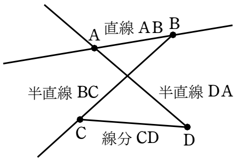
1★

解説

(1)　2 点 A，B を通る限りなくのびたまっすぐな線
(2)　2 点 C，D を端とするまっすぐな線
(3)　点 B を端とし，点 C の方に限りなくのびたまっすぐな線
(4)　点 D を端とし，点 A の方に限りなくのびたまっすぐな線

したがって，次の図のようになる。



2★

解説

$\angle a$ は　$\angle$EAC (または $\angle$CAE)
$\angle b$ は　$\angle$ACB (または $\angle$BCA)
$\angle c$ は　$\angle$EDB (または $\angle$BDE)

3★

解説

(1)　m と n は平行で　$m /\!/ n$
(2)　k と m は垂直で　$k \perp m$
　　k と n は垂直で　$k \perp n$

4★

解説

(1)　2 点 C，E 間の距離は　3 cm
(2)　点 A と直線 CE の距離は　7 cm

5★

解説

(1)　点 I
(2)　辺 HG
(3)　EK＝GK であるから
　　　EK＝10÷2＝5 (cm)
(4)　∠FKE＝∠FKG であるから
　　　∠FKE＝180°÷2＝90°

6★★

解説

(1)　① の図形が平行移動して重なる図形は　　④
(2)　① の図形が，点 O を中心として回転移動して重なる図形は　　③，⑤，⑦

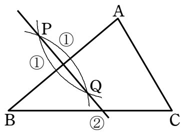
7★

解説

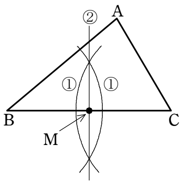
(1)　①　2 点 A，B をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく。
　　②　この 2 円の交点をそれぞれ P，Q として，直線 PQ を引く。
　このとき，直線 PQ は，辺 AB の垂直二等分線である。

(2)　①　2 点 B，C をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく。
　　②　この 2 円の交点を通る直線を引き，辺 BC との交点を M とする。
　このとき，点 M は辺 BC の中点である。

(1)



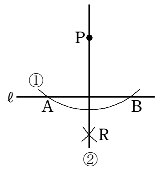
(2)



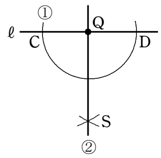
8★

解説

(1)　①　点 P を中心とする円をかき，直線 ℓ との交点をそれぞれ A，B とする。
　　②　2 点 A，B をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく。その交点の 1 つを R とし，直線 PR を引く。
　このとき，直線 PR は，点 P を通り，直線 ℓ に垂直な直線である。



(2)　①　点 Q を中心とする円をかき，直線 ℓ との交点をそれぞれ C，D とする。
　　②　2 点 C，D をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく。その交点の 1 つを S とし，直線 QS を引く。
　このとき，直線 QS は，点 Q を通り，直線 ℓ に垂直な直線である。



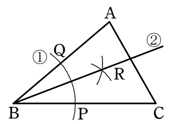
9★

解説

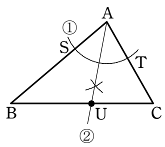
(1)　①　点 B を中心とする円をかき，辺 BC，BA との交点を，それぞれ P，Q とする。
　　②　2 点 P，Q をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく。その交点の 1 つを R とし，半直線 BR を引く。
　このとき，半直線 BR は，∠ABC の二等分線である。

(2)　①　点 A を中心とする円をかき，辺 AB，AC との交点を，それぞれ S，T とする。
　　②　2 点 S，T をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく。点 A とその交点の 1 つを通る半直線を引き，辺 BC との交点を U とする。
　このとき，点 U は，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点である。

(1)



(2)



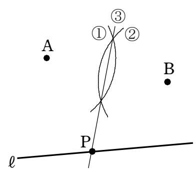
10★★

解説

線分 AB の垂直二等分線上の点は，2 点 A，B から等しい距離にある。

①　点 A を中心とする適当な半径の円をかく。
②　点 B を中心として，① と同じ半径の円をかき，2 つの円の交点を C，D とする。
③　直線 CD をひく。

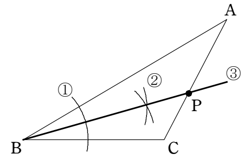
このとき，直線 ℓ と直線 CD の交点が P である。



11★★

解説

∠ABC の二等分線と辺 AC との交点が点 P となる。

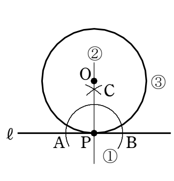


12★

解説

①　点 P を中心とする円をかき，直線 ℓ との交点をそれぞれ A，B とする。
②　2 点 A，B をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく。その交点のうち直線 ℓ の上側の点を C とし，直線 PC を引く。
③　直線 PC のうち直線 ℓ の上側の部分に点 O をとり，O を中心として半径 OP の円をかく。

このとき，円 O は，点 P で直線 ℓ に接する。



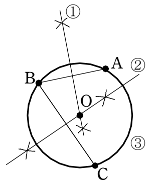
13 ★

解説

① 2点 A，B を結び，線分 AB の垂直二等分線を作図する。

② 2点 B，C を結び，線分 BC の垂直二等分線を作図する。

③ ①，② で作図した 2 直線の交点を O とし，O を中心とする半径 OA の円をかく。



このとき

OA＝OB，OB＝OC，

すなわち

OA＝OB＝OC

が成り立つ。

したがって，円 O は 3 点 A，B，C を通る。

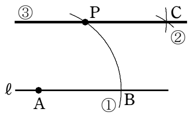
14 ★★

解説

① 直線 ℓ 上に点 A をとる。A を中心として半径 AP の円をかき，ℓ との交点を B とする。

② P，B を中心として，それぞれ半径 AP の円をかき，2 円の交点のうち A でない方を C とする。

③ 直線 PC を引く。



このとき，四角形 PABC は，4 つの辺の長さがすべて等しいから，ひし形である。

ひし形の向かい合う辺は平行である。

したがって，直線 PC と ℓ は平行である。　答

15 ★★

解説

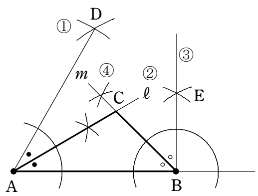
① A，B をそれぞれ中心として，半径 AB の円をかき，その交点の 1 つを D とする。

② ∠DAB の二等分線 ℓ を引く。

③ 点 B を通り，直線 AB に垂直な直線 BE を引く。

④ ∠ABE の二等分線 m を引き，ℓ との交点を C とする。

△ABC が求める三角形である。　終



16 ★

解説

(1) 弧の長さは　$2\pi\times15\times\dfrac{60}{360}=5\pi\,(\mathrm{cm})$　答

面積は　$\pi\times15^2\times\dfrac{60}{360}=\dfrac{75}{2}\pi\,(\mathrm{cm}^2)$　答

(2) $\dfrac{1}{2}\times5\pi\times8=20\pi\,(\mathrm{cm}^2)$　答

17 ★★

解説

(1) 周の長さは，半径 4 cm，中心角 90° の扇形の弧の長さの 2 倍であるから

$$2\pi\times4\times\frac{90}{360}\times2=4\pi\,(\mathrm{cm})$$

面積は，半径 4 cm，中心角 90° の扇形から，直角をはさむ 2 辺の長さが 4 cm の直角二等辺三角形を除いた部分の面積の 2 倍である。

よって，求める面積は

$$\left(\pi\times4^2\times\frac{90}{360}-\frac{1}{2}\times4\times4\right)\times2=8\pi-16\,(\mathrm{cm}^2)$$

別解　面積は，半径 4 cm，中心角 90° の扇形の面積の 2 倍から，1 辺が 4 cm の正方形の面積を引いたものである。

よって，求める面積は

$$\pi\times4^2\times\frac{90}{360}\times2-4\times4=8\pi-16\,(\mathrm{cm}^2)$$

(2) 周の長さは　$8+8\times\pi\times\dfrac{180}{360}+2\pi\times8\times\dfrac{90}{360}=8+8\pi\,(\mathrm{cm})$

面積は　$\pi\times8^2\times\dfrac{90}{360}-\pi\times4^2\times\dfrac{180}{360}=8\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

(3) 図は，中心角が 180° で，半径が 3 cm，2 cm，1 cm である 3 つの扇形の弧が組み合わされている。

よって，周の長さは

$$2\pi\times3\times\frac{180}{360}+2\pi\times2\times\frac{180}{360}+2\pi\times1\times\frac{180}{360}=6\pi\,(\mathrm{cm})$$

面積は　$\pi\times3^2\times\dfrac{180}{360}-\pi\times2^2\times\dfrac{180}{360}+\pi\times1^2\times\dfrac{180}{360}=3\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

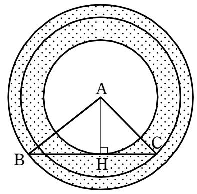
18 ★★

解説

点 B，C，H は，それぞれ A を中心とする半径 8 cm，7 cm，5 cm の円の周上を動く。

よって，辺 BC が通過した部分の面積は

$$\pi\times8^2-\pi\times5^2=39\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$



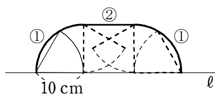
19 ★★

解説

点 O が動いてできる線は，右の図の太線である。

① の部分は，半径 10 cm，中心角 90° の扇形の弧で，その長さは

$$2\pi\times10\times\frac{90}{360}=5\pi\,(\mathrm{cm})$$



また，扇形の弧が直線 ℓ に接しながら動くとき，O と ℓ の距離は一定であるから，② の部分は ℓ に平行な線分である。

その長さは，扇形の $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さに等しいから

$$2\pi\times10\times\frac{60}{360}=\frac{10}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$$

よって，求める線の長さは

$$5\pi\times2+\frac{10}{3}\pi=\frac{40}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$$

20 ★★

解説

(1) 点 O が動いてできる線は，右の図の太線である。

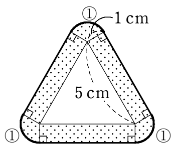
① の部分は，半径 1 cm，中心角 120° の扇形の弧であるから，求める線の長さは

$$5\times3+\left(2\pi\times1\times\frac{120}{360}\right)\times3=15+2\pi\,(\mathrm{cm})$$

(2) 点 O が動いてできる線と正三角形の辺で囲まれた部分は，右の図の影をつけた部分である。

よって，求める面積は

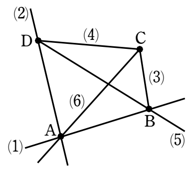
$$(5\times1)\times3+\left(\pi\times1^2\times\frac{120}{360}\right)\times3=15+\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$



1

解説

(1)　2 点 A，B を通る限りなくのびたまっすぐな線
(2)　2 点 A，D を通る限りなくのびたまっすぐな線
(3)　直線の一部で，2 点 B，C を端とする部分
(4)　直線の一部で，2 点 C，D を端とする部分
(5)　点 D を端とし，B の方に限りなくのびた部分
(6)　点 C を端とし，A の方に限りなくのびた部分
よって，右の図のようになる。



2

解説

$\angle a$ は　$\angle$BCA（または　$\angle$ACB）
$\angle b$ は　$\angle$CAD（または　$\angle$DAC）
$\angle c$ は　$\angle$ADC（または　$\angle$CDA）
$\angle d$ は　$\angle$AED（または　$\angle$DEA）

3

解説

(1)　直線 AB と直線 CD は平行で　AB∥CD
(2)　直線 CD と直線 EF は垂直で　CD⊥EF
(3)　直線 AB と直線 EF は垂直で　AB⊥EF

4

解説

(1)　線分 AB の長さであるから　4 cm　答
(2)　点 E から直線 AB に引いた垂線の長さだから　2 cm　答
(3)　直線 BD と直線 CE をつなぐ垂線の長さだから　3 cm　答

5

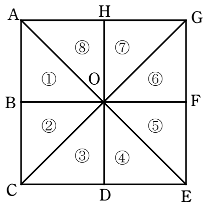
解説

(1)　点 G
(2)　辺 HA
(3)　この図形を，O を中心として 180° 回転すると，点 E は点 A に重なるから
　　OE＝OA
よって　OA＝6 cm
(4)　この図形を，O を中心として 180° 回転すると，点 B は点 F に重なるから
　　∠BOF＝180°

6

解説

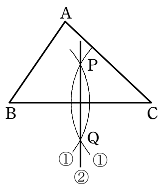
(1)　① を平行移動して重なる三角形は　④
(2)　③ を時計の針の回転と反対方向に 90°，180°，270° 回転移動して重なる三角形は，それぞれ　⑤，⑦，①
(3)　右の図のように各点をとる。
⑤ を直線 HD，AE，BF，GC を対称の軸として対称移動して重なる三角形は，それぞれ　②，④，⑥，⑧



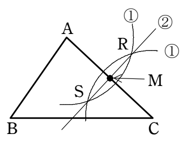
7

解説

(1)　①　2 点 B，C をそれぞれ中心として等しい半径の円をかき，2 円の交点を P，Q とする。
②　直線 PQ を引く。
このとき，直線 PQ は辺 BC の垂直二等分線である。



(2)　①　2 点 A，C をそれぞれ中心として等しい半径の円をかき，2 円の交点を R，S とする。
②　直線 RS を引き，辺 AC との交点を M とする。
このとき，点 M は辺 AC の中点である。

