$\boxed{1}$

解説

(1)　三平方の定理により　$(\sqrt{5})^2+x^2=3^2$

よって　$x^2=4$

$x>0$ であるから　$x=2$

(2)　三平方の定理により　$(2\sqrt{3})^2+4^2=x^2$

よって　$x^2=28$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

$\boxed{2}$

解説

(1)　BD$=a$ cm とおく。

直角三角形 ABD において

$$3^2+4^2=a^2$$
$$a^2=25$$

$a>0$ であるから　$a=5$

直角三角形 BCD において

$$(\sqrt{5})^2+x^2=5^2$$
$$x^2=20$$

$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{5}$

(2)　BC$=a$ cm とおく。

直角三角形 ABC において

$$4^2+5^2=a^2$$
$$a^2=41$$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{41}$

直角三角形 BCD において

$$(\sqrt{41})^2+2^2=x^2$$
$$x^2=45$$

$x>0$ であるから　$x=3\sqrt{5}$

(3)　AB$=a$ cm とおく。

直角三角形 ABD において

$$a^2+2^2=6^2$$
$$a^2=32$$

$a>0$ であるから　$a=4\sqrt{2}$

直角三角形 ABC において

$$(4\sqrt{2})^2+(2+4)^2=x^2$$
$$x^2=68$$

$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{17}$

$\boxed{3}$

解説

この直角三角形の斜辺の長さは $x+2$ であるから，三平方の定理により

$$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$

$x>0$ であるから　$x=3$

$\boxed{4}$

解説

①　$4^2+6^2=52$，$8^2=64$

4^2+6^2 と 8^2 が等しくないから，直角三角形ではない。

②　$8^2+15^2=289$，$17^2=289$

$8^2+15^2=17^2$ であるから，17 cm の辺を斜辺とする直角三角形である。

③　$(2\sqrt{3})^2=12$，$6^2=36$，$(4\sqrt{3})^2=48$

$$(2\sqrt{3})^2+6^2=48$$

$(2\sqrt{3})^2+6^2=(4\sqrt{3})^2$ であるから，$4\sqrt{3}$ cm の辺を斜辺とする直角三角形である。

④　$(3\sqrt{2})^2=18$，$(4\sqrt{3})^2=48$，$(2\sqrt{5})^2=20$

$$(3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5})^2=38$$

$(3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5})^2$ と $(4\sqrt{3})^2$ が等しくないから，直角三角形ではない。

以上から，直角三角形であるのは　②と③

$\boxed{5}$

解説

(1)　$x:2:y=1:1:\sqrt{2}$　が成り立っている。

$x:2=1:1$　から　$x=2$

$2:y=1:\sqrt{2}$　から　$y=2\sqrt{2}$

(2)　$2:x:y=1:2:\sqrt{3}$　が成り立っている。

$2:x=1:2$　から　$x=4$

$2:y=1:\sqrt{3}$　から　$y=2\sqrt{3}$

(3)　$x:y:6=1:2:\sqrt{3}$　が成り立っている。

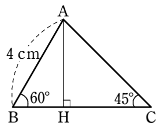
$x:6=1:\sqrt{3}$　から　$x=2\sqrt{3}$

$y:6=2:\sqrt{3}$　から　$y=4\sqrt{3}$

$\boxed{6}$

解説

(1)　点 A から辺 BC に垂線 AH を引く。



△ABH において，

$$BH:AB:AH=1:2:\sqrt{3}$$

であるから

$$BH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times4=2\ (\text{cm})$$

$$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

△ACH において，AH：CH＝1：1 であるから

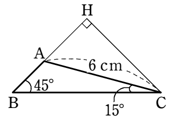
$$CH=AH=2\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

よって　$BC=2+2\sqrt{3}$ (cm)

したがって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\times(2+2\sqrt{3})\times2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

(2)　点 C から辺 BA の延長に引いた垂線を CH とする。



△ABC の内角と外角について

$$\angle CAH=45^\circ+15^\circ=60^\circ$$

よって，△ACH において

$$AH:AC:CH=1:2:\sqrt{3}$$

であるから

$$HA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times6=3\ (\text{cm})$$

$$CH=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

△BCH において，BH：CH＝1：1 であるから

$$BH=CH=3\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

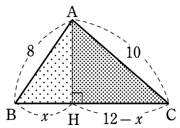
よって　$AB=3\sqrt{3}-3$ (cm)

したがって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\times(3\sqrt{3}-3)\times3\sqrt{3}=\frac{27-9\sqrt{3}}{2}\ (\text{cm}^2)$$

$\boxed{7}$

解説



BH$=x$ cm とすると，CH$=(12-x)$ cm である。

直角三角形 ABH において，三平方の定理により

$$x^2+AH^2=8^2$$

よって　$AH^2=64-x^2$　……①

直角三角形 ACH において，三平方の定理により

$$(12-x)^2+AH^2=10^2$$

よって　$AH^2=100-(12-x)^2$　……②

①，② から　$64-x^2=100-(12-x)^2$

よって　$24x=108$

したがって　$x=\dfrac{9}{2}$

① に代入して　$AH^2=64-\left(\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{175}{4}$

$AH>0$ であるから　$AH=\sqrt{\dfrac{175}{4}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$ (cm)　答

8

解説

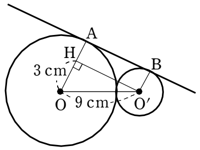
(1) O′から，線分 OA に引いた垂線の足を H とすると

$OH=6-3=3\,(cm)$

△OO′H において

$O'H=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}\ (cm)$

AB＝O′H であるから　$AB=6\sqrt{2}\ cm$



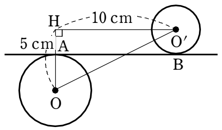
(2) O′から，直線 OA に引いた垂線の足を H とすると

$OH=3+2=5\,(cm)$

$O'H=AB=10\,(cm)$

△OO′H において

$OO'=\sqrt{5^2+10^2}=5\sqrt{5}\ (cm)$



9

解説

PC＝x cm とする。

AP＝PC＝x(cm) であるから

$PB=8-x\,(cm)$

△PBC において　$(8-x)^2+6^2=x^2$

これを解いて　$x=\dfrac{25}{4}$

よって　$PC=\dfrac{25}{4}$ cm

10

解説

(1) 円の外部の点からその円に引いた 2 つの接線の長さは等しいから

$AR=AP=3$ cm，$BQ=BP=10$ cm

四角形 OQCR は 1 辺 x cm の正方形であるから　$CQ=CR=x$ cm

よって　$BC=(x+10)$ cm，$CA=(x+3)$ cm

(2) $AB=3+10=13$ (cm)

直角三角形 ABC において，三平方の定理により

$(x+10)^2+(x+3)^2=13^2$

$x^2+13x-30=0$

$(x-2)(x+15)=0$

$x>0$ であるから　$x=2$

よって，円 O の半径は　2 cm

11

解説

円 O′の半径を r cm とする。

また，O を通り辺 AB に平行な直線と，O′を通り辺 BC に平行な直線の交点を E とする。

2 つの円 O，O′は外接しているから

$OO'=r+1$

また，図から　$OE=3-1-r=2-r$　……①

$O'E=4-1-r=3-r$　……②

直角三角形 OEO′において

$(2-r)^2+(3-r)^2=(r+1)^2$

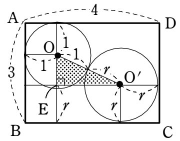
すなわち　$r^2-12r+12=0$

これを解くと　$r=\dfrac{12\pm\sqrt{96}}{2}=6\pm2\sqrt{6}$

①，② から　$r<2$

したがって　$r=6-2\sqrt{6}$

答　$(6-2\sqrt{6})$ cm



12

解説

右の図のような展開図の一部において，PQ＋QR の長さが最小となるのは，3 点 P，Q，R が一直線上にあるとき，すなわち線分 BF と PR の交点の位置に点 Q があるときである。

R から AE に垂線 RH を引くと

$PH=5-2-1=2$ (cm)

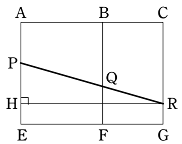
$RH=4+3=7$ (cm)

よって，直角三角形 RPH において

$RP=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$ (cm)

したがって，求める PQ＋QR の長さは

$\sqrt{53}$ cm



13

解説

円錐の底面と球との接点を C，円錐の母線 AB と球との接点を D とする。

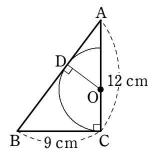
直角三角形 ABC において　$AB=\sqrt{9^2+12^2}=15$

△AOD∽△ABC であるから　AO：AB＝OD：BC

球 O の半径を x cm とすると，$AO=(12-x)$ cm で

$(12-x):15=x:9$

よって　$x=\dfrac{9}{2}$　　答　$\dfrac{9}{2}$ cm



14

解説

$MN=\sqrt{2}MD=4\sqrt{2}$，$EG=\sqrt{2}EF=8\sqrt{2}$

また，直角三角形 MAE において　$ME^2=4^2+8^2=80$

ME＞0 であるから　$ME=4\sqrt{5}$

同様に　$NG=4\sqrt{5}$

よって　ME＝NG　……①

また　MN∥EG　……②

①，② から，四角形 MEGN は等脚台形である。

M，N から辺 EG に引いた垂線の足を，それぞれ P，Q とすると，$PQ=4\sqrt{2}$，

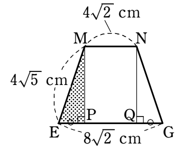
EP＝GQ であるから　$EP=(8\sqrt{2}-4\sqrt{2})\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{2}$

直角三角形 MEP において　$(2\sqrt{2})^2+MP^2=(4\sqrt{5})^2$

$MP^2=72$

MP＞0 であるから　$MP=6\sqrt{2}$

よって，求める面積は　$\dfrac{1}{2}\times(4\sqrt{2}+8\sqrt{2})\times6\sqrt{2}=72$　　答　72 cm^2



15

解説

底面の対角線 AC，BD の交点を H とすると

∠OHA＝90°

$AC=6\sqrt{2}$ cm で，点 H は線分 AC の中点であるから

$AH=3\sqrt{2}$ cm

よって，△OAH において

$OH^2=5^2-(3\sqrt{2})^2=7$

OH＞0 であるから　$OH=\sqrt{7}$ cm

したがって，求める体積は

$\dfrac{1}{3}\times6\times6\times\sqrt{7}=12\sqrt{7}\ (cm^3)$

16

解説

△BCD は 1 辺 6 cm の正三角形であるから，辺 BC の中点を M とすると

$DM=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

よって，△BCD の面積は

$\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\ (cm^2)$

H は△BCD の重心であるから　$DH=\dfrac{2}{3}DM=2\sqrt{3}$

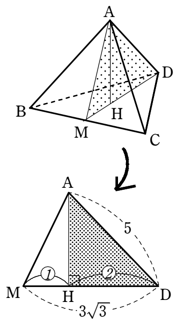
よって，直角三角形 AHD において

$AH=\sqrt{5^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$

したがって，正三角錐の体積は

$\dfrac{1}{3}\times△BCD\times AH=\dfrac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times\sqrt{13}$

$=3\sqrt{39}\ (cm^3)$　答



$\boxed{1}$

解説

三平方の定理を用いる。

(1)　$3^2+2^2=x^2$

$x^2=13$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{13}$

(2)　$4^2+8^2=x^2$

$x^2=80$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

(3)　$9^2+x^2=15^2$

$x^2=144$

$x>0$ であるから　$x=12$

(4)　$x^2+4^2=6^2$

$x^2=20$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(5)　$(\sqrt{15})^2+x^2=8^2$

