1

解説

（ア）$x^2=9$ を整理すると　$x^2-9=0$

これは x についての２次方程式である。

（イ）$(x-2)(x+3)=4$ を整理すると　$x^2+x-10=0$

これは x についての２次方程式である。

（ウ）$x(x-1)=(x+2)(x-5)$ を整理すると　$2x+10=0$

これは x についての２次方程式ではない。

よって　（ア），（イ）

2

解説

(1)　$x=\pm 2$

(2)　$x=\pm\sqrt{10}$

(3)　$x=\pm\sqrt{12}$　すなわち　$x=\pm 2\sqrt{3}$

(4)　$x^2=8$　より　$x=\pm\sqrt{8}$　すなわち　$x=\pm 2\sqrt{2}$

3

解説

(1)　$(x+2)^2=5$

$x+2$ は５の平方根であるから

$$x+2=\pm\sqrt{5}$$

よって　$x=-2\pm\sqrt{5}$

(2)　$(x+1)^2-2=0$

-2 を移項すると

$$(x+1)^2=2$$

$x+1$ は２の平方根であるから

$$x+1=\pm\sqrt{2}$$

よって　$x=-1\pm\sqrt{2}$

(3)　$(x-3)^2-16=0$

-16 を移項すると

$$(x-3)^2=16$$

$x-3$ は 16 の平方根であるから

$$x-3=\pm 4$$

$$x=3\pm 4$$

$x=3+4$ から　$x=7$，$x=3-4$ から　$x=-1$

よって　$x=7,\ -1$

4

解説

(1)　$x^2+6x+4=0$

$$x^2+6x=-4$$

$$x^2+6x+3^2=-4+3^2$$

$$(x+3)^2=5$$

$$x+3=\pm\sqrt{5}$$

よって　$x=-3\pm\sqrt{5}$

(2)　$x^2-4x-8=0$

$$x^2-4x=8$$

$$x^2-4x+2^2=8+2^2$$

$$(x-2)^2=12$$

$$x-2=\pm\sqrt{12}$$

よって　$x=2\pm 2\sqrt{3}$

(3)　$x^2+3x-5=0$

$$x^2+3x=5$$

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=5+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$$

$$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

よって　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$

(4)　$3x^2-4x-1=0$

$$x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}=0$$

$$x^2-\frac{4}{3}x=\frac{1}{3}$$

$$x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$$

$$x-\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$x=\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

よって　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

5

解説

(1)　$x^2-4x-12=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x-6)=0$

よって　$x+2=0$　または　$x-6=0$

したがって　$x=-2,\ 6$　答

(2)　$3x^2+7x+4=0$

左辺を因数分解すると　$(x+1)(3x+4)=0$

よって　$x+1=0$　または　$3x+4=0$

したがって　$x=-1,\ -\dfrac{4}{3}$　答

(3)　両辺を２で割ると

$x^2-6x+5=0$

左辺を因数分解すると　$(x-1)(x-5)=0$

よって　$x-1=0$　または　$x-5=0$

したがって　$x=1,\ 5$　答

6

解説

(1)　$x=\dfrac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\times3\times5}}{2\times3}$

$$=\frac{9\pm\sqrt{81-60}}{6}=\frac{9\pm\sqrt{21}}{6}$$

(2)　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}$

$$=\frac{5\pm\sqrt{25+20}}{2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{45}}{2}=\frac{5\pm3\sqrt{5}}{2}$$

(3)　両辺に -1 を掛けて　$x^2+2x-4=0$

よって　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\dfrac{-2\pm\sqrt{20}}{2}$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5}$$

別解　x の係数が -2（偶数）なので，$ax^2+2b'x+c=0$ の解の公式

$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$　を用いることができる。

（両辺に -1 を掛けて　$x^2+2x-4=0$　までは同じ）

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}}{1}=-1\pm\sqrt{5}$

7

解説

(1)　左辺を因数分解すると　$(x+1)(x+4)=0$

よって　$x=-1,\ -4$

(2)　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

8

解説

(1)　$(2x-1)(x-1)=x(2-x)$

$2x^2-3x+1=2x-x^2$

整理すると　$3x^2-5x+1=0$

よって　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times3\times1}}{2\times3}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$　答

(2)　$\dfrac{x^2-2}{2}-\dfrac{x^2-5x}{3}=3$

両辺に６をかけて　$3(x^2-2)-2(x^2-5x)=18$

$3x^2-6-2x^2+10x=18$

整理すると　$x^2+10x-24=0$

左辺を因数分解すると　$(x-2)(x+12)=0$

よって　$x=2,\ -12$　答

$\boxed{9}$

(解説)

(1)　$x^2=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$$t^2-7t+12=0$$
$$(t-3)(t-4)=0$$

よって　$t=3,\ 4$

すなわち　$x^2=3$　または　$x^2=4$

したがって　$x=\pm\sqrt{3},\ \pm2$

(2)　$x^2-5x=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$$t^2+10t+24=0$$
$$(t+4)(t+6)=0$$

よって　$t=-4,\ -6$

すなわち　$x^2-5x=-4$　または　$x^2-5x=-6$

$x^2-5x=-4$ から　$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

したがって　$x=1,\ 4$

$x^2-5x=-6$ から　$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

したがって　$x=2,\ 3$

答　$x=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\boxed{10}$

(解説)

(1)　2次方程式 $2x^2+7x+4=0$ について，判別式を D とすると

$$D=7^2-4\cdot2\cdot4=49-32=17>0$$

であるから，実数解の個数は2個である。

(2)　2次方程式 $4x^2-8x+5=0$ について，判別式を D とすると

$$D=(-8)^2-4\cdot4\cdot5=64-80=-16<0$$

であるから，実数解の個数は0個である。

(3)　2次方程式 $x^2-2\sqrt{5}x+5=0$ について，判別式を D とすると

$$D=(-2\sqrt{5})^2-4\cdot1\cdot5=20-20=0$$

であるから，実数解の個数は1個である。

$\boxed{11}$

(解説)

この2次方程式について，判別式を D とすると

$$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(m-1)=4(2-m)$$

(1)　異なる2つの実数解をもつのは $D>0$ のときであるから

$4(2-m)>0$　　これを解いて　$m<2$

(2)　実数解をもたないのは $D<0$ のときであるから

$4(2-m)<0$　　これを解いて　$m>2$

$\boxed{12}$

(解説)

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3},\ \alpha\beta=-\dfrac{4}{3}$

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=-\dfrac{8}{9}$

(2)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{3}\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$

(3)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{28}{9}$

(4)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{28}{9}\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{28}{9}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{7}{3}$

(5)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta=\dfrac{28}{9}-2\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{28}{9}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{52}{9}$

$\boxed{13}$

(解説)

もとの自然数を x とおく。

x から3をひいた数の2乗が，15から x をひいた数と等しくなるから

$$(x-3)^2=15-x$$
$$x^2-6x+9=15-x$$
$$x^2-5x-6=0$$
$$(x+1)(x-6)=0$$

よって　$x=-1,\ 6$

x は自然数であるから，$x=-1$ は，この問題には適さない。

$x=6$ は，問題に適している。　答　6

$\boxed{14}$

(解説)

(1)　直線ABは，傾きが $-\dfrac{3}{4}$，y 切片が3である。

よって，直線ABの式は　$y=-\dfrac{3}{4}x+3$

$t=3$ のとき，点Pの x 座標は3である。

よって，辺ABと直線 m の交点の y 座標は

$$-\frac{3}{4}\times3+3=\frac{3}{4}$$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\times3\times\left(3+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{45}{8}$ (cm^2)

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\times t\times\left\{3+\left(-\dfrac{3}{4}t+3\right)\right\}=\dfrac{1}{2}t\left(-\dfrac{3}{4}t+6\right)$

$=-\dfrac{3}{8}t^2+3t$

(3)　$S=\dfrac{9}{2}$ であるから

$$-\frac{3}{8}t^2+3t=\frac{9}{2}$$
$$t^2-8t+12=0$$
$$(t-2)(t-6)=0$$

点Pは辺OB上にあるから　$0\leqq t\leqq4$

よって　$t=2$

$t=6$ はこの問題には適さない。　答　$t=2$

$\boxed{15}$

(解説)

(1)　20 % の食塩水 100 g の中には，$100\times\dfrac{20}{100}=20$ (g) の食塩が含まれる。

1回目の操作後の食塩の量は，最初の食塩の量の $\dfrac{100-x}{100}$ 倍であるから

$$20\times\frac{100-x}{100}=\frac{100-x}{5}\ (\mathrm{g})$$

(2)　2回目の操作後の容器Aの中の食塩の量は

$$\frac{100-x}{5}\times\frac{100-x}{100}=\frac{(100-x)^2}{500}\ (\mathrm{g})$$

この量の食塩を含む 100 g の食塩水の濃度が 5 % であるから

$$\frac{(100-x)^2}{500}=100\times\frac{5}{100}$$
$$(100-x)^2=2500$$
$$100-x=\pm50$$
$$x=50,\ 150$$

$x<100$ であるから　$x=50$

1

解説

①～⑥の方程式を整理すると，次のようになる。

① $x^2-12=0$　② $6x^2-9x=0$　③ $-3x-6=0$

④ $-15x^2+8x-10=0$　⑤ $4x-10=0$　⑥ $x^2-2x-3=0$

よって，x についての２次方程式であるものは　①，②，④，⑥

2

解説

(1) $x=\pm 6$

(2) $x=\pm\sqrt{5}$

(3) $x=\pm\sqrt{40}$　すなわち　$x=\pm 2\sqrt{10}$

(4) $x^2=28$　より　$x=\pm\sqrt{28}$　すなわち　$x=\pm 2\sqrt{7}$

3

解説

(1) $(x+3)^2=5$

$x+3=\pm\sqrt{5}$

よって　$x=-3\pm\sqrt{5}$

(2) $(x+1)^2=25$

$x+1=\pm 5$

$x=-1\pm 5$

$x=-1+5$ から　$x=4$　　$x=-1-5$ から　$x=-6$

よって　$x=4,\ -6$

(3) $(x+2)^2-18=0$

$(x+2)^2=18$

$x+2=\pm 3\sqrt{2}$

よって　$x=-2\pm 3\sqrt{2}$

(4) $(x-4)^2-49=0$

$(x-4)^2=49$

$x-4=\pm 7$

$x=4\pm 7$

$x=4+7$ から　$x=11$　　$x=4-7$ から　$x=-3$

よって　$x=11,\ -3$

4

解説

(1) $x^2+8x-4=0$

$x^2+8x=4$

$x^2+8x+4^2=4+4^2$

$(x+4)^2=20$

$x+4=\pm 2\sqrt{5}$

よって　$x=-4\pm 2\sqrt{5}$

(2) $x^2-6x+7=0$

$x^2-6x=-7$

$x^2-6x+3^2=-7+3^2$

$(x-3)^2=2$

$x-3=\pm\sqrt{2}$

よって　$x=3\pm\sqrt{2}$

(3) $x^2+3x+1=0$

$x^2+3x=-1$

$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-1+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

よって　$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(4) $x^2-5x-3=0$

$x^2-5x=3$

$x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=3+\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{37}{4}$

$x-\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$

$x=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$

よって　$x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

(5) $3x^2+7x+1=0$

$x^2+\frac{7}{3}x+\frac{1}{3}=0$

$x^2+\frac{7}{3}x=-\frac{1}{3}$

$x^2+\frac{7}{3}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}+\left(\frac{7}{6}\right)^2$