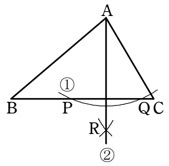


8

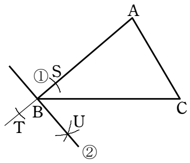
解説

(1)　①　点 A を中心とする円をかき，直線 BC との交点をそれぞれ P，Q とする。
②　2 点 P，Q をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく。その交点の 1 つを R とし，半直線 AR を引く。
このとき，半直線 AR は，頂点 A から辺 BC に引いた垂線である。
(2)　①　点 B を中心とする円をかき，直線 AB との交点をそれぞれ S，T とする。
②　2 点 S，T をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく。その交点の 1 つを U とし，直線 BU を引く。
このとき，直線 BU は，頂点 B を通り，辺 AB に垂直な直線である。

(1)



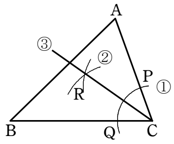
(2)



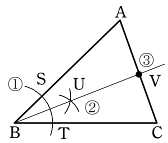
9

解説

(1)　①　点 C を中心とする円をかき，辺 CA，辺 CB との交点をそれぞれ P，Q とする。
②　2 点 P，Q をそれぞれ中心として等しい半径の円をかき，その交点の 1 つを R とする。
③　半直線 CR を引く。
このとき，半直線 CR は ∠ACB の二等分線である。



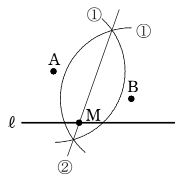
(2)　①　点 B を中心とする円をかき，辺 BA，辺 BC との交点をそれぞれ S，T とする。
②　2 点 S，T をそれぞれ中心として等しい半径の円をかき，その交点の 1 つを U とする。
③　半直線 BU を引き，辺 AC との交点を V とする。
このとき，点 V は ∠ABC の二等分線と辺 AC の交点である。



10

解説

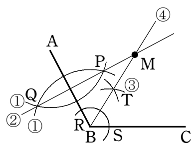
①　2 点 A，B をそれぞれ中心として，同じ半径の円をかく。
②　① でかいた 2 円の交点を通る直線をひき，直線 ℓ との交点 を M とする。
このとき，点 M は，直線 ℓ 上にあって，2 点 A，B から等しい距離にある点である。



11

解説

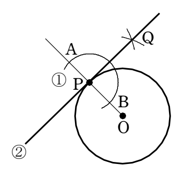
①　2 点 A，B をそれぞれ中心として，同じ半径の円をかく。
②　① でかいた 2 円の交点を通る直線 PQ をひく。
③　点 B を中心とする円をかき，線分 BA，BC との交点をそれぞれ R，S とする。2 点 R，S をそれぞれ中心として，同じ半径の円をかく。
④　③ でかいた 2 円の交点の 1 つを T とし，半直線 BT をひく。この半直線と直線 PQ の交点を M とする。
このとき，点 M は，線分 AB の垂直二等分線上にあって，線分 AB と線分 BCから等しい距離にある。



12

解説

①　半直線 OP を引く。点 P を中心とする円をかき，半直線 OP との交点をそれぞれ A，B とする。
②　2 点 A，B をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかく。その交点の 1 つを Q とし，直線 PQ を引く。
このとき，OP⊥PQ が成り立つから，直線 PQ は点 P を通る円 O の接線である。

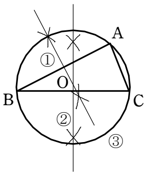


13

解説

① 線分 AB の垂直二等分線を作図する。
② 線分 BC の垂直二等分線を作図する。
③ ①，② で作図した 2 直線の交点を O とし，
O を中心とする半径 OA の円をかく。

このとき，OA＝OB＝OC であるから，円 O は △ABC の 3 つの頂点を通る。

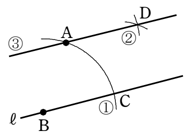


14

解説

① 直線 ℓ 上に点 B をとる。B を中心として半径 AB の円をかき，ℓ との交点を C とする。
② A，C を中心として，それぞれ半径 AB の円をかき，2 円の交点のうち B でない方を D とする。
③ 直線 AD を引く。

このとき，四角形 ABCD は，4 つの辺の長さがすべて等しいから，ひし形である。ひし形の向かい合う辺は平行であるから，直線 AD と ℓ は平行である。



15

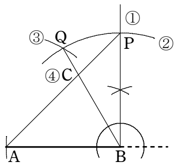
解説

$\angle ABC=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$ であることを利用する。

① 点 B を通り，辺 AB に垂直な直線をひく。
② ① でかいた直線上に，PB＝AB となる点 P をとり，線分 AP をかく。
③ 線分 AB を 1 辺とする正三角形 QAB の頂点 Q を，直線 AB について点 P と同じ側に作図する。
④ 線分 BQ をかき，線分 AP との交点を C とする。

このとき，△ABP は AB＝PB の直角二等辺三角形であるから　$\angle CAB=45^\circ$

また，△ABQ は正三角形であるから，$\angle ABC=60^\circ$ となり，△ABC は求める三角形である。



16

解説

(1)　$\dfrac{1}{2}\times6\pi\times5=15\pi$ (cm^2)

(2)　半径 5 cm の円の周の長さは

$$2\pi\times5=10\pi\ \text{(cm)}$$

よって，求める中心角の大きさは

$$360^\circ\times\frac{6\pi}{10\pi}=216^\circ$$

17

解説

周の長さは　$2\pi\times3\times\dfrac{120}{360}+2\pi\times6\times\dfrac{120}{360}+(6-3)\times2$

$$=2\pi+4\pi+6=6\pi+6\ \text{(cm)}$$

面積は　$\pi\times6^2\times\dfrac{120}{360}-\pi\times3^2\times\dfrac{120}{360}=12\pi-3\pi=9\pi\ \text{(cm}^2)$

18

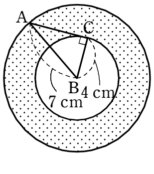
解説

線分 AC が通過した部分は，B を中心とする半径 AB の円から，B を中心とする半径 BC の円を除いたものである。

よって，求める面積は

$$\pi\times7^2-\pi\times4^2=33\pi$$

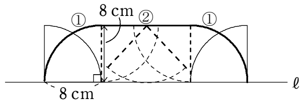
答　33π cm^2



19

解説

点 O が動いてできる線は，下の図の太線である。



① の部分は，半径 8 cm，中心角 90° の扇形の弧である。
また，扇形の弧が直線 ℓ に接しながら動くとき，O と ℓ の距離は一定であるから，② の部分は ℓ に平行な線分である。

(1)　② の部分の長さは，扇形の弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さに等しい。
よって，求める線の長さは

$$\left(\overset{\frown}{AB}\text{ の長さ}\right)\times3=\left(2\pi\times8\times\frac{90}{360}\right)\times3$$
$$=4\pi\times3=12\pi\ \text{(cm)}$$

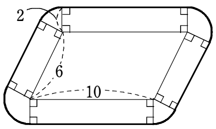
(2)　求める面積は

$$\left(\pi\times8^2\times\frac{90}{360}\right)\times2+8\times4\pi=64\pi\ \text{(cm}^2)$$

20

解説

点 O が動いてできる線は，右の図の太線部分である。
この太線と平行四辺形で囲まれた部分は，長方形 4 つと扇形 4 つからできており，この 4 つの扇形を合わせると，半径 2 cmの円が 1 つできる。



(1)　$(6+10)\times2+(2\pi\times2)=32+4\pi$
答　$(32+4\pi)$ cm

(2)　$(6\times2+10\times2)\times2+\pi\times2^2=64+4\pi$
答　$(64+4\pi)$ cm^2

第１章　平面図形
レベルA

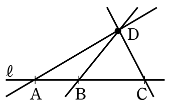
1

解説

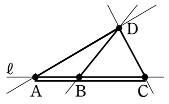
(1)　直線 AB (直線 AC, 直線 BC でもよい), 直線 AD, 直線 BD, 直線 CD の 4 本　答

(2)　線分 AB, 線分 AC, 線分 AD, 線分 BC, 線分 BD, 線分 CD の 6 本　答

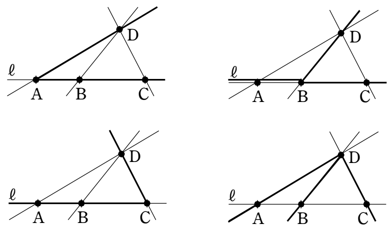
(1)



(2)



(3)　半直線 AB (半直線 AC), 半直線 AD, 半直線 BA, 半直線 BC, 半直線 BD, 半直線 CA (半直線 CB), 半直線 CD, 半直線 DA, 半直線 DB, 半直線 DC の 10 本　答



2

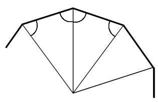
解説

(1)　正 n 角形の 1 つの頂点を端とする対角線は $n-3$ 本である。
その対角線が 4 本であるから

$n-3=4$　　　よって　$n=7$

したがって　正七角形

(2)　正 n 角形は，各頂点と対称の中心を結ぶと n 個の合同な三角形に分けられる。
分けられた n 個の三角形について，対称の中心を頂点とする角の大きさは



$180°-144°=36°$

$36°\times n=360°$ であるから　　$n=10$

したがって　正十角形

(3)　隣り合う 2 つの頂点と，対称の中心を頂点とする三角形は正三角形になる。
そのような正多角形は　正六角形

参考　正 n 角形が点対称になるのは，n が偶数のときである。

3

解説

点 Q と点 P は直線 OA について対称であるから

$\angle QOA=\angle POA$

点 P と点 R は直線 OB について対称であるから

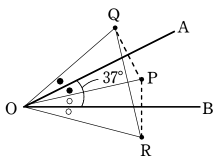
$\angle POB=\angle ROB$

よって　　$\angle QOR=\angle QOP+\angle POR$

$=2\times\angle POA+2\times\angle POB$

$=2(\angle POA+\angle POB)$

$=2\angle AOB$



(1)　$\angle QOR=2\times37°=74°$

(2)　$\angle QOR=2\angle AOB$

4

解説

(1)　① を，点 O を回転の中心として時計の針の回転と反対の向きに 90° 回転移動すると，⑮ に重なる。⑮ を，直線 EF を対称の軸として対称移動すると，⑩ に重なる。
よって，求める図形は ⑩ である。

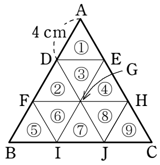
(2)　(解 1)　① を点 O を回転の中心として 180° 回転移動すると ⑬ に重なり，その後，直線 EF を対称の軸として対称移動すると ⑫ に重なる。

(解 2)　① を直線 OG を対称の軸として対称移動すると ⑯ に重なり，その後，点 B が点 F に移るように平行移動すると ⑫ に重なる。

5

解説

右の図のように各点を定める。



(1)　① を ⑤ に重ねるには，頂点 A が頂点 F に，頂点 D が頂点 B に，頂点 E が頂点 I に重なるように 8 cm 平行移動すればよい。

(2)　対称の軸と辺 BC の交点を P とすると

BP＝CP

BC＝4×3＝12 (cm) であるから，点 B から対称の軸までの距離は

12÷2＝6 (cm)

(3)　∠DGH＝120°, ∠EGJ＝120°, ∠AGC＝120° であるから，① を点 G を中心として時計の針の回転と同じ向きに 120° だけ回転移動すると，⑨ に重なる。

6

解説

(1)　①　∠B の二等分線を引く。

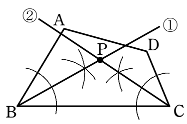
②　∠C の二等分線を引く。

①, ② の二等分線の交点が P である。

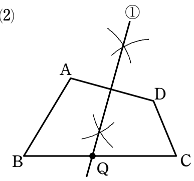
(2)　①　辺 AD の垂直二等分線を引く。

① の垂直二等分線と辺 BC の交点が Q である。

(1)



(2)

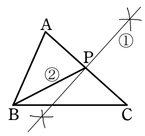


7

解説

①　線分 AC の垂直二等分線を作図する。

②　① で作図した直線と線分 AC の交点は，辺 AC の中点となる。この点を P として，B と P を結ぶ。



このとき，

AP＝CP

であるから，△BAP と △BCP の面積は等しい。

よって，線分 BP は △ABC の面積を 2 等分する。

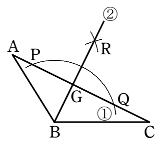
8

解説

(1)　①　点 B を中心とする円をかき，直線 AC との交点をそれぞれ P, Q とする。

②　2 点 P, Q をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかき，その交点の 1 つを R とする。半直線 BR を引き，直線 AC との交点を G とする。

このとき，線分 BG は，辺 AC を底辺とする高さである。

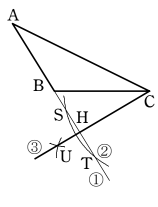


(2)　①　辺 AB を延長し，半直線 AB とする。

②　点 C を中心とする円をかき，半直線 AB との交点をそれぞれ S, T とする。

③　2 点 S, T をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかき，その交点の 1 つを U とする。半直線 CU を引き，半直線 AB との交点を H とする。

このとき，線分 CH は，辺 AB を底辺とする高さである。



9

解説

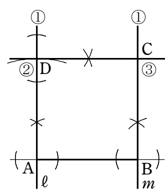
①　A を通り，直線 AB に垂直な直線 ℓ を引く。
また，B を通り，直線 AB に垂直な直線 m を引く。