$x^2=49$

$x>0$ であるから　$x=7$

(6)　$(\sqrt{6})^2+x^2=(3\sqrt{2})^2$

$x^2=12$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\boxed{2}$

解説

(1)　AC$=a$ cm とおく。

直角三角形 ABC において

$(4\sqrt{2})^2+3^2=a^2$

$a^2=41$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{41}$

直角三角形 ACD において

$4^2+x^2=(\sqrt{41})^2$

$x^2=25$

$x>0$ であるから　$x=5$

(2)　BC$=a$ cm とおく。

直角三角形 ABC において

$6^2+7^2=a^2$

$a^2=85$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{85}$

直角三角形 DBC において

$(\sqrt{85})^2+6^2=x^2$

$x^2=121$

$x>0$ であるから　$x=11$

(3)　直角三角形 OAB において

$\mathrm{OB}^2=1^2+1^2=2$

直角三角形 OBC において

$\mathrm{OC}^2=\mathrm{OB}^2+1^2=2+1$

$=3$

直角三角形 OCD において

$\mathrm{OD}^2=\mathrm{OC}^2+1^2=3+1$

$=4$

直角三角形 ODE において

$\mathrm{OE}^2=\mathrm{OD}^2+1^2=4+1$

$=5$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{5}$

$\boxed{3}$

解説

この直角三角形の斜辺の長さは $x+6$ であるから，三平方の定理により

$x^2+(x+3)^2=(x+6)^2$

$x^2-6x-27=0$

$(x+3)(x-9)=0$

$x>0$ であるから　$x=9$

$\boxed{4}$

解説

①　$5^2+7^2=74$，$9^2=81$

5^2+7^2 と 9^2 が等しくないから，直角三角形ではない。

②　$3^2+(3\sqrt{3})^2=36$，$6^2=36$

$3^2+(3\sqrt{3})^2=6^2$ であるから，6 cm の辺を斜辺とする直角三角形である。

③　$21^2+20^2=841$，$29^2=841$

$21^2+20^2=29^2$ であるから，29 cm の辺を斜辺とする直角三角形である。

④　$(\sqrt{11})^2+(\sqrt{10})^2=21$，$(2\sqrt{5})^2=20$

$(\sqrt{11})^2+(\sqrt{10})^2$ と $(2\sqrt{5})^2$ が等しくないから，直角三角形ではない。

以上から，直角三角形であるのは

②と③

$\boxed{5}$

解説

(1)　$5:x:y=1:2:\sqrt{3}$　が成り立っている。

$5:x=1:2$　から　$x=10$

$5:y=1:\sqrt{3}$　から　$y=5\sqrt{3}$

(2)　$4:x:y=1:1:\sqrt{2}$　が成り立っている。

$4:x=1:1$　から　$x=4$

$4:y=1:\sqrt{2}$　から　$y=4\sqrt{2}$

(3)　$x:6:y=1:2:\sqrt{3}$　が成り立っている。

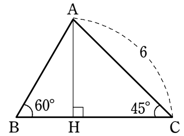
$x:6=1:2$　から　$x=3$

$6:y=2:\sqrt{3}$　から　$y=3\sqrt{3}$

$\boxed{6}$

解説

(1)　点 A から辺 BC に引いた垂線の足を H とする。



△AHC において，

$\mathrm{AH}:\mathrm{HC}:\mathrm{CA}=1:1:\sqrt{2}$

であるから

$\mathrm{AH}=6\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

$\mathrm{HC}=\mathrm{AH}=3\sqrt{2}$

△ABH において，$\mathrm{BH}:\mathrm{AH}=1:\sqrt{3}$ であるから

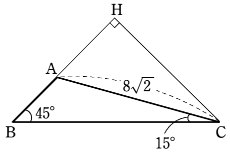
$\mathrm{BH}=3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

よって　$\mathrm{BC}=\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

したがって，△ABC の面積は

$\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{6}+3\sqrt{2})\times3\sqrt{2}=3\sqrt{3}+9$

(2)　点 C から直線 BA に引いた垂線の足を H とすると



$\angle\mathrm{HAC}=45^\circ+15^\circ=60^\circ$

したがって，△ACH において，

$\mathrm{HA}:\mathrm{AC}:\mathrm{CH}=1:2:\sqrt{3}$

であるから

$\mathrm{HA}=8\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=4\sqrt{2}$

$\mathrm{CH}=8\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{6}$

△BCH において，$\mathrm{HB}:\mathrm{CH}=1:1$ であるから

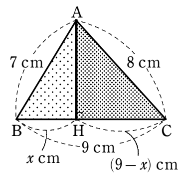
$\mathrm{HB}=\mathrm{CH}=4\sqrt{6}$

よって　$\mathrm{AB}=4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$

したがって，△ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\times(4\sqrt{6}-4\sqrt{2})\times4\sqrt{6}=48-16\sqrt{3}$

$\boxed{7}$

解説



BH$=x$ cm とする。

直角三角形 ABH において

$x^2+\mathrm{AH}^2=7^2$

よって　$\mathrm{AH}^2=7^2-x^2$　……①

直角三角形 ACH において

$(9-x)^2+\mathrm{AH}^2=8^2$

よって　$\mathrm{AH}^2=8^2-(9-x)^2$　……②

①，②から　$7^2-x^2=8^2-(9-x)^2$

これを解いて　$x=\dfrac{11}{3}$

よって，①から　$\mathrm{AH}^2=7^2-\left(\dfrac{11}{3}\right)^2=\dfrac{320}{9}$

$\mathrm{AH}>0$ であるから　$\mathrm{AH}=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$　　答　$\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ cm

8

解説

(1) O′から，線分 OA に垂線 O′H を引くと

$OH=5-2$

$=3$ (cm)

△OO′H において

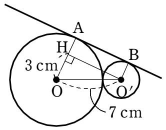
$O'H^2=7^2-3^2=40$

O′H>0 であるから

$O'H=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ (cm)

AB=O′H であるから

$AB=2\sqrt{10}$ cm



(2) O′から，直線 OA に垂線 O′H を引くと

$OH=5+3$

$=8$ (cm)

$OO'=10$ (cm)

△OO′H において

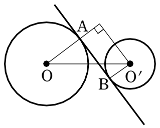
$O'H^2=10^2-8^2=36$

O′H>0 であるから

$O'H=6$ (cm)

AB=O′H であるから

AB=6 cm



9

解説

AE=x とすると　EF=EB=$5-x$

また　FC=BC=13

△CDF において，三平方の定理により

$CF^2=CD^2+DF^2$

$13^2=5^2+DF^2$

$DF^2=144$

DF>0 より　DF=12

$AF=13-12=1$

△AEF において，三平方の定理により

$EF^2=AE^2+AF^2$

$(5-x)^2=x^2+1^2$

$25-10x+x^2=x^2+1$

$-10x=-24$

$x=\frac{12}{5}$

よって　AE=$\frac{12}{5}$

10

解説

(1) 右の図のように，接点 D，E，F を定め，AE=a cm，CE=b cm とおくと

$AB=(a+3)$ cm

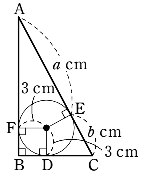
$BC=(b+3)$ cm

△ABC の周の長さについて

$(a+3)+(b+3)+(a+b)=40$

$a+b=17$

よって，斜辺の長さは　17 cm　答



(2) (1) の結果から　$b=17-a$

このとき　AB=$a+3$，BC=$b+3=20-a$，CA=17

三平方の定理により　$(a+3)^2+(20-a)^2=17^2$

整理して　$a^2-17a+60=0$

$(a-5)(a-12)=0$

よって，$a=5$，12 から　$(a,\ b)=(5,\ 12)$，$(12,\ 5)$

$(a,\ b)=(5,\ 12)$ のとき　AB=8 cm，BC=15 cm

これは AB>BC を満たさず適さない。

$(a,\ b)=(12,\ 5)$ のとき　AB=15 cm，BC=8 cm

これは AB>BC を満たす。

したがって，　AB=15 cm，BC=8 cm

11

解説

右の図のように，円の中心を O，O′とし，線分 OO′を斜辺とする直角三角形 OAO′をつくる。

円の半径を r とすると

$OO'=2r$

$OA=6-2r$

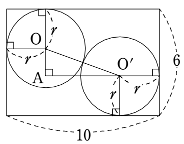
$AO'=10-2r$

よって，△OAO′において

$36-24r+4r^2+100-40r+4r^2=4r^2$

$4r^2-64r+136=0$

$r^2-16r+34=0$



$$r=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\times1\times34}}{2\times1}$$

$$=8\pm\sqrt{30}$$

$0<r<3$ であるから，$r=8-\sqrt{30}$ は問題に適するが，$r=8+\sqrt{30}$ は問題に適さない。

したがって，求める円の半径は　$8-\sqrt{30}$

12

解説

右の図のような展開図の一部において，PQ+QR の長さが最小となるのは，3 点 P，Q，R が一直線上にあるとき，すなわち線分 BF と PR の交点の位置に点 Q があるときである。

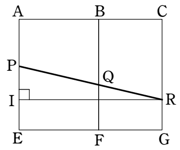
R から AE に引いた垂線の足を I とすると

$PI=5-3=2$ (cm)，$RI=5+4=9$ (cm)

したがって，直角三角形 RPI において

$RP=\sqrt{2^2+9^2}=\sqrt{85}$ (cm)

よって，求める PQ+QR の長さは　$\sqrt{85}$ cm



13

解説

右の図のように，球の底面との接点を C，母線 AB における接点を D とする。

直角三角形 ABC において

$AB=\sqrt{12^2+5^2}=13$ (cm)

△AOD∽△ABC であるから

AO：AB=OD：BC

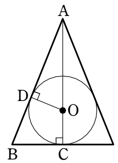
球 O の半径を x cm とすると

$(12-x):13=x:5$

$5(12-x)=13x$

$x=\frac{10}{3}$

よって，球 O の半径は　$\frac{10}{3}$ cm



14

解説

四角形 MNFH は MH=NF であるから，等脚台形である。

$MN=CN\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$HF=GF\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

M，N から辺 HF にそれぞれ垂線 MI，NJ を引くと

$IJ=MN=2\sqrt{2}$

$HI=FJ=(HF-IJ)\div2=\sqrt{2}$

直角三角形 MHI において

$MI^2=MH^2-(\sqrt{2})^2=MH^2-2$ ……①

ここで，直角三角形 DHM において　$MH^2=2^2+4^2=20$

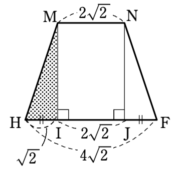
① に代入して　$MI^2=20-2=18$

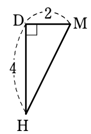
MI>0 であるから　$MI=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

よって，台形 MNFH の面積は

$(MN+HF)\times MI\div2=(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times3\sqrt{2}\div2$

$=18$ (cm^2)　答

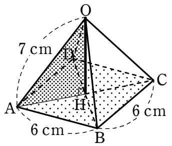




15

解説

底面の対角線の交点を H とすると，OH と面 ABCD は垂直になるから，線分 OH の長さは，正四角錐の高さである。



底面 ABCD は正方形であるから

$AC=\sqrt{2}AB=6\sqrt{2}$

よって　$AH=\frac{1}{2}AC=3\sqrt{2}$

△OAH は直角三角形であるから　$(3\sqrt{2})^2+OH^2=7^2$

$OH^2=31$

$OH>0$ であるから　$OH=\sqrt{31}$

よって，求める体積は　$\frac{1}{3}\times 6^2\times\sqrt{31}=12\sqrt{31}$　　答 $12\sqrt{31}$ cm^3

16

解説

正四面体の頂点から底面に引いた垂線は，底面の正三角形の重心を通る。O から底面 ABC に引いた垂線を OH，AH と BC の交点を M とする。

△ABC は正三角形で，M は辺 BC の中点であるから

$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$ (cm)

H は △ABC の重心で，AH：HM＝2：1 であるから

$AH=\frac{2}{3}AM=2\sqrt{3}$ (cm)

直角三角形 OAH において

$OH^2=OA^2-AH^2=6^2-(2\sqrt{3})^2=24$

$OH>0$ であるから　$OH=2\sqrt{6}$ cm

よって，正四面体 OABC の体積は

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}\right)\times 2\sqrt{6}=18\sqrt{2}$ (cm^3)

1

解説

(1)　$3^2+2^2=x^2$

$x^2=13$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{13}$

(2)　$(2\sqrt{3})^2+4^2=x^2$

$x^2=28$

$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{7}$

(3)　$6^2+x^2=10^2$

$x^2=64$

$x>0$ であるから　$x=8$

(4)　$(\sqrt{5})^2+x^2=3^2$

$x^2=4$

$x>0$ であるから　$x=2$

(5)　$x^2+6^2=8^2$

$x^2=28$

$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{7}$

(6)　$(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2=x^2$

$x^2=25$

$x>0$ であるから　$x=5$

(7)　AB：AC＝1：$\sqrt{2}$ であるから

$6:x=1:\sqrt{2}$

よって　$x=6\sqrt{2}$

(8)　AC：BC＝1：$\sqrt{2}$ であるから

$x:4=1:\sqrt{2}$

$\sqrt{2}x=4$

よって　$x=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

(9)　AC：BC＝1：$\sqrt{3}$ であるから

$\sqrt{6}:x=1:\sqrt{3}$

$x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

(10)　BC：AC＝2：$\sqrt{3}$ であるから

$x:9=2:\sqrt{3}$

$\sqrt{3}x=18$

よって　$x=\frac{18}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}$

(11)　△BCD において

$BC^2+1^2=(2\sqrt{2})^2$

$BC^2=7$

$BC>0$ であるから　$BC=\sqrt{7}$

△ABC において

$(\sqrt{7})^2+3^2=x^2$

$x^2=16$

$x>0$ であるから　$x=4$

(12)　A から辺 BC にひいた垂線を AH とする。

△ABH において

AB：AH＝2：$\sqrt{3}$ から　$AH=4\sqrt{3}$ cm

よって，△AHC において

AH：AC＝1：$\sqrt{2}$ から　$x=4\sqrt{6}$

(13)　A から直線 BC にひいた垂線を AH とする。

このとき，△AHB において，∠ABH＝60°，∠BAH＝30° である。

よって，HB：AB＝1：2 から　HB＝6 cm

HB：AH＝1：$\sqrt{3}$ から　$AH=6\sqrt{3}$ cm

△AHC は直角二等辺三角形になるから

$CH=AH=6\sqrt{3}$ cm

したがって　$x=6\sqrt{3}-6$

(14)　AB：AH＝2：$\sqrt{3}$ であるから

$10:x=2:\sqrt{3}$

$2x=10\sqrt{3}$

よって　$x=5\sqrt{3}$

(15)　H は弦 AB の中点になる。

直角三角形 AOH において

$AH^2+4^2=6^2$

$AH^2=20$

$AH>0$ であるから　$AH=2\sqrt{5}$

よって　$x=2\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

(16)　H は弦 AB の中点になるから

BH＝6 cm

直角三角形 BOH において

$6^2+x^2=7^2$

$x^2=13$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{13}$

(17)　円の接線は，接点を通る半径に垂直である。

よって，直角三角形 AOP において

$x^2+2^2=8^2$

$x^2=60$

$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{15}$

(18)　円の接線は，接点を通る半径に垂直である。

よって，直角三角形 AOP において

$6^2+x^2=(2\sqrt{15})^2$

$x^2=24$

$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{6}$

2

解説

$$a^2=(m-n)^2=m^2-2mn+n^2$$
$$b^2=(2\sqrt{mn})^2=4mn$$
$$c^2=(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$$