$\left(x+\frac{7}{6}\right)^2=\frac{37}{36}$

$x+\frac{7}{6}=\pm\frac{\sqrt{37}}{6}$

$x=-\frac{7}{6}\pm\frac{\sqrt{37}}{6}$

よって　$x=\frac{-7\pm\sqrt{37}}{6}$

(6) $5x^2-6x-2=0$

$x^2-\frac{6}{5}x-\frac{2}{5}=0$

$x^2-\frac{6}{5}x=\frac{2}{5}$

$x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{19}{25}$

$x-\frac{3}{5}=\pm\frac{\sqrt{19}}{5}$

$x=\frac{3}{5}\pm\frac{\sqrt{19}}{5}$

よって　$x=\frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$

5

解説

(1)　左辺を因数分解すると　$x(x+4)=0$

よって　$x=0$　または　$x+4=0$

したがって　$x=0$　または　$x=-4$

答　$x=0,\ -4$

(2)　左辺を因数分解すると　$(x+3)(x+5)=0$

よって　$x+3=0$　または　$x+5=0$

したがって　$x=-3$　または　$x=-5$

答　$x=-3,\ -5$

(3)　左辺を因数分解すると　$(x-1)(x-5)=0$

よって　$x-1=0$　または　$x-5=0$

したがって　$x=1$　または　$x=5$

答　$x=1,\ 5$

(4)　左辺を因数分解すると　$(x+12)(x-3)=0$

よって　$x+12=0$　または　$x-3=0$

したがって　$x=-12$　または　$x=3$

答　$x=-12,\ 3$

(5)　左辺を因数分解すると　$(x+2)(x-10)=0$

よって　$x+2=0$　または　$x-10=0$

したがって　$x=-2$　または　$x=10$

答　$x=-2,\ 10$

(6)　左辺を因数分解すると　$(x+7)^2=0$

よって　$x+7=0$

したがって　$x=-7$

(7)　左辺を因数分解すると　$(2x-3)^2=0$

よって　$2x-3=0$

したがって　$x=\frac{3}{2}$

(8)　左辺を因数分解すると　$(2x+3)(3x-2)=0$

よって　$2x+3=0$　または　$3x-2=0$

したがって　$x=-\frac{3}{2}$　または　$x=\frac{2}{3}$

答　$x=-\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}$

(9)　左辺を因数分解すると　$(3x+2)(4x-5)=0$

よって　$3x+2=0$　または　$4x-5=0$

したがって　$x=-\frac{2}{3}$　または　$x=\frac{5}{4}$

答　$x=-\frac{2}{3},\ \frac{5}{4}$

(10)　両辺を 3 で割ると

$x^2-7x-18=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x-9)=0$

よって　$x+2=0$　または　$x-9=0$

したがって　$x=-2,\ 9$　答

6

解説

(1)　$2x^2+7x+1=0$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times2\times1}}{2\times2}=\frac{-7\pm\sqrt{41}}{4}$$

(2)　$7x^2-3x-1=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times7\times(-1)}}{2\times7}=\frac{3\pm\sqrt{37}}{14}$$

(3)　$3x^2-5x-4=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times3\times(-4)}}{2\times3}=\frac{5\pm\sqrt{73}}{6}$$

(4)　$4x^2-7x+1=0$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times4\times1}}{2\times4}=\frac{7\pm\sqrt{33}}{8}$$

(5)　$6x^2+3x-4=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times6\times(-4)}}{2\times6}=\frac{-3\pm\sqrt{105}}{12}$$

(6)　$x^2+5x+2=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$

(7)　$2x^2+2x-1=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

(8)　$x^2-6x-5=0$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}=\frac{6\pm\sqrt{56}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{14}}{2}=3\pm\sqrt{14}$$

(9)　$3x^2+4x-6=0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times3\times(-6)}}{2\times3}=\frac{-4\pm\sqrt{88}}{6}=\frac{-4\pm2\sqrt{22}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{22}}{3}$$

(10)　両辺に -1 を掛けて　$2x^2-5x-1=0$

よって　$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{4}$

(11)　両辺に -1 を掛けて　$x^2+x-11=0$

よって　$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-11)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{45}}{2}=\frac{-1\pm3\sqrt{5}}{2}$

参考　(5)，(7)，(8)，(9) は $ax^2+2b'x+c=0$ の解の公式 $x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ を用いて，解くこともできる。

7

解説

(1)　$x^2+2x-15=0$

左辺を因数分解すると

$(x+5)(x-3)=0$

よって　$x=-5,\ 3$

(2)　$x^2+7x+2=0$

解の公式により　$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times1\times2}}{2\times1}$

$=\frac{-7\pm\sqrt{41}}{2}$

(3)　$x^2-12x-28=0$

左辺を因数分解すると

$(x+2)(x-14)=0$

よって　$x=-2,\ 14$

(4)　$x^2+5x+1=0$

解の公式により　$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times1}}{2\times1}$

$=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

(5)　$x^2-8x+12=0$

左辺を因数分解して

$(x-2)(x-6)=0$

よって　$x=2,\ 6$

(6)　$5x^2-9x+3=0$

解の公式により

$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\times5\times3}}{2\times5}$

$=\frac{9\pm\sqrt{81-60}}{10}$

$=\frac{9\pm\sqrt{21}}{10}$

(7)　$x^2+5x+3=0$

解の公式により　$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times3}}{2\times1}$

$=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

(8)　$x^2+15x+36=0$

左辺を因数分解すると

$(x+12)(x+3)=0$

よって　$x=-12,\ -3$

(9)　$3x^2+5x-2=0$

左辺を因数分解すると

$(x+2)(3x-1)=0$

よって　$x=-2,\ \frac{1}{3}$

(10)　$3x^2-5x+1=0$

解の公式により

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times3\times1}}{2\times3}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$$

(11)　$x^2-5x+6=0$

左辺を因数分解すると

$(x-2)(x-3)=0$

よって　$x=2,\ 3$

(12) $6x^2-5x-6=0$

左辺を因数分解すると　$(2x-3)(3x+2)=0$

よって　$x=\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{2}{3}$

(13) $x^2-5x+2=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times2}}{2\times1}$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

(14) $x^2-4x-12=0$

左辺を因数分解して

$(x+2)(x-6)=0$

よって　$x=-2$，6

(15) $2x^2-7x+1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times1}}{2\times2}$

$=\dfrac{7\pm\sqrt{41}}{4}$

$\boxed{8}$

解説

(1) $(x-2)^2-2(x-1)(x+3)=1$ を整理すると

$x^2+8x-9=0$

$(x-1)(x+9)=0$

よって　$x=1$，-9

(2) $(x+4)(x+6)=-x(3x+10)$ を整理すると

$4x^2+20x+24=0$

$x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$

よって　$x=-2$，-3

(3) $(2x-3)(5x+6)-(3x+4)(3x-4)=0$ を整理すると

$x^2-3x-2=0$

よって　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

(4) $2x(x+1)-7=(x+3)(3x-1)$ を整理すると

$x^2+6x+4=0$

よって　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-1\times4}}{1}=-3\pm\sqrt{5}$

(5) $3x+1=\dfrac{1}{4}(x-4)^2$

両辺に 4 をかけて整理すると　$x^2-20x+12=0$

よって　$x=\dfrac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-1\times12}}{1}$

$=10\pm\sqrt{88}=10\pm2\sqrt{22}$

(6) $\dfrac{x(x+1)}{3}=x^2-1$

両辺に 3 をかけて整理すると　$2x^2-x-3=0$

$(x+1)(2x-3)=0$

よって　$x=-1$，$\dfrac{3}{2}$

$\boxed{9}$

解説

(1) $x^4-6x^2+8=0$

$x^2=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$t^2-6t+8=0$

$(t-2)(t-4)=0$

よって　$t=2$，4

すなわち　$x^2=2$ または $x^2=4$

したがって　$x=\pm\sqrt{2}$，±2

(2) $3x^4-10x^2+8=0$

$x^2=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$3t^2-10t+8=0$

$(t-2)(3t-4)=0$

よって　$t=2$，$\dfrac{4}{3}$

すなわち　$x^2=2$ または $x^2=\dfrac{4}{3}$

したがって　$x=\pm\sqrt{2}$，$\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(3) $(x^2+3x)^2-26(x^2+3x)-56=0$

$x^2+3x=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$t^2-26t-56=0$

$(t+2)(t-28)=0$

よって　$t=-2$，28

すなわち　$x^2+3x=-2$ または $x^2+3x=28$

$x^2+3x=-2$ より　$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

よって　$x=-1$，-2

$x^2+3x=28$ より　$x^2+3x-28=0$

$(x-4)(x+7)=0$

よって　$x=4$，-7

したがって　$x=-7$，-2，-1，4

(4) $(x^2+6x)^2+18(x^2+6x)+81=0$

$x^2+6x=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$t^2+18t+81=0$

$(t+9)^2=0$

よって　$t=-9$

すなわち　$x^2+6x=-9$

$(x+3)^2=0$

したがって　$x=-3$

$\boxed{10}$

解説

(1) $x^2+5x+7=0$ について，判別式を D とすると

$D=5^2-4\cdot1\cdot7=-3<0$

よって，実数解の個数は　0 個

(2) $9x^2-12x+4=0$ について，判別式を D とすると

$D=(-12)^2-4\cdot9\cdot4=0$

よって，実数解の個数は　1 個

(3) $3x^2-7x+2=0$ について，判別式を D とすると

$D=(-7)^2-4\cdot3\cdot2=25>0$

よって，実数解の個数は　2 個

(4) $2x^2-3x-8=0$ について，判別式を D とすると

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-8)=73>0$

よって，実数解の個数は　2 個

(5) $\dfrac{1}{9}x^2+2x+9=0$ について，判別式を D とすると

$D=2^2-4\cdot\dfrac{1}{9}\cdot9=0$

よって，実数解の個数は　1 個

(6) $5x^2-3\sqrt{2}x+1=0$ について，判別式を D とすると

$D=(-3\sqrt{2})^2-4\cdot5\cdot1=-2<0$

よって，実数解の個数は　0 個

$\boxed{11}$

解説

(1) この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=5^2-4\cdot1\cdot m=-4m+25$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは $D>0$ のときであるから

$-4m+25>0$

これを解いて　$m<\dfrac{25}{4}$

(2) この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(m-1)=-8m+17$

2 次方程式が実数解をもたないのは $D<0$ のときであるから

$-8m+17<0$

これを解いて　$m>\dfrac{17}{8}$

(3) この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=6^2-4\cdot3\cdot(2m-1)=-24m+48$

2 次方程式が実数解をもつのは $D\geqq0$ のときであるから

$-24m+48\geqq0$

これを解いて　$m\leqq2$

$\boxed{12}$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-6,\ \alpha\beta=-3$

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-3\cdot(-6)=18$

(2)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-6}{-3}=2$

(3)　$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-3-6+1=-8$

(4)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-6)^2-2\cdot(-3)=42$

(5)　$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=42-2\cdot(-3)=48$

$\boxed{13}$

解説

もとの自然数を x とおく。

x から 4 をひいた数の 2 乗が，x に 3 を
たして 10 倍した数よりも 5 大きいから

$$(x-4)^2=10(x+3)+5$$
$$x^2-8x+16=10x+35$$
$$x^2-18x-19=0$$
$$(x+1)(x-19)=0$$

よって　$x=-1,\ 19$

x は自然数であるから，$x=-1$ は，
この問題には適さない。

$x=19$ は，問題に適している。　答　19

$\boxed{14}$

解説

(1)　△OAB の面積は　$\dfrac{1}{2}\times6\times3=9$

PA＝PQ＝$6-t$ であるから，△PAQ の面積は

$$\frac{1}{2}\times(6-t)\times(6-t)=18-6t+\frac{1}{2}t^2$$

よって　$S=9-\left(18-6t+\dfrac{1}{2}t^2\right)=-\dfrac{1}{2}t^2+6t-9$

(2)　$-\dfrac{1}{2}t^2+6t-9=7$

$$t^2-12t+32=0$$
$$(t-4)(t-8)=0$$

$3<t<6$ であるから　$t=4$

$t=8$ は，この問題には適さない。　答　$t=4$

$\boxed{15}$

解説

10 %の食塩水 200 g の中に含まれる食塩の量は　$200\times\dfrac{10}{100}=20$ (g)