②　ℓ 上に，AD＝AB となる点 D をとる。

③　D を通り，直線 AD に垂直な直線を引き，直線 m との交点を C とする。

このとき，四角形 ABCD は，4 つの角が等しい (＝90°) から，長方形である。

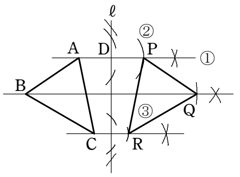
そして，4 つの辺が等しくなるから，正方形である。



10

解説

①　点Aを通り，直線ℓに垂直な直線を引き，ℓとの交点をDとする。
②　①で作図した直線上に，PD＝ADとなる点Pをとる。
③　点Bについて，同様に点Qを作図する。点Cについても点Rを作図し，△PQRをかく。

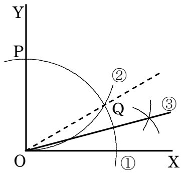


このとき，△PQRを，直線ℓを折り目として折り返すと，△ABCに重なる。
よって，△PQRは，△ABCをℓを対称の軸として対称移動したものである。

11

解説

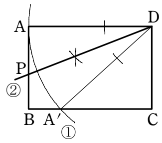
①　点Oを中心として円をかき，OYとの交点をPとする。
②　点Pを中心として半径OPの円をかき，①の円との交点をQとする。
③　∠QOXの二等分線を引く。
③の直線が直角XOYを15°と75°に分ける。



12

解説

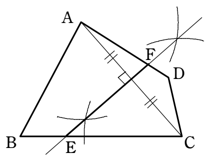
①　点Dを中心とする半径DAの円と，辺BCの交点をA′とする。
②　∠ADA′の二等分線を引き，辺ABとの交点をPとする。
このとき，線分DPは，求める折り目の線である。



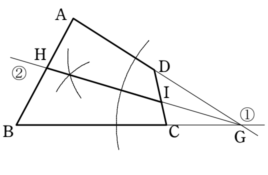
13

解説

(1)　AとCが重なるように折って広げると，折り目は線分ACの垂直二等分線になる。
よって，次のように作図すればよい。
線分ACの垂直二等分線を引き，辺BC，ADとの交点をそれぞれE，Fとする。
線分EFが求める折り目の線分である。



(2)　辺ADが辺BCと重なるように折って広げると，折り目は2直線AD，BCが作る角の二等分線になる。
よって，次のように作図すればよい。
①　辺ADの延長と，辺BCの延長の交点をGとする。
②　∠AGBの二等分線を引き，辺AB，DCとの交点を，それぞれH，Iとする。
線分HIが求める折り目の線分である。



14

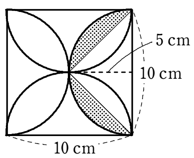
解説

(1)　周の長さは半径5 cmの半円の弧の4倍であるから

$$4\times\left(2\pi\times5\times\frac{1}{2}\right)=20\pi\,(\mathrm{cm})$$

右の図の影をつけた部分の面積は

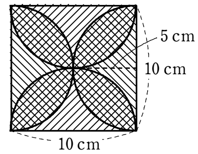
$$\pi\times5^2\times\frac{1}{2}-10\times5\div2$$
$$=\frac{25}{2}\pi-25\,(\mathrm{cm}^2)$$



求める面積は，この面積の4倍であるから

$$\left(\frac{25}{2}\pi-25\right)\times4=50\pi-100\,(\mathrm{cm}^2)$$

別解　右の図のように，半径5 cmの半円を4つおくと，求める面積は重なった部分の面積である。
よって



(半径5 cmの半円の面積)×4
−(1辺10 cmの正方形の面積)

$$=\left(\pi\times5^2\times\frac{1}{2}\right)\times4-10^2$$
$$=50\pi-100\,(\mathrm{cm}^2)$$

(2)　周の長さは，半径6 cm，4 cm，2 cmの半円の弧の長さを加えたものであるから

$$2\pi\times6\times\frac{1}{2}+2\pi\times4\times\frac{1}{2}+2\pi\times2\times\frac{1}{2}=6\pi+4\pi+2\pi=12\pi\,(\mathrm{cm})$$

面積は，半径6 cmの半円の面積から，半径4 cm，2 cmの半円の面積をひいたものであるから

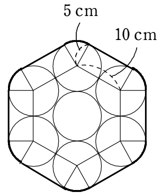
$$\pi\times6^2\times\frac{1}{2}-\left(\pi\times4^2\times\frac{1}{2}+\pi\times2^2\times\frac{1}{2}\right)=18\pi-(8\pi+2\pi)=8\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

15

解説

7本のパイプをしばったロープは，右の図のように，6つの扇形の弧と6つの長方形の辺に分けられる。
6つの扇形の弧を合わせると，半径5 cmの円が1つできる。
長方形の長い方の辺の長さは，接するパイプの中心間の距離で10 cmである。
よって，求めるロープの長さは

$$2\pi\times5+10\times6=10\pi+60\,(\mathrm{cm})$$



16

解説

(1)　AD＝AC＝4 cm
BE＝BD＝AB＋AD＝8 (cm)
CF＝CE＝BC＋BE＝12 (cm)
ここで，DG＝CFであるから
DG＝12 cm

(2)　$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{FG}}$は，すべて中心角が120°の扇形の弧である。

$$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}=2\pi\times4\times\frac{120}{360}=\frac{8}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$$
$$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}=2\pi\times8\times\frac{120}{360}=\frac{16}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$$
$$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}=2\pi\times12\times\frac{120}{360}=8\pi\,(\mathrm{cm})$$
$$\overset{\frown}{\mathrm{FG}}=2\pi\times16\times\frac{120}{360}=\frac{32}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$$

うず巻き線CDEFGの長さは，4つの弧の長さの和であるから

$$\frac{8}{3}\pi+\frac{16}{3}\pi+8\pi+\frac{32}{3}\pi=\frac{80}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$$

(3)　影をつけた部分は，3つの扇形BDE，CEF，AFGを合わせたものである。
扇形BDEの面積は

$$\pi\times8^2\times\frac{120}{360}=\frac{64}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

扇形CEFの面積は

$$\pi\times12^2\times\frac{120}{360}=48\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

扇形AFGの面積は

$$\pi\times16^2\times\frac{120}{360}=\frac{256}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

したがって，求める面積は

$$\frac{64}{3}\pi+48\pi+\frac{256}{3}\pi=\frac{464}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

1

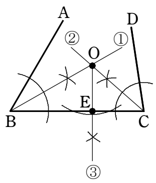
解説

(1)　2点B，Aは，線分FHを折り目として重なる。
2点B，Cは，線分EGを折り目として重なる。
2点B，Dは，線分ACを折り目として重なる。
2点B，Mは，線分FGを折り目として重なる。
これら以外の点は，点Bに重なることはないから，点Bに重なる点は
A，C，D，M

(2)　点Qの位置にくる点は，点Iに重なった点であるから，求める点は
I，J，K，L
点Rの位置にくる点は，点Eに重なった点であるから，求める点は
E，F，G，H

2

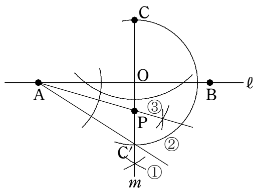
解説



①　∠ABCの二等分線を作図する。
②　∠BCDの二等分線を作図する。
③　①，②で作図した2直線の交点をOとする。
Oを通り，直線BCに垂直な直線を作図し，この直線と直線BCとの交点をEとする。
このとき，点Oから線分AB，BC，CDまでの距離はすべて等しいから，Oを中心とする半径OEの円はこれらの線分すべてに接する。

3［石川県］

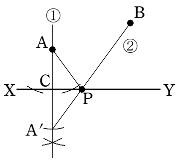
解説



①　点Cを通りℓに垂直な直線 m をひく。m とℓとの交点をOとする。
②　直線 m 上に，OC′＝OCとなる点C′をとる。
③　∠BAC′の二等分線をひき，m との交点をPとする。

4

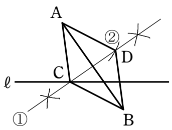
解説



①　点Aを通り，直線XYに垂直な直線を引き，この直線と直線XYの交点をCとする。
②　①で作図した直線上に，A′C＝ACとなる点A′をとる。A′とBを結び，直線XYとの交点をPとする。
このとき，　　AP＝A′P
であるから，AP＋BP＝A′Bとなり，AP＋BPは最小となる。

5

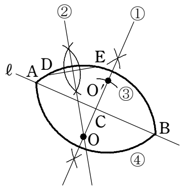
解説



①　線分ABの垂直二等分線を作図し，この直線と直線ℓとの交点をCとする。
②　①で作図した直線上に，AD＝ACとなる点Dをとり，四角形ACBDをかく。
このとき，四角形ACBDの4つの辺は等しいから，ひし形である。

6

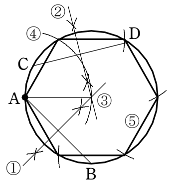
解説



①　線分ABの垂直二等分線を引き，直線ℓとの交点をCとする。
②　$\overset{\frown}{AB}$ 上に適当な2点D，Eをとり，線分DEの垂直二等分線を引く。
③　①の直線と②の直線の交点をOとし，①の直線上にO′C＝OCとなる点O′をとる。
④　O′を中心とする半径O′Aの $\overset{\frown}{AB}$ をかく。

7

解説



①　円周上に適当な点Bをとり，線分ABの垂直二等分線を作図する。
②　円周上にA，Bとは異なる適当な2点C，Dをとり，線分CDの垂直二等分線を作図する。
③　①，②で作図した2直線の交点が，円の中心となる。
④　円の中心と点Aを結んだ線分は，円の半径となる。
半径と等しい長さでAから始めて，円周を6等分する。
⑤　6等分した点を順に結ぶ。
このときできる図形は，正六角形になる。

8

解説

Oは，線分AB，CDをそれぞれ直径とする半円の中心である。
影をつけた部分の面積は

$$\pi\times6^2\times\frac{80}{360}-\pi\times3^2\times\frac{80}{360}=8\pi-2\pi$$
$$=6\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

扇形ODFの面積は

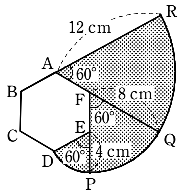
$$\pi\times3^2\times\frac{180-80}{360}=\frac{5}{2}\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

よって，影をつけた部分の面積は，扇形ODFの面積の

$$6\pi\div\frac{5}{2}\pi=\frac{12}{5}\,(倍)$$

9

解説



右の図のように，糸の端がえがく線と辺FE，AF，BAの延長との交点を，それぞれP，Q，Rとする。
糸が通過する部分は，3つの扇形EDP，FPQ，AQRに分けられる。
正六角形の1つの角の大きさは120°であるから，3つの扇形の中心角はすべて60°である。
また　　EP＝4（cm），FQ＝8（cm），AR＝12（cm）
よって，糸が通過する部分の周の長さは

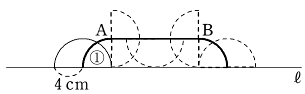
$$2\pi\times4\times\frac{60}{360}+2\pi\times8\times\frac{60}{360}+2\pi\times12\times\frac{60}{360}+12+4\times3$$
$$=8\pi+24\ (\mathrm{cm})$$

面積は　　$\pi\times4^2\times\frac{60}{360}+\pi\times8^2\times\frac{60}{360}+\pi\times12^2\times\frac{60}{360}=\frac{112}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

10

解説

点Oが動いてできる線は，次の図の太線である。



半円の弧が直線ℓに接しながら動くとき，Oとℓの距離は一定であるから，上の図のABはℓに平行な線分である。その長さは，半円Oの弧の長さに等しいから

$$\mathrm{AB}=2\pi\times4\times\frac{1}{2}=4\pi\,(\mathrm{cm})$$

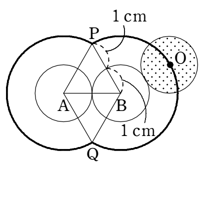
また，①の部分は，半径4 cm，中心角90°の扇形の弧である。

(1)　求める線の長さは　$\left(2\pi\times4\times\frac{90}{360}\right)\times2+4\pi=4\pi+4\pi=8\pi\,(\mathrm{cm})$

(2)　求める面積は　$\left(\pi\times4^2\times\frac{90}{360}\right)\times2+4\pi\times4=8\pi+16\pi=24\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

11

解説



円Oの中心が動いてできる線は，右の図の太線である。
右の図の△ABPと△ABQは正三角形であるから，扇形APQと扇形BPQの中心角の大きさはともに
360°－60°×2＝240°
$\overset{\frown}{PQ}$ は半径2 cm，中心角240°の扇形の弧であるから，求める線の長さは

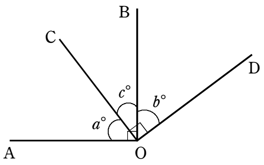
$$\left(2\pi\times2\times\frac{240}{360}\right)\times2=\frac{16}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$$

第１章　平面図形
レベルC

1

(解説)

(1)　$\angle AOC = a^\circ$，$\angle BOD = b^\circ$，
$\angle BOC = c^\circ$ とする。
$\angle AOB = 90^\circ$ から　　$a^\circ + c^\circ = 90^\circ$
$\angle COD = 90^\circ$ から　　$b^\circ + c^\circ = 90^\circ$
よって　$a^\circ = 90^\circ - c^\circ$，$b^\circ = 90^\circ - c^\circ$
したがって　$a^\circ = b^\circ$
すなわち　　$\angle AOC = \angle BOD$