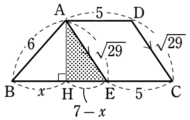
よって　$a^2+b^2=(m^2-2mn+n^2)+4mn$
$=m^2+2mn+n^2$
$=c^2$

したがって，$a^2+b^2=c^2$ であるから，長さ c の辺を斜辺とする直角三角形である。

3

解説

頂点 A から辺 BC へ垂線 AH を引く。
また，頂点 A を通り，辺 DC に平行な直線と辺 BC の交点を E とすると，四角形 AECD は平行四辺形である。



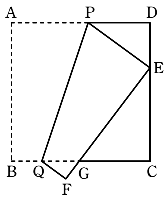
よって　$BE=12-5=7$
$BH=x$ cm とおくと　$HE=BE-BH=7-x$
直角三角形 ABH において　$x^2+AH^2=6^2$
よって　$AH^2=36-x^2$　……①
直角三角形 AEH において　$(7-x)^2+AH^2=(\sqrt{29})^2$
よって　$AH^2=29-(7-x)^2$　……②
①，② から　$36-x^2=29-(7-x)^2$
よって　$14x=56$
したがって　$x=4$
① に代入して　$AH^2=36-4^2=20$
$AH>0$ であるから　$AH=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
よって，台形 ABCD の面積は
$(5+12)\times AH\div 2=17\times 2\sqrt{5}\div 2=17\sqrt{5}$ (cm^2)

4

解説

(1)　$AP=x$ cm とすると　$PD=9-x$ (cm)
また　$PE=AP=x$ (cm)
△PED において　$(9-x)^2+3^2=x^2$
これを解いて　$x=5$
よって　$AP=5$ cm

(2)　正方形 ABCD を折り返したとき，B が移った点を F とし，EF と QC の交点を G とする。



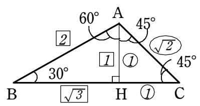
△PED と △EGC において
$\angle PDE=\angle ECG=90°$　……①
△PED において
$\angle DPE+\angle PED=90°$　……②
$\angle PEG=90°$ であるから
$\angle CEG+\angle PED=90°$　……③
②，③ から　$\angle DPE=\angle CEG$　……④
①，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから
△PED ∽ △EGC
したがって　EG：GC：CE＝5：3：4
$CE=9-3=6$ (cm) であるから　$EG=6\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{15}{2}$ (cm)
$GC=6\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{2}$ (cm)
$EF=9$ cm であるから　$GF=9-\dfrac{15}{2}=\dfrac{3}{2}$ (cm)
ここで，$BQ=y$ cm とすると　$QF=y$ cm，　$QG=9-\left(y+\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{9}{2}-y$ (cm)
△QFG において　$y^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{9}{2}-y\right)^2$　　これを解いて　$y=2$
よって　$BQ=2$ cm

別解　Q と E を結ぶ。
$BQ=y$ cm とすると
$QF=BQ=y$ (cm)
$CQ=9-y$ (cm)
また　$EF=AB=9$ (cm)
$EC=9-DE=6$ (cm)
△EFQ において　$y^2+9^2=QE^2$　……①
△ECQ において　$(9-y)^2+6^2=QE^2$　……②
①，② から　$y^2+9^2=(9-y)^2+6^2$
これを解いて　$y=2$
よって　$BQ=2$ cm

5

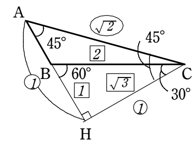
解説

(1)　$\angle C=180°-(30°+105°)=45°$
頂点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと
$\angle BAH=60°$，　$\angle CAH=45°$



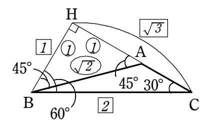
直角三角形 CHA において，
AH：CH：AC＝1：1：$\sqrt{2}$ であるから
$AH=CH=4\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$
直角三角形 ABH において，AH：AB：BH＝1：2：$\sqrt{3}$ であるから
$AB=2AH=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ (cm)
$BH=\sqrt{3}AH=\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{6}$
よって　$BC=BH+CH=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$ (cm)
また　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times BC\times AH=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})\times 2\sqrt{2}$
$=4\sqrt{3}+4$ (cm^2)

(2)　$\angle A=180°-(15°+120°)=45°$
頂点 C から線分 AB の延長に垂線 CH を引くと
$\angle CBH=60°$
$\angle ACH=30°+15°=45°$



直角三角形 ACH において，
AH：CH：AC＝1：1：$\sqrt{2}$ であるから
$AH=CH=6\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$
直角三角形 BCH において，BH：BC：CH＝1：2：$\sqrt{3}$ であるから
$BC=\dfrac{2}{\sqrt{3}}CH=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times 3\sqrt{2}=2\sqrt{6}$ (cm)
$BH=\dfrac{1}{\sqrt{3}}CH=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times 3\sqrt{2}=\sqrt{6}$
よって　$AB=AH-BH=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ (cm)
また　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times AB\times CH=\dfrac{1}{2}\times(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\times 3\sqrt{2}$
$=9-3\sqrt{3}$ (cm^2)

(3)　$\angle C=180°-(15°+135°)=30°$
頂点 B から線分 CA の延長に垂線 BH を引くと
$\angle CBH=60°$，　$\angle ABH=45°$

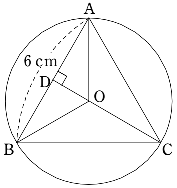


直角三角形 HBA において，
HB：HA：AB＝1：1：$\sqrt{2}$ であるから
$AB=\sqrt{2}HB$　……①
また，HB＝HA であるから，この長さを x cm とする。
直角三角形 HBC において，BH：BC：CH＝1：2：$\sqrt{3}$ であるから
$BC=2BH$　……②
また　BH：CH＝1：$\sqrt{3}$
すなわち　$x:(x+2)=1:\sqrt{3}$
よって　$\sqrt{3}x=x+2$
したがって　$(\sqrt{3}-1)x=2$
よって　$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$
② から　$BC=2(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}+2$ (cm)
① から　$AB=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (cm)
したがって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times AC\times BH=\dfrac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{3}+1)$
$=\sqrt{3}+1$ (cm^2)

$\boxed{6}$［2016 鎌倉学園］

解説

円の中心を O，内接する三角形を △ABC とする。
O から AB へ垂線をひき，AB との交点を D とする。
△OAD は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であるから



$$\mathrm{OD}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AD}=\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

$$\mathrm{OC}=\mathrm{OA}=2\mathrm{OD}=2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

よって，円の半径は　$2\sqrt{3}$ cm

正三角形の高さ CD は　$3\sqrt{3}$ cm

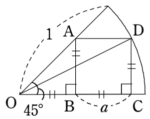
したがって，求める面積は

$$\pi\times(2\sqrt{3})^2-\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=12\pi-9\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$$

$\boxed{7}$［2014 大阪星光学院］

解説

右の図のように，正方形を ABCD，おうぎ形の中心を O，
正方形の 1 辺の長さを a とする。



△OAB は直角二等辺三角形であるから

$$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=a$$

△OCD において，三平方の定理により

$$(2a)^2+a^2=1^2$$

$$5a^2=1$$

$$a^2=\frac{1}{5}$$

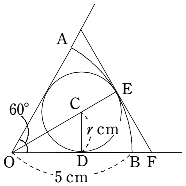
$a>0$ であるから　$a=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

よって，求める長さは　$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{8}$［2014 専修大学松戸］

解説

円の中心を C，円と OB，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ との接点をそれぞれ D，E とし，円 C の半径を r cm とする。



OA，OB は円 C の接線であるから

$$\angle\mathrm{CDO}=90°$$

$$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{AOC}=30°$$

よって，△COD は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であるから

$$\mathrm{OC}=2r\ \mathrm{cm}$$

$$\mathrm{OE}=\mathrm{OC}+\mathrm{CE}$$

$$=2r+r$$

$$=3r$$

よって　　$3r=5$

$$r=\frac{5}{3}\ (\mathrm{cm})$$

したがって，円の半径は　$\dfrac{5}{3}$ cm

$\boxed{9}$

解説

IJ＝AB であるから　　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{EI}^2=\mathrm{IJ}^2+\mathrm{EI}^2$

∠EIJ＝90° であるから　$\mathrm{IJ}^2+\mathrm{EI}^2=\mathrm{EJ}^2$

JB＝IA であるから　　$\mathrm{BE}^2+\mathrm{IA}^2=\mathrm{BE}^2+\mathrm{JB}^2$

∠JBE＝90° であるから　$\mathrm{BE}^2+\mathrm{JB}^2=\mathrm{EJ}^2$

正十角形 ABCDEFGHIJ の外接円の半径は 1 であるから

$$\mathrm{EJ}=1\times2=2$$

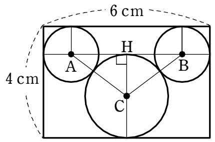
したがって　　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BE}^2+\mathrm{EI}^2+\mathrm{IA}^2=\mathrm{EJ}^2+\mathrm{EJ}^2=2\times2^2=8$

$\boxed{10}$

解説

$$\mathrm{AB}=6-(1+1)=4\ (\mathrm{cm})$$

C から線分 AB に引いた垂線の足を H とする。
△ACB は CA＝CB の二等辺三角形であるから，
H は辺 AB の中点で



$$\mathrm{AH}=4\times\frac{1}{2}=2\ (\mathrm{cm})$$

円 C の半径を r cm とすると

$$\mathrm{AC}=1+r\ (\mathrm{cm})$$

$$\mathrm{CH}=4-(1+r)=3-r\ (\mathrm{cm})$$

△ACH において

$$2^2+(3-r)^2=(1+r)^2$$

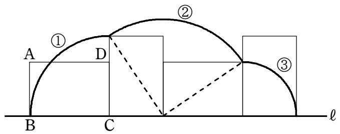
これを解いて　　$r=\dfrac{3}{2}$

よって，円 C の半径は　$\dfrac{3}{2}$ cm

$\boxed{11}$

解説

(1)　B の軌跡は，次の図のようになる。



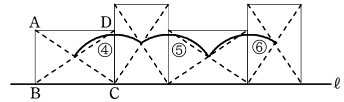
長方形の対角線の長さは

$$\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}\ (\mathrm{cm})$$

① の部分は半径 6 cm，中心角 90° の扇形の弧，
② の部分は半径 $2\sqrt{13}$ cm，中心角 90° の扇形の弧，
③ の部分は半径 4 cm，中心角 90° の扇形の弧である。
よって，求める軌跡の長さは

$$2\pi\times6\times\frac{90}{360}+2\pi\times2\sqrt{13}\times\frac{90}{360}+2\pi\times4\times\frac{90}{360}=(5+\sqrt{13})\pi\ (\mathrm{cm})$$

(2)　O の軌跡は，次の図のようになる。



④，⑤，⑥ の部分は，それぞれ半径 $\sqrt{13}$ cm，中心角 90° の扇形の弧であるから，
求める軌跡の長さは　$\left(2\pi\times\sqrt{13}\times\dfrac{90}{360}\right)\times3=\dfrac{3\sqrt{13}}{2}\pi\ (\mathrm{cm})$

$\boxed{12}$［2014 花園］

解説

(1)　$\mathrm{O_1O_2}=1+3=4$

点 $\mathrm{O_1}$ から線分 $\mathrm{O_2B}$ に垂線をひき，線分 $\mathrm{O_2B}$ との交点を E とする。
四角形 $\mathrm{ABEO_1}$ は長方形となり

$$\mathrm{BE}=\mathrm{AO_1}=1$$

よって　　$\mathrm{EO_2}=3-1=2$

したがって，$\triangle\mathrm{O_1O_2E}$ は 3 辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形となるから

$$\angle\mathrm{O_1O_2B}=60°$$

(2)　$\mathrm{O_1E}=\sqrt{3}\,\mathrm{EO_2}=2\sqrt{3}$ であるから

$$\mathrm{AB}=2\sqrt{3}$$

(3)　$\angle\mathrm{AO_1O_2}=\angle\mathrm{DO_1O_2}=90°+30°=120°$ であるから，$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ の中心角は

$$360°-120°\times2=120°$$

$\angle\mathrm{BO_2O_1}=\angle\mathrm{CO_2O_1}=60°$ であるから，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の中心角は

$$360°-60°\times2=240°$$

よって，求めるひもの長さは

$$2\sqrt{3}\times2+2\pi\times1\times\frac{120}{360}+2\pi\times3\times\frac{240}{360}=4\sqrt{3}+\frac{14}{3}\pi$$

(4)　台形 $\mathrm{ABO_2O_1}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\times(1+3)\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

よって，求める面積は

$$4\sqrt{3}\times2+\pi\times1^2\times\frac{120}{360}+\pi\times3^2\times\frac{240}{360}=8\sqrt{3}+\frac{19}{3}\pi$$