1 回目の操作後の食塩の量は，最初の食塩の量の $\dfrac{200-x}{200}$ 倍であるから

$$20\times\frac{200-x}{200}=\frac{200-x}{10}\ \text{(g)}$$

2 回目の操作後の食塩の量は

$$\frac{200-x}{10}\times\frac{200-x}{200}=\frac{(200-x)^2}{2000}\ \text{(g)}$$

食塩水の濃度が 2.5 %であるから　$\dfrac{(200-x)^2}{2000}=200\times\dfrac{2.5}{100}$

$$(200-x)^2=1000$$
$$200-x=\pm100$$
$$x=100,\ 300$$

$x<200$ であるから，$x=300$ はこの問題には適さない。

$x=100$ はこの問題に適している。　答　$x=100$

1

解説

(1) $x^2-x=2(6-x)$

かっこをはずして整理すると

$x^2-x=12-2x$

$x^2+x-12=0$

左辺を因数分解して

$(x+4)(x-3)=0$

よって　$x=-4,\ 3$

(2) $(x+4)(x-2)=3x-2$

$x^2+2x-8=3x-2$

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

よって　$x=-2,\ 3$

(3) $x(x-4)=2x^2-5$

$x^2-4x=2x^2-5$

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1,\ -5$

(4) $(x+4)(x-3)=3(x+1)$

展開して整理すると

$x^2+x-12=3x+3$

$x^2-2x-15=0$

左辺を因数分解して

$(x+3)(x-5)=0$

よって　$x=-3,\ 5$

(5) $(x-2)^2-1=2(3-x)$

$x^2-4x+4-1=6-2x$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

よって　$x=-1,\ 3$

(6) $x^2+10+(x+4)(x-11)=(x+2)(x-2)$

$x^2+10+x^2-7x-44=x^2-4$

$x^2-7x-30=0$

$(x+3)(x-10)=0$

よって　$x=-3,\ 10$

(7) $(2x-1)(x-3)=-x^2-x$

$2x^2-6x-x+3=-x^2-x$

$2x^2-7x+3=-x^2-x$

$3x^2-6x+3=0$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x-1=0$

$x=1$

(8) $(x-1)(x-4)+(x-2)(x-1)+(x-3)(x+2)=0$

$x^2-5x+4+x^2-3x+2+x^2-x-6=0$

$3x^2-9x=0$

$3x(x-3)=0$

よって　$x=0,\ 3$

(9) $(2x+1)^2=16+3x(x+2)$

$4x^2+4x+1=16+3x^2+6x$

$x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0$

$x=-3,\ 5$

(10) $\dfrac{(x+2)(x+4)}{3}=\dfrac{x(x-1)}{2}$

$2(x+2)(x+4)=3x(x-1)$

$2(x^2+6x+8)=3x^2-3x$

$-x^2+15x+16=0$

$x^2-15x-16=0$

$(x+1)(x-16)=0$

よって　$x=-1,\ 16$

(11) $\dfrac{1}{4}x(2x+3)=-3\left(\dfrac{1}{4}x-3\right)$

$x(2x+3)=-3(x-12)$

$2x^2+3x=-3x+36$

$2x^2+6x-36=0$

$x^2+3x-18=0$

$(x-3)(x+6)=0$

$x=3,\ -6$

(12) $\dfrac{x(x-3)}{2}=\dfrac{(x-2)(x-1)}{3}+1$

$3x(x-3)=2(x-2)(x-1)+6$

$x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$

したがって　$x=-2,\ 5$

2

解説

(1) $2x+1=x^2+x$

$0=x^2-x-1$

$x^2-x-1=0$

解の公式により

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

(2) $(x+2)^2=3x+5$

展開して整理すると

$x^2+4x+4=3x+5$

$x^2+x-1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) $(3x+4)(x-2)=6x-9$

$3x^2-6x+4x-8=6x-9$

$3x^2-8x+1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times3\times1}}{2\times3}=\dfrac{8\pm2\sqrt{13}}{6}$

$=\dfrac{4\pm\sqrt{13}}{3}$

(4) $2(x+1)(x-2)=3x-3$

展開して整理すると

$2(x^2-x-2)=3x-3$

$2x^2-2x-4=3x-3$

$2x^2-5x-1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{4}$

(5) $(3x-1)(x-2)-3(1-2x)=0$

$3x^2-6x-x+2-3+6x=0$

$3x^2-x-1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

(6) $2(x^2+1)-x=(x+1)^2$

展開して整理すると

$2x^2+2-x=x^2+2x+1$

$x^2-3x+1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(7) $2(x-1)=(x-3)^2+3$

$2x-2=x^2-6x+9+3$

$x^2-8x+14=0$

解の公式により

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times14}}{2\times1}$$

$=4\pm\sqrt{2}$

(8) $3(x+1)(x-4)-(x-3)^2=-20$

$3(x^2-3x-4)-(x^2-6x+9)=-20$

$3x^2-9x-12-x^2+6x-9=-20$

$2x^2-3x-1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

(9)　$\dfrac{2x^2-x+2}{3}=\dfrac{3x^2+2}{4}$

両辺に 12 をかけて

$4(2x^2-x+2)=3(3x^2+2)$

$8x^2-4x+8=9x^2+6$

$x^2+4x-2=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$

$=\dfrac{-4\pm2\sqrt{6}}{2}$

$=-2\pm\sqrt{6}$

(10)　$\dfrac{x^2-x}{2}-\dfrac{2x+3}{6}=\dfrac{x^2-4}{3}$

両辺に 6 をかけると

$3(x^2-x)-(2x+3)=2(x^2-4)$

$3x^2-3x-2x-3=2x^2-8$

$x^2-5x+5=0$

解の公式により

$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times5}}{2\times1}$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

3

解説

(1)　$x^2=144$

$x=\pm12$

(2)　$3x^2=108$

$x^2=36$

$x=\pm6$

(3)　$t^2-4t-21=0$

$(t+3)(t-7)=0$

$t=-3,\ 7$

(4)　$4x^2-39x+27=0$

$(x-9)(4x-3)=0$

$x=9,\ \dfrac{3}{4}$

(5)　$3x^2-24x+45=0$

$x^2-8x+15=0$

$(x-3)(x-5)=0$

$x=3,\ 5$

(6)　$x^2+9=-6x$

$x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

$x=-3$

(7)　$(x-3)^2=100$

$x-3=\pm10$

$x=13,\ -7$

(8)　$(2p+5)^2=16$

$2p+5=\pm4$

$2p=-1,\ -9$

$p=-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{9}{2}$

(9)　$-x^2+3x-1=0$

$x^2-3x+1=0$

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(10)　$x^2+5x+2=0$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

(11)　$a^2+4a-1=0$

$a=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-1)}}{1}=-2\pm\sqrt{5}$

(12)　$2x^2-14x-49=0$

$x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-2\times(-49)}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49\times3}}{2}=\dfrac{7\pm7\sqrt{3}}{2}$

(13)　$(x+4)(x-4)=6x$

$x^2-16=6x$

$x^2-6x-16=0$

$(x+2)(x-8)=0$

$x=-2,\ 8$

(14)　$x(x-4)=12-5x$

$x^2-4x=12-5x$

$x^2+x-12=0$

$(x-3)(x+4)=0$

$x=3,\ -4$

(15)　$x(3x+2)=x^2-4x$

$3x^2+2x=x^2-4x$

$2x^2+6x=0$

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0$

$x=0,\ -3$

(16)　$3(x+1)(x-2)=2(x^2-2)$

$3(x^2-x-2)=2x^2-4$

$x^2-3x-2=0$

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

$\boxed{4}$

解説

(1) $x^2-14=5x$

$x^2-5x-14=0$

左辺を因数分解して

$(x+2)(x-7)=0$

よって　$x=-2,\ 7$

(2) $(x-3)^2=x$

展開して整理すると

$x^2-6x+9=x$

$x^2-7x+9=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times1\times9}}{2\times1}$

$=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$

(3) $x^2-x=2(6-x)$

かっこをはずして整理すると

$x^2-x=12-2x$

$x^2+x-12=0$

左辺を因数分解して

$(x+4)(x-3)=0$

よって　$x=-4,\ 3$

(4) $(x+2)^2=3x+5$

展開して整理すると

$x^2+4x+4=3x+5$

$x^2+x-1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(5) $x^2-x=7(x-1)$

$x^2-x=7x-7$

$x^2-8x+7=0$

$(x-1)(x-7)=0$

$x=1,\ 7$

(6) $2x+1=x^2+x$

$0=x^2-x-1$

$x^2-x-1=0$

解の公式により

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(7) $(x-2)^2-1=2(3-x)$

$x^2-4x+4-1=6-2x$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

よって　$x=-1,\ 3$

(8) $(x+3)(x-2)=2x$

展開して整理すると

$x^2+x-6=2x$

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

よって　$x=-2,\ 3$

(9) $(3x-1)(x-2)-3(1-2x)=0$

$3x^2-6x-x+2-3+6x=0$

$3x^2-x-1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

(10) $(x-3)(x+4)=2(x-3)^2$

$x^2+x-12=2(x^2-6x+9)$

$x^2+x-12=2x^2-12x+18$

$x^2-13x+30=0$

$(x-3)(x-10)=0$

$x=3,\ 10$

(11) $2(x^2+1)-x=(x+1)^2$

展開して整理すると

$2x^2+2-x=x^2+2x+1$

$x^2-3x+1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(12) $(x+1)^2=x+7$

$x^2+2x+1=x+7$

$x^2+x-6=0$

$(x-2)(x+3)=0$

$x=2,\ -3$

(13) $(3x+4)(x-2)=6x-9$

$3x^2-6x+4x-8=6x-9$

$3x^2-8x+1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times3\times1}}{2\times3}=\dfrac{8\pm2\sqrt{13}}{6}$

$=\dfrac{4\pm\sqrt{13}}{3}$

(14) $2(x-1)=(x-3)^2+3$

$2x-2=x^2-6x+9+3$

$x^2-8x+14=0$

解の公式により

$x=\dfrac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times14}}{2\times1}$

$=4\pm\sqrt{2}$

(15) $(2x+1)^2-2(x^2-3)-6=0$

$4x^2+4x+1-2x^2+6-6=0$

$2x^2+4x+1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times2\times1}}{2\times2}$

$=\dfrac{-4\pm\sqrt{8}}{4}$

$=\dfrac{-4\pm2\sqrt{2}}{4}$

$=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$

(16) $x^2+10+(x+4)(x-11)=(x+2)(x-2)$

$x^2+10+x^2-7x-44=x^2-4$

$x^2-7x-30=0$

$(x+3)(x-10)=0$

よって　$x=-3,\ 10$

(17) $(x+4)(x-2)=3x-2$

$x^2+2x-8=3x-2$

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

よって　$x=-2,\ 3$

(18) $x(x-4)=2x^2-5$

$x^2-4x=2x^2-5$

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1,\ -5$

5

解説

(1) $(x-2)(x-4)=(2x-3)^2$

$x^2-6x+8=4x^2-12x+9$

整理すると　$3x^2-6x+1=0$

よって　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-3\times1}}{3}=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$

(2) $3x^2-(x-1)(x+5)=(2x+3)^2$

$3x^2-(x^2+4x-5)=4x^2+12x+9$

整理すると　$x^2+8x+2=0$

よって　$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-1\times2}}{1}=-4\pm\sqrt{14}$

(3) $\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}=\dfrac{x+3}{2}$

$\dfrac{x^2-4x+4}{4}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{x+3}{2}$

両辺に 4 をかけて　$x^2-4x+4-5=2(x+3)$

整理すると　$x^2-6x-7=0$

左辺を因数分解すると　$(x+1)(x-7)=0$

よって　$x=-1,\ 7$

(4) $4.5x^2-2.25x-0.25=0$

両辺に 4 をかけて　$18x^2-9x-1=0$

よって　$x=\dfrac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\times18\times(-1)}}{2\times18}=\dfrac{9\pm\sqrt{153}}{36}$

$=\dfrac{9\pm3\sqrt{17}}{36}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{12}$

(5) $(5x-1)(x+2)=(x+3)(x+7)-20$

$5x^2+9x-2=x^2+10x+21-20$

整理すると　$4x^2-x-3=0$

左辺を因数分解すると　$(x-1)(4x+3)=0$

よって　$x=1,\ -\dfrac{3}{4}$

6

解説

(1) $2(x^2+2)-(x-3)(x-4)=0$ を整理すると　$x^2+7x-8=0$

$(x-1)(x+8)=0$

よって　$x=1,\ -8$

(2) $(x-4)(2x+3)=5x(x-4)$ より

$(x-4)\{(2x+3)-5x\}=0$

$(x-4)(-3x+3)=0$

$-3(x-4)(x-1)=0$

$(x-4)(x-1)=0$

よって　$x=4,\ 1$

(3) $(2x-3)(5x+6)-(3x+4)(3x-4)=0$ を整理すると　$x^2-3x-2=0$

よって　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

(4) $(x+1)^2=3(x-1)^2$　を整理すると　$x^2-4x+1=0$

よって　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times1}}{1}=2\pm\sqrt{3}$

(5) $2x+6=\dfrac{1}{3}(x-3)^2$

両辺に 3 をかけて整理すると　$x^2-12x-9=0$

よって　$x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-1\times(-9)}}{1}=6\pm\sqrt{45}=6\pm3\sqrt{5}$