(2)　$\angle AOD = a^\circ + c^\circ + b^\circ$ であるから

$$\angle AOD + \angle BOC = (a^\circ + c^\circ + b^\circ) + c^\circ$$
$$= (a^\circ + c^\circ) + (b^\circ + c^\circ)$$
$$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

2

(解説)

(1)　$\angle BOX = \angle EOX$，$\angle EOY = \angle HOY$
$\angle EOX + \angle EOY = \angle XOY = 40^\circ$
であるから

$$\angle BOH = \angle BOE + \angle EOH$$
$$= \angle BOX + \angle EOX + \angle EOY + \angle HOY$$
$$= \angle EOX + \angle EOX + \angle EOY + \angle EOY$$
$$= 2 \times \angle XOY = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$$

(2)　(1) の結果から，△GHI は △ABC を点 O を中心として時計の針の回転と反対の向きに 80° 回転移動したものであることがわかる。
よって，直線 CA を点 O を中心として時計の針の回転と反対の向きに 80° 回転移動すると，直線 IG になる。
したがって　　　$\angle APG = 80^\circ$

3

(解説)

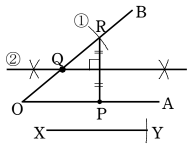
辺 OB 上に線分 XY と等しい長さの線分 OR をとる。
このとき，作図する点 Q について，次のことが成り立つ。

　　　　PQ＋QO＝OR
よって　　PQ＋QO＝RQ＋QO
したがって　PQ＝RQ

すなわち，点 Q は線分 PR の垂直二等分線上にあるから，次のように作図すればよい。

① 辺 OB 上に OR＝XY である点 R をとる。
② 線分 PR の垂直二等分線と辺 OB の交点を Q とする。

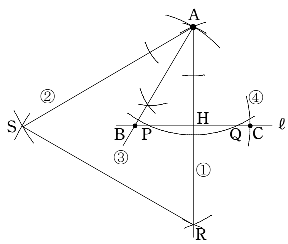
点 Q が求める点である。



4 ［東京都立高］

(解説)

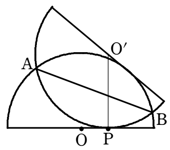
① 点 A を中心とする円をかき，ℓ との交点を P，Qとする。
P，Q をそれぞれ中心とする円をかき，点 A から ℓ に垂線を下ろし，AH＝RH となる点 R をとる。
② A，R をそれぞれ中心とする半径 AR の円をかき，AS＝RS となる点 S をとる。
③ $\angle SAR = 60^\circ$ であるから，$\angle SAR$ の角の二等分線をひき，ℓ との交点が B である。
④ 点 B を中心とする半径 BA の円をかき，BA＝BC となる ℓ 上の点が C である。

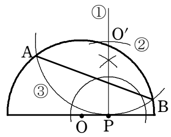


5

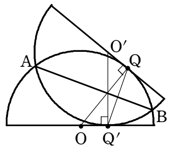
(解説)

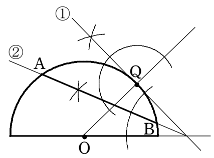
(1)　右の図の折り目 AB について，点 O と対称な点を O′ とする。このとき，O′P は半円 O′ の半径であり，OP は半円 O′ の接線になる。
よって，次のように作図すればよい。
① 点 P から直径に垂線を立てる。
② ① の垂線上に半円 O の半径と等しい長さの線分 O′P をとる。
③ 点 O′ を中心として半円 O と等しい半径の円をかく。
このとき，半円 O と円 O′ の 2 つの交点を結ぶ線分が折り目の線分である。





(2)　折り目について，点 Q と対称な点を Q′ とすると，半円 O の Q における接線は，折り目について直線 OQ′ と対称である。
よって，次のように作図すればよい。
① 点 Q における半円 O の接線を引く。
② ① の直線と半円 O の直径の延長が作る角の二等分線を引く。
このとき，② の直線と半円 O の 2 つの交点を結ぶ線分が折り目の線分である。
① の接線が直径と平行である場合には，OQ の垂直二等分線が折り目になる。



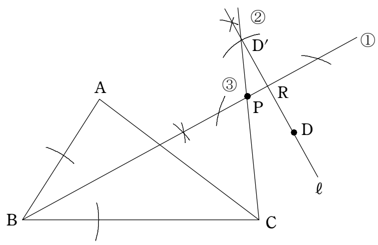


6 ［三重県］

(解説)

$\angle ABC$ の二等分線に対して，点 D と対称な点 D′ をとる。
DP＝D′P であるから，
CP＋DP を最短にする点 P は，直線 CD′ と $\angle ABC$ の二等分線との交点である。

① $\angle ABC$ の二等分線をひく。
② 点 D を通り，① の直線に垂直な直線 ℓ をひき，① との交点を R とする。ℓ 上に D′R＝DR となる点 D′ をとる。
③ 直線 CD′ と ① でひいた直線の交点を P とする。



7

解説

(1)　扇形 OAB の $\overset{\frown}{AB}$ の長さは，円 O′ の周の長さと等しい。
扇形 OAB の中心角の大きさを $a°$ とすると

$$2\pi\times6\times\frac{a}{360}=2\pi\times2$$

よって　$a=120$

したがって，扇形 OAB の面積は

$$\pi\times6^2\times\frac{120}{360}=12\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

(2)　周の長さは

$$2\pi\times2\div2\times2+2\pi\times10\times\frac{120}{360}+2\pi\times6\times\frac{120}{360}=4\pi+\frac{20}{3}\pi+4\pi=\frac{44}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$$

面積は

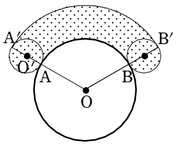
$$\pi\times2^2\div2\times2+\left(\pi\times10^2\times\frac{120}{360}-\pi\times6^2\times\frac{120}{360}\right)$$
$$=4\pi+\left(\frac{100}{3}\pi-12\pi\right)=\frac{76}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

別解　(扇形の面積)$=\frac{1}{2}\times$(弧の長さ)$\times$(半径)
であることを利用する。

(1)　$\overset{\frown}{AB}=2\pi\times2=4\pi\,(\mathrm{cm})$　であるから，求める面積は

$$\frac{1}{2}\times4\pi\times6=12\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

(2)　中心角の大きさが等しい扇形の弧の長さは，半径に比例する。
よって，右の図において



$$\overset{\frown}{A'B'}=4\pi\times\frac{10}{6}=\frac{20}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$$

したがって，周の長さは

$$2\pi\times2\div2\times2+\frac{20}{3}\pi+4\pi=\frac{44}{3}\pi\,(\mathrm{cm})$$

また，扇形 OA′B′ の面積は

$$\frac{1}{2}\times\frac{20}{3}\pi\times10=\frac{100}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

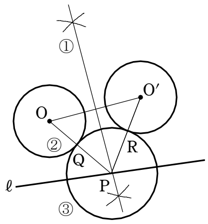
であるから，面積は

$$\pi\times2^2\div2\times2+\left(\frac{100}{3}\pi-12\pi\right)=\frac{76}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

8

解説

作図する円の中心を P とし，円 P と 2 つの円 O，O′ との接点を Q，R とする。このとき，OP＝O′P と OQ＝O′R より PQ＝PR となるから，次のように作図すればよい。



①　線分 OO′ の垂直二等分線を引き，直線 ℓ との交点を P とする。
②　線分 OP と円 O の交点を Q，線分 O′P と円 O′ の交点を R とする。
③　点 P を中心として半径 PQ（または PR）の円をかく。
③ の円が求めるものである。

1 ★

	三角柱	四角柱	正四面体	正八面体	正十二面体
頂点の数	6	8	4	6	20
面の数	5	6	4	8	12
辺の数	9	12	6	12	30

2 ★

(1)　面 ABCD，BCGF，ADHE は正方形であるから，辺 AD と平行な辺は
　　辺 BC，FG，EH

(2)　辺 EF とねじれの位置にある辺は，EF と同じ平面上にない辺であるから
　　辺 AD，BC，DH，CG

(3)　BF⊥AB，BF⊥BC
であるから，辺 BF と面 ABCD は垂直である。
　BF⊥EF，BF⊥FG
であるから，辺 BF と面 EFGH は垂直である。
よって，辺 BF と垂直な面は
　面 ABCD，EFGH

(4)　平面 BFHD と平行な辺は，平面 BFHD と交わらない辺であるから
　辺 AE，CG

(5)　平行な位置関係にある面は
　面 ABCD と EFGH,
　面 ABFE と DCGH,
　面 ADHE と BCGF
よって　3 組

(6)　直線 AB は，面 BCGF，ADHE のそれぞれと垂直であるから，平面 ABGH と垂直な面は　面 BCGF，ADHE

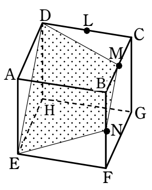
3 ★★

①　正しい。
②　P と Q は交わる場合があるので，正しくない。
③　ℓ と m は交わる場合もねじれの位置にある場合もあるので，正しくない。
よって，正しいものは　①

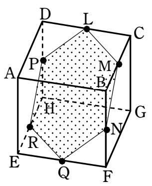
4 ★★

(1)　切り口は △ACF になる。
面 ABCD，AEFB，BFGC は合同な正方形であるから，対角線 AC，AF，CF の長さは等しい。
よって，切り口は　正三角形

(2)　切り口は四角形 MNED になる。
面 BCGF と面 ADHE は平行であるから
　MN∥DE
よって，切り口は　台形
注意　DM＝EN であるから，切り口の台形は等脚台形となる。

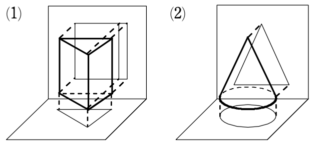


(3)　辺 DH，EF，EH の中点をそれぞれ P，Q，R とすると，切り口は六角形 LMNQRP になる。
　△CLM，△BMN，△FNQ,
　△ERQ，△HPR，△DLP
は合同な直角二等辺三角形であるから
　LM＝MN＝NQ＝QR＝RP＝PL
よって，切り口は　正六角形



5 ★★

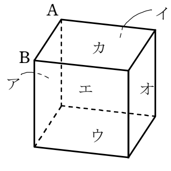
(1)　正面から見た図は長方形が組み合わさっているから，①～⑦の立体の中では，角柱と考えられる。
真上から見た形が三角形であるから，この立体は三角柱である。
　答　⑥



(2)　正面から見た図は三角形であるから，この立体は錐体か三角柱と考えられる。
真上から見た形が円であるから，この立体は円錐である。
　答　③

6 ★★

展開図を組み立てると，図のようになる。



(1)　面アと平行になる面は，面アと交わらない面であるから　面オ

(2)　面ウと垂直になる面は
　面ア，イ，エ，オ

(3)　辺 AB と平行になる面は，直線 AB と交わらない面であるから
　面ウ，オ

(4)　辺 AB と垂直になる面は
　面イ，エ

7 ★

(1)　底面積は
$$\pi\times5^2=25\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$
側面となる扇形の半径は，円錐の母線の長さに等しく
　9 cm
また，扇形の弧の長さは，底面の円周の長さに等しいから
$$2\pi\times5=10\pi\,(\mathrm{cm})$$
よって，側面積は
$$\frac{1}{2}\times10\pi\times9=45\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$
したがって，表面積は
$$25\pi+45\pi=70\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

(2)　半径 9 cm の円と半径 5 cm の円の円周の長さの比は
　9：5
扇形の弧の長さと中心角の大きさは比例するから，側面となる扇形の中心角の大きさは　$360^\circ\times\dfrac{5}{9}=200^\circ$

8 ★

表面積　$4\pi\times2^2=16\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

体積　$\dfrac{4}{3}\pi\times2^3=\dfrac{32}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

例題演習

$\boxed{9}$★★

(1)　[1]　表面積について

円柱の底面積は

$$\pi\times6^2=36\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

円柱の側面積は

$$6\times(2\pi\times6)=72\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

半球の表面積は

$$(4\pi\times6^2)\times\frac{1}{2}=72\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

よって，求める表面積は

$$36\pi+72\pi+72\pi=180\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

[2]　体積について

円柱の体積は

$$36\pi\times6=216\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

半球の体積は

$$\left(\frac{4}{3}\pi\times6^3\right)\times\frac{1}{2}=144\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

よって，求める体積は

$$216\pi+144\pi=360\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

(2)　[1]　表面積について

底面積は

$$\pi\times4^2\times\frac{80}{360}=\frac{32}{9}\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

側面の曲面の部分の面積は

$$9\times\left(2\pi\times4\times\frac{80}{360}\right)=16\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

よって，側面積は

$$16\pi+(9\times4)\times2=16\pi+72\,(\mathrm{cm}^2)$$

したがって，求める表面積は

$$\frac{32}{9}\pi\times2+(16\pi+72)=\frac{208}{9}\pi+72\,(\mathrm{cm}^2)$$

[2]　体積について

$$\frac{32}{9}\pi\times9=32\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

$\boxed{1}$

(1)