$\boxed{13}$

解説

$\triangle ABC$ において　$AC=\sqrt{4^2+3^2}=5\,(\mathrm{cm})$

よって，$AE=5\,\mathrm{cm}$ であるから

$$DE=5-3=2\,(\mathrm{cm})$$

$\triangle DCE$ において　$CE=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}\,(\mathrm{cm})$

線分 AC は直径であるから　$\angle APC=90°$

$\triangle ACE$ は，$AC=AE$ の二等辺三角形であるから，P は辺 CE の中点で

$$CP=2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\sqrt{5}\,(\mathrm{cm})$$

$\triangle ACP$ において　$AP=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}\,(\mathrm{cm})$

また，$\angle DAQ=\angle PAE$，$\angle ADQ=\angle APE$ より，$\triangle AQD\backsim\triangle AEP$ であるから

$$AQ:AE=AD:AP$$

$$AQ:5=3:2\sqrt{5}$$

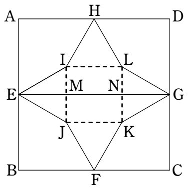
よって　$AQ=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{cm}$

$\boxed{14}$［2016 青雲］

解説

右の図のように，正四角錐の底面を IJKL，EG と IJ，LK との交点をそれぞれ M，N とする。

$AD=3\,\mathrm{cm}$，$MN=1\,\mathrm{cm}$ より，$EM=NG=1\,\mathrm{cm}$ である。



展開図を組み立てた正四角錐の高さを EO とする。

$\triangle EMO$ において，三平方の定理により

$$EO^2=EM^2-\left(\frac{1}{2}MN\right)^2$$

$$EO^2=1-\frac{1}{4}$$

$$EO^2=\frac{3}{4}$$

$EO>0$ より　$EO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,(\mathrm{cm})$

よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\,(\mathrm{cm}^3)$$

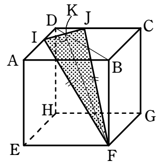
$\boxed{15}$

解説

$\triangle FIJ$ は $FI=FJ$ の二等辺三角形である。

また，直角三角形 DIJ において，$DI:DJ:IJ=1:1:\sqrt{2}$ であるから

$$IJ=DI\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}\qquad\cdots\cdots①$$



F から辺 IJ に垂線 FK を引くと，K は線分 BD，IJ の交点である。

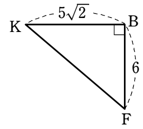
直角三角形 BFK において

$$FK^2=BF^2+BK^2=6^2+BK^2\qquad\cdots\cdots②$$

ここで　$BK=BD-DK$

$$=AD\times\sqrt{2}-DI\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=6\sqrt{2}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$



①，② から　$FK^2=36+(5\sqrt{2})^2=86$

$FK>0$ であるから　$FK=\sqrt{86}$

よって，$\triangle IJF$ の面積は

$$\frac{1}{2}\times IJ\times FK=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{86}=2\sqrt{43}\,(\mathrm{cm}^2)$$

$\boxed{16}$

解説

(1)　四面体 DBEG は直方体 ABCD－EFGH から 4 つの四面体 ABDE，BCDG，BEFG，DEGH を取り除いたものである。

直方体の体積は　$3\times3\times4=36$

4 つの四面体の体積はすべて　$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\times3\right)\times4=6$

したがって，四面体 DBEG の体積は　$36-4\times6=12\,(\mathrm{cm}^3)$

(2)　直角三角形 ABD，ABE，ADE において

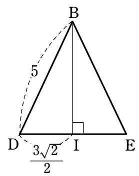
$$BD=\sqrt{3^2+4^2}=5,\qquad BE=\sqrt{3^2+4^2}=5,\qquad DE=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

よって，$\triangle BDE$ は $BD=BE$ の二等辺三角形である。

頂点 B から辺 DE に垂線 BI を引く。

直角三角形 BDI において

$$BI=\sqrt{5^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{82}}{2}$$



よって，$\triangle BDE$ の面積は

$$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{82}}{2}=\frac{3\sqrt{41}}{2}\,(\mathrm{cm}^2)$$

点 G から $\triangle BDE$ に引いた垂線を GJ とすると，四面体 DBEG の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle BDE\times GJ=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{41}}{2}\times GJ=\frac{\sqrt{41}}{2}GJ$$

これと (1) から　$12=\dfrac{\sqrt{41}}{2}GJ$

よって　$GJ=\dfrac{24\sqrt{41}}{41}$　　答　$\dfrac{24\sqrt{41}}{41}\,\mathrm{cm}$

$\boxed{17}$［2016 函館ラ・サール］

解説

(1)　$\triangle ABD$ において

$$AB^2+AD^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2=4$$

$$BD^2=2^2=4$$

よって，$AB^2+AD^2=BD^2$ が成り立つから

$$\angle BAD=90°$$

(2)　$\triangle ABC$ において，$AB^2+AC^2=BC^2$ が成り立つから

$$\angle BAC=90°$$

さらに，$\triangle ACD$ において，$AC^2+AD^2=CD^2$ が成り立つから

$$\angle CAD=90°$$

したがって，求める立体の体積は

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\,(\mathrm{cm}^3)$$

(3)　$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2)$

(4)　求める高さを $h\,\mathrm{cm}$ とすると

$$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times h=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$h=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって，求める高さは　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathrm{cm}$

18

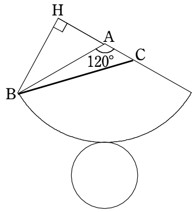
(解説)

(1)　母線 AB の長さは

$$AB=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+2^2}=6$$

よって，展開図における側面の扇形の中心角の大きさは　$360°\times\frac{2\pi\times2}{2\pi\times6}=120°$

よって，右の展開図における線分 BC に糸が一致するとき，糸の長さは最も短くなる。



図のように，B から CA の延長に引いた垂線の足を H とすると

$$AH=\frac{1}{2}AB=3$$

$$BH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=3\sqrt{3}$$

したがって，直角三角形 BCH において

$$BC=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+(3+2)^2}=2\sqrt{13}$$

よって，求める糸の長さは　$2\sqrt{13}$

(2)　条件から，線分 BC 上の点 D について，AD⊥BC となる。

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times2\times3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{2}\times BC\times AD=3\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times AD=3\sqrt{3}$$

これを解いて　　$AD=\frac{3\sqrt{39}}{13}$

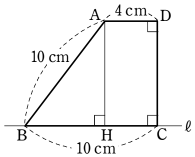
19

(解説)

(1)　A から BC に引いた垂線の足を H とする。

直角三角形 ABH において

$$AH=\sqrt{10^2-6^2}=8\ (\text{cm})$$



1 回転させてできる立体は，底面の半径 8 cm，高さ 4 cm の円柱と，底面の半径 8 cm，高さ 6 cm の円錐を組み合わせたものになる。

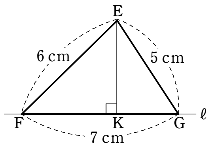
よって，求める体積は

$$\pi\times8^2\times4+\frac{1}{3}\times\pi\times8^2\times6=384\pi\ (\text{cm}^3)$$

(2)　E から FG に引いた垂線の足を K とする。

FK $=x$ cm とすると，直角三角形 EFK において

$$EK^2=6^2-x^2$$



直角三角形 EGK において

$$EK^2=5^2-(7-x)^2$$

よって　　$6^2-x^2=5^2-(7-x)^2$

これを解いて　　$x=\frac{30}{7}$

したがって　$EK=\sqrt{6^2-\left(\frac{30}{7}\right)^2}=\frac{12\sqrt{6}}{7}$ (cm)

1 回転させてできる立体は，底面の半径 EK，高さ FK の円錐と，底面の半径 EK，高さ GK の円錐を組み合わせたものになる。

よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\pi\times EK^2\times FK+\frac{1}{3}\times\pi\times EK^2\times GK=\frac{1}{3}\times\pi\times EK^2\times(FK+GK)$$

$$=\frac{1}{3}\times\pi\times EK^2\times FG=\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{12\sqrt{6}}{7}\right)^2\times7$$

$$=\frac{288}{7}\pi\ (\text{cm}^3)$$

20 [2014 福岡大学附属大濠]

(解説)

(1)　正方形の 1 辺の長さと対角線の長さの比は $1:\sqrt{2}$ であるから，求める長さは

$$6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}\ (\text{cm})$$

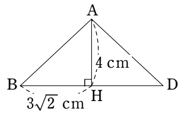
(2)　$\frac{1}{3}\times(6\times6)\times4=48\ (\text{cm}^3)$

(3)　底面 BCDE の対角線 BD の中点を H とする。

$$BH=\frac{1}{2}BD$$

$$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}$$

$$=3\sqrt{2}\ (\text{cm})$$



△ABH において，三平方の定理により

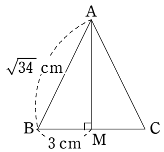
$$AB=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+4^2}$$

$$=\sqrt{34}\ (\text{cm})$$

△ABM において，三平方の定理により

$$AM=\sqrt{(\sqrt{34})^2-3^2}$$

$$=5\ (\text{cm})$$

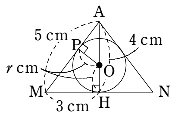


(4)　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times5=15\ (\text{cm}^2)$

よって，求める表面積は

$$6\times6+15\times4=96\ (\text{cm}^2)$$

(5)　辺 DE の中点を N，球 O と AM の交点を P とし，面 AMN について考える。



△APO と △AHM において

$$\angle APO=\angle AHM=90°$$

共通であるから

$$\angle PAO=\angle HAM$$

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle APO\backsim\triangle AHM$$

よって　　$AO:AM=PO:HM$

球 O の半径を r cm とすると

$$(4-r):5=r:3$$

$$3(4-r)=5r$$

$$12-3r=5r$$

$$8r=12$$

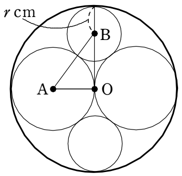
$$r=\frac{3}{2}$$

したがって，球 O の半径は $\frac{3}{2}$ cm

1

解説

中円２個の接点をＯとすると，Ｏは大円の中心である。
右の図のように，中円の中心をA，小円の中心をBとし，小円の半径を r cm とする。



$$OA=10\times\frac{1}{2}=5\ (\mathrm{cm})$$
$$OB=10-r\ (\mathrm{cm})$$
$$AB=5+r\ (\mathrm{cm})$$

$\angle AOB=90^\circ$ であるから，△AOB において

$$5^2+(10-r)^2=(5+r)^2$$

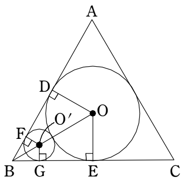
これを解いて　$r=\frac{10}{3}$

よって，小円の半径は　$\frac{10}{3}$ cm

2 [2014 開明]

解説

右の図のように，正三角形ABCに内接する大円の中心をO，小円の中心をO′とする。また，辺ABと２つの円O，O′との接点をD，F，辺BCと２つの円O，O′との交点をE，Gとする。



円Oの半径を r とすると，△ABCの面積について

$$\frac{1}{2}\times6\times r\times3=\frac{1}{2}\times6\times\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$r=\sqrt{3}$$

△OBD≡△OBE より，$\angle OBD=\angle OBE=30^\circ$ であるから

$$OB=2OE=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

円O′の半径を r' とする。
△O′BF≡△O′BG より，$\angle O'BF=\angle O'BG=30^\circ$ であるから，３点B，O′，Oは一直線上にある。
$BO'=2O'G=2r'$ であるから

$$2r'+r'+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$
$$3r'=\sqrt{3}$$
$$r'=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

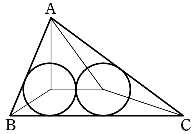
よって，小円の半径は　$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3

解説

(1)　Aから辺BCに引いた垂線の足をHとする。
$BH=x$ とすると
△ABH において　$AH^2=13^2-x^2$
△ACH において　$AH^2=20^2-(21-x)^2$
よって　$13^2-x^2=20^2-(21-x)^2$
これを解いて　$x=5$
このとき　$AH=\sqrt{13^2-5^2}=12$
したがって，求める垂線の長さは　12

(2)　求める円の半径を r とする。
△ABCを右の図のように分けて考えると，
△ABCの面積について



$$\frac{1}{2}\times13\times r+\frac{1}{2}\times(2r+21)\times r+\frac{1}{2}\times20\times r+\frac{1}{2}\times2r\times(12-r)=\frac{1}{2}\times21\times12$$

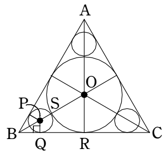
これを解いて　$r=\frac{42}{13}$

よって，円の半径は　$\frac{42}{13}$

4 [2016 久留米大学附設]

解説

右の図のように，円の中心をO，Pとし，O，PからBCに垂線OR，PQをひく。
このとき，A，O，Rは１つの直線上にあり，△ARBと△ARCはARについて対称である。



よって　$BR=CR=6\div2=3$ (cm)
△OBRは３つの角が30°，60°，90°の直角三角形であるから

$$OR=3\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

また　$OB=2OR=2\sqrt{3}$ cm
△PBQは３つの角が30°，60°，90°の直角三角形であるから，$PQ=x$ cm とすると，$BP=2x$ cm と表される。
図において　$OB=OS+SP+PB$

$$2\sqrt{3}=\sqrt{3}+x+2x$$
$$3x=\sqrt{3}$$
$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