(6) $\dfrac{x(x+1)}{3}=x^2-1$

両辺に 3 をかけて整理すると　$2x^2-x-3=0$

$(x+1)(2x-3)=0$

よって　$x=-1,\ \dfrac{3}{2}$

(7) $\dfrac{x^2-2}{2}-\dfrac{x^2-5x}{3}=3$

両辺に 6 をかけて整理すると　$x^2+10x-24=0$

$(x-2)(x+12)=0$

よって　$x=2,\ -12$

(8) $\dfrac{1}{2}x(x-3)=3\left(\dfrac{1}{2}x+12\right)$

両辺に 2 をかけて整理すると　$x^2-6x-72=0$

$(x+6)(x-12)=0$

よって　$x=-6,\ 12$

(9) $x^2-0.5x-0.75=0$

両辺に 4 をかけると　$4x^2-2x-3=0$

よって　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times(-3)}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{4}$

(10) $0.25(x+3)^2=0.125(x+2)+0.75$

両辺に 8 をかけると　$2(x+3)^2=(x+2)+6$

整理すると　$2x^2+11x+10=0$

よって　$x=\dfrac{-11\pm\sqrt{11^2-4\times2\times10}}{2\times2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{41}}{4}$

7

解説

(1) $(x-10)^2-9(x-10)-22=0$

$x-10=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$t^2-9t-22=0$

$(t+2)(t-11)=0$

よって　$t=-2,\ 11$

すなわち　$x-10=-2$ または $x-10=11$

したがって　$x=8,\ 21$

(2) $(3x-2)^2-8(3x-2)+16=0$

$3x-2=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$t^2-8t+16=0$

$(t-4)^2=0$

よって　$t=4$

すなわち　$3x-2=4$

したがって　$x=2$

(3) $4\left(x+\dfrac{3}{8}\right)^2-\left(x+\dfrac{3}{8}\right)-1=0$

$x+\dfrac{3}{8}=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$4t^2-t-1=0$

よって　$t=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times4\times(-1)}}{2\times4}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}$

すなわち　$x+\dfrac{3}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}$

したがって　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{17}}{8}$

(4) $2(x-\sqrt{3})^2-3(x-\sqrt{3})-2=0$

$x-\sqrt{3}=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$2t^2-3t-2=0$

$(t-2)(2t+1)=0$

よって　$t=2,\ -\dfrac{1}{2}$

すなわち　$x-\sqrt{3}=2$ または $x-\sqrt{3}=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$x=2+\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$

(5) $(x^2-1)^2-3(x^2-1)+2=0$

因数分解して　$\{(x^2-1)-1\}\{(x^2-1)-2\}=0$

すなわち　$(x^2-2)(x^2-3)=0$　　よって　$x^2=2,\ 3$

ゆえに　$x=\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3}$

(6) $(x^2+x-1)(x^2+x-4)=-2$

展開して　$(x^2+x)^2-5(x^2+x)+4=-2$

すなわち　$(x^2+x)^2-5(x^2+x)+6=0$

左辺を因数分解すると

$\{(x^2+x)-2\}\{(x^2+x)-3\}=0$

よって　$(x-1)(x+2)(x^2+x-3)=0$

したがって

$x-1=0$ または $x+2=0$ または $x^2+x-3=0$

ゆえに　$x=1,\ -2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$\boxed{8}$［土浦日本大学附属］

解説

$x^2-2x+a=0$ に $x=1+\sqrt{2}$ を代入すると

$$(1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})+a=0$$

$$1+2\sqrt{2}+2-2-2\sqrt{2}+a=0$$

したがって　$a=-1$

よって，もとの式は

$$x^2-2x-1=0$$

解の公式により

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$=1\pm\sqrt{2}$$

したがって，もう 1 つの解は　$1-\sqrt{2}$

$\boxed{9}$［札幌大］

解説

$x^2+mx-m+8=0$ ……① とする。

(1)　$m=5$ のとき，① は　$x^2+5x+3=0$

これを解くと　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

(2)　① の判別式を D とすると

$$D=m^2-4\cdot1\cdot(-m+8)=m^2+4m-32=(m+8)(m-4)$$

① が重解をもつとき，$D=0$ であるから　$m=-8,\ 4$

$m>0$ であるから　$m=4$

このとき，① は　$x^2+4x+4=0$　よって，求める重解は　$x=-2$

(3)　解の 1 つが 2 であるとき，① に $x=2$ を代入すると

$2^2+2m-m+8=0$　よって　$m=-12$

このとき，① は　$x^2-12x+20=0$

よって　$(x-2)(x-10)=0$

したがって，もう 1 つの解は　$x=10$

$\boxed{10}$

解説

(1)，(2)　解と係数の関係から　$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

(3)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-1)=3$

(4)　$(\alpha-2\beta)(\beta-2\alpha)=\alpha\beta-2\alpha^2-2\beta^2+4\alpha\beta=5\alpha\beta-2(\alpha^2+\beta^2)$

$$=5\cdot(-1)-2\cdot3=-11$$

$\boxed{11}$［熊本県］

解説

方程式は　$(x+3)^2-21=10x$

これを解くと

$$x^2+6x+9-21=10x$$

$$x^2-4x-12=0$$

$$(x+2)(x-6)=0$$

よって　$x=-2,\ 6$

$\boxed{12}$［帝塚山泉ケ丘］

解説

ある正の数を x とすると

$$2x+2=(x^2-2)-1$$

整理して解くと

$$2x+2=x^2-3$$

$$x^2-2x-5=0$$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}=\dfrac{2\pm2\sqrt{6}}{2}$

$$=1\pm\sqrt{6}$$

x は正の数であるから，$x=1+\sqrt{6}$ は問題に適するが，$x=1-\sqrt{6}$ は問題に適さない。

よって，求める正の数は　$1+\sqrt{6}$

$\boxed{13}$［大阪経済大］

解説

連続する 5 つの正の奇数を

$2n+1,\ 2n+3,\ 2n+5,\ 2n+7,\ 2n+9$（$n$ は 0 以上の整数）

とする。

条件から　$(2n+1)(2n+9)=\{(2n+3)+(2n+5)+(2n+7)\}\times3+6$

両辺を展開して整理すると　$4n^2+20n+9=18n+51$

よって　$2n^2+n-21=0$　すなわち　$(n-3)(2n+7)=0$

n は 0 以上の整数であるから　$n=3$

したがって，最も大きい数は　$2\cdot3+9=15$

$\boxed{14}$［鹿児島県］

解説

$$x\times x-1\times3x=3$$

$$x^2-3x=3$$

$$x^2-3x-3=0$$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}$

$$=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$$

$\boxed{15}$［大阪教育大学附属池田］

解説

(1)　$3*(-2)=\{3+(-2)\}^2-2\times3+(-2)$

$$=1-6-2$$

$$=-7$$

(2)　$2*x=(2+x)^2-2\times2+x$

$$=x^2+4x+4-4+x$$

$$=x^2+5x$$

よって　$2*x=6$

$$x^2+5x=6$$

$$x^2+5x-6=0$$

$$(x-1)(x+6)=0$$

$$x=1,\ -6$$

$\boxed{16}$

解説

もとの長方形の縦の長さを x cm とすると

$$(x-8)\times\{(x+5)-8\}\times4=144$$

$$x^2-11x-12=0$$

$$(x+1)(x-12)=0$$

$x>8$ であるから　$x=12$

$x=-1$ は，この問題には適さない。

よって，横の長さは　$x+5=12+5=17$ (cm)

$\boxed{17}$

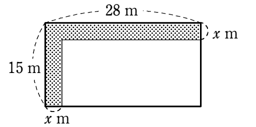
解説

道路の幅を x m とする。

右の図のように，道路を端によせて考えても，

空き地の面積は変わらない。

よって，空き地の面積は



$$(15-x)\times(28-x)\ \mathrm{m}^2$$

したがって　$(15-x)(28-x)=300$

$$420-43x+x^2=300$$

$$x^2-43x+120=0$$

$$(x-3)(x-40)=0$$

これを解いて　$x=3,\ 40$

道路の幅は 15 m 以上にならないから，$x=40$ はこの問題には適さない。

$x=3$ は問題に適する。　答　3 m

18 [三重県]

解説

BC$=x$ cm とおくと，EC$=(x-1)$ cm と表せる。

よって，長方形 ABCD の面積は

$$1\times x=x\,(\mathrm{cm}^2)$$

正方形 ECFG の面積は

$$(x-1)^2\ \mathrm{cm}^2$$

と表せる。

長方形と正方形の面積は等しいので

$$(x-1)^2=x$$

$$x^2-2x+1=x$$

$$x^2-3x+1=0$$

解の公式により

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

EC$=x-1$ で $x>1$ でなければいけないから

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

よって，BC は $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (cm) である。

19

解説

(1)　五角形の内角の和は　$180°\times(5-2)=540°$

五角形 ABCDE は正五角形であるから

$$\angle\mathrm{ABC}=540°\div5=108°$$

AB＝BC より，△ABC は二等辺三角形である。

よって　　$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}$

したがって　$\angle\mathrm{BCA}=(180°-\angle\mathrm{ABC})\div2$

$=(180°-108°)\div2$

$=36°$

同様にして　$\angle\mathrm{CBP}=36°$

よって　　$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BCA}+\angle\mathrm{CBP}=72°$

(2)　$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}=36°$，$\angle\mathrm{PCB}=\angle\mathrm{PBC}=36°$

であるから　　△ABC ∽ △CPB

よって　　AB : CP＝AC : CB　　…… ①

また，(1) より　$\angle\mathrm{ABC}=108°$，$\angle\mathrm{CBP}=36°$

であるから　　$\angle\mathrm{ABP}=108°-36°=72°$

よって　　$\angle\mathrm{ABP}=\angle\mathrm{APB}$

したがって，△ABP は二等辺三角形であるから

AB＝AP　　…… ②

対角線 AC の長さを x cm とする。

② より　CP＝AC－AP＝AC－AB＝$x-1$ (cm)

よって，① より　$1:(x-1)=x:1$

$$x(x-1)=1\times1$$

$$x^2-x-1=0$$

これを解いて　　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ であるから　　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ は，この問題には適さない。　　答　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ cm

20

解説

(1)　点 B の x 座標が 2 であるから，点 A の x 座標も 2 である。

このとき，A の y 座標は $2a+2$

また，BC＝AB＝$2a+2$ であるから，点 C の x 座標は

$$2+(2a+2)=2a+4$$

したがって，点 E の x 座標も　$2a+4$

(2)　点 E の y 座標は

$$a(2a+4)+2=2a^2+4a+2$$

また，CG＝EC＝$2a^2+4a+2$ であるから，点 G の x 座標は

$$(2a+4)+(2a^2+4a+2)=2a^2+6a+6$$

点 G の x 座標が 42 であるから

$$2a^2+6a+6=42$$

$$a^2+3a-18=0$$

$$(a-3)(a+6)=0$$

$$a=3,\ -6$$

a は正の定数であるから　$a=3$

21

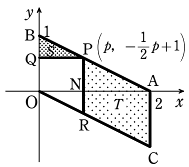
解説

(1)　直線 AB の傾きは　$\dfrac{0-1}{2-0}=-\dfrac{1}{2}$，　y 切片は　1

よって，直線 AB の式は　$y=-\dfrac{1}{2}x+1$　答

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{PQ}\times\mathrm{BQ}$

$=\dfrac{1}{2}\times p\times\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}p+1\right)\right\}=\dfrac{1}{4}p^2$