	直方体	五角柱	四角錐	四面体	正二十面体
頂点の数	8	10	5	4	12
面の数	6	7	5	4	20
辺の数	12	15	8	6	30

(2)　$v+f-e=2$

（$v+f=e+2$　などでもよい。）

$\boxed{2}$

(1)　面 ABHG，EDJK は長方形で，面 ABCDEF は正六角形であるから，辺 AB と平行な辺は　　辺 GH，DE，JK

(2)　辺 BC とねじれの位置にある辺は，BC と同じ平面上にない辺であるから

辺 AG，DJ，EK，FL，GH，IJ，JK，LG

(3)　面 ABCDEF と垂直な辺は

辺 AG，BH，CI，DJ，EK，FL

よって　　6 本

(4)　平面 ABJK と平行な辺は，平面 ABJK と交わらない辺であるから

辺 DE，GH

(5)　平行な位置関係にある面は

面 ABCDEF と面 GHIJKL，面 ABHG と面 EDJK，

面 BCIH と面 FEKL，面 CDJI と面 AFLG

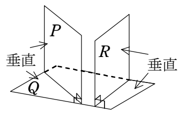
よって　　4 組

(6)　直線 BH は，面 ABCDEF，GHIJKL のそれぞれと垂直であるから，面 BCIH と垂直な面は　　面 ABCDEF，GHIJKL

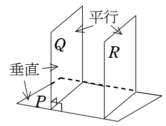
$\boxed{3}$

(1)　×　　(2)　○　　(3)　×　　(4)　×　　(5)　○　　(6)　×

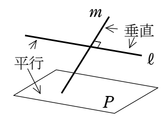
(1)



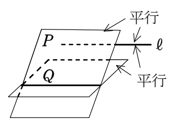
(2)



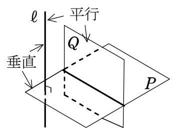
(3)



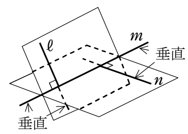
(4)



(5)

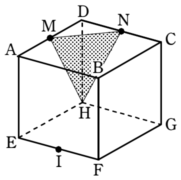


(6)

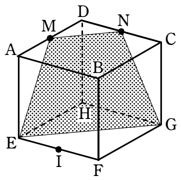


4

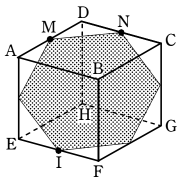
(1)　3 点 M，N，H を通る平面は立方体の 3 つの面と交わるから，切り口は三角形になる。



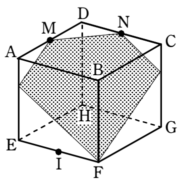
(2)　3 点 M，N，E を通る平面は立方体の 4 つの面と交わるから，切り口は四角形になる。



(3)　3 点 M，N，I を通る平面は立方体の 6 つの面と交わるから，切り口は六角形になる。

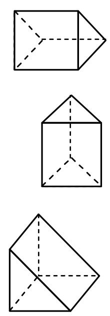


(4)　3 点 M，N，F を通る平面は立方体の 5 つの面と交わるから，切り口は五角形になる。



5

ア，イ，ウは右の図のようなときに，投影図としてできる。
どこから見ても，投影図にならないのは
　エ



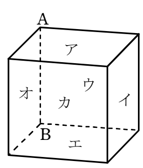
6

展開図を組み立てたとき，右の図のようになる。

(1)　面アと平行になる面は
　面エ

(2)　面ウと垂直になる面は
　面ア，イ，エ，オ

(3)　辺 AB と平行になる面は
　面イ，カ



7

(1)　側面となる扇形の弧の長さは，底面の円周の長さに等しいから

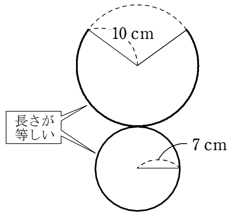
$2\pi\times7=14\pi\,(\mathrm{cm})$

側面積は　$\frac{1}{2}\times14\pi\times10=70\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

底面積は　$\pi\times7^2=49\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

したがって，表面積は

$70\pi+49\pi=119\pi\,(\mathrm{cm}^2)$　答



(2)　側面となる扇形の中心角を a° とする。

半径 10 cm の円周の長さは $2\pi\times10\,(\mathrm{cm})$ であり，底面の周の長さが扇形の弧の長さに等しいから　$2\pi\times7=2\pi\times10\times\frac{a}{360}$

よって　$a=360\times\frac{7}{10}=252$　　答　252°

8

(1)　表面積は　$4\pi\times4^2=64\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

体積は　$\frac{4}{3}\pi\times4^3=\frac{256}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

(2)　表面積は　$4\pi\times3^2=36\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

体積は　$\frac{4}{3}\pi\times3^3=36\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

(3)　直径が 2 cm であるから，半径は 1 cm である。

表面積は　$4\pi\times1^2=4\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

体積は　$\frac{4}{3}\pi\times1^3=\frac{4}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

(4)　直径が 12 cm であるから，半径は 6 cm である。

表面積は　$4\pi\times6^2=144\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

体積は　$\frac{4}{3}\pi\times6^3=288\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

9

(1)　できる立体は，半径が 3 cm の半球である。

よって，求める体積は

$\left(\frac{4}{3}\pi\times3^3\right)\times\frac{1}{2}=18\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

(2)　できる立体は，底面の半径が 4 cm の円，高さが 5 cm の円錐である。

よって，求める体積は

$\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times5=\frac{80}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

第２章　空間図形
レベルA

1

(1)　与えられた条件を満たす平面は

平面 ABC，ABE，ABD

であるから　　3 つ

(2)　与えられた条件を満たす平面は

平面 ACE

であるから　　1 つ

(3)　与えられた条件を満たす平面は

1 つもない

2

(ア)　5　　(イ)　正五　　(ウ)　3

(エ)　1 つの頂点に 3 つの面が集まっているから，頂点の数は

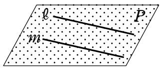
$5\times12\div3=20$

(オ)　1 つの辺に 2 つの面が集まっているから，辺の数は

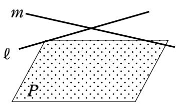
$5\times12\div2=30$

3

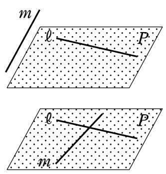
(1)　$\ell /\!/ m$ となる場合がある。



(2)　$m /\!/ P$ となる場合がある。



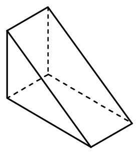
(3)　ねじれの位置となる場合と交わる場合がある。



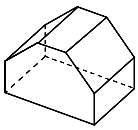
4

投影図で表された立体の見取図は，次のようになる。

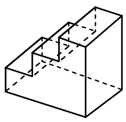
(1)



(2)



(3)



(1)　五面体

(2)　八面体

(3)　十面体

5

(1)　展開図を組み立てたとき，点 C と点 G が重なり，点 D と点 F が重なるから，辺 CD に重なる辺は

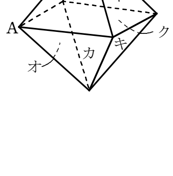
辺 GF

(2)　展開図を組み立てたとき，右の図のようになるから，点 A に集まる面は

面ア，エ，オ，カ

(3)　面イと平行になる面は

面オ



6

(1)　切り口は三角形になる。

(2)　切り口は四角形になる。

(3)　3 点 M，N，K を通る平面は，辺 BF，DH 上の点をそれぞれ通るから，切り口は五角形になる。

(4)　3 点 M，N，J を通る平面は，辺 DH，FG，GH 上の点をそれぞれ通るから，切り口は六角形になる。

7

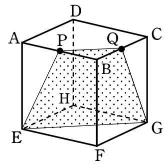
立方体を点 P，Q，E を通る平面で切ったとき，切り口の図形は台形 PQGE である。

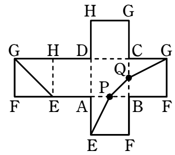
切り口の線は，

面 ABCD に線分 PQ，面 ABFE に線分 PE，

面 BCGF に線分 QG，面 EFGH に線分 EG

が現れるから，展開図は次のようになる。

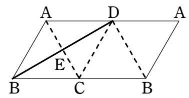




8

展開図において，2 点 B，D を結ぶ線のうち，最も長さが短いのは線分 BD である。

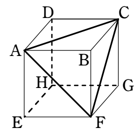
したがって，右の図のように，線分 BD と辺 AC の交点を E とすればよい。

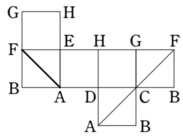


9

右の図のように，立方体の頂点を決めると，その展開図は，次のようになる。

よって，次の図において，残りの線分 AF をかき加えればよい。



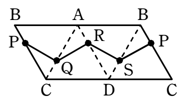


10

(1)　展開図に，辺 BC，CA，AD，DB をそれぞれ 1 : 2 に分ける

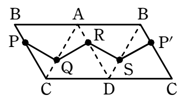
点 P，Q，R，S

をとり，線分で結べばよいから，右の図のようになる。



(2)　右の展開図において，2 点 P，P′ を結ぶ線のうち，長さが最小となるのは線分 PP′ である。

よって，線分 PP′ と AC，AD，BD の交点をそれぞれ Q，R，S とすればよい。



したがって，4 つの線分の長さの和が最小になるのは，展開図において

4 点 P，Q，R，S が一直線上にある

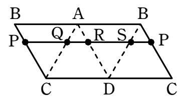
とき，すなわち

BP＝AQ＝AR＝BS

が成り立つときである。

また，その最小の値は

$2\times2=4\,(\mathrm{cm})$



11

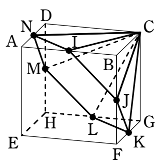
(1)　立方体の各辺の中点を通る平面で切っているから，求める立体の体積は，立方体の体積の半分である。

したがって　$4^3\times\dfrac{1}{2}=32\,(\mathrm{cm}^3)$

(2)　六角錐 C−IJKLMN は，(1) の立体から，3 つの合同な三角錐 C−DMN，C−BIJ，C−KGL を取り除いたものである。

よって，求める体積は

$$32-\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2^2\right)\times4\right\}\times3=24\,(\mathrm{cm}^3)$$



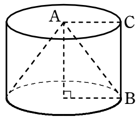
レベルB

12

(1)　できる立体は，底面の半径が 2 cm，高さが 3 cm の円錐を 2 つ組み合わせたものである。

よって，求める体積は　$\left(\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times3\right)\times2=8\pi\,(\text{cm}^3)$

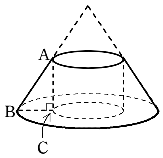
(2)　できる立体は，底面の半径が 3 cm，高さが 4 cm の円柱から，底面の半径が 3 cm，高さが 4 cm の円錐を取り除いたものである。



よって，求める体積は

$$\pi\times3^2\times4-\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times4=24\pi\,(\text{cm}^3)$$

(3)　できる立体は，底面の半径が 4 cm，高さが 6 cm の円錐から，底面の半径が 2 cm，高さが 3 cm の円錐と底面の半径が 2 cm，高さが 3 cm の円柱を取り除いたものである。



よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times6-\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times3-\pi\times2^2\times3=16\pi\,(\text{cm}^3)$$

13

できる立体は，底面の半径が 6 cm，高さが 8 cm の円錐から，底面の半径が 3 cm，高さが 4 cm の円錐を取り除いたものである。

よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times8-\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times4=84\pi\,(\text{cm}^3)$$

14

(1)　球の体積は　$\frac{4}{3}\pi\times5^3=\frac{500}{3}\pi\ (\text{cm}^3)$

円柱の体積は　$\pi\times5^2\times10=250\pi\ (\text{cm}^3)$

よって，球と円柱の体積の比は　$\frac{500}{3}\pi:250\pi=2:3$　答

(2)　球の表面積は　$4\pi\times5^2=100\pi\ (\text{cm}^2)$

円柱の表面積は　$(\pi\times5^2)\times2+2\pi\times5\times10=150\pi\ (\text{cm}^2)$

よって，球と円柱の表面積の比は　$100\pi:150\pi=2:3$　答

15

曲面の部分の面積は　$(4\pi\times6^2)\times\frac{1}{4}=36\pi\ (\text{cm}^2)$

平面の部分の面積は　$\pi\times6^2=36\pi\ (\text{cm}^2)$

よって，求める表面積は　$36\pi+36\pi=72\pi\ (\text{cm}^2)$

また，求める体積は　$\left(\frac{4}{3}\pi\times6^3\right)\times\frac{1}{4}=72\pi\ (\text{cm}^3)$

16

影をつけた部分を 1 回転させてできる立体は，AB を直径とする半円を 1 回転させてできる球から，△ACH と △BCH を 1 回転させてできる円錐を取り除いたものである。

AB を直径とする半円を 1 回転させてできる球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi\times3^3=36\pi\,(\text{cm}^3)$$

△ACH と △BCH を 1 回転させてできる円錐の体積の和は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times\text{AH}+\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times\text{BH}&=\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times(\text{AH}+\text{BH})\\&=\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times6\\&=8\pi\,(\text{cm}^3)\end{aligned}$$

よって，求める体積は

$$36\pi-8\pi=28\pi\,(\text{cm}^3)$$

17［宮城県］

斜線部分を，直線 AB を軸として回転させてできる立体は，底面の半径が r cm，高さが r cm の円柱から，半径が r cm の半球を取り除いたものである。

よって，求める立体の体積は

$$\pi\times r^2\times r-\frac{4}{3}\pi\times r^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\pi r^3\ (\text{cm}^3)$$

1

(1)　切り口の 3 つの辺の長さはすべて等しくなる。

よって，切り口は　正三角形

(2)　面の数は，立方体の面の数と頂点の数の和に等しいから

$6+8=14$

辺の数は，切り口の正三角形が 8 つあるから

$3\times8=24$

立方体の各辺の中点が頂点になっているから，頂点の数は立方体の辺の数に等しく

12

2

正五角形 12 面の辺の数は　5×12 本

正六角形 20 面の辺の数は　6×20 本

これらの辺が 2 本重なって多面体の辺が 1 本できる。

よって，多面体の辺の数は

$(5\times12+6\times20)\div2=90$

頂点の数は，正五角形の頂点の総数に等しいから

$5\times12=60$

別解　1 つの頂点に 3 つの面が集まっているから，求める頂点の数は

$(5\times12+6\times20)\div3=60$

3

①　3 つの点が一直線上にあるとき，その 3 点を含む平面は無数にある。

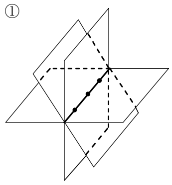
よって，正しくない。

②　$\ell\,/\!/\,P$ かつ $m\,/\!/\,P$ であっても，ℓ と m がねじれの位置にあることがある。

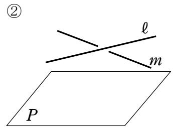
よって，正しくない。

③　正しい

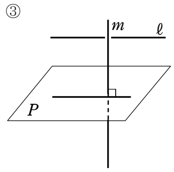
①



②



③



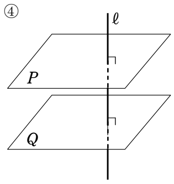
④　正しい

⑤　$\ell\,/\!/\,m$ のとき，$\ell\perp n$ かつ $m\perp n$ であって，n が P に含まれていることがある。

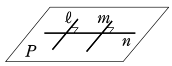
よって，正しくない。

⑥　正しい

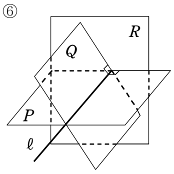
④



⑤

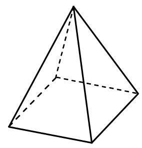


⑥



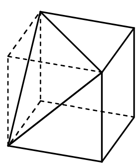
⑦　底面の向かい合う辺は，頂点を共有しないが，ねじれの位置にない。

よって，正しくない。



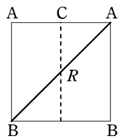
答　③，④，⑥

4

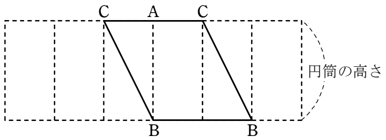


5

(1)　展開図において，2 点 A，B を結ぶ線のうち，最も長さが短いのは線分 AB である。
よって，右の図のようになる。

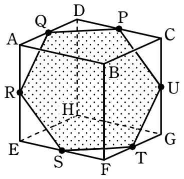


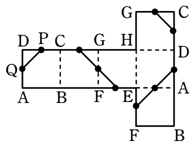
(2)　展開図において，2 点 C，B を結ぶ線のうち，最も長さが短いのは線分 CB である。
よって，線 S で切り，外側を表にして開いたときの展開図は，右の図のようになる。



6

辺 EF，FG，CG の中点をそれぞれ S，T，U とする。
立方体を
　3 点 P，Q，R
を通る平面で切ったとき，切り口の図形は正六角形 PQRSTU である。
切り口の線は，面 ABCD に線分 PQ，
　面 AEHD に線分 QR，
　面 ABFE に線分 RS，
　面 EFGH に線分 ST，
　面 BCGF に線分 TU，
　面 CDHG に線分 UP
が現れるから，右の図のようになる。

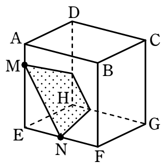


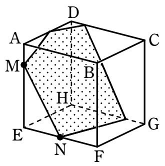


7

(1)　$0<t\leqq 4$ のとき，点 P は辺 EH 上にある。
このとき，切り口の図形は △MNP である。
よって　三角形

(2)　点 P が辺 HG 上を動くとき，切り口の図形は，次の図のように変化する。





よって　四角形，五角形

8

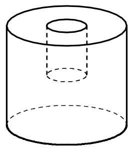
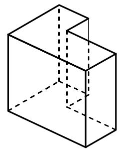
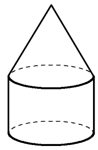
5 つの事柄それぞれに当てはまる立体は，次の通りである。
[1]　切り口が円になる可能性のある立体
(A)　①，④
[2]　切り口が四角形になる可能性のある立体
(B)　②，③，④，⑤，⑥
[3]　切り口が三角形になる可能性のある立体
(B，C，D)　①，②，③，⑤
[4]　切り口が六角形にはならない立体
(A，F)　①，②，③，④
[5]　切り口が五角形になる可能性のある立体
(D，F)　③，⑤，⑥
F は [4]，[5] に当てはまるから
　F は ③
D は [3]，[5] に当てはまる。また，D は ③ ではないから
　D は ⑤
B は [2]，[3] に当てはまる。また，B は ③，⑤ ではないから
　B は ②
C は [3] に当てはまる。また，C は ②，③，⑤ ではないから
　C は ①
A は [1]，[4] に当てはまる。また，A は ① ではないから
　A は ④
残った E は ⑥ になる。
　答　A：④，　B：②，　C：①，　D：⑤，　E：⑥，　F：③

9 ［熊本マリスト学園］

(1)　求める円錐の側面積は
$$\frac{1}{2}\times(2\pi\times3)\times5=15\pi\ (\mathrm{cm}^2)$$
(2)　大きな円錐の側面積は
$$\frac{1}{2}\times(2\pi\times6)\times10=60\pi\ (\mathrm{cm}^2)$$
よって，求める立体の側面積は
$$60\pi-15\pi=45\pi\ (\mathrm{cm}^2)$$

10

投影図で表される立体は，次のようになる。

(1)

(2)

(3)


(1)　投影図で表される立体は，底面の半径が 6 cm，高さが 10 cm の円柱から，底面の半径が 2 cm，高さが 5 cm の円柱を取り除いたものである。
よって，求める体積は
$$\pi\times6^2\times10-\pi\times2^2\times5=340\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$
(2)　投影図で表される立体は，底面が縦 7 cm，横 $9-5=4$ (cm) の長方形と，縦 4 cm，横 5 cm の長方形を合わせたもので，高さが 8 cm の角柱である。
よって，求める体積は
$$(7\times4+4\times5)\times8=384\ (\mathrm{cm}^3)$$
(3)　投影図で表される立体は，底面の半径が 3 cm，高さが 4 cm の円柱と，底面の半径が 3 cm，高さが 5 cm の円錐を組み合わせた立体である。
よって，求める体積は
$$\pi\times3^2\times4+\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times5=51\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

11

(1)　円錐の底面の円周の長さは
$$2\pi\times3=6\pi\ (\mathrm{cm})$$
円錐は 6 回転したところで，もとの位置に戻ってきたから，Q 上にえがいた曲線の長さは　$6\pi\times6=36\pi$ (cm)
(2)　(1) でえがいた曲線は，点 O を中心とする円周である。
その長さが 36π cm であるから，えがいた円の半径は
$$36\pi\div2\pi=18\ (\mathrm{cm})$$
よって，求める面積は
$$\pi\times18^2=324\pi\ (\mathrm{cm}^2)$$
(3)　(2) で求めた面積は，円錐の側面積の 6 倍にあたるから，円錐の側面積は
$$324\pi\div6=54\pi\ (\mathrm{cm}^2)$$
円錐の底面積は
$$\pi\times3^2=9\pi\ (\mathrm{cm}^2)$$
よって，求める表面積は
$$54\pi+9\pi=63\pi\ (\mathrm{cm}^2)$$

12

(1)　立体 F は
　底面の半径が 4 cm，高さが 8 cm の円錐から，
　底面の半径が 2 cm，高さが 4 cm の円錐と
　底面の半径が 4 cm，高さが 1 cm の円錐を
取り除いたものである。
したがって，F の体積は
$$\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times8-\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times4-\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times1=32\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$
(2)　立体 G は底面の半径が 4 cm，高さが 3 cm の円柱と底面の半径が 4 cm，高さが 1 cm の円錐を組み合わせたものから，底面の半径が 2 cm，高さが 4 cm の円錐を取り除いたものである。
したがって，G の体積は
$$\pi\times4^2\times3+\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times1-\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times4=48\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$
よって　(F の体積)：(G の体積)$=32\pi:48\pi=2:3$

13

$BQ=4\div2=2$ (cm)
$AR=BS=6\div2=3$ (cm)

三角柱 ABCDEF の体積は

$\frac{1}{2}\times2\times4\times6=24$ (cm^3)

P を通り面 BCFE に平行な平面と，辺 AB，RS との交点を，それぞれ G，H とする。このとき，

$BG=SH=1$ cm，$PG=2$ cm，$GH=3$ cm

である。

三角柱 PGHQBS の体積は

$\frac{1}{2}\times2\times3\times1=3$ (cm^3)

四角錐 P−ARHG の体積は

$\frac{1}{3}\times(3\times1)\times2=2$ (cm^3)

よって，求める体積は

$24-3-2=19$ (cm^3)

14

(1)　線分 IJ とねじれの位置にある辺は，IJ と同じ平面上にない辺であるから

辺 AD，BC，CD，EH，FG，GH，DH，CG

(2)　$AI=6\div2=3$ (cm)

$BJ=CK=6\div3=2$ (cm)

3 点 I，J，K を通る平面と辺 DH の交点を L とする。

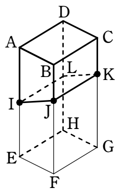
IL∥JK であるから

$DL=AI=3$ (cm)

小さい方の立体は，底面が上底 2 cm，下底 3 cm，高さ 2 cm の台形で，高さが 3 cm の四角柱である。

よって，求める体積は

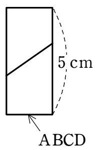
$\left\{\frac{1}{2}\times(2+3)\times2\right\}\times3=15$ (cm^3)



別解　小さい方の立体を 2 つ組み合わせると，底面が長方形 ABCD，高さが 5 cm の直方体ができる。

求める体積はこの直方体の体積の半分であるから

$2\times3\times5\div2=15$ (cm^3)



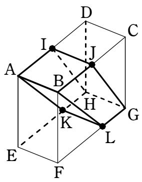
15

$AI=BJ=12\div2=6$ (cm)
$KH=LG=12\div3=4$ (cm)

よって，A，B，J，I，K，L，G，H を頂点とする立体は，底面が四角形 BJGL，高さが AB の四角柱である。

すなわち，底面が上底 6 cm，下底 4 cm，高さ 10 cm の台形で，高さが 6 cm の四角柱であるから，その体積は

$\left\{\frac{1}{2}\times(6+4)\times10\right\}\times6=300$ (cm^3)



一方，もとの直方体の体積は

$6\times12\times10=720$ (cm^3)

したがって　$\frac{300}{720}=\frac{5}{12}$ (倍)

16

円柱の底面の半径を r とする。

(1)　円錐の体積は　$\frac{1}{3}\times\pi r^2\times2r=\frac{2}{3}\pi r^3$

球の体積は　$\frac{4}{3}\pi r^3$

円錐の体積は，円柱の体積の $\frac{1}{3}$ 倍であるから

$216\pi\times\frac{1}{3}=72\pi$ (cm^3)

球の体積は，円錐の体積の 2 倍であるから

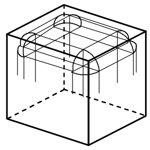
$72\pi\times2=144\pi$ (cm^3)

(2)　円柱の表面積は　$\pi r^2\times2+2\pi r\times2r=6\pi r^2$

球の表面積は　$4\pi r^2$

よって，球の表面積は　$144\pi\times\frac{4\pi r^2}{6\pi r^2}=96\pi$ (cm^2)

17



立方体の内部で球が動き回ることができる部分は，次の 4 種類の立体に分割できる。

①　半径 1 cm の球を 8 分割したもの
②　半径 1 cm，中心角 90° の扇形を底面とする，高さ 3 cm の柱体
③　1 辺が 3 cm の正方形を底面とする，高さ 1 cm の直方体
④　1 辺が 3 cm の立方体

① が 8 個，　② が 12 個，
③ が 6 個，　④ が 1 個

あるから，求める体積は

$$\frac{4}{3}\pi\times1^3\times\frac{1}{8}\times8+\pi\times1^2\times\frac{90}{360}\times3\times12+3^2\times1\times6+3^3=\frac{31}{3}\pi+81\ (\text{cm}^3)$$

1

(1)　立方体は，1 つの頂点に 3 つの正方形が集まっている。
（1 つの頂点に集まる角の和　$90°\times3=270°<360°$）
1 つの頂点に 4 つの正方形が集まると，角の和は $90°\times4=360°$ となり，平面になってしまう。
よって，1 つの頂点に 4 つ以上の正方形が集まるような正多面体はできない。
したがって，各面が正方形である正多面体は，立方体以外にはない。

(2)　正十二面体は，1 つの頂点に 3 つの正五角形が集まっている。
（1 つの頂点に集まる角の和　$108°\times3=324°<360°$）
$108°\times4=432°$ であるから，1 つの頂点に 4 つ以上の正五角形が集まることはできない。
したがって，各面が正五角形である正多面体は，正十二面体以外にはない。

2

(1)　3 点 A，R，S で定まる平面に点 E は含まれないから，直線 ES は平面 ARS 上にはない。
よって，2 直線 AR，ES はねじれの位置にある。

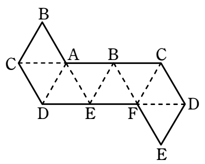
(2)　①　当てはまる直線は
BP,　BQ,　BS,　BT,　BU,
CP,　CQ,　CS,　CT,　CU,
DP,　DQ,　DS,　DT,　DU,
EP,　EQ,　ES,　ET,　EU,
FP,　FQ,　FS,　FT,　FU
よって　25 本

②　3 点 A，B，R で定まる平面は，AB∥UR から，点 U を含むことがわかる。
この平面に含まれる 2 直線 AR，BU は平行ではないから，1 点で交わる。
同様に，3 点 A，C，R で定まる平面は，AC∥PR から，点 P を含むことがわかる。
この平面に含まれる 2 直線 AR，CP は平行ではないから，1 点で交わる。
さらに，3 点 A，D，R で定まる平面は，AD∥QR から，点 Q を含むことがわかる。
この平面に含まれる 2 直線 AR，DQ は平行ではないから，1 点で交わる。
直線 BU，CP，DQ 以外には，直線 AR と交わる直線はない。
よって　3 本

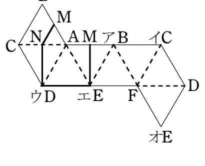
③　3 点 A，F，R で定まる平面は，AF∥RS から，点 S を含むことがわかる。
この平面に含まれる 2 直線 AR，FS は平行である。
直線 FS 以外には，直線 AR と平行な直線はない。
よって，② と合わせて，直線 AR と同じ平面上にある直線は
$3+1=4$ (本)
① の 25 本のうち，この 4 本以外のものがねじれの位置にある。
よって　　$25-4=21$ (本)

3

(1)　図 1 の正八面体の展開図は，右のようになる。
よって，頂点 E にあたる点は
エ，オ

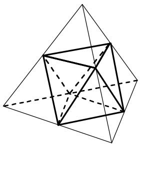


(2)　図 2 において，辺 AB，AC 上にそれぞれ M，N をとり，右の図のように，
点 M，N，ウ (D)，エ (E)，M
を線分で結べばよい。



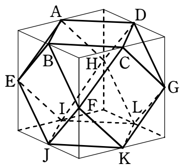
4

(1)　正四面体の 1 つの角を切り落としたとき，その切り口は，正四面体の辺の長さの $\frac{1}{2}$ の長さを 1 辺とする，正三角形になる。
一方，正四面体の 1 つの面に着目したとき，3 つの角を切り落としたあとにその面に残る部分は，正四面体の辺の長さの $\frac{1}{2}$ の長さを 1 辺とする正三角形になる。



このように考えると，正四面体の角を切り落としたときにできる多面体は，8 個の合同な正三角形でできた立体であることがわかる。
したがって，できる立体は
正八面体

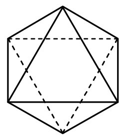
(2)　立方体の角を切り落としたときにできる多面体は，右の図のようになる。
立方体の角を切り落とすと，もとの立方体の 1 つの頂点につき 3 本の辺ができる。その辺は，立方体の頂点によって重複しないから，角を切り落としたときにできる多面体の辺の数は
$3\times8=24$ (本)



右の図の辺 AB に着目して考える。
AB 以外の辺に着目しても，立方体を適当に回転させることによって，着目した辺が AB の位置にくるようにできるから，AB に着目して問題はない。
24 本の辺を分類する。
①　AB 自身
②　AB と平行なもの
DC，IJ，LK
③　AB と平行ではないが同じ平面上にあるもの
BC，AD，AE，BE，BF，AH，FK，HL
④　ねじれの位置にあるもの
①，②，③ 以外の辺
①，②，③ の辺は合計で 12 本ある。
したがって，ねじれの位置にある辺は
$24-12=12$ (本)

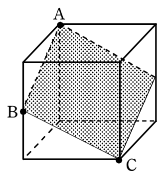
5

正八面体はすべての面が正三角形で構成されており，1 つの面を下にして平らな台の上におくと，上面には上下逆向きの正三角形が現れる。
よって平面図は，右の図のように正三角形と正六角形を組み合わせた図形になる。

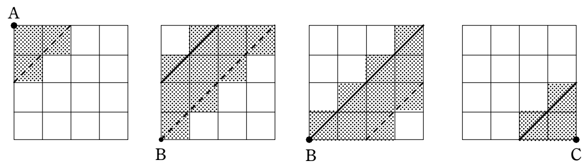


6

大きい立方体を 3 点 A，B，C を通る平面で切断したとき，切り口は右の図のようなひし形になる。
各段を真上からみたとき，切り口の線は次の図のようになる。ただし，各段の上側の面における切り口の線は実線 (——)，下側の面における切り口の線は点線 (- - - -) で表している。
また，切断される小さい立方体には，影を付けている。



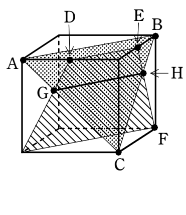
①　1 段目　　②　2 段目　　③　3 段目　　④　4 段目



よって，切断される小さい立方体は全部で
$3+9+9+3=24$ (個)　ある。
したがって，切断されない小さい立方体の個数は
$64-24=40$ (個)

7

立方体を切ったときにできる平面は，右の図のようになる。
よって，その交線のうち，立方体の内部にある部分は
線分 GH



$\boxed{8}$［福井県］

(1)　4 番目の立体の表面積は

$$4\times4\times2+1\times4\times4=48\ (\mathrm{cm}^2)$$

(2)　n 番目の立体の表面積は

$$n\times n\times2+1\times n\times4=2n^2+4n\ (\mathrm{cm}^2)$$

$\boxed{9}$［東京都］

(1)　∠DAP の大きさは，面 DAEH と 面 AEFB のなす角と同じである。

よって　　∠DAP＝90°

(2)　直線 PQ と辺 BC の交点を R とする。

立体 P－AQD は，直方体 ABCD－EFGH から三角柱 ABR－EFQ，
三角柱 DCR－HGQ，三角錐 P－RDA，四角錐 Q－AEHD を除いた図形である。
P は CF の中点であるから

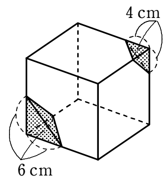
$$\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}=\frac{1}{2}\mathrm{CG}=3\ (\mathrm{cm})$$

よって，立体 P－AQD の体積は

$$8\times8\times6-\frac{1}{2}\times8\times4\times6-\frac{1}{2}\times8\times4\times6-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times8\times8\times3-\frac{1}{3}\times8\times6\times8$$
$$=384-96-96-32-128$$
$$=32\ (\mathrm{cm}^3)$$

$\boxed{10}$

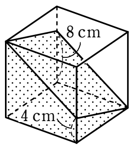
(1)　展開図を組み立てたとき，切り落とす立体は
底面が，等しい辺の長さが 6 cm の直角二等辺三角形で，
高さが 6 cm の三角錐
および，
底面が，等しい辺の長さが 4 cm の直角二等辺三角形で，
高さが 4 cm の三角錐
となる。
この 2 つの三角錐は，共通部分をもたない。
よって，求める体積は



$$12^3-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6^2\right)\times6-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4^2\right)\times4=\frac{5044}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

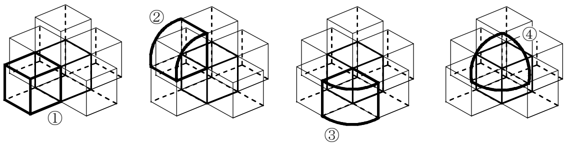
(2)　展開図を組み立てたとき，切り落とす立体は，立方体を半分に
切ったものになる。
したがって，求める体積は

$$12^3\times\frac{1}{2}=864\ (\mathrm{cm}^3)$$



$\boxed{11}$［灘］

線分 PQ が通過してできる立体を，いくつかの立体に分割する。



立方体 B について，平面 A と接していない 5 つの面に対してそれぞれ 1 つずつ，立方体 B と合同な立方体ができる。（図の ①）
また，図の ② のように，「半径が 1，中心角の大きさが 90° のおうぎ形」を底面とする高さ 1 の柱体が 4 つできる。
図の ③ の立体も 4 つできるが，これは図の ② の立体と合同である。
さらに，図の ④ のような，「半径が 1 の球を 8 等分した立体」が 4 つできる。
以上のことから，求める立体の体積は

$$(1\times1\times1)\times5+\left(1\times1\times\pi\times\frac{90}{360}\right)\times8+\left(\frac{4}{3}\pi\times1^3\times\frac{1}{8}\right)\times4=5+2\pi+\frac{2}{3}\pi$$
$$=5+\frac{8}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

1 ★

(1)　平行線の同位角は等しいから

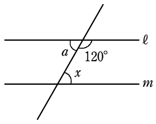
$\angle x=75^\circ$

(2)　右の図で

$\angle a=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

平行線の錯角は等しいから

$\angle x=\angle a=60^\circ$

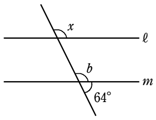


(3)　右の図で

$\angle b=180^\circ-64^\circ=116^\circ$

平行線の同位角は等しいから

$\angle x=\angle b=116^\circ$



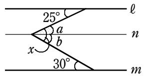
2 ★

$\angle x$ の頂点を通り ℓ に平行な直線 n を引く。
右の図で，錯角は等しいから

$\angle a=25^\circ$，$\angle b=30^\circ$

よって　　$\angle x=25^\circ+30^\circ$

$=55^\circ$　　答



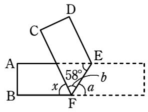
3 ★★

右の図で，AE∥BF より，錯角は等しいから

$\angle a=58^\circ$

折り返した角であるから　$\angle b=\angle a=58^\circ$

よって　　$\angle x=180^\circ-58^\circ\times 2=64^\circ$



4 ★

(1)　五角形の内角の和は　　$180^\circ\times(5-2)=540^\circ$

七角形の内角の和は　　$180^\circ\times(7-2)=900^\circ$

(2)　八角形の内角の和は　　$180^\circ\times(8-2)=1080^\circ$

正八角形の内角の大きさはすべて等しいから，1 つの内角の大きさは

$1080^\circ\div 8=135^\circ$

(3)　n 角形の内角の和が 1440° になるとすると

$180^\circ\times(n-2)=1440^\circ$

$n-2=8$

$n=10$

よって　十角形

5 ★

(1)　117° の角の外角の大きさは　　$180^\circ-117^\circ=63^\circ$

よって，$\angle x$ の外角の大きさは

$360^\circ-(48^\circ+63^\circ+62^\circ+47^\circ+87^\circ)=53^\circ$

したがって　　$\angle x=180^\circ-53^\circ=127^\circ$

(2)　多角形の外角の和は 360° で，正十五角形の外角の大きさはすべて等しいから，1 つの外角の大きさは

$360^\circ\div 15=24^\circ$

(3)　正 n 角形の外角の大きさはすべて等しく，その和は 360° であるから

$n=360^\circ\div 18^\circ=20$　　　よって　　正二十角形

6 ★★

(1)　△ABC において

$$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB}=180^\circ-\angle\mathrm{BAC}$$
$$=110^\circ$$

$\angle\mathrm{DBC}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABC}$，$\angle\mathrm{DCB}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ACB}$ であるから

$$\angle\mathrm{DBC}+\angle\mathrm{DCB}=\frac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB})$$
$$=55^\circ$$

よって，△DBC において

$$\angle\mathrm{BDC}=180^\circ-(\angle\mathrm{DBC}+\angle\mathrm{DCB})$$
$$=125^\circ$$　答

(2)　右の図において

$\angle\mathrm{ACE}=\angle\mathrm{ABC}+80^\circ$

よって　　$\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ACE}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABC}+40^\circ$

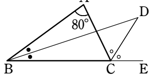
すなわち　$\angle\mathrm{DCE}=\angle\mathrm{DBC}+40^\circ$

△DBC において

$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{DCE}-\angle\mathrm{DBC}$

したがって

$$\angle\mathrm{BDC}=(\angle\mathrm{DBC}+40^\circ)-\angle\mathrm{DBC}$$
$$=40^\circ$$



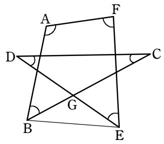
7 ★★★

(1)　右の図のように各頂点を定め，B と E を結ぶ。
このとき，△DGC と △BEG において

$$\angle\mathrm{CDG}+\angle\mathrm{DCG}=\angle\mathrm{DGB}$$
$$=\angle\mathrm{GBE}+\angle\mathrm{GEB}$$

よって，印をつけた角の和は，四角形 ABEF の内角の和に等しいから，その大きさは

360°

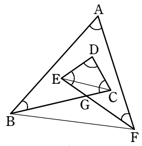


(2)　右の図のように各頂点を定め，C と E，B と F を結ぶ。
このとき，△CEG と △BFG において

$$\angle\mathrm{CEG}+\angle\mathrm{ECG}=\angle\mathrm{EGB}$$
$$=\angle\mathrm{GBF}+\angle\mathrm{GFB}$$

よって，印をつけた角の和は，△ABF と △DEC の内角の和を合わせたものに等しいから，その大きさは

$180^\circ\times 2=360^\circ$

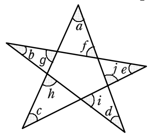


(3)　右の図のように角を定める。
内角と外角の関係から $\angle a$ と $\angle f$ の和は $\angle g$ の外角と等しい。
同様に考えると

$\angle b$ と $\angle g$ の和は $\angle h$ の外角，
$\angle c$ と $\angle h$ の和は $\angle i$ の外角，
$\angle d$ と $\angle i$ の和は $\angle j$ の外角，
$\angle e$ と $\angle j$ の和は $\angle f$ の外角

にそれぞれ等しい。
よって，求める角の和は，星型の内部の五角形の内角の和に等しいから

$180^\circ\times(5-2)=540^\circ$



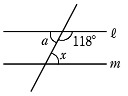
$\boxed{1}$

(1)　平行線の同位角は等しいから　　　$\angle x=65^\circ$

(2)　右の図において　　$\angle a=180^\circ-118^\circ=62^\circ$

平行線の錯角は等しいから

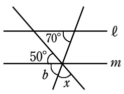
$\angle x=\angle a=62^\circ$



(3)　右の図において，平行線の同位角は等しいから

$\angle b=70^\circ$

よって　　$\angle x=180^\circ-(50^\circ+70^\circ)=60^\circ$



$\boxed{2}$

(1)　$\angle x$ の頂点を通り，直線 ℓ と m に平行な直線 n を引く。

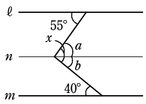
右の図で，$\ell /\!/ n$ より

$\angle a=55^\circ$

$m /\!/ n$ より　　$\angle b=40^\circ$

よって　　$\angle x=\angle a+\angle b$

$=55^\circ+40^\circ=95^\circ$



(2)　$\angle x$ の頂点を通り，直線 ℓ と m に平行な直線 n を引く。

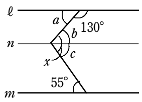
右の図で　　$\angle a=180^\circ-130^\circ=50^\circ$

$\ell /\!/ n$ より　　$\angle b=50^\circ$

$m /\!/ n$ より　　$\angle c=55^\circ$

よって　　$\angle x=\angle b+\angle c$

$=50^\circ+55^\circ=105^\circ$



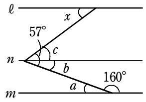
(3)　右の図のように，直線 ℓ と m に平行な直線 n を引く。

右の図で　　$\angle a=180^\circ-160^\circ=20^\circ$

$m /\!/ n$ より　　$\angle b=20^\circ$

よって　　$\angle c=57^\circ-20^\circ=37^\circ$

$\ell /\!/ n$ より　　$\angle x=\angle c=37^\circ$



(4)　右の図のように，直線 ℓ と m に平行な直線 n，n' を引く。

右の図で　　$\angle a=180^\circ-116^\circ=64^\circ$

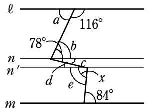
$\ell /\!/ n$ より　　$\angle b=64^\circ$

よって　　$\angle c=78^\circ-64^\circ=14^\circ$

$n /\!/ n'$ より　　$\angle d=14^\circ$

$m /\!/ n'$ より　　$\angle e=84^\circ$

よって　　$\angle x=\angle d+\angle e=14^\circ+84^\circ=98^\circ$



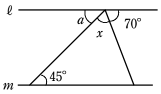
(5)　右の図で，$\ell /\!/ m$ より

$\angle a=45^\circ$

よって　　$\angle x=180^\circ-(45^\circ+70^\circ)$

$=180^\circ-115^\circ$

$=65^\circ$



(6)　右の図のように，直線 ℓ と m に平行な直線 n を引く。

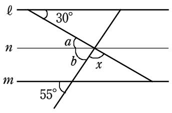
右の図で，$\ell /\!/ n$ より

$\angle a=30^\circ$

$m /\!/ n$ より　　$\angle b=55^\circ$

よって　　$\angle x=180^\circ-(30^\circ+55^\circ)$

$=180^\circ-85^\circ=95^\circ$



$\boxed{3}$

右の図で，$\mathrm{EA} /\!/ \mathrm{FB}$ である。

折り返した角であるから　$\angle \mathrm{AEF}=\angle \mathrm{A'EF}=64^\circ$

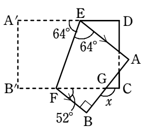
よって　　$\angle \mathrm{AED}=180^\circ-64^\circ\times 2=52^\circ$

平行線の同位角は等しいから

$\angle \mathrm{BFC}=\angle \mathrm{AED}=52^\circ$

$\triangle$ BFG において　$\angle \mathrm{BGF}=180^\circ-(90^\circ+52^\circ)=38^\circ$

ゆえに　　$\angle x=180^\circ-38^\circ=142^\circ$



$\boxed{4}$

(1)　①　六角形の内角の和は　　　$180^\circ\times(6-2)=720^\circ$

②　九角形の内角の和は　　　$180^\circ\times(9-2)=1260^\circ$

③　十二角形の内角の和は　　　$180^\circ\times(12-2)=1800^\circ$

④　十五角形の内角の和は　　　$180^\circ\times(15-2)=2340^\circ$

(2)　①　六角形の内角の和は　　　$180^\circ\times(6-2)=720^\circ$

正六角形の内角の大きさはすべて等しいから，1 つの内角の大きさは

$720^\circ\div 6=120^\circ$

②　九角形の内角の和は　　　$180^\circ\times(9-2)=1260^\circ$

正九角形の内角の大きさはすべて等しいから，1 つの内角の大きさは

$1260^\circ\div 9=140^\circ$

③　十角形の内角の和は　　　$180^\circ\times(10-2)=1440^\circ$

正十角形の内角の大きさはすべて等しいから，1 つの内角の大きさは

$1440^\circ\div 10=144^\circ$

④　十六角形の内角の和は　　　$180^\circ\times(16-2)=2520^\circ$

正十六角形の内角の大きさはすべて等しいから，1 つの内角の大きさは

$2520^\circ\div 16=157.5^\circ$

注意　この問題は外角の大きさを利用して解くこともできる。

たとえば，① は次のようになる。

多角形の外角の和は 360° で，正六角形の外角の大きさはすべて等しいから，

1 つの外角の大きさは

$360^\circ\div 6=60^\circ$

よって，1 つの内角の大きさは

$180^\circ-60^\circ=120^\circ$

(3)　①　n 角形の内角の和が 900° になるとすると

$180^\circ\times(n-2)=900^\circ$

$n-2=5$

$n=7$

よって　七角形

②　n 角形の内角の和が 1620° になるとすると

$180^\circ\times(n-2)=1620^\circ$

$n-2=9$

$n=11$

よって　十一角形

③　n 角形の内角の和が 2160° になるとすると

$180^\circ\times(n-2)=2160^\circ$

$n-2=12$

$n=14$

よって　十四角形

④　n 角形の内角の和が 2700° になるとすると

$180^\circ\times(n-2)=2700^\circ$

$n-2=15$

$n=17$

よって　十七角形

$\boxed{5}$

(1)　①　多角形の外角の和は 360° であるから

$\angle x=360^\circ-(40^\circ+103^\circ+78^\circ+66^\circ)=73^\circ$

②　95° の角の外角の大きさは

$180^\circ-95^\circ=85^\circ$

83° の角の外角の大きさは

$180^\circ-83^\circ=97^\circ$

多角形の外角の和は 360° であるから

$\angle x=360^\circ-(85^\circ+74^\circ+57^\circ+97^\circ)=47^\circ$

③　117° の角の外角の大きさは

$180^\circ-117^\circ=63^\circ$

よって，$\angle x$ の外角の大きさは

$360^\circ-(48^\circ+63^\circ+62^\circ+47^\circ+87^\circ)=53^\circ$

したがって

$\angle x=180^\circ-53^\circ=127^\circ$

(2)　①　多角形の外角の和は 360° で，正九角形の外角の大きさはすべて等しいから，

1 つの外角の大きさは

$360^\circ\div 9=40^\circ$

②　多角形の外角の和は 360° で，正十角形の外角の大きさはすべて等しいから，

1 つの外角の大きさは

$360^\circ\div 10=36^\circ$

③　多角形の外角の和は 360° で，正十二角形の外角の大きさはすべて等しいから，

1 つの外角の大きさは

$360^\circ\div 12=30^\circ$

(3)　①　正 n 角形の外角の大きさはすべて等しく，その和は 360° であるから

$n=360^\circ\div 72^\circ=5$　　　　よって　　正五角形

②　正 n 角形の外角の大きさはすべて等しく，その和は 360° であるから

$n=360^\circ\div 45^\circ=8$　　　　よって　　正八角形

$\boxed{6}$

(1)　右の図で，$\triangle$BCD の内角の和は 180° であるから

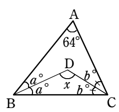
$\angle x=180^\circ-(a^\circ+b^\circ)$　……①

また，$\triangle$ABC の内角の和は 180° であるから

$64^\circ+2(a^\circ+b^\circ)=180^\circ$

よって　$a^\circ+b^\circ=58^\circ$　　　　……②

① と ② から　$\angle x=180^\circ-58^\circ=122^\circ$



(2)　右の図で，$\triangle$BDC の内角の和は 180° であるから

$a^\circ+b^\circ+53^\circ=180^\circ$

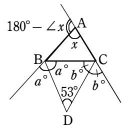
よって　$a^\circ+b^\circ=127^\circ$　　　　……①

また，$\triangle$ABC の外角の和は 360° であるから

$(180^\circ-\angle x)+2(a^\circ+b^\circ)=360^\circ$

よって　$\angle x=2(a^\circ+b^\circ)-180^\circ$　……②

① と ② から　$\angle x=2\times 127^\circ-180^\circ=74^\circ$



(3)　右の図で，$\triangle$BCD の内角と外角の性質から

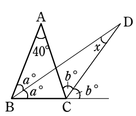
$\angle x=b^\circ-a^\circ$　……①

また，$\triangle$ABC の内角と外角の性質から

$2b^\circ-2a^\circ=40^\circ$

よって　$b^\circ-a^\circ=20^\circ$　……②

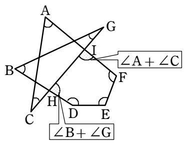
① と ② から　$\angle x=20^\circ$



レベルA

7

(1)　右の図のように各頂点を定める。



△ACI の内角と外角の性質から

$\angle \mathrm{HIF}=\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{C}$

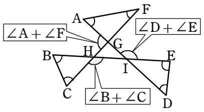
△BHG の内角と外角の性質から

$\angle \mathrm{IHD}=\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{G}$

よって，求める和は五角形 HDEFI の内角の和に等しいから

$180^\circ\times(5-2)=540^\circ$

(2)　右の図のように各頂点を定める。



△AGF の内角と外角の性質から

$\angle \mathrm{AGH}=\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{F}$

△BCH の内角と外角の性質から

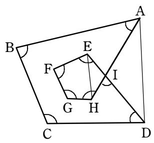
$\angle \mathrm{CHI}=\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{C}$

△DEI の内角と外角の性質から

$\angle \mathrm{EIG}=\angle \mathrm{D}+\angle \mathrm{E}$

よって，求める和は △GHI の外角の和であるから　360°

(3)　右の図のように各頂点を定め，A と D，E と H をそれぞれ結ぶ。



このとき，△EHI と △AID において，内角と外角の性質から

$\angle \mathrm{IEH}+\angle \mathrm{IHE}=\angle \mathrm{DIH}$

$=\angle \mathrm{IAD}+\angle \mathrm{IDA}$

よって，求める和は四角形 ABCD と四角形 EFGH の内角の和を合わせたものに等しいから

$360^\circ\times2=720^\circ$

1

(1)　△BFE において，BF＝FE であるから

$\angle \mathrm{EBF}=\angle \mathrm{BEF}$

よって　$\angle \mathrm{EBF}=(180^\circ-40^\circ)\div2$

$=70^\circ$

平行四辺形の対角は等しいから

$\angle \mathrm{ADC}=\angle \mathrm{ABC}=70^\circ$

(2)　AE∥DC より，錯角は等しいから

$\angle \mathrm{CDE}=\angle \mathrm{BED}=30^\circ$

DE は ∠ADC の二等分線であるから

$\angle \mathrm{ADC}=30^\circ\times2=60^\circ$

平行四辺形の対角は等しいから

$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{ADC}=60^\circ$

2

(1)　△DCE において，内角と外角の関係から

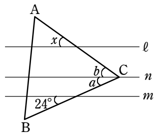
$\angle \mathrm{DCE}=71^\circ-38^\circ=33^\circ$

△ABC は正三角形であるから

$\angle \mathrm{ACB}=60^\circ$

したがって　$\angle x=60^\circ-33^\circ=27^\circ$

(2)　C を通り ℓ に平行な直線 n を引く。



右の図において，同位角は等しいから

$\angle a=24^\circ$

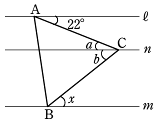
△ABC は正三角形であるから

$\angle b=60^\circ-24^\circ$

$=36^\circ$

よって　　$\angle x=\angle b=36^\circ$

(3)　C を通り ℓ に平行な直線 n を引く。



右の図において，錯角は等しいから

$\angle a=22^\circ$

△ABC は正三角形であるから

$\angle b=60^\circ-22^\circ$

$=38^\circ$

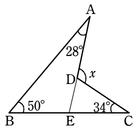
よって　　$\angle x=\angle b=38^\circ$

3

(ア)　外角　　(イ)　内角　　(ウ)　∠CDