個。

[2]　$f(t)=0$ が $t=-1$ を解にもつとき

$f(-1)=1+3a=0$ から　$a=-\dfrac{1}{3}$

このとき，方程式は　$t^2+\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{3}=0$

ゆえに　$3t^2+2t-1=0$　　よって　$(t+1)(3t-1)=0$

したがって　$t=-1,\ \dfrac{1}{3}$

ゆえに，x の実数解は 3 個。

[3]　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ の範囲に実数解を 2 つもつとき

頂点について　$a-a^2<0$

ゆえに　$a(a-1)>0$　　よって　$a<0,\ 1<a$　……②

軸について　$-1<a<1$　……③

$f(1)=1-a>0$ から　$a<1$　……④

$f(-1)=1+3a>0$ から　$a>-\dfrac{1}{3}$　……⑤

②～⑤の共通範囲をとって　$-\dfrac{1}{3}<a<0$

このとき，x の実数解は 4 個。

[4]　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ の範囲に実数解を 1 つもつとき

このときは，次の (ア) または (イ) の場合が考えられる。

(ア)　$f(t)=0$ が $-1<t<1$ の範囲に重解をもつ。

(イ)　$f(1)f(-1)<0$

(ア) の場合，$a-a^2=0$ を満たすから　$a=0,\ 1$

$a=0$ のとき，$f(t)=t^2$ であるから，確かに重解 $t=0$ を $-1<t<1$ の範囲にもつ。

このとき，x の実数解は 2 個。

$a=1$ のときは，[1] より，解は $t=1$ で $-1<t<1$ の範囲にない。

(イ) の場合，$f(1)f(-1)<0$ から　　$(1-a)(1+3a)<0$

ゆえに　$(a-1)(3a+1)>0$　　　よって　$a<-\dfrac{1}{3}$，$1<a$

このとき，x の実数解は 2 個。

以上から　$-\dfrac{1}{3}<a<0$ のとき 4 個；$a=-\dfrac{1}{3}$ のとき 3 個；

$a<-\dfrac{1}{3}$，$a=0$，$1<a$ のとき 2 個；

$a=1$ のとき 1 個；$0<a<1$ のとき 0 個

2

解答　(1)　4 個　　(2)　5 個

解説

(1)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ では　　$-1\leqq\cos x\leqq 1$

ゆえに　$-\pi\leqq\pi\cos x\leqq\pi$

よって，$\cos(\pi\cos x)=\dfrac{1}{2}$ から　　$\pi\cos x=\pm\dfrac{\pi}{3}$

したがって　　$\cos x=\pm\dfrac{1}{3}$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で x の個数は 4 個。

(2)　$\pi\cos x=t$ とおくと，(1) と同様にして　　$-\pi\leqq t\leqq\pi$

$\pi\cos x=t$ より，$\cos x=\dfrac{t}{\pi}$　……① であり，$\cos(\pi\cos x)=\cos x$ から

$$\cos t=\frac{t}{\pi}$$

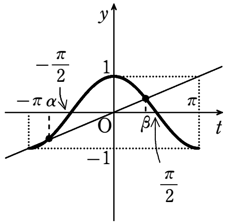
$y=\cos t$ のグラフと直線 $y=\dfrac{t}{\pi}$ の交点の t 座標は

$t=-\pi$，α，β

ただし　$-\pi<\alpha<-\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに　$\dfrac{t}{\pi}=-1$，$\dfrac{\alpha}{\pi}$，$\dfrac{\beta}{\pi}$

① から　$\cos x=-1$，$\dfrac{\alpha}{\pi}$，$\dfrac{\beta}{\pi}$



よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で x の個数は　5 個。

3

解答　有理数でない

解説

$\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定すると，2 倍角の公式

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

を繰り返し用いることにより，

$\tan 2^\circ$，$\tan 4^\circ$，$\tan 8^\circ$，$\tan 16^\circ$，$\tan 32^\circ$，$\tan 64^\circ$

はすべて有理数となる。

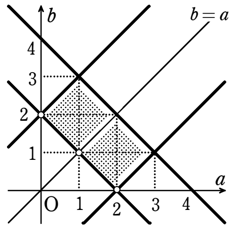
よって，$\tan 60^\circ=\tan(64^\circ-4^\circ)=\dfrac{\tan 64^\circ-\tan 4^\circ}{1+\tan 64^\circ\tan 4^\circ}$ であるから，$\tan 60^\circ$ は有理数となる。

一方，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ であり，$\sqrt{3}$ は無理数であるから，矛盾が生じる。

したがって，$\tan 1^\circ$ は有理数ではない。

4

解答　右の図の影をつけた部分。ただし，境界線は，直線 $b=-a+2$ $(0<a<1,\ 1<a<2)$ のみ含み，その他および直線 $b=a$ 上の点を含まない。



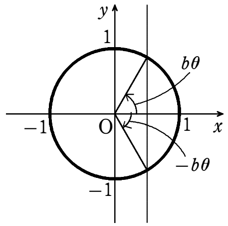
解説

$\cos a\theta=\cos b\theta$ から

$a\theta=b\theta+2n\pi$，$a\theta=-b\theta+2n\pi$　(n は整数)

よって　$(a-b)\theta=2n\pi$，$(a+b)\theta=2n\pi$

$a=b$ のとき，$(a-b)\theta=2n\pi$ を満たす θ $(0<\theta\leqq\pi)$ は無数にあるから，条件 (∗) を満たさない。



$a\neq b$ のとき　　$\theta=\dfrac{2n\pi}{a-b}$，$\dfrac{2n\pi}{a+b}$　……①

[1]　$a>b>0$ のとき

① を満たす正の数 θ は，それぞれ小さい順に

$$\frac{2\pi}{a-b},\ \frac{4\pi}{a-b},\ \cdots\cdots;\quad \frac{2\pi}{a+b},\ \frac{4\pi}{a+b},\ \cdots\cdots$$

ここで，$0<a-b<a+b$ であるから　　$\dfrac{2\pi}{a+b}<\dfrac{2\pi}{a-b}$

したがって，① かつ $0<\theta\leqq\pi$ を満たす θ がちょうど 1 つであるための条件は

$$0<\frac{2\pi}{a+b}\leqq\pi<\frac{4\pi}{a+b}\quad かつ\quad \pi<\frac{2\pi}{a-b}$$

よって　　$2\leqq a+b<4$　かつ　$a-b<2$

[2]　$b>a>0$ のとき

同様にして，条件は　　$2\leqq a+b<4$　かつ　$b-a<2$

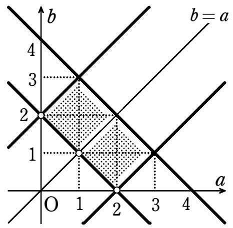
したがって，条件 (∗) を満たす $(a,\ b)$ の存在する範囲は，右の図の影をつけた部分である。

ただし，境界線は，

直線 $b=-a+2$ $(0<a<1,\ 1<a<2)$

のみ含み，その他は含まない。

また，直線 $b=a$ 上の点も含まない。



5

解答　(1)　$\theta=\dfrac{2}{9}\pi$，$\dfrac{4}{9}\pi$，$\dfrac{8}{9}\pi$，$\dfrac{10}{9}\pi$，$\dfrac{14}{9}\pi$，$\dfrac{16}{9}\pi$

(2)　$x^3-3x+1=0$ (解答は他にもある)

(3)　$\beta=\alpha^2-2$，$\gamma=-\alpha^2-\alpha+2$　　(4)　6

解説

(1)　$\cos 3\theta=-\dfrac{1}{2}$，$0\leqq 3\theta<6\pi$ から

$$3\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi,\ \frac{14}{3}\pi,\ \frac{16}{3}\pi$$

したがって　　$\theta=\dfrac{2}{9}\pi$，$\dfrac{4}{9}\pi$，$\dfrac{8}{9}\pi$，$\dfrac{10}{9}\pi$，$\dfrac{14}{9}\pi$，$\dfrac{16}{9}\pi$

(2)　(1) より　　$\theta_1=\dfrac{2}{9}\pi$

ここで　$\cos 3\theta=\cos(\theta+2\theta)=\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta$

$=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-\sin\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

(1) より，$\cos 3\theta_1=-\dfrac{1}{2}$ であるから　　$4\cos^3\theta_1-3\cos\theta_1=-\dfrac{1}{2}$

すなわち　　$8\cos^3\theta_1-6\cos\theta_1+1=0$

よって　　$(2\cos\theta_1)^3-3\cdot 2\cos\theta_1+1=0$　　　したがって　　$\alpha^3-3\alpha+1=0$

よって，α を解にもつ整数を係数とする 3 次方程式の 1 つは　　$x^3-3x+1=0$

(3)　$\theta_2=\dfrac{4}{9}\pi$，$\theta_3=\dfrac{8}{9}\pi$ とすると，$\cos 3\theta_2=-\dfrac{1}{2}$，$\cos 3\theta_3=-\dfrac{1}{2}$ であるから (2) と同様にして，$2\cos\dfrac{4}{9}\pi$，$2\cos\dfrac{8}{9}\pi$ も 3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ の解である。

また，$\alpha\neq 2\cos\dfrac{4}{9}\pi$，$\alpha\neq 2\cos\dfrac{8}{9}\pi$，$2\cos\dfrac{4}{9}\pi>2\cos\dfrac{8}{9}\pi$ であるから

$\beta=2\cos\dfrac{4}{9}\pi$，$\gamma=2\cos\dfrac{8}{9}\pi$

よって　　$\beta=2\cos\dfrac{4}{9}\pi=2\cos 2\theta_1=2(2\cos^2\theta_1-1)=(2\cos\theta_1)^2-2=\alpha^2-2$

$$\gamma=2\cos\frac{8}{9}\pi=2\cos\left(2\cdot\frac{4}{9}\pi\right)=2\left(2\cos^2\frac{4}{9}\pi-1\right)=\left(2\cos\frac{4}{9}\pi\right)^2-2$$

$=\beta^2-2=(\alpha^2-2)^2-2=\alpha^4-4\alpha^2+2$

ここで，$\alpha^3-3\alpha+1=0$ より，$\alpha^3=3\alpha-1$ であるから

$\gamma=\alpha(3\alpha-1)-4\alpha^2+2=-\alpha^2-\alpha+2$

(4)　(3) より，$\beta=\alpha^2-2$ であるから　$\alpha^2=\beta+2$

また，$\gamma=\beta^2-2$ であるから　　$\beta^2=\gamma+2$

更に

$$\gamma^2=4\cos^2\frac{8}{9}\pi=4\cdot\frac{1+\cos\frac{16}{9}\pi}{2}=2\cos\frac{16}{9}\pi+2=2\cos\frac{2}{9}\pi+2=\alpha+2$$

したがって

$\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha=(\beta+2)\beta+(\gamma+2)\gamma+(\alpha+2)\alpha$

$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha+\beta+\gamma)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)$　……①

α，β，γ は 3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ の異なる 3 つの解であるから，解と係数の関係により　　$\alpha+\beta+\gamma=0$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$

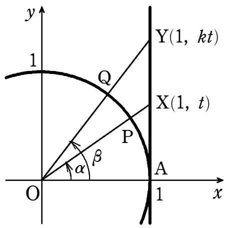
よって，① から　　$\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha=0^2-2\cdot(-3)+2\cdot 0=6$

6

解答　$\dfrac{k-1}{2(k+1)}$

解説

$\angle AOX=\alpha$，$\angle AOY=\beta$ とすると，$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であり　$\angle POQ=\beta-\alpha$



よって　$\triangle OPQ=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)$

$\beta-\alpha$ は鋭角であるから，$\triangle OPQ$ の面積が最大になるのは，$\beta-\alpha$ が最大になるときである。

X(1，t) とすると，$t>0$，Y(1，kt) であり

$$\tan\alpha=t,\quad \tan\beta=kt$$

したがって　$\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{kt-t}{1+kt\cdot t}=\dfrac{(k-1)t}{1+kt^2}=\dfrac{k-1}{\dfrac{1}{t}+kt}$

$\dfrac{1}{t}>0$，$kt>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係から

$$\frac{1}{t}+kt\geqq 2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot kt}=2\sqrt{k}$$

等号が成り立つのは $\dfrac{1}{t}=kt$ のとき，すなわち $t=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のときである。

このとき，$\dfrac{1}{t}+kt$ が最小になるから，$\tan(\beta-\alpha)$ は最大になり，$\beta-\alpha$ も最大になる。

このとき，$\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{k-1}{2\sqrt{k}}$ であるから

$$\cos^2(\beta-\alpha)=\frac{1}{1+\tan^2(\beta-\alpha)}=\frac{1}{1+\dfrac{(k-1)^2}{4k}}=\frac{4k}{(k+1)^2}$$

$$\sin^2(\beta-\alpha)=1-\cos^2(\beta-\alpha)=1-\frac{4k}{(k+1)^2}=\frac{(k-1)^2}{(k+1)^2}$$

$k>1$ より，$k-1>0$，$k+1>0$ であるから　$\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{k-1}{k+1}$

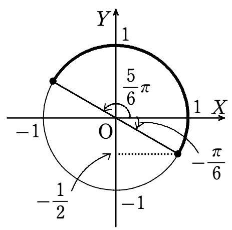
よって，$\triangle OPQ$ の面積の最大値は　$\dfrac{k-1}{2(k+1)}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$-1\leqq t\leqq 2$　(2)　$y=t^2-2at+2$　(3)　$0\leqq a\leqq\sqrt{2}$　(4)　$\sqrt{2}<a\leqq\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　$t=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$



$0\leqq x\leqq\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-1\leqq t\leqq 2$

(2)　$t^2=(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2$

$=3\sin^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x$

$=3\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}-\sqrt{3}\sin 2x+\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$=-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2$

よって　$-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=t^2-2$

ゆえに　$y=(t^2-2)-2at+4=t^2-2at+2$

(3)　$f(t)=t^2-2at+2$ とすると

$f(t)=(t-a)^2-a^2+2$

区間 $-1\leqq t\leqq 2$ における関数 $f(t)$ の最大値が 6 以下，最小値が 0 以上となるように，a の範囲を定めればよい。

[1]　$a<-1$ のとき

最大値は　$f(2)=6-4a$，　最小値は　$f(-1)=2a+3$

よって　$6-4a\leqq 6$ かつ $2a+3\geqq 0$

これを解くと　$a\geqq 0$

これと $a<-1$ を同時に満たす a はない。

[2]　$-1\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき

最大値は　$f(2)=6-4a$，　最小値は　$f(a)=-a^2+2$

よって　$6-4a\leqq 6$ かつ $-a^2+2\geqq 0$

これを解くと　$0\leqq a\leqq\sqrt{2}$

これと $-1\leqq a<\dfrac{1}{2}$ の共通範囲は　$0\leqq a<\dfrac{1}{2}$

[3]　$\dfrac{1}{2}\leqq a<2$ のとき

最大値は　$f(-1)=2a+3$，　最小値は　$f(a)=-a^2+2$

よって　$2a+3\leqq 6$ かつ $-a^2+2\geqq 0$

これを解くと　$-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$

これと $\dfrac{1}{2}\leqq a<2$ の共通範囲は　$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$

[4]　$2\leqq a$ のとき

最大値は　$f(-1)=2a+3$，　最小値は　$f(2)=6-4a$

よって　$2a+3\leqq 6$ かつ $6-4a\geqq 0$

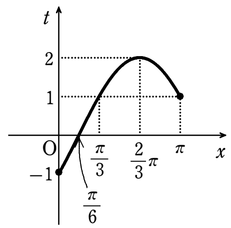
これを解くと　$a\leqq\dfrac{3}{2}$

これと $a\geqq 2$ を同時に満たす a はない。

[1]～[4] から，求める a の値の範囲は

$0\leqq a\leqq\sqrt{2}$

(4)　方程式を t で表すと　$t^2-2at+2=0$



$t=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ のグラフは，右の図のようになる。

よって，$-1\leqq t<1$，$t=2$ に対して x の値はただ 1 つ，$1\leqq t<2$ に対して x の値は異なる 2 つとなる。

したがって，与えられた方程式が 3 個以上の異なる実数解をもつのは，(3) と同様に $f(t)=t^2-2at+2$ とすると，次の [1]～[3] の場合が考えられる。

[1]　$f(t)=0$ が $1\leqq t<2$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき

(与えられた方程式の実数解は 4 個)

$f(a)<0$ かつ $1<a<2$ かつ $f(1)\geqq 0$ かつ $f(2)>0$

$f(a)<0$ から　$-a^2+2<0$　すなわち　$a^2-2>0$

よって　$a<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<a$

$f(1)\geqq 0$ から　$-2a+3\geqq 0$　よって　$a\leqq\dfrac{3}{2}$

$f(2)>0$ から　$-4a+6>0$　よって　$a<\dfrac{3}{2}$

共通範囲を求めて　$\sqrt{2}<a<\dfrac{3}{2}$

[2]　$f(t)=0$ が $-1\leqq t<1$ と $1\leqq t<2$ の範囲に 1 つずつ解をもつとき

(与えられた方程式の実数解は 3 個)

このとき，「$f(1)\leqq 0$ かつ $f(2)>0$」であることが必要であるが，$f(2)=2f(1)$ であるから，$f(1)$ と $f(2)$ は同符号である。

よって，条件を満たすような a の値は存在しない。

[3]　$f(t)=0$ の 1 つの解が $t=2$ で，他の解が $1\leqq t<2$ の範囲にあるとき

(与えられた方程式の実数解は 3 個)

$f(t)=0$ が $t=2$ を解にもつから　$f(2)=-4a+6=0$

これを解いて　$a=\dfrac{3}{2}$

$f(2)=0$ のとき $f(1)=0$ であるから，$f(t)=0$ の解は $t=1$，2 となり，適する。

[1]～[3] から，求める a の値の範囲は　$\sqrt{2}<a\leqq\dfrac{3}{2}$