また，PR と OA の交点を N とすると

$T=\mathrm{PR}\times\mathrm{AN}=\mathrm{OB}\times\mathrm{AN}$

$=1\times(2-p)=2-p$

$S=T$ であるから　$\dfrac{1}{4}p^2=2-p$

よって　$p^2+4p-8=0$

これを解いて　$p=-2\pm2\sqrt{3}$

点 P は辺 AB 上にあるから　$0<p<2$

$p=-2-2\sqrt{3}$ は適さない。$p=-2+2\sqrt{3}$ は適する。

答　$p=-2+2\sqrt{3}$

22

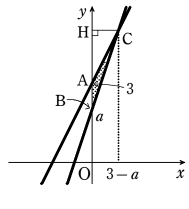
解説

(1)　$2x+3=3x+a$ とすると　　$x=3-a$

これを $y=2x+3$ に代入すると　$y=2(3-a)+3=9-2a$

よって，C の座標は　　$(3-a,\ 9-2a)$

(2)　点 C を通り x 軸に平行に引いた直線と y 軸の交点を H とすると



$$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}$$

$$=\frac{1}{2}\times(3-a)\times(3-a)$$

$$=\frac{1}{2}(a-3)^2$$

(3)　$S=2$ のとき　　$\dfrac{1}{2}(a-3)^2=2$

$$(a-3)^2=4$$

$$a-3=\pm2$$

よって　　$a-3=2$　または　$a-3=-2$

すなわち　　$a=5,\ 1$

$a<3$ であるから　　$a=1$

$a=5$ は，この問題には適さない。

答　$a=1$

23

解説

(1)　2 点 A，B を通る直線の式を $y=mx+n$ とおく。

2 点 A，B の座標は，それぞれ (8, 0)，(2, 6) であるから

$$0=8m+n,\quad 6=2m+n$$

よって　　$m=-1$，　$n=8$

したがって，求める直線の式は　　$y=-x+8$

(2)　直線 OB を表す式は　$y=3x$

点 F の x 座標は a であるから，F の y 座標は　$3a$

よって，点 E の y 座標は $3a$ となる。

E の x 座標は，$3a=-x+8$ を解いて　　$x=8-3a$

したがって，E の座標は　　$(8-3a,\ 3a)$

(3)　CD の長さは (D の x 座標)－(C の x 座標) となる。

また，(D の x 座標)＝(E の x 座標) であるから

$$\mathrm{CD}=(8-3a)-a=8-4a$$

CF の長さは，F の y 座標であるから　$3a$

よって，長方形 CDEF の面積は　$3a(8-4a)$

したがって　　$3a(8-4a)=6$

$$2a^2-4a+1=0$$

これを解いて　　$a=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\times1}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

これらは，ともに問題に適している。　　答　$a=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

24［愛光］

解説

(1)　食塩水を取り出した残りの食塩水の濃度は最初と変わらないから，残った食塩の量は

$$(100-x)\times\frac{10}{100}=10-\frac{x}{10}\ (\mathrm{g})$$

(2)　水を加えると，食塩水の濃度は

$$\left\{\left(10-\frac{x}{10}\right)\div 100\right\}\times 100=10-\frac{x}{10}\ (\%)$$

ここから $2x$ g の食塩水を取り出すと，残った食塩水に含まれる食塩の量は

$$(100-2x)\times\left(10-\frac{x}{10}\right)\div 100=\frac{2(50-x)(100-x)}{1000}\ (\mathrm{g})$$

これが 100 g の 4.8 % にあたるから

$$100\times\frac{4.8}{100}=\frac{2(50-x)(100-x)}{1000}$$
$$2(50-x)(100-x)=4800$$
$$(x-50)(x-100)=2400$$
$$x^2-150x+5000=2400$$
$$x^2-150x+2600=0$$
$$(x-20)(x-130)=0$$
$$x=20,\ 130$$

$x<100$ より　$x=20$

25［京都府］

解説

(1)　n 番目の図形のタイル A の枚数とタイル B の枚数は，次の表のようになる。

n (番目)	1	2	3	4	5	…
タイル A (枚)	1	1	3^2	3^2	5^2	…
タイル B (枚)	0	2^2	2^2	4^2	4^2	…

6 番目の図形について，タイル B の枚数は

$6^2=36$ (枚)

また，n 番目の図形について，タイル A とタイル B の枚数の合計は

$$n^2+(n-1)^2=n^2+n^2-2n+1$$
$$=2n^2-2n+1\ (枚)$$

(2)　n 番目の図形のタイルの合計が 1861 枚になるとすると

$$2n^2-2n+1=1861$$
$$2n^2-2n-1860=0$$
$$n^2-n-930=0$$
$$(n-31)(n+30)=0$$
$$n=31,\ -30$$

$n>0$ であるから　$n=31$

よって　　31 番目

1

解説

(1)　$x=\dfrac{-(-3\sqrt{5})\pm\sqrt{(-3\sqrt{5})^2-4\times2\times4}}{2\times2}=\dfrac{3\sqrt{5}\pm\sqrt{45-32}}{4}=\dfrac{3\sqrt{5}\pm\sqrt{13}}{4}$

(2)　$-x^2-x+3=0$

両辺に -1 をかけて　　$x^2+x-3=0$

よって　　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

(3)　$(2x+3)^2=(x+3)^2$

$4x^2+12x+9=x^2+6x+9$

整理すると　$3x^2+6x=0$

$x^2+2x=0$

左辺を因数分解すると　$x(x+2)=0$

よって　　$x=0,\ -2$

(4)　$2(x-1)^2=(x+3)(x-3)-3(x-4)$

$2(x^2-2x+1)=x^2-9-3x+12$

$2x^2-4x+2=x^2-3x+3$

整理すると　$x^2-x-1=0$

よって　　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(5)　$(3x-5)^2+6(3x-7)=-14$

$9x^2-30x+25+18x-42=-14$

整理すると　$9x^2-12x-3=0$

$3x^2-4x-1=0$

よって　　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\times(-1)}}{3}=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

(6)　$3x+13=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$t^2-4t-221=0$

$(t+13)(t-17)=0$

よって　　$t=-13,\ 17$

すなわち　　$3x+13=-13$　または　$3x+13=17$

したがって　　$x=-\dfrac{26}{3},\ \dfrac{4}{3}$

(7)　$\dfrac{1}{3}x(x+5)+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{3}x$

両辺に 12 をかけて　$4x(x+5)+9=4x$

$4x^2+20x+9=4x$

$4x^2+16x+9=0$

よって　　$x=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times9}}{4}=\dfrac{-8\pm\sqrt{28}}{4}=\dfrac{-8\pm2\sqrt{7}}{4}=\dfrac{-4\pm\sqrt{7}}{2}$

(8)　$\dfrac{x^2-1}{4}-\dfrac{2x-5}{3}=\dfrac{x^2+5}{6}$

両辺に 12 をかけて　$3(x^2-1)-4(2x-5)=2(x^2+5)$

$3x^2-3-8x+20=2x^2+10$

$x^2-8x+7=0$

$(x-1)(x-7)=0$

よって　　$x=1,\ 7$

(9)　$0.5x(0.5-x)+0.25(2x+1)=0.5x$

両辺に 4 をかけて　$x(1-2x)+(2x+1)=2x$

$x-2x^2+2x+1=2x$

$-2x^2+x+1=0$

$2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$

よって　　$x=1,\ -\dfrac{1}{2}$

(10)　$(x+8)\left(\dfrac{1}{2}x-4\right)+\dfrac{1}{2}\{(x+5)^2-(x-5)^2\}-16=0$

両辺に 2 をかけて　$(x+8)(x-8)+\{(x+5)^2-(x-5)^2\}-32=0$

$x^2-64+\{(x+5)+(x-5)\}\{(x+5)-(x-5)\}-32=0$

$x^2-64+20x-32=0$

$x^2+20x-96=0$

$(x+24)(x-4)=0$

よって　　$x=-24,\ 4$

2

解説

(1) $\begin{cases} x^2+7x+4y+7=0 & \cdots\cdots ① \\ x+4y=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　$4y=2-x$ ……③

③ を ① に代入すると

$$x^2+7x+(2-x)+7=0$$
$$x^2+6x+9=0$$
$$(x+3)^2=0$$

これを解くと　$x=-3$

これを ③ に代入すると　$4y=2-(-3)$

すなわち　$4y=5$　よって　$y=\dfrac{5}{4}$

したがって　$x=-3,\ y=\dfrac{5}{4}$

(2) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)+4=0 & \cdots\cdots ① \\ (3x-2y)^2+(3x-2y)=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① において，$x+y=a$ とおくと

$$a^2-4a+4=0$$
$$(a-2)^2=0$$

これを解くと　$a=2$　よって　$x+y=2$ ……③

② において，$3x-2y=b$ とおくと　$b^2+b=6$

すなわち　$b^2+b-6=0$

$$(b-2)(b+3)=0$$

これを解くと　$b=2,\ -3$

よって　$3x-2y=2$ ……④　または　$3x-2y=-3$ ……⑤

③，④ より　$\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$

これを解くと　$x=\dfrac{6}{5},\ y=\dfrac{4}{5}$

③，⑤ より　$\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2y=-3 \end{cases}$

これを解くと　$x=\dfrac{1}{5},\ y=\dfrac{9}{5}$

したがって　$(x,\ y)=\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{4}{5}\right),\ \left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

3

解説

(1) $\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ① \\ x^2-y^2=-5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② より　$(x+y)(x-y)=-5$

① を代入して　$5(x-y)=-5$

$x-y=-1$ ……③

①，③ より　$x=2,\ y=3$

(2) $\begin{cases} 3x=2y & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=52 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① より　$y=\dfrac{3}{2}x$ ……③

③ を ② に代入して　$x^2+\left(\dfrac{3}{2}x\right)^2=52$

両辺に 4 をかけて整理すると　$13x^2=208$

$$x^2=16$$
$$x=\pm 4$$

③ から　$x=4$ のとき　$y=6$

$x=-4$ のとき　$y=-6$

答　$x=4,\ y=6$ または $x=-4,\ y=-6$

(3) $\begin{cases} (x-1)^2+y=5 \\ 2(x-1)^2+y=7 \end{cases}$

$(x-1)^2=t$ とおくと　$\begin{cases} t+y=5 & \cdots\cdots ① \\ 2t+y=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①，② より　$t=2,\ y=3$

$t=2$ より　$(x-1)^2=2$

$$x-1=\pm\sqrt{2}$$

したがって　$x=1\pm\sqrt{2}$

答　$x=1+\sqrt{2},\ y=3$ または $x=1-\sqrt{2},\ y=3$

(4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=3 & \cdots\cdots ① \\ x+y=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① の両辺に xy をかけて　$y+2x=3xy$ ……③

② より　$y=-x$ ……④

④ を ③ に代入して　$-x+2x=3x\times(-x)$

$$3x^2+x=0$$
$$x(3x+1)=0$$

よって　$x=0,\ -\dfrac{1}{3}$

x は分母にあるので　$x\neq 0$

$x=-\dfrac{1}{3}$ を ④ に代入して　$y=\dfrac{1}{3}$

答　$x=-\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{1}{3}$

4

解説

(1) x の 2 次方程式 $2x^2+ax+2a=0$ が $1-\sqrt{5}$ を解にもつから，方程式に $x=1-\sqrt{5}$ を代入して

$$2(1-\sqrt{5})^2+a\times(1-\sqrt{5})+2a=0$$
$$2(6-2\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})a=0$$

よって　$a=-\dfrac{2(6-2\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}=-\dfrac{4(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}=-4$

(2) $a=-4$ のとき，2 次方程式 $2x^2+ax+2a=0$ は

$2x^2-4x-8=0$　すなわち　$x^2-2x-4=0$

これを解くと　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-4)}}{1}=1\pm\sqrt{5}$

よって，他の解は　$1+\sqrt{5}$

5 [大阪教育大学附属平野]

解説

$$ax^2+bx+c=0$$

$a\neq 0$ より　$a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c=0$

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c=0$$
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$b^2-4ac>0$ より　$x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$$=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

したがって　$x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

6

解説

$x^2+x+m=0$ の判別式を D とすると　$D=1^2-4\cdot 1\cdot m=1-4m$

この符号を調べると

$m<\dfrac{1}{4}$ のとき　$D>0$　このとき，実数解の個数は　2 個

$m=\dfrac{1}{4}$ のとき　$D=0$　このとき，実数解の個数は　1 個

$m>\dfrac{1}{4}$ のとき　$D<0$　このとき，実数解の個数は　0 個

7

解説

(1) 解の和は　$1+(-3)=-2$，　解の積は　$1\cdot(-3)=-3$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-(-2)x+(-3)=0$

すなわち　$x^2+2x-3=0$

(2) 解の和は　$(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6$，　解の積は　$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=3^2-(\sqrt{2})^2=7$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-6x+7=0$

8

解説

$x^2-px-12=0$ ……①，$x^2+qx+r=0$ ……② とする。

① が -4 を解にもつから　$(-4)^2-p\times(-4)-12=0$

これを解くと　$p=-1$

$p=-1$ を ① に代入すると　$x^2+x-12=0$

これを解くと　$(x+4)(x-3)=0$　よって　$x=-4,\ 3$

したがって，①，② の共通の解は　-4 または 3

② が 7 を解にもつから　$7^2+q\times7+r=0$

すなわち　$49+7q+r=0$ ……③

[1]　共通の解が -4 となるとき

$x=-4$ を ② に代入して　$(-4)^2+q\times(-4)+r=0$

すなわち　$16-4q+r=0$ ……④

③，④ を解いて　$q=-3,\ r=-28$

[2]　共通の解が 3 となるとき

$x=3$ を ② に代入して　$3^2+q\times3+r=0$

すなわち　$9+3q+r=0$ ……⑤

③，⑤ を解いて　$q=-10,\ r=21$

よって　$(p,\ q,\ r)=(-1,\ -3,\ -28),\ (-1,\ -10,\ 21)$

9

解説

共通な解を α とすると

$\alpha^2+\alpha+m=0$ ……①，　$\alpha^2+3\alpha+2m=0$ ……②

① から　$m=-\alpha^2-\alpha$ ……③

これを ② に代入して　$\alpha^2+3\alpha+2(-\alpha^2-\alpha)=0$

よって　$\alpha^2-\alpha=0$　これを解いて　$\alpha=0,\ 1$

③ から　$\alpha=0$ のとき $m=0$，$\alpha=1$ のとき $m=-2$

したがって　$m=0$，共通な解 0　または　$m=-2$，共通な解 1

10

解説

-3 と 5 が解となる 2 次方程式は

$(x+3)(x-5)=0$　すなわち　$x^2-2x-15=0$

$2+\sqrt{3}$ と $2-\sqrt{3}$ が解となる 2 次方程式は

$\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}=0$

すなわち　$x^2-4x+1=0$

よって，もとの 2 次方程式は　$x^2-4x-15=0$

これを解くと　$x=2\pm\sqrt{19}$

したがって，正しい解は　$x=2\pm\sqrt{19}$

11 [立命館大]

解説

① から　$x=y\pm\sqrt{y^2-(2y^2-25)}={}^{ア}y\pm\sqrt{{}^{イ}25-y^2}$ ……②

x が整数となるのは，$25-y^2$ が平方数のときである。

$25-y^2$ が平方数になるとき，y は整数であるから　$y^2=0,\ 9,\ 16,\ 25$

$y\geqq0$ であるから　$y=0,\ 3,\ 4,\ 5$

$x\geqq0$，② から　$y=0$ のとき $x=5$；$y=3$ のとき $x=7$；

$y=4$ のとき $x=7,\ 1$；$y=5$ のとき $x=5$

よって，$(x,\ y)$ の組は全部で ${}^{ウ}5$ 通り

これらの中で x の値が最も大きい組は $({}^{エ}7,\ {}^{オ}3)$，$({}^{エ}7,\ {}^{カ}4)$ の 2 通りである。

12

解説

大きい方の正方形の 1 辺の長さを x cm とする。

このとき，大きい方の正方形をつくるのに必要な針金の長さは $4x$ cm である。

したがって，小さい方の正方形をつくるために使う針金の長さは　$(60-4x)$ cm

よって，小さい方の正方形の 1 辺の長さは　$(15-x)$ cm

したがって　$x^2+(15-x)^2=200$

$2x^2-30x+25=0$

これを解いて　$x=\dfrac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-2\times25}}{2}=\dfrac{15\pm5\sqrt{7}}{2}$

求める x は大きい方の正方形の 1 辺の長さであるから

$x=\dfrac{15+5\sqrt{7}}{2}$　　答 $\dfrac{15+5\sqrt{7}}{2}$ cm

13

解説

小の半円の半径を x cm とすると，中の半円の半径は

$(5\times2-2x)\times\dfrac{1}{2}=5-x$ (cm)

斜線部分の面積について

$\pi\times5^2\times\dfrac{1}{2}-\pi x^2\times\dfrac{1}{2}-\pi(5-x)^2\times\dfrac{1}{2}=6\pi$

$25-x^2-(25-10x+x^2)=12$

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

したがって　$x=2,\ 3$ …… ①

ここで，小円の半径は中円の半径よりも小さいから

$x<5-x$　より　$x<\dfrac{5}{2}$

これを満たす ① の値は　$x=2$

$x=3$ は，この問題には適さない。　　答 2 cm

14 [智弁学園和歌山]

解説

P，Q が出発してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq6)$ を考える。

[1]　$0\leqq t\leqq2$ のとき

△APQ は底辺 AP$=t$ cm，高さ $3t$ cm より

$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\times t\times3t$

$=\dfrac{3}{2}t^2$ (cm^2)

よって　$\dfrac{3}{2}t^2=6$

$t^2=4$

$t=\pm2$

$0\leqq t\leqq2$ より　$t=2$

[2]　$2<t\leqq4$ のとき

△APQ は底辺 AP$=t$ cm，高さ BC$=6$ cm より

$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\times t\times6$

$=3t$ (cm^2)

よって　$3t=6$

$t=2$

$2<t\leqq4$ より，適さない。

[3]　$4<t\leqq6$ のとき

△APQ は底辺 AP$=t$ cm，高さ AQ$=18-3t$ (cm) より

$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\times t\times(18-3t)$

$=\dfrac{1}{2}t(18-3t)$ (cm^2)

よって　$\dfrac{1}{2}t(18-3t)=6$

$t^2-6t+4=0$

$4<t\leqq6$ より　$t=3+\sqrt{5}$

以上から　2 秒後，$(3+\sqrt{5})$ 秒後

15 [智弁学園和歌山]

解説

(1)　赤色のひもの長さは　$40\times\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$ cm

よって，青色のひもの長さは

$40\times\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{2x}{100}\right)=40\times\dfrac{100+x}{100}\times\dfrac{50+x}{50}$

$=\dfrac{(x+100)(x+50)}{125}$

$=\dfrac{x^2+150x+5000}{125}$

$=\dfrac{1}{125}x^2+\dfrac{6}{5}x+40$ (cm)

(2)　方程式は　$\dfrac{1}{125}x^2+\dfrac{6}{5}x+40-40=19.8$

$x^2+150x-2475=0$

$(x+165)(x-15)=0$

$x>0$ であるから　$x=15$

このとき，赤色のひもの長さは

$40\times\left(1+\dfrac{15}{100}\right)=46$ (cm)

これは問題に適している。

16 [滝]

解説

(1) $2000\times\left(1+\frac{x}{100}\right)=2000+20x$ (円)

(2) $(2000+20x)\times\left(1-\frac{x}{100}\right)=2000-20x+20x-\frac{x^2}{5}$

$$=2000-\frac{x^2}{5} \text{ (円)}$$

(3) 利益の合計について

$$20x\times30-\frac{x^2}{5}\times(50-30)=2900$$

$$-4x^2+600x=2900$$

$$x^2-150x+725=0$$

$$(x-5)(x-145)=0$$

$0<x<100$ であるから，$x=5$ は問題に適するが，$x=145$ は問題に適さない。

よって　$x=5$

17 [愛光]

解説

(1) $60\times100+60\times\left(1-\frac{3}{10}x\right)\times300=6000+18000-5400x$

$$=24000-5400x \text{ (円)}$$

(2) 代金の合計について

$$(24000-5400x)\times\left(1+\frac{x}{10}\right)=20460$$

$$(400-90x)\times\left(1+\frac{x}{10}\right)=341$$

$$400+40x-90x-9x^2=341$$

$$9x^2+50x-59=0$$

解の公式により

$$x=\frac{-50\pm\sqrt{50^2-4\times9\times(-59)}}{2\times9}$$

$$=\frac{-50\pm\sqrt{4624}}{18}$$

$$=\frac{-50\pm68}{18}$$

よって　$x=1,\ -\frac{59}{9}$

$x>0$ であるから　$x=1$

18

解説

昨年度の男子生徒数は　$300\left(1-\frac{x}{100}\right)=300-3x$ (人)

よって，今年度の男子生徒数は

$$(300-3x)\left(1+\frac{4x}{100}\right)=300+12x-3x-\frac{3}{25}x^2$$

$$=300+9x-\frac{3}{25}x^2 \text{ (人)}$$

今年度の女子生徒数は

$$200\left(1-\frac{2x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{100}\right)=200\left(1-\frac{x}{25}+\frac{x^2}{2500}\right)$$

$$=200-8x+\frac{2}{25}x^2 \text{ (人)}$$

よって　$300+9x-\frac{3}{25}x^2+200-8x+\frac{2}{25}x^2=504$

整理すると　$x^2-25x+100=0$

$(x-5)(x-20)=0$

これを解いて　$x=5,\ 20$

x は 10 を超えないから，$x=20$ は適さない。$x=5$ は問題に適する。

答　$x=5$

19 [明治大学付属明治]

解説

定価を a 円，売り上げ個数を b 個とする。

定価を x %値下げしたとき，売り上げ金額が 10.5 %増加したとすると

$$a\left(1-\frac{x}{100}\right)\times b\left(1+\frac{2x}{100}\right)=ab\times\left(1+\frac{10.5}{100}\right)$$

$$(100-x)\times(50+x)=5525$$

$$x^2-50x+525=0$$

$$(x-15)(x-35)=0$$

$$x=15,\ 35$$

これらは問題に適している。

よって，求める数は　15，35

20

解説

(1) 直線 ℓ を表す式は　$y=x+k$

点 Q は，直線 $y=x+k$ と直線 $y=2x$ の交点であるから，

連立方程式 $\begin{cases}y=x+k\\y=2x\end{cases}$ を解いて　$x=k,\ y=2k$

よって，点 Q の座標は　$(k,\ 2k)$

(2) 点 P の x 座標は，$0=x+k$ を解いて　$x=-k$

よって　$S=\frac{1}{2}\times k\times2k=k^2$

(3) 点 A の x 座標は，$5=2x$ を解いて　$x=\frac{5}{2}$

点 R の x 座標は，$5=x+k$ を解いて　$x=5-k$

よって　AR＝(R の x 座標)−(A の x 座標)

$$=(5-k)-\frac{5}{2}$$

$$=\frac{5}{2}-k$$

また，△AQR において，辺 AR を底辺としたときの高さは

$5-$(Q の y 座標)$=5-2k$

よって　$T=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-k\right)\times(5-2k)=k^2-5k+\frac{25}{4}$

(4) $k^2-5k+\frac{25}{4}=4$

$$4k^2-20k+9=0$$

$$(2k-1)(2k-9)=0$$

$0\leqq k\leqq\frac{5}{2}$ であるから　$k=\frac{1}{2}$

$k=\frac{9}{2}$ は，この問題には適さない。　答　$k=\frac{1}{2}$

21

解説

(1) 直線 ℓ の式を $y=ax+b$ とおく。

この直線が A $(-1,\ -1)$ を通るから　$-1=-a+b$　……①

B $(2,\ 5)$ を通るから　$5=2a+b$　……②

①，② を連立方程式として解くと　$a=2,\ b=1$

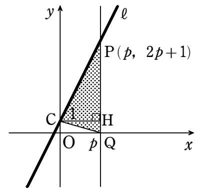
よって，直線 ℓ の式は　$y=2x+1$

(2) 点 P の x 座標を p とすると，P $(p,\ 2p+1)$，Q $(p,\ 0)$ である。

また，C $(0,\ 1)$ である。

点 C から直線 PQ に垂線を引き，直線 PQ との交点を H とする。

[1] $p>0$ のとき



$$\triangle PCQ=\frac{1}{2}\times PQ\times CH$$

$$=\frac{1}{2}\times(2p+1)\times p$$

$$=\frac{1}{2}(2p^2+p)$$

△PCQ の面積が 14 であるから　$\frac{1}{2}(2p^2+p)=14$

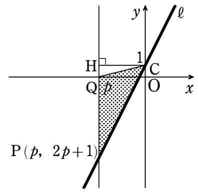
整理すると　$2p^2+p-28=0$

$(p+4)(2p-7)=0$

これを解いて　$p=-4,\ \frac{7}{2}$

$p>0$ であるから，$p=-4$ は適さない。$p=\frac{7}{2}$ は適する。

[2] $p<0$ のとき



$$\triangle PCQ=\frac{1}{2}\times PQ\times CH$$

$$=\frac{1}{2}\times\{-(2p+1)\}\times(-p)$$

$$=\frac{1}{2}(2p^2+p)$$

よって　$\frac{1}{2}(2p^2+p)=14$

これを解いて　$p=-4,\ \frac{7}{2}$

$p<0$ であるから，$p=\frac{7}{2}$ は適さない。$p=-4$ は適する。

したがって，点 P の x 座標は　$\frac{7}{2},\ -4$

$\boxed{22}$

(解説)

(1)　点 C は直線 ① 上にあるから，C の座標は $\left(t,\ \dfrac{t}{2}\right)$ とおける。

四角形 ABCD は平行四辺形となるから，辺 AB と辺 DC は平行で長さが等しくなる。

点 B を x 軸方向に -3，y 軸方向に 4 だけ移動した点が A である。

したがって，点 C を x 軸方向に -3，y 軸方向に 4 だけ移動した点が D となる。

よって，D の座標は $\left(t-3,\ \dfrac{t}{2}+4\right)$ と表される。

点 D は双曲線 $xy=6$ 上の点であるから

$$(t-3)\left(\frac{t}{2}+4\right)=6$$

$$t^2+5t-36=0$$

$$(t-4)(t+9)=0$$

点 D は $x>0$ の範囲にある点であるから　$t=4$

よって，C の座標は　(4，2)，D の座標は　(1，6)

(2)　平行四辺形 ABCD の 2 本の対角線の交点を Q とする。Q を通る直線は，平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する。

よって，直線 ℓ は，2 点 P，Q を通る直線である。

点 Q は線分 AC の中点であるから，座標は

$$\left(\frac{-4+4}{2},\ \frac{3+2}{2}\right)\qquad \text{すなわち}\qquad \left(0,\ \frac{5}{2}\right)$$

直線 ℓ の式を $y=ax+b$ とおく。

ℓ は，2 点 $(3,\ -1)$，$\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$ を通るから

$$-1=3a+b,\quad \frac{5}{2}=a\times 0+b$$

これを解いて　$a=-\dfrac{7}{6}$，$b=\dfrac{5}{2}$

よって，直線 ℓ の式は　$y=-\dfrac{7}{6}x+\dfrac{5}{2}$

$\boxed{23}$［東京学芸大学附属］

(解説)

(1)　$m=2$，$a=4$ のとき，A，B の座標はそれぞれ (4，4)，(4，8) より

$$S=\frac{1}{2}\times(8-4)\times 4=8$$

(2)　$a=6$ のとき，A，B の座標はそれぞれ (6，6)，(6，6m) より，△OAB の面積について

$$\frac{1}{2}\times(6m-6)\times 6=6$$

$$m=\frac{4}{3}$$

これは問題に適している。

よって，求める m の値は　$m=\dfrac{4}{3}$

(3)　$m=3$ のとき，A，B の座標はそれぞれ $(a,\ a)$，$(a,\ 3a)$ より

$$S=\frac{1}{2}\times(3a-a)\times a$$

$$=a^2$$

また，C，D の座標はそれぞれ $(a+3,\ a+3)$，$(a+3,\ 3(a+3))$ より

$$\triangle\text{OCD}=\frac{1}{2}\times\{3(a+3)-(a+3)\}\times(a+3)$$

$$=(a+3)^2$$

よって　$T=\triangle\text{OCD}-S$

$$=(a+3)^2-a^2$$

$$=6a+9$$

したがって　$T-S=17$

$$(6a+9)-a^2=17$$

$$a^2-6a+8=0$$

$$(a-2)(a-4)=0$$

$$a=2,\ 4$$

これらは問題に適している。

したがって，求める a の値は　$a=2$，4

$\boxed{24}$［法政大学附属］

(解説)

(1)　$\dfrac{x}{2}$ g をくみ出した残りの食塩水に含まれる食塩の量は

$$200\times\frac{5}{100}-\frac{x}{2}\times\frac{5}{100}=10-\frac{x}{40}\ \text{(g)}$$

(2)　水 $\dfrac{x}{2}$ g を加えたあとの食塩水の濃度は

$$\left(10-\frac{x}{40}\right)\div 200\times 100=5-\frac{x}{80}\ (\%)$$

$(200-x)$ g の $\left(5-\dfrac{x}{80}\right)$ % が 3.75 g にあたるから

$$(200-x)\times\left\{\left(5-\frac{x}{80}\right)\div 100\right\}=3.75$$

$$x^2-600x+50000=0$$

$$(x-100)(x-500)=0$$

$$x=100,\ 500$$

$x<200$ より　$x=100$

$\boxed{25}$

(解説)

(1)　列車 A，B が x 時間に進んだ距離の和に関して

$45x+xy=90$　…… ①

列車 B の進んだ時間と距離の関係について　$y\left(x+\dfrac{1}{3}\right)=90$

すなわち　$xy+\dfrac{1}{3}y=90$　…… ②

(2)　①−② より　$45x-\dfrac{1}{3}y=0$

よって　$y=135x$　…… ③

(3)　③ を ① に代入して

$$45x+x\times 135x=90$$

$$3x^2+x-2=0$$

$$(x+1)(3x-2)=0$$

よって　$x=-1$，$\dfrac{2}{3}$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{2}{3}$

$x=-1$ は，この問題には適さない。

$x=\dfrac{2}{3}$ のとき，③ より　$y=135\times\dfrac{2}{3}=90$　　　答　時速 90 km

第１１章　２次方程式　レベルC

$\boxed{1}$ (1)[國學院大]，(2)[南山大]，(3)[群馬大]

解説

(1)　方程式の両辺に $4+2\sqrt{3}$ を掛けると　$4x^2+2(\sqrt{3}+1)x-4(2+\sqrt{3})=0$

すなわち　$2x^2+(\sqrt{3}+1)x-2(2+\sqrt{3})=0$

よって　$x=\dfrac{-(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2-4\cdot 2\cdot\{-2(2+\sqrt{3})\}}}{2\cdot 2}$

$=\dfrac{-\sqrt{3}-1\pm\sqrt{36+18\sqrt{3}}}{4}$

$=\dfrac{-\sqrt{3}-1\pm 3\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}$

$=\dfrac{-\sqrt{3}-1\pm 3(\sqrt{3}+1)}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\ -\sqrt{3}-1$

(2)　$\begin{cases} x+y+2z=15 & \cdots\cdots ① \\ 3x+2y-2z=0 & \cdots\cdots ② \\ xz=36 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

②－①×２から　$x-6z=-30$　　よって　$x=6z-30$　……④

④を③に代入して　$(6z-30)z=36$　　ゆえに　$z^2-5z-6=0$

すなわち　$(z+1)(z-6)=0$　　よって　$z=-1,\ 6$

[1]　$z=-1$ のとき，④から　$x=-36$

①より，$y=15-x-2z$ であるから　$y=53$

[2]　$z=6$ のとき，④から　$x=6$

$y=15-x-2z$ であるから　$y=-3$

以上から　$(x,\ y,\ z)=(-36,\ 53,\ -1),\ (6,\ -3,\ 6)$

(3)　$\begin{cases} x^2-2y=8 & \cdots\cdots ① \\ y^2-2x=8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$　とおく。

①－②から　$x^2-y^2-2y+2x=0$

すなわち　$(x+y)(x-y)+2(x-y)=0$

よって　$(x+y+2)(x-y)=0$　　ゆえに　$x+y+2=0,\ x=y$

(i)　$x+y+2=0$ のとき　$y=-x-2$　……③

③を①に代入して　$x^2-2(-x-2)=8$

よって　$x^2+2x-4=0$　　ゆえに　$x=-1\pm\sqrt{5}$

③から　$x=-1+\sqrt{5}$ のとき　$y=-1-\sqrt{5}$

$x=-1-\sqrt{5}$ のとき　$y=-1+\sqrt{5}$

(ii)　$x=y$ のとき

①から　$x^2-2x=8$

すなわち　$(x+2)(x-4)=0$　　よって　$x=-2,\ 4$

$x=y$ から　$x=-2$ のとき　$y=-2$

$x=4$ のとき　$y=4$

(i)，(ii) から，求める解は

$(x,\ y)=(-1+\sqrt{5},\ -1-\sqrt{5}),\ (-1-\sqrt{5},\ -1+\sqrt{5}),\ (-2,\ -2),\ (4,\ 4)$

$\boxed{2}$ [上智大]

解説

$x^2+y^2+3xy=(x+y)^2+xy$ であるから，与式は

$\begin{cases} (x+y)^2+xy=11 & \cdots\cdots ① \\ x+y-xy=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①＋②から　$(x+y)^2+(x+y)-20=0$

$(x+y+5)(x+y-4)=0$

よって　$x+y=-5,\ 4$

$x+y={}^{ア}-5$ のとき，②から　$xy=-5-9={}^{イ}-14$

$x+y={}^{ウ}4$ のとき，②から　$xy=4-9={}^{エ}-5$

[1]　$x+y=-5,\ xy=-14$ のとき

$x,\ y$ は，t の２次方程式 $t^2+5t-14=0$ の解である。

$t^2+5t-14=0$ から　$(t+7)(t-2)=0$　　よって　$t=-7,\ 2$

ゆえに　$x=-7,\ y=2$ または $x=2,\ y=-7$

$x<y$ を満たすのは　$x=-7,\ y=2$

[2]　$x+y=4,\ xy=-5$ のとき

$x,\ y$ は，t の２次方程式 $t^2-4t-5=0$ の解である。

$t^2-4t-5=0$ から　$(t+1)(t-5)=0$　　よって　$t=-1,\ 5$

ゆえに　$x=-1,\ y=5$ または $x=5,\ y=-1$

$x<y$ を満たすのは　$x=-1,\ y=5$

[1]，[2] から　$x={}^{オ}-7,\ y={}^{カ}2$ と $x={}^{キ}-1,\ y={}^{ク}5$

$\boxed{3}$ [順天堂大]

解説

$x=0$ は方程式の解でないから，方程式の両辺を $x^2\ (\neq 0)$ で割ると

$x^2-7x+14-\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$　……①

$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$

①に代入して　$t^2-2-7t+14=0$　　よって　${}^{ア}t^2-7t+12=0$

ゆえに　$(t-3)(t-4)=0$　　したがって　$t={}^{イ}3,\ 4$

[1]　$t=3$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=3$

両辺に $x\ (\neq 0)$ を掛けて整理すると　$x^2-3x+1=0$

これを解いて　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

[2]　$t=4$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=4$

両辺に $x\ (\neq 0)$ を掛けて整理すると　$x^2-4x+1=0$

これを解いて　$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 1}=2\pm\sqrt{3}$

以上から，求める解は　$x={}^{ウ}\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ 2\pm\sqrt{3}$

$\boxed{4}$ [育英]

解説

(1)　$x^2-ax-b=0$ の解は

$x=\dfrac{-(-a)\pm\sqrt{(-a)^2-4\times 1\times(-b)}}{2\times 1}$

$=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$

この２次方程式の解の１つが $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ であるから

$\begin{cases} a=1 \\ a^2+4b=5 \end{cases}$

$a=1$ を $a^2+4b=5$ に代入すると

$1+4b=5$

$b=1$

よって　$a=1,\ b=1$

(2)　もう１つの解は　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{5}$

解説

求める２数は，$x^2-x-1=0$ の解である。

これを解いて　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

よって，求める２数は　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{6}$ [広島文教女子大]

解説

$a=0$ のとき　$3x+1=0$ から　$x=-\dfrac{1}{3}$　　よって，１個の実数解をもつ．

$a\neq 0$ のとき　判別式 $D=9-4a$ について

$9-4a>0$　すなわち　$a<\dfrac{9}{4}$ のとき，異なる２個の実数解をもつ．

$9-4a=0$　すなわち　$a=\dfrac{9}{4}$ のとき，実数の重解をもつ．

$9-4a<0$　すなわち　$a>\dfrac{9}{4}$ のとき，実数解をもたない．

以上から

$a<0,\ 0<a<\dfrac{9}{4}$ のとき２個；$a=0,\ \dfrac{9}{4}$ のとき１個；$a>\dfrac{9}{4}$ のとき０個

$\boxed{7}$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=7$

よって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot 7=-5$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=(-5)^2-2\cdot 7^2=-73$

また，$\alpha,\ \beta$ は方程式 $x^2-3x+7=0$ の解であるから

$\alpha^2-3\alpha+7=0,\ \beta^2-3\beta+7=0$

ゆえに　$\alpha^2=3\alpha-7,\ \beta^2=3\beta-7$

よって　$(\alpha^2+3\alpha+7)(\beta^2-\beta+7)=(3\alpha-7+3\alpha+7)(3\beta-7-\beta+7)$

$=6\alpha\cdot 2\beta=12\alpha\beta=12\cdot 7=84$

$\boxed{8}$

(解説)

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-3$

(1)　$(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=-1-4=-5$

$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=-3-2\cdot(-1)+4=3$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2+5x+3=0$

(2)　$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=(-1)+(-3)=-4$

$(\alpha+\beta)\cdot\alpha\beta=(-1)\cdot(-3)=3$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2+4x+3=0$

(3)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot(-3)=7$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-3)^2=9$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2-7x+9=0$

$\boxed{9}$ [甲南大]

(解説)

$x^2+kx+1=0$ ……①，

$x^2-(k+4)x+1=0$ ……②　とする。

① の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-k$，$\alpha\beta=1$

② の 2 つの解は α^2，β^2 であり，解と係数の関係から　$\alpha^2+\beta^2=k+4$

ここで，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ であるから　$k+4=(-k)^2-2\cdot1$

整理して　$k^2-k-6=0$　　ゆえに　$(k+2)(k-3)=0$

よって　$k=-2,\ 3$

$\boxed{10}$ [灘]

(解説)

$a=-2$ のとき，等式は成立しないから適さない。

$a\neq-2$ のとき，解の公式により

$$x=\frac{(a+2)(a-2\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{D}}{2(a+2)^2}$$

$D=0$ のとき，方程式の解はただ 1 つになる。

$$D=(a+2)^2(a-2\sqrt{2}+1)^2-4(a+2)^2\times\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2}-1)$$

これが 0 になるので

$$(a+2)^2(a-2\sqrt{2}+1)^2-4(a+2)^2\times\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2}-1)=0$$

$a\neq-2$ より，両辺を $(a+2)^2$ で割ると

$$(a-2\sqrt{2}+1)^2-4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2}-1)=0$$

$$\{(a-2\sqrt{2})+1\}^2-4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2}-1)=0$$

$$(a-2\sqrt{2})^2+2(a-2\sqrt{2})+1-4\sqrt{2}(\sqrt{2}a-2-\sqrt{2}-a+\sqrt{2}+1)=0$$

$$a^2-4\sqrt{2}a+8+2a-4\sqrt{2}+1-4\sqrt{2}(\sqrt{2}a-a-1)=0$$

$$a^2-4\sqrt{2}a+2a+9-4\sqrt{2}-8a+4\sqrt{2}a+4\sqrt{2}=0$$

$$a^2-6a+9=0$$

$$(a-3)^2=0$$

よって　$a=3$

$\boxed{11}$

(解説)

(1)　方程式 ① の解の 1 つが 3 であるから，$x=3$ を方程式 ① に代入すると

$$3^2-7\times3+a=0$$

よって　$a=12$

(2)　方程式 ② で，b を 12 としたとき，解が 1 つだけになったから，

2 次方程式 $x^2+12x+c=0$ の判別式について

$$12^2-4\times1\times c=0$$

よって　$c=36$

(3)　方程式 ② の間違えた解を求めると

$$x^2+12x+36=0$$

$$(x+6)^2=0$$

よって　$x=-6$

したがって，正しい解の 1 つは　$-6+2=-4$

$x^2+bx+36=0$ に $x=-4$ を代入すると

$$(-4)^2+b\times(-4)+36=0$$

よって　$b=13$

方程式 ② は，$x^2+13x+36=0$ で，これを解くと

$$(x+4)(x+9)=0$$

したがって　$x=-4,\ -9$

$\boxed{12}$ [東邦大]

(解説)

2 次方程式 $x^2+mx+8=0$ を解くと　$x=\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2-32}}{2}$

これが有理数となるための条件は，$\sqrt{m^2-32}$ が有理数となることである。

$\sqrt{m^2-32}$ が有理数となるための条件は，m は自然数より，$\sqrt{m^2-32}=k$ を満たす 0 以上の整数 k が存在することである。

$m^2-32=k^2$ から　$(m+k)(m-k)=32$

ここで，$m+k\geqq m-k$ であり，また $(m+k)-(m-k)=2k$ より，$m+k$ と $m-k$ の偶奇は一致する。

よって　$(m+k,\ m-k)=(8,\ 4),\ (16,\ 2)$

これを解いて　$(m,\ k)=(6,\ 2),\ (9,\ 7)$　　したがって　$m=6,\ 9$

$\boxed{13}$ [麗澤大]

(解説)

$0<x<\sqrt{3}$ のとき $0<\dfrac{1}{3}x^2<1$ であるから $x^2=2x$　よって　$x=0, 2$ (不適)

$\sqrt{3}\leqq x<\sqrt{6}$ のとき $1\leqq\dfrac{1}{3}x^2<2$ であるから $x^2-1=2x$　よって　$x^2-2x-1=0$

$\sqrt{3}\leqq x<\sqrt{6}$ であるから $x=1+\sqrt{2}$

$\sqrt{6}\leqq x<3$ のとき $2\leqq\dfrac{1}{3}x^2<3$ であるから $x^2-2=2x$　よって　$x^2-2x-2=0$

$\sqrt{6}\leqq x<3$ であるから $x=1+\sqrt{3}$

$\boxed{14}$ [佐賀大]

(解説)

(1)　$x^2+2(n-5)x+n^2-n=0$ …… ① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(n-5)^2-(n^2-n)=-9n+25$$

① は実数解をもつから　$D\geqq0$

よって　$-9n+25\geqq0$　　ゆえに　$n\leqq\dfrac{25}{9}$

n は 0 以上の整数であるから　$n=0,\ 1,\ 2$

(2)　2 桁の自然数の十の位を a，一の位を b $(1\leqq a\leqq9,\ 0\leqq b\leqq9)$ とすると，条件から

$$(a+b)^2=10a+b$$

よって　$a^2+2(b-5)a+b^2-b=0$　…… ②

(1) から　$b=0,\ 1,\ 2$

[1]　$b=0$ のとき

② から　$a^2-10a=0$　　すなわち　$a(a-10)=0$

$1\leqq a\leqq9$ より，これを満たす a は存在しない。

[2]　$b=1$ のとき

② から　$a^2-8a=0$　　すなわち　$a(a-8)=0$

$1\leqq a\leqq9$ より　$a=8$

[3]　$b=2$ のとき

② から　$a^2-6a+2=0$　これを満たす整数 a は存在しない。

[1] ～ [3] より　$a=8$，$b=1$

よって，求める 2 桁の自然数は　81

$\boxed{15}$ [長崎県]

解説

(1) （ア） 必要な棒の本数は 10 本ずつ増えていくから，4 番目の図形を作るのに必要な棒の本数は

$$41+10=51 \text{ (本)}$$

（イ） n 番目の図形において，3 個の正方形を作るのに必要な棒の本数は，それぞれ

$$4n,\ 4(n+1),\ 4(n+2)$$

と表すことができる。

重なっている部分の棒の本数は

$$n+(n+1)=2n+1$$

よって，n 番目の図形を作るのに必要な棒の本数は

$$\begin{aligned}&4n+4(n+1)+4(n+2)-(2n+1)\\&=10n+11\\&=10(n+1)+1\end{aligned}$$

$n+1$ は自然数であるから，何番目の図形であっても，作るのに必要な棒の本数は一の位の数が 1 である。

(2) （ア） 4 番目の図形において，3 個の正方形を作るのに必要な棒の本数は，それぞれ

$$4\times5\times2=40 \text{ (本)}$$
$$5\times6\times2=60 \text{ (本)}$$
$$6\times7\times2=84 \text{ (本)}$$

重なっている部分の棒の本数は

$$4+5=9 \text{ (本)}$$

よって，求める棒の本数は

$$40+60+84-9=175 \text{ (本)}$$

（イ） n 番目の図形において，3 個の正方形を作るのに必要な棒の本数は，それぞれ

$$2n(n+1),\ 2(n+1)(n+2),\ 2(n+2)(n+3)$$

と表すことができる。

重なっている棒の本数は

$$n+(n+1)=2n+1$$

よって，n 番目の図形を作るのに必要な棒の本数は

$$\begin{aligned}&2n(n+1)+2(n+1)(n+2)+2(n+2)(n+3)-(2n+1)\\&=(2n^2+2n)+2(n^2+3n+2)+2(n^2+5n+6)-(2n+1)\\&=6n^2+16n+15\end{aligned}$$

したがって　$6n^2+16n+15=421$

$$3n^2+8n-203=0$$

解の公式により　$n=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times3\times(-203)}}{2\times3}$

$$=-\frac{29}{3},\ 7$$

n は自然数であるから，$n=-\dfrac{29}{3}$ は問題に適さない。

$n=7$ は問題に適する。

$\boxed{16}$ [センター本試]

解説

(1) $x=a+1$ を P に代入して

$$P=(a+1)(a+4)\{2(a+1)-3\}=(a^2+5a+4)(2a-1)=2a^3+{}^{ア}9a^2+{}^{イ}3a-{}^{ウ}4$$

(2) P を展開して　$P=x(x+3)(2x-3)=2x^3+3x^2-9x$

よって，$x=a$ のときの P の値は　$P=2a^3+3a^2-9a$

これが，$x=a+1$ のときの P の値と等しいから，(1) より

$$2a^3+3a^2-9a=2a^3+9a^2+3a-4$$

整理して　$3a^2+{}^{エ}6a-{}^{オ}2=0$

よって　$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-3\cdot(-2)}}{3}=\dfrac{{}^{カキ}-3\pm\sqrt{{}^{クケ}15}}{{}^{コ}3}$

また，$x=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}+1=-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ のとき

$$\begin{aligned}P&=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^3+3\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2-9\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)\\&=-2\cdot\frac{15\sqrt{15}}{27}+3\cdot\frac{15}{9}+3\sqrt{15}\\&={}^{サ}5+\frac{{}^{シス}17\sqrt{{}^{セソ}15}}{{}^{タ}9}\end{aligned}$$

$\boxed{17}$ [センター本試]

解説

$$\begin{aligned}(x^2+ax+4)(x^2+bx-c)&=x^4+bx^3-cx^2+ax^3+abx^2-acx+4x^2+4bx-4c\\&=x^4+(a+b)x^3+(ab-c+4)x^2+(4b-ac)x-4c\end{aligned}$$

これが $x^4+5x^3+6x^2+kx-8$ と一致するから，係数を比べると

$a+b=5$ …… ①，　$ab-c+4=6$ …… ②，

$4b-ac=k$ …… ③，　$-4c=-8$ …… ④

(1) ④ より　$c={}^{ア}2$

(2) ① より　$b=5-a$

これと $c=2$ を ② に代入すると　$a(5-a)-2+4=6$

よって　$a^2-5a+4=0$　　これを解くと　$a=1,\ 4$

$a=1$ のとき，① より　$b=4$　　$a=4$ のとき，① より　$b=1$

$a<b$ すなわち $a={}^{イ}1$，$b={}^{ウ}4$ のとき，③ から

$4\cdot4-1\cdot2=k$　　よって　$k={}^{エオ}14$

$a\geqq b$ すなわち $a={}^{カ}4$，$b={}^{キ}1$ のとき，③ から

$4\cdot1-4\cdot2=k$　　よって　$k={}^{クケ}-4$

(3) [1] $a<b$ のとき

(2) から　$(x^2+x+4)(x^2+4x-2)=0$

よって　$x^2+x+4=0$ または $x^2+4x-2=0$

$x^2+x+4=0$ の判別式 D について，$D=1^2-4\cdot1\cdot4=-15<0$ であるから，

$x^2+x+4=0$ の実数解はない。

$x^2+4x-2=0$ より　$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot(-2)}=-2\pm\sqrt{6}$

$x>0$ であるから　$x={}^{コサ}-2+\sqrt{{}^{シ}6}$

[2] $a\geqq b$ のとき

(2) から　$(x^2+4x+4)(x^2+x-2)=0$

よって　$x^2+4x+4=0$ または $x^2+x-2=0$

$x^2+4x+4=0$ より　$(x+2)^2=0$　　よって　$x=-2$

これは $x>0$ を満たさない。

$x^2+x-2=0$ を解くと　$x=-2,\ 1$　　$x>0$ であるから　$x={}^{ス}1$