円Oの周の長さは　$2\pi\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$ (cm)
円Pの周の長さは　$2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (cm)
３つの小さい円の半径はすべて等しいから，求める長さの和は

$$2\sqrt{3}\pi+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\times3=4\sqrt{3}\pi\ (\mathrm{cm})$$

5

解説

(1)　Bの y 座標は　$y=\frac{2}{3}\times3=2$
Bは関数 $y=ax^2$ のグラフ上の点であるから，$x=3$，$y=2$ を $y=ax^2$ に代入して

$$2=a\times3^2$$

よって　$a=\frac{2}{9}$

(2)　Aの y 座標は，$y=\frac{2}{9}\times(-3)^2=2$ であるから　A$(-3,\ 2)$
Cの y 座標は，$y=\frac{2}{9}\times6^2=8$ であるから　C$(6,\ 8)$
よって，直線ACの傾きは　$\frac{8-2}{6-(-3)}=\frac{2}{3}$
したがって，直線ACとOBの傾きは等しいから　AC∥OB
よって，四角形OBCAは台形である。
台形OBCAの高さを h とすると，h は辺ACを底辺とみたときの△ABCの高さに等しい。
$AC=\sqrt{\{6-(-3)\}^2+(8-2)^2}=3\sqrt{13}$ であるから，△ABCの面積は

$$\frac{1}{2}\times AC\times h=\frac{3\sqrt{13}}{2}h\quad\cdots\cdots①$$

一方，点Bの座標は $(3,\ 2)$ であるから，辺ABを底辺とみたときの△ABCの高さは
(Cの y 座標)−(Bの y 座標)$=8-2=6$
よって，△ABCの面積は

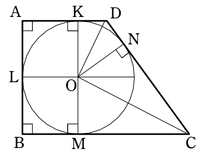
$$\frac{1}{2}\times AB\times6=\frac{1}{2}\times(3+3)\times6=18\quad\cdots\cdots②$$

①，②から　$\frac{3\sqrt{13}}{2}h=18$
これを解いて　$h=\frac{12\sqrt{13}}{13}$
したがって，台形OBCAの高さは　$\frac{12\sqrt{13}}{13}$

6

解説

内接円の中心をOとし，内接円Oと辺DA，AB，BC，CDとの接点を，それぞれK，L，M，Nとする。



AD∥BCより，$KM=AB=8$ であるから，円Oの半径は4である。
よって，$AK=4$ であるから

$$DK=6-4=2$$

△ODKにおいて

$$OD^2=2^2+4^2=20$$

$CN=x$ とおくと，△OCNにおいて

$$OC^2=x^2+4^2$$

また，$DN=DK=2$ であるから　$CD=x+2$
$\angle KOD=\angle DON$，$\angle NOC=\angle COM$，$\angle KOM=180^\circ$ であるから　$\angle COD=90^\circ$
したがって，△OCDにおいて

$$20+(x^2+4^2)=(x+2)^2$$

これを解いて　$x=8$
$CM=CN=8$ であるから　$BC=4+8=12$
よって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\times(6+12)\times8-\pi\times4^2=72-16\pi$$

$\boxed{7}$

(解説)

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角より

$$\angle ACB=\angle ADB=60^\circ$$

$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角より

$$\angle ACD=\angle ABD=60^\circ$$

よって，$\angle ACB=\angle ACD$ であるから

$$BE:ED=BC:CD=1:2$$

したがって　$BE=\frac{1}{3}BD=1\,(\text{cm})$

A から辺 BD に引いた垂線の足を H とすると

$$AH=AB\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,(\text{cm})$$

また，$BH=\frac{3}{2}$ cm であるから

$$EH=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\,(\text{cm})$$

よって，△AEH において

$$AE=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{7}\,(\text{cm})$$

$\boxed{8}$ [2014 筑紫女学園]

(解説)

(1)　おうぎ形 MEF の半径は $MN=AB=2$，中心角は 120° であるから，面積は

$$\pi\times2^2\times\frac{120}{360}=\frac{4}{3}\pi$$

(2)　M，N はそれぞれ辺 AD，BC の中点であるから

$$NM/\!/AB,\ \angle BNM=\frac{1}{2}\angle BNC=\frac{1}{2}a^\circ$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ABN=\angle BNM=\frac{1}{2}a^\circ$$

(3)　$NM/\!/AB$ より　$\angle BEM=\angle ENM$

$$=\frac{1}{2}\angle EMF$$

$$=60^\circ$$

よって，△BEM は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であるから

$$BE=\frac{1}{2}EM=\frac{1}{2}MN=1$$

したがって　$EP:PM=BE:MN=1:2$

(4)　(3) から　$BM=\sqrt{3}BE=\sqrt{3}$

$BP:PN=BE:MN=1:2$

よって　$\triangle MNP=\frac{2}{3}\triangle BMN$

$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle BEP=\frac{1}{3}\triangle BME$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

よって，求める面積の和は

$$2\times(\triangle BEP+\triangle MNP)=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$\boxed{9}$ [2014 専修大学松戸]

(解説)

(1)　円の接線の性質から

$DE=DA=3$ (cm)

$CE=CB=6$ (cm)

よって　$CD=3+6=9$ (cm)

(2)　半円の半径を r cm とする。

D から BC に垂線 DH をひくと　$DH=AB=2r$ cm

△CDH において，三平方の定理により

$$DH=\sqrt{CD^2-CH^2}$$

$$=\sqrt{81-(6-3)^2}$$

$$=6\sqrt{2}\ (\text{cm})$$

よって　$2r=6\sqrt{2}$

$r=3\sqrt{2}$

したがって，半円の半径は　$3\sqrt{2}$ cm

(3)　BC，CD は，半円 O の接線であるから

$$\angle OBC=\angle OEC=90^\circ$$

よって，4 点 O，B，C，E は OC を直径とする円周上にある。

△OBC において，三平方の定理により

$$OC=\sqrt{OB^2+BC^2}$$

$$=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+6^2}$$

$$=3\sqrt{6}\ (\text{cm})$$

したがって，求める円の半径は　$\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm

$\boxed{10}$ [2014 渋谷教育学園幕張]

(解説)

(1)　点 R が x 軸上にあるとき，PQ と x 軸の頂点を H とすると　$PH=QH$

よって　$x^2=-(x-6)$

$x^2+x-6=0$

$(x-2)(x+3)=0$

$x=2,\ -3$

ここで，△PHR は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であるから

$PH:HR=1:\sqrt{3}$

$HR=\sqrt{3}PH$

$x=2$ のとき，$PH=4$ であるから　$HR=\sqrt{3}\times4=4\sqrt{3}$

よって，点 R の座標は　$(2+4\sqrt{3},\ 0)$

$x=-3$ のとき，$PH=9$ であるから　$HR=\sqrt{3}\times9=9\sqrt{3}$

よって，点 R の座標は　$(-3+9\sqrt{3},\ 0)$

(2)　点 R から PQ に下ろした垂線と PQ との交点を I とすると，△PHR は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であるから

$PI:IR=1:\sqrt{3}$

$PQ=t$ とすると　$PI=\frac{1}{2}t$

$$\frac{1}{2}t:IR=1:\sqrt{3}$$

$$IR=\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

正三角形 PQR の面積が $9\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{2}\times t\times\frac{\sqrt{3}}{2}t=9\sqrt{3}$$

$$t^2=36$$

$t>0$ であるから　$t=6$

$t=6$ のとき　$IR=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$

$t=6$ となる P，Q の x 座標は

$$x^2-(x-6)=6$$

$$x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

$$x=0,\ 1$$

$x=0$ のとき，I の座標は $(0,\ -3)$ であるから，R の座標は　$(3\sqrt{3},\ -3)$

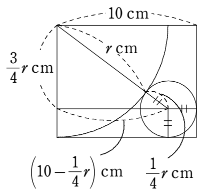
$x=1$ のとき，I の座標は $(1,\ -2)$ であるから，R の座標は　$(1+3\sqrt{3},\ -2)$

11 [2014 大阪教育大学附属池田]

解説

(1) おうぎ形の半径を r cm とすると，中心角が 90° であるから，おうぎ形の弧の長さは

$$2\pi r\times\frac{90^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{2}\pi r\,(\mathrm{cm})$$



底面の円の半径を x cm とすると

$$2\pi x=\frac{1}{2}\pi r$$

$$x=\frac{1}{4}r\,(\mathrm{cm})$$

右の図から，三平方の定理により

$$\left(\frac{3}{4}r\right)^2+\left(10-\frac{1}{4}r\right)^2=\left(\frac{5}{4}r\right)^2$$

$$3r^2+16r-320=0$$

解の公式により　$r=\dfrac{-16\pm\sqrt{16^2-4\times3\times320}}{2\times3}$

$$=\frac{-16\pm64}{6}$$

$$=-\frac{40}{3},\ 8$$

$r>0$ より　$r=8$

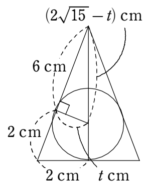
よって，底面の半径は　$\dfrac{1}{4}\times8=2\,(\mathrm{cm})$

(2) 円錐の高さは　$\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}\,(\mathrm{cm})$

よって，円錐の体積は

$$\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times2\sqrt{15}=\frac{8\sqrt{15}}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

(3) 底面との接点と側面との接点を通る面で円錐を切り，球の半径を t cm とすると，右の図のような直角三角形ができるから，三平方の定理により



$$6^2+t^2=(2\sqrt{15}-t)^2$$

$$4\sqrt{15}\,t=24$$

$$t=\frac{2\sqrt{15}}{5}$$

よって，球の半径は　$\dfrac{2\sqrt{15}}{5}\,(\mathrm{cm})$

12 [2016 城西大学附属川越]

解説

(1) AT∥EF より

$$\mathrm{AT}:\mathrm{EF}=\mathrm{AS}:\mathrm{SE}$$

$$\mathrm{AT}:12=1:3$$

よって　AT＝4 cm

(2) 直線 BC と直線 FP との交点を U とする。

(1) と同様に考えると，線分 CU の長さは 4 cm である。

直線 TU 上に線分 RQ があり，△BTU は直角二等辺三角形である。

よって，△ATR も直角二等辺三角形であるから

AR＝AT＝4 cm

(3) DR＝DQ＝12－4＝8 (cm)

よって　RQ＝$8\sqrt{2}$ cm

AS：SE＝1：3 より

$$\mathrm{AS}=12\times\frac{1}{4}=3\ (\mathrm{cm})$$

$$\mathrm{SE}=12\times\frac{3}{4}=9\ (\mathrm{cm})$$

△ARS において

$$\mathrm{RS}=\sqrt{3^2+4^2}=5\ (\mathrm{cm})$$

△SEF において

$$\mathrm{SF}=\sqrt{9^2+12^2}=15\ (\mathrm{cm})$$

したがって，求める周の長さは

$$(5+15)\times2+8\sqrt{2}=40+8\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

13 [2014 東北学院榴ヶ岡]

解説

(1) 円錐の高さを HO，母線を HC とすると，△OCH において，三平方の定理により

$$\mathrm{HO}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

円錐の体積は

$$\frac{1}{3}\pi\times2^2\times2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

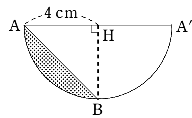
(2) 側面のおうぎ形の中心角の大きさを a° とすると

$$2\pi\times4\times\frac{a}{360}=2\pi\times2$$

$$a=180$$

よって，中心角の大きさは　180°

(3) (ア) かけたひもは，右の側面の展開図の線分 AB である。



△ABH は直角二等辺三角形より，ひもの長さは

$$\sqrt{2}\,\mathrm{AH}=4\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

(イ) 求める面積は右の図の弦 AB と弧 AB に囲まれた部分の面積であるから

$$\pi\times4^2\times\frac{90}{360}-\frac{1}{2}\times4\times4=4\pi-8\ (\mathrm{cm}^2)$$

14

解説

(1) 点 P が辺 BF の中点の位置にあるとき，切り口は正三角形になる。

したがって　5÷1＝5 (秒後)

また，このとき切り口は，1 辺の長さが $5\sqrt{2}$，高さが $5\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ の正三角形になるから，その面積は

$$\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times\frac{5\sqrt{6}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

(2) 点 P が辺 CD の中点の位置にあるとき，切り口は正六角形になる。

したがって　(10＋10＋5)÷1＝25 (秒後)

また，このとき切り口は，1 辺の長さが $5\sqrt{2}$ の正六角形になるから，その面積は，(1) で求めた正三角形の面積の 6 倍で

$$\frac{25\sqrt{3}}{2}\times6=75\sqrt{3}$$

(3) 点 P は 17 秒後に，辺 BC 上の BP＝7 の位置にある。

このとき，切断面と辺 AB の交点を Q とすると，IJ∥QP で

BQ＝7

このとき　$\mathrm{IJ}=\sqrt{2}\,\mathrm{FJ}=5\sqrt{2}$

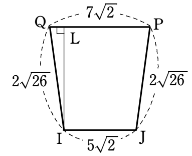
$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\,\mathrm{BP}=7\sqrt{2}$

また，P から辺 FG に引いた垂線の足を K とすると，直角三角形 PJK において

$$\mathrm{PJ}=\sqrt{10^2+(7-5)^2}=2\sqrt{26}$$

同様に　$\mathrm{QI}=2\sqrt{26}$

よって，切り口は，右の図のような等脚台形である。



ここで，I から PQ に引いた垂線の足を L とすると

$$\mathrm{LQ}=(7\sqrt{2}-5\sqrt{2})\div2=\sqrt{2}$$

直角三角形 ILQ において

$$\mathrm{IL}=\sqrt{(2\sqrt{26})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{102}$$

したがって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\times(7\sqrt{2}+5\sqrt{2})\times\sqrt{102}=12\sqrt{51}$$

15

解説

(1)　O から辺 AB に引いた垂線の足を M とする。

△OAB は AB を底辺とする二等辺三角形であるから，M は辺 AB の中点である。

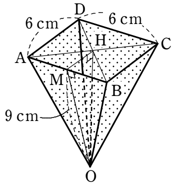
また，O から水面 ABCD に引いた垂線の足を H とすると，H は正方形 ABCD の対角線の交点，すなわち対角線 AC の中点である。

よって　$HM=3$ cm

このとき，直角三角形 OHM において

$$OH=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}\ (\text{cm})$$

したがって，求める高さは　$6\sqrt{2}$ cm



(2)　辺 AB，DC の中点をそれぞれ F，G とし，OG と水面の交点を I とする。

また，水面と OC，OD の交点をそれぞれ J，K とする。

このとき，JK⊥OG，FI⊥OG であるから，線分 OI の長さが求める高さである。

$OI=x$ cm とすると　$GI=9-x$ (cm)

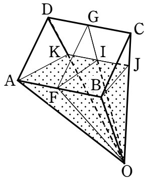
△OFI において　$FI^2=9^2-x^2$

△FIG において　$FI^2=6^2-(9-x)^2$

よって　$9^2-x^2=6^2-(9-x)^2$

これを解いて　$x=7$

したがって，水面までの高さは　7 cm



(3)　(2) において，JK∥CD であるから

$JK:CD=OJ:OC$

$=OI:OG=7:9$

よって　$JK:6=7:9$

$$JK=\frac{14}{3}\ \text{cm}$$

また　$FI=\sqrt{9^2-7^2}=4\sqrt{2}$ (cm)

したがって，水面がつくる図形は，上底が $\frac{14}{3}$ cm，下底が 6 cm，高さが $4\sqrt{2}$ cm の台形である。

よって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{14}{3}+6\right)\times4\sqrt{2}=\frac{64\sqrt{2}}{3}\ (\text{cm}^2)$$

16

解説

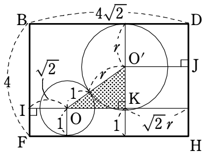
半径 1 cm の球の中心を O とし，もう一方の球の中心を O′，半径を r cm とする。

与えられた立体を，4 点 B，F，H，D を通る平面で切断すると，右の図のようになる。

2 つの球は外接しているから

$$OO'=r+1$$

O から線分 BF に垂線 OI を引き，O′ から線分 DH に垂線 O′J を引く。



また，O を通り線分 BD に平行な直線と，O′ を通り線分 BF に平行な直線の交点を K とする。

$OI=\sqrt{2}$，$O'J=\sqrt{2}\,r$ であるから，図より

$$OK=4\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,r=3\sqrt{2}-\sqrt{2}\,r$$

$$O'K=4-1-r=3-r$$

よって，直角三角形 OO′K において，次の等式が成り立つ。

$$(1+r)^2=(3\sqrt{2}-\sqrt{2}\,r)^2+(3-r)^2$$

したがって　$r^2-10r+13=0$

これを解いて　$r=\frac{10\pm\sqrt{48}}{2}=5\pm2\sqrt{3}$

$r<4$ であるから　$r=5-2\sqrt{3}$　　答 $(5-2\sqrt{3})$ cm

17 [2014 日本大学第二]

解説

(1)　△ABD の面積について，次の等式が成り立つ。

$$\triangle ABD=\triangle OAB+\triangle OBD+\triangle OAD$$

BD と CE の交点を H とすると

$$AH=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$$

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

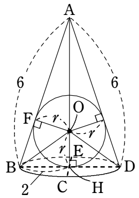
よって，球の半径を r とすると

$$8\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times6\times r+\frac{1}{2}\times4\times r+\frac{1}{2}\times6\times r$$

$$8\sqrt{2}=8r$$

$$r=\sqrt{2}$$

したがって，球の半径は　$\sqrt{2}$



(2)　面 ABD において，円 O の外部の点 B から円 O にひいた接線の長さは等しいから

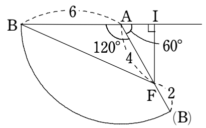
$$BF=BC=2$$

よって，最も短くなるときの線は，右の図の側面の展開図で，線分 BF となる。

側面のおうぎ形の中心角の大きさを $x°$ とすると，おうぎ形の弧の長さと底面の円周の長さは等しいから

$$2\pi\times6\times\frac{x}{360}=2\pi\times2$$

$$x=120$$



したがって，点 F から線分 BA の延長にひいた垂線を FI とすると，△AFI は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形となる。

$AF=6-2=4$ であるから

$$AI=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}\times4=2$$

$$FI=\sqrt{3}\,AI=2\sqrt{3}$$

△BFI において，三平方の定理より

$$BF=\sqrt{BI^2+FI^2}$$

$$=\sqrt{(6+2)^2+(2\sqrt{3})^2}$$

$$=2\sqrt{19}$$

(3)　3 点 F，E，C を通る平面と，面 ABD が交わってできる線分は，図の線分 FH となる。

ここで，四角形 OFBH は線分 OB を軸とする線対称な図形であるから，対応する 2 点 F，H を結ぶ線分 FH と線分 OB は垂直である。

よって，FH と OB の交点を J とすると，OJ⊥FH より，線分 OJ の長さを求めればよい。

△OFB と △OJF において

∠FOB＝∠JOF (共通)

∠OFB＝∠OJF＝90°

2 組の角がそれぞれ等しいから　△OFB∽△OJF

よって　$OF:OJ=OB:OF$

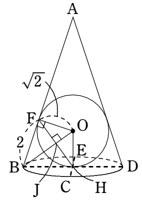
ここで　$OF=\sqrt{2}$

$$OB=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$$

であるから　$\sqrt{2}:OJ=\sqrt{6}:\sqrt{2}$

$$OJ=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$OJ=\frac{\sqrt{6}}{3}$$



18 [2016 洛南]

解説

(1)　△ABD は AB＝AD の直角二等辺三角形であるから

$$AB=AD=\frac{1}{\sqrt{2}}BD=2$$

△ABE において，三平方の定理により

$$BE^2=AB^2+AE^2$$
$$20=4+AE^2$$
$$AE^2=16$$

$AE>0$ より　$AE=4$

(2)　四面体 BDEG の 4 つの面はすべて合同である。

BD の中点を P とすると，△BEP において，三平方の定理により

$$BE^2=PE^2+BP^2$$
$$20=PE^2+2$$
$$PE^2=18$$

$PE>0$ より　$PE=3\sqrt{2}$

よって，求める表面積は

$$\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\right)\times4=24$$

(3)　EG の中点を Q，PQ の中点を O とすると，OB＝OD＝OE＝OG となり，点 O は求める球の中心である。

△OEQ において，三平方の定理により

$$OE^2=OQ^2+EQ^2$$
$$=2^2+(\sqrt{2})^2$$
$$=6$$

$OE>0$ より　$OE=\sqrt{6}$

(4)　求める球の半径を r とする。

(2) より，四面体の各面の面積は　$24\div4=6$

四面体の体積は

$$2\times2\times4-\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times4\right\}\times4=\frac{16}{3}$$

球の中心と各頂点を結ぶと，四面体は 4 つの合同な四面体に分けられるから

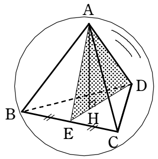
$$\left(\frac{1}{3}\times6\times r\right)\times4=\frac{16}{3}$$
$$r=\frac{2}{3}$$

よって，求める半径は　$\frac{2}{3}$

19

解説

辺 BC の中点を E とする。また，頂点 A から底面 BCD に垂線 AH を引く。



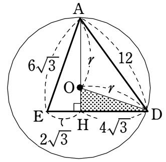
△ABC，△BCD は正三角形であるから

$$AE=DE=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

H は △BCD の重心であるから

$$EH=\frac{1}{3}\times6\sqrt{3}=2\sqrt{3},\quad DH=\frac{2}{3}\times6\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

直角三角形 AEH において



$$AH^2=(6\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2=96$$

$AH>0$ であるから　$AH=4\sqrt{6}$

球の中心を O とし，球の半径を r cm とすると，直角三角形 ODH において

$$OH^2+HD^2=OD^2$$

すなわち　$(4\sqrt{6}-r)^2+(4\sqrt{3})^2=r^2$

よって　$8\sqrt{6}r=144$

したがって　$r=\frac{144}{8\sqrt{6}}=3\sqrt{6}$ (cm)

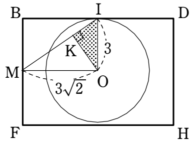
参考　球の中心 O は，高さ AH を 3：1 に内分している。

これは，1 辺の長さが 12 cm の正四面体のすべての面に接するような球の中心と一致している。

20

解説

球の中心を O，球と面 ABCD の接点を I とする。
切り口の図形は円であり，その中心を K とする。
切り口の円は点 I を通るから，IK はその半径である。
与えられた立体を面 BFHD で切断した断面図は右の図のようになる。



$$OI=\frac{6}{2}=3$$
$$OM=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

よって，直角三角形 IMO において

$$MI^2=3^2+(3\sqrt{2})^2=27$$

$MI>0$ であるから　$MI=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

OK⊥IM であるから　△IMO∽△IOK

よって　IM：IO＝IO：IK

すなわち　$3\sqrt{3}:3=3:IK$

これを解いて　$IK=\sqrt{3}$

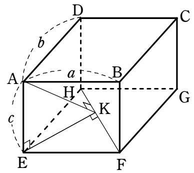
したがって，切り口の図形の面積は　$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$ (cm^2)

1 [高校の問題集より]

解説

(1)　AE⊥平面 EFGH，AK⊥FH であるから，△AEK がつくる平面と FH は垂直である。

よって　EK⊥FH



(2)　(1) より

$$\triangle EFH=\frac{1}{2}\cdot FH\cdot EK$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot EK\quad\cdots\cdots①$$

また，EF⊥EH であるから

$$\triangle EFH=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot EH=\frac{1}{2}ab\quad\cdots\cdots②$$

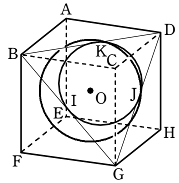
①，② から　$\sqrt{a^2+b^2}\cdot EK=ab$　　よって　$EK=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

したがって　$AK=\sqrt{AE^2+EK^2}=\sqrt{c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$

2

解説

(1)　△BGD の辺 BG，GD，DB の中点をそれぞれ I，J，K とすると，球 O は，点 I，J，K でそれぞれ，面 BFGC，CGHD，ABCD に接する。



よって，切り口の円は，3 点 I，J，K を通る。

このとき，△IJK は正三角形で，その 1 辺の長さは

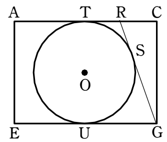
$$\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}\ \text{(cm)}$$

切り口の円の中心は，正三角形 IJK の重心に一致するから，求める半径は

$$2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ \text{(cm)}$$

(2)　球 O と面 PGQ，ABCD，EFGH との接点を，それぞれ S，T，U とし，線分 PQ の中点を R とする。

このとき，4 点 A，E，G，C を通る平面で切って考えると，その切断面は，右の図のようになる。



RC＝x cm とおく。

AC＝EG＝$4\sqrt{2}$ (cm) であるから

$$TC=UG=2\sqrt{2}\ \text{(cm)}$$
$$RS=RT=2\sqrt{2}-x\ \text{(cm)}$$
$$GS=GU=2\sqrt{2}\ \text{(cm)}$$

よって，直角三角形 GCR において

$$x^2+4^2=(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-x)^2$$

これを解いて　$x=\sqrt{2}$

したがって　$CP=CQ=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ (cm)

よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times4=\frac{8}{3}\ \text{(cm}^3\text{)}$$

3 [2016 立教新座]

解説

(1) 台形 BCGF において，点 C から辺 FG に垂線をひき，辺 FG との交点を T とする。

TG$=(10-4)\div 2=3$ (cm) であるから

$$CT=\sqrt{5^2-3^2}=4 \text{ (cm)}$$

よって，台形 BCGF の面積は

$$\frac{1}{2}\times(4+10)\times 4=28 \text{ (cm}^2\text{)}$$

同様に，台形 CDHG において，辺 GH に対する高さは

$$\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21} \text{ (cm)}$$

よって，台形 CDHG の面積は

$$\frac{1}{2}\times(4+8)\times\sqrt{21}=6\sqrt{21} \text{ (cm}^2\text{)}$$

したがって，求める表面積は

$$4\times4+10\times8+(28+6\sqrt{21})\times2=152+12\sqrt{21} \text{ (cm}^2\text{)}$$

(2) 頂点 B，C，D から長方形 EFGH にそれぞれ垂線をひき，長方形 EFGH との交点を B′，C′，D′ とする。

直線 B′I と辺 EH の交点を L，直線 D′I と辺 EF との交点を M とする。

IL$=(8-4)\div2=2$ (cm)，

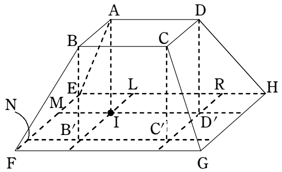
IM$=(10-4)\div2=3$ (cm) であるから

$$EI^2=2^2+3^2=13$$

△AIE において

$$AI^2=5^2-13=12$$

AI>0 であるから　AI$=2\sqrt{3}$ cm



(3) JK$=x$ cm とする。

点 K から辺 GH に垂線をひき，辺 GH との交点を P，辺 CD との交点を Q とする。

BC∥FG より

$$KC:KG=4:10=2:5$$

CQ∥GP より

$$CQ:GP=KC:KG$$
$$=2:5$$

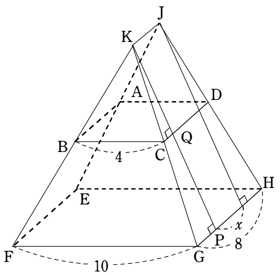
CQ$=\dfrac{4-x}{2}$ cm，GP$=\dfrac{8-x}{2}$ cm であるから

$$\frac{4-x}{2}:\frac{8-x}{2}=2:5$$

$$8-x=10-\frac{5}{2}x$$

$$x=\frac{4}{3}$$

よって　　JK$=\dfrac{4}{3}$ cm



(4) (2)の図において，直線 C′B′ と辺 EF の交点を N，直線 C′D′ と辺 EH との交点を R とする。

立体 ABCD－EFGH は，直方体 ABCD－IB′C′D′ と，四角錐 A－EMIL 4つ分と，三角柱 AIL－DD′R 2つ分と，三角柱 AIM－BB′N 2つ分に分けられる。

よって，求める立体の体積は

$$4\times4\times2\sqrt{3}+\left(\frac{1}{3}\times2\times3\times2\sqrt{3}\right)\times4+\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times4\right)\times2$$
$$+\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\times4\right)\times2$$
$$=88\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

4 [2014 茨城県]

解説

(1) 直角三角形 ABD において，三平方の定理により

$$BD=\sqrt{3^2+4^2}=5 \text{ (cm)}$$

△BIF において，∠IBF$=90^\circ$，∠BIF$=60^\circ$ であるから

$$BI:BF=1:\sqrt{3}$$
$$BI:3\sqrt{3}=1:\sqrt{3}$$
$$BI=3 \text{ (cm)}$$

よって　　DI$=$BD$-$BI$=5-3=2$ (cm)

△DIJ において，∠IDJ$=90^\circ$，∠DIJ$=60^\circ$ であるから

$$DI:DJ=1:\sqrt{3}$$
$$2:DJ=1:\sqrt{3}$$
$$DJ=2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

よって　　JH$=$DH$-$DJ$=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$ (cm)

したがって，四角錐 JEFGH の体積は

$$\frac{1}{3}\times3\times4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

(2) 右の図のように，点 K から線分 FH にひいた垂線と線分 FH の交点を L とする。

また，直線 IJ と FH の交点を M とする。

ID∥HM であるから

$$ID:HM=DJ:JH$$
$$=2\sqrt{3}:\sqrt{3}$$
$$=2:1$$

ID$=2$ cm であるから　HM$=1$ cm

また，ID∥FM であるから

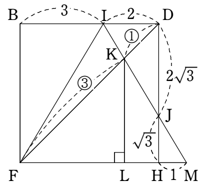
$$DK:KF=ID:FM$$
$$=2:(5+1)$$
$$=1:3$$

さらに，KL∥DH より

$$KL:DH=FK:FD=3:4$$

よって　　KL$:3\sqrt{3}=3:4$

$$KL=\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ (cm)}$$

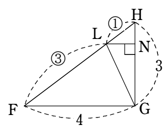


△FGH において，点 L から線分 GH にひいた垂線と線分 GH の交点を N とすると

$$FL:LH=FK:KD=3:1$$

LN∥FG であるから　　HN$:$NG$=1:3$

よって　NG$=\dfrac{3}{1+3}$HG$=\dfrac{3}{4}\times3=\dfrac{9}{4}$ (cm)



また，LN$:$FG$=1:4$ であるから

$$LN:4=1:4$$
$$LN=1 \text{ (cm)}$$

直角三角形 LNG において，三平方の定理により

$$LG^2=NG^2+LN^2$$
$$=\left(\frac{9}{4}\right)^2+1^2$$
$$=\frac{97}{16}$$

直角三角形 KLG において，三平方の定理により

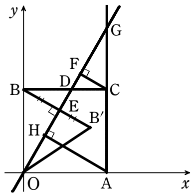
$$GK^2=KL^2+LG^2$$
$$=\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{97}{16}$$
$$=\frac{340}{16}$$
$$=\frac{85}{4}$$

GK>0 より　GK$=\dfrac{\sqrt{85}}{2}$ (cm)

5 [2016 慶應義塾]

解説

右の図のように点を定める。



直線の傾きは $\sqrt{3}$ であるから　$\angle \mathrm{GOA}=60°$

よって　　$\angle \mathrm{BOE}=30°$

したがって　$\angle \mathrm{OBE}=60°$

$\triangle \mathrm{OBE} \equiv \triangle \mathrm{OB'E}$ より，$\triangle \mathrm{OBB'}$ は正三角形で，

1 辺の長さが 2 であるから，点 B′ の座標は　$(\sqrt{3},\ 1)$

よって，点 B′ は正方形 OACB の内部にあるから，

求める回転体の体積は △GOA の回転体から △GDC の回転体を除いたものである。

△OAH と △DCF と △GDC と △GOA はすべて，3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であり，点 D は $y=\sqrt{3}x$ 上の点で，y 座標が 2 であるから

$$2=\sqrt{3}x$$

$$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって　$\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{OA}=\sqrt{3}$

$$\mathrm{FC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{DC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=\sqrt{3}-1$$

$$\mathrm{OG}=2\mathrm{OA}=4$$

$$\mathrm{GD}=2\mathrm{DC}=2\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=4-\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

したがって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\pi\times\mathrm{AH}^2\times(\mathrm{OH}+\mathrm{HG})-\frac{1}{3}\pi\times\mathrm{FC}^2\times(\mathrm{GF}+\mathrm{FO})$$

$$=\frac{\pi}{3}\times(\sqrt{3})^2\times4-\frac{\pi}{3}\times(\sqrt{3}-1)^2\times\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=4\pi-8\pi+\frac{40\sqrt{3}}{9}\pi$$

$$=\frac{4(10\sqrt{3}-9)}{9}\pi$$

6 [2016 東海]

解説

(1)　OB : BC : CO = 3 : 4 : 5 より，$\mathrm{OB}=3k$，$\mathrm{BC}=4k$，$\mathrm{CO}=5k$ とすると

$$\mathrm{OB}^2+\mathrm{BC}^2=(3k)^2+(4k)^2$$

$$=9k^2+16k^2$$

$$=25k^2$$

$$=(5k)^2$$

$$=\mathrm{CO}^2$$

三平方の定理の逆により　$\angle \mathrm{OBC}=90°$

点 B から y 軸に下ろした垂線と y 軸との交点を D とする。

△OBC と △ODB において

$\angle \mathrm{OBC}=\angle \mathrm{ODB}=90°$　……①

共通な角であるから

$\angle \mathrm{BOC}=\angle \mathrm{DOB}$　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle \mathrm{OBC} \backsim \triangle \mathrm{ODB}$

点 B の座標を $\left(b,\ \frac{1}{4}b^2\right)$ とすると，OB : BC = 3 : 4 より

$$\mathrm{OD}:\mathrm{DB}=3:4$$

$$\frac{1}{4}b^2:b=3:4$$

$$b^2=3b$$

$$b(b-3)=0$$

図より，$b>0$ であるから，点 B の x 座標は　3

(2)　△OBD において，三平方の定理により

$$\mathrm{OB}^2=3^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{15}{4}\right)^2$$

$\mathrm{OB}>0$ より　$\mathrm{OB}=\frac{15}{4}$

よって　$\mathrm{OC}=\frac{5}{3}\times\frac{15}{4}$

$$=\frac{25}{4}$$

点 A の y 座標は $\frac{25}{4}$ であるから，$y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して

$$\frac{25}{4}=\frac{1}{4}x^2$$

$$x=\pm5$$

図より，$x<0$ であるから　$x=-5$

ここで　$\triangle \mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{25}{4}=\frac{75}{8}$

$$\triangle \mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\times5\times\frac{25}{4}=\frac{125}{8}$$

$\triangle \mathrm{OBC}<\triangle \mathrm{OAC}$ より，直線 ℓ は線分 AC 上を通る。

直線 ℓ と線分 AC との交点を E とし，E の座標を $\left(-t,\ \frac{25}{4}\right)$ とすると

$$\triangle \mathrm{OAE}=\frac{1}{2}\left(\frac{75}{8}+\frac{125}{8}\right)=\frac{25}{2}$$

よって　$\frac{1}{2}\times\{-t-(-5)\}\times\frac{25}{4}=\frac{25}{2}$

$$5-t=4$$

$$t=1$$

したがって，E の座標は $\left(-1,\ \frac{25}{4}\right)$ であるから，直線 ℓ の傾きは

$$-\frac{25}{4}\div1=-\frac{25}{4}$$

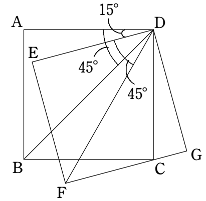
7 [2014 徳島文理]

解説

(1)　△ADB，△EDF はともに直角二等辺三角形であるから　$\angle \mathrm{ADE}+\angle \mathrm{EDB}=\angle \mathrm{ADB}=45°$

$\angle \mathrm{BDF}+\angle \mathrm{EDB}=\angle \mathrm{EDF}=45°$

よって　$\angle \mathrm{BDF}=\angle \mathrm{ADE}=15°$



(2)　辺 BC と対角線 DF の交点を H とする。

△DBH と △CFH において

$\angle \mathrm{DBH}=\angle \mathrm{CFH}=45°$

$\angle \mathrm{DHB}=\angle \mathrm{CHF}$　(対頂角)

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle \mathrm{DBH} \backsim \triangle \mathrm{CFH}$

よって　DB : CF = DH : CH　……①

ここで　$\mathrm{DB}=\sqrt{2}\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$　……②

また，$\angle \mathrm{CDH}=\angle \mathrm{BDC}-\angle \mathrm{BDF}=45°-15°=30°$

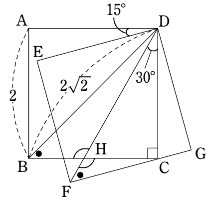
より，△CDH は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であるから

DH : CH = 2 : 1　……③

①，②，③ より

$$2\sqrt{2}:\mathrm{CF}=2:1$$

$$\mathrm{CF}=\sqrt{2}$$



(3)　正方形 DEFG の 1 辺の長さを x とする。

直角三角形 DCG において

$\mathrm{DC}=2$，$\mathrm{DG}=x$，$\mathrm{CG}=x-\sqrt{2}$

三平方の定理により

$$\mathrm{DG}^2+\mathrm{CG}^2=\mathrm{DC}^2$$

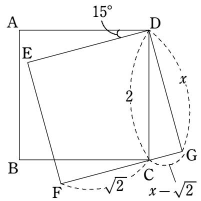
$$x^2+(x-\sqrt{2})^2=2^2$$

整理すると　$x^2-\sqrt{2}x-1=0$

解の公式により　$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$

$x>0$ であるから　$x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

よって，正方形 DEFG の 1 辺の長さは　$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$



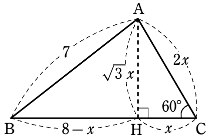
8 [2014 ラ・サール]

解説

(1) ACの長さを $2x$ とする。
Aから辺BCに引いた垂線と辺BCとの交点をHとすると

$\mathrm{CH}=x,\quad \mathrm{BH}=8-x,\quad \mathrm{AH}=\sqrt{3}\,x$

となる。



直角三角形ABHに三平方の定理を用いて

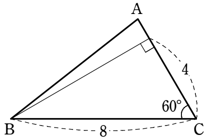
$(8-x)^2+(\sqrt{3}\,x)^2=7^2$

$4x^2-16x+15=0$

これを解いて

$x=\dfrac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\times4\times15}}{2\times4}$

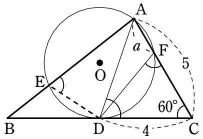
$=\dfrac{16\pm\sqrt{16}}{8}=\dfrac{16\pm4}{8}$



よって　$x=\dfrac{5}{2}$ または $x=\dfrac{3}{2}$

△ABCは鋭角三角形であるから，辺ACの長さは4より大きい。
したがって　AC=5

(2) △ADCと△DFCにおいて
共通な角であるから　∠ACD=∠DCF　……①
BCは円Oの接線で，Dは接点であるから
∠ADC=∠AED　……②
四角形AEDFは円Oに内接しているから
∠AED=∠DFC　……③
②，③より　∠ADC=∠DFC　……④
①，④より，2組の角がそれぞれ等しいから　△ADC∽△DFC



AFの長さを a とする。
△ADC∽△DFCより　AC：DC=DC：FC
5：4=4：$(5-a)$

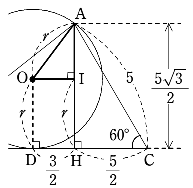
$5(5-a)=16$ より　$a=\dfrac{9}{5}$

したがって　$\mathrm{AF}=\dfrac{9}{5}$

(3) Oから線分AHに引いた垂線と線分AHの交点をIとする。
また，円Oの半径を r とする。

$\mathrm{CH}=\dfrac{5}{2}$，DC=4であるから　$\mathrm{DH}=4-\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$

また，$\mathrm{AH}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ であるから　$\mathrm{AI}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-r$



直角三角形AOIに三平方の定理を用いて

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-r\right)^2=r^2$

$\dfrac{9}{4}+\dfrac{75}{4}-5\sqrt{3}\,r+r^2=r^2$

$5\sqrt{3}\,r=21$ より　$r=\dfrac{21}{5\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{5}$

9 [2014 立命館]

解説

$\dfrac{1}{2}\times(-2)^2=2$，$\dfrac{1}{2}\times(-1)^2=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}\times4^2=8$，$\dfrac{1}{2}\times a^2=\dfrac{1}{2}a^2$ より，4点A，B，C，Dの座標は，それぞれ次のようになる。

$\mathrm{A}(-2,\ 2)$，$\mathrm{B}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}(4,\ 8)$，$\mathrm{D}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$

(1) 直線ACの傾きは $\dfrac{8-2}{4-(-2)}=1$ であるから，直線ACの式は $y=x+b$ とおける。
直線ACは点Aを通るから　$2=-2+b$
$b=4$
よって，直線ACの式は　$y=x+4$
したがって，3点A，F，Cが同一直線上にあるとき，点Fの y 座標は4になり，点Dの y 座標も4になるから

$\dfrac{1}{2}a^2=4$

$a^2=8$

$a>0$ であるから　$a=2\sqrt{2}$

(2) 直線ADの傾きは　$\left(\dfrac{1}{2}a^2-2\right)\div\{a-(-2)\}=\dfrac{1}{2}(a-2)$

直線BCの傾きは　$\left(8-\dfrac{1}{2}\right)\div\{4-(-1)\}=\dfrac{3}{2}$

よって　$\dfrac{1}{2}(a-2)=\dfrac{3}{2}$

$a=5$

(3) $0<a<4$ のとき

$\triangle\mathrm{DCF}=\dfrac{1}{2}\times a\times\left(8-\dfrac{1}{2}a^2\right)=\dfrac{1}{4}a(16-a^2)$

$\triangle\mathrm{DCE}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}a^2\times(4-a)=\dfrac{1}{4}a^2(4-a)$

$\triangle\mathrm{DCF}=\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{DCE}$ より　$\dfrac{1}{4}a(16-a^2)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{4}a^2(4-a)$

$(16-a^2)=\dfrac{3}{2}a(4-a)$

$2(16-a^2)=3a(4-a)$

$2(16-a^2)-3a(4-a)=0$

$2(4+a)(4-a)-3a(4-a)=0$

$(4-a)\{2(4+a)-3a\}=0$

$(4-a)(8-a)=0$

$a=4,\ 8$

$0<a<4$ より，これらは問題に適さない。

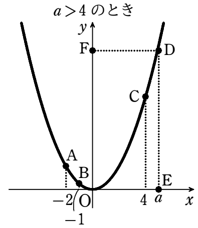
$a>4$ のとき

$\triangle\mathrm{DCF}=\dfrac{1}{2}\times a\times\left(\dfrac{1}{2}a^2-8\right)$

$=-\dfrac{1}{4}a(16-a^2)$

$\triangle\mathrm{DCE}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}a^2(a-4)$

$=-\dfrac{1}{4}a^2(4-a)$



よって　$-\dfrac{1}{4}a(16-a^2)=-\dfrac{1}{4}a^2(4-a)\times\dfrac{3}{2}$

これを解くと　$a=4,\ 8$

$a>4$ より　$a=8$

以上から　$a=8$

(4) 直線ABの式は　$y=-\dfrac{3}{2}x-1$

(i) AG=GEのとき
三平方の定理より
$\mathrm{AG}^2=2^2+3^2=4+9=13$
$\mathrm{GE}^2=a^2+1^2=a^2+1$
AG=GEのとき，$\mathrm{AG}^2=\mathrm{GE}^2$ であるから
$13=a^2+1$
$a^2=12$
$a=\pm2\sqrt{3}$
$a>0$ であるから　$a=2\sqrt{3}$

(ii) AG=AEのとき
$\mathrm{AG}^2=13$
$\mathrm{AE}^2=(a+2)^2+2^2=a^2+4a+4+4$
$=a^2+4a+8$
よって　$13=a^2+4a+8$
$a^2+4a-5=0$
$(a-1)(a+5)=0$
$a>0$ であるから　$a=1$

(iii) AE=GEのとき
$\mathrm{AE}^2=a^2+4a+8$
$\mathrm{GE}^2=a^2+1$
よって　$a^2+4a+8=a^2+1$
$4a=-7$
$a=-\dfrac{7}{4}$

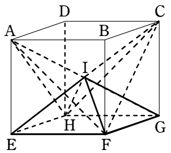
$a>0$ であるから，これは問題に適さない。

(i)，(ii)，(iii)から　$a=1,\ 2\sqrt{3}$

10 [2014 筑波大学附属駒場]

解説

(1) 線分 AG と線分 CE の交点を I，点 I から面 EFGH に下ろした垂線と面 EFGH の交点を J とする。



2つの四角錐 A−EFGH，C−EFGH の共通部分でできる立体は，四角錐 I−EFGH である。

AE∥GC であるから　　AI：IG＝AE：CG

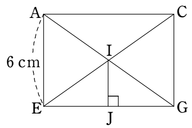
$=6:6$

$=1:1$

AE∥IJ であるから　　AE：IJ＝AG：IG

$6:\mathrm{IJ}=(1+1):1$

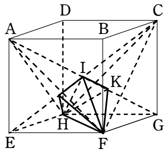
$\mathrm{IJ}=3\ (\mathrm{cm})$



四角錐 I−EFGH の高さは IJ であるから，求める立体の体積は

$$\frac{1}{3}\times6\times6\times3=36\ (\mathrm{cm}^3)$$

(2) 線分 AG と面 CHF の交点を K，点 K から面 DHFB に下ろした垂線と面 DHFB の交点をLとする。



2つの三角錐 A−FGH，C−HEF の共通部分でできる立体の体積は，三角錐 K−IHF の2倍である。

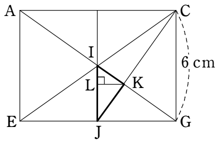
△IHF を三角錐 K−IHF の底面とすると，三角錐の高さは KL である。

面 AEGC について考える。

IJ∥CG であるから　　IK：KG＝IJ：CG

$=3:6$

$=1:2$



ここで，△GEF において，三平方の定理により

$\mathrm{GE}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

よって，AE∥IJ であるから

AE：IJ＝GE：GJ

$6:3=6\sqrt{2}:\mathrm{GJ}$

$\mathrm{GJ}=3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

KL∥GJ であるから　　KL：GJ＝IK：IG

$\mathrm{KL}:3\sqrt{2}=1:(1+2)$

$\mathrm{KL}=\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

△HEF において，三平方の定理により　　$\mathrm{HF}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$

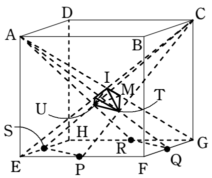
よって，求める立体の体積は

$$2\times\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\right)\times\sqrt{2}\right\}=12\ (\mathrm{cm}^3)$$

(3) 線分 AG と面 CSP の交点を M，点 M から面 DHFB に下ろした垂線と面 DHFB の交点を N とする。また，線分 AQ と線分 CP の交点を T，線分 AR と線分 CS の交点を U とする。

2つの三角錐 A−GRQ，C−EPS の共通部分でできる立体の体積は，三角錐 M−IUT の2倍である。

△IUT を三角錐 M−IUT の底面とすると，三角錐の高さは MN である。



線分 TU，線分 SP と面 AEGC の交点をそれぞれ V，W とする。

△SEP において，ES＝EP＝3 であるから，三平方の定理により

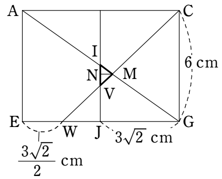
$\mathrm{SP}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

SP⊥EW であるから，△SEP の面積について

$$\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\mathrm{EW}$$

$$\mathrm{EW}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ (\mathrm{cm})$$

面 AEGC について考える。



VJ∥CG であるから

VJ：CG＝WJ：WG

$$\mathrm{VJ}:6=\left(3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right):\left(6-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\mathrm{VJ}=2\ (\mathrm{cm})$

IV∥CG であるから　　IM：MG＝IV：CG

$=(3-2):6$

$=1:6$

NM∥JG であるから　　NM：JG＝IM：IG

$\mathrm{NM}:3\sqrt{2}=1:(1+6)$

$$\mathrm{NM}=\frac{3\sqrt{2}}{7}\ (\mathrm{cm})$$

また，$\mathrm{AC}=\mathrm{GE}=6\sqrt{2}$，$\mathrm{PQ}=\mathrm{SP}=3\sqrt{2}$ であるから

CT：TP＝AC：PQ

$=6\sqrt{2}:3\sqrt{2}$

$=2:1$

同様に，$\mathrm{CU}:\mathrm{US}=6\sqrt{2}:3\sqrt{2}=2:1$

面 CSP について，TU∥PS であるから　　TU：PS＝CT：CP

$\mathrm{TU}:3\sqrt{2}=2:(2+1)$

$\mathrm{TU}=2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

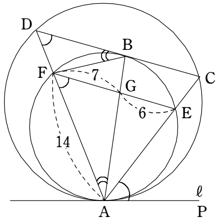
よって，求める立体の体積は

$$2\times\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times1\right)\times\frac{3\sqrt{2}}{7}\right\}=\frac{4}{7}\ (\mathrm{cm}^3)$$

11 [2014 東大寺学園]

解説

(1) 図のように，直線 ℓ 上に点 P をとる。



△AFG と △BDF において

小さい方の円は直線 ℓ に点 A で接しているから

∠CAP＝∠AFG　……①

大きい方の円は直線 ℓ に点 A で接しているから

∠CAP＝∠BDF　……②

①，②より　∠AFG＝∠BDF　……③

小さい方の円は直線 CD に点 B で接しているから

∠FAG＝∠DBF　……④

③，④より，2組の角がそれぞれ等しいから

△AFG∽△BDF

よって　　DF：DB＝FG：FA＝7：14＝1：2

③より，DB∥FG であるから，△AFG∽△ADB も成り立つ。

ここで，DF＝x，DB＝$2x$ とおくと，AF：AD＝FG：DB であるから

$14:(14+x)=7:2x$

よって，$7(14+x)=14\times2x$ である。

これを解いて　　$x=\dfrac{14}{3}$

したがって，DF の長さは　$\dfrac{14}{3}$

(2) (1)の③より，DB∥FG で，$\mathrm{DF}=\dfrac{14}{3}$ であるから

$$\mathrm{AG}:\mathrm{GB}=\mathrm{AF}:\mathrm{DF}=14:\frac{14}{3}=3:1$$

AG＝$3k$，GB＝k ($k>0$) とおく。

△BGF と △EGA において，

対頂角は等しいから　　∠BGF＝∠EGA　……⑤

円周角の定理により　　∠BFG＝∠EAG　……⑥

⑤，⑥より，2組の角がそれぞれ等しいから　　△BGF∽△EGA

よって　　BG：EG＝GF：GA

$k:6=7:3k$

$3k^2=42$

$k^2=14$ であり，$k>0$ より　$k=\sqrt{14}$

したがって　　$\mathrm{AG}=3k=3\sqrt{14}$

(3) (1)より　∠FAG＝∠DBF　……④

(1)の③より，DB∥FG であるから　∠DBF＝∠BFE　……⑦

円周角の定理により　∠BFE＝∠BAE　……⑧

⑦，⑧より　∠DBF＝∠BAE　……⑨

④，⑨より　∠FAG＝∠BAE

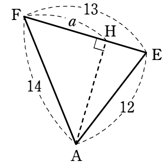
よって，AB は ∠DAC の二等分線となっている。

よって　　AF：AE＝FG：GE＝7：6

AF＝14 であるから　AE＝12

A から FE に引いた垂線と FE の交点を H とする。

また，線分 FH の長さを a とする。



直角三角形 AFH に三平方の定理を用いて

$\mathrm{AH}^2=14^2-a^2=196-a^2$

直角三角形 AEH に三平方の定理を用いて

$\mathrm{AH}^2=12^2-(13-a)^2=-25+26a-a^2$

$196-a^2=-25+26a-a^2$ より　$a=\dfrac{17}{2}$

よって　$\mathrm{AH}=\sqrt{196-\left(\dfrac{17}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{55}}{2}$

したがって，△AEF の面積は　$\dfrac{1}{2}\times13\times\dfrac{3\sqrt{55}}{2}=\dfrac{39\sqrt{55}}{4}$

AG：GB＝3：1 であるから，△BEF の面積は　$\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{AEF}=\dfrac{13\sqrt{55}}{4}$

以上により，四角形 AEBF の面積は　$\dfrac{39\sqrt{55}}{4}+\dfrac{13\sqrt{55}}{4}=13\sqrt{55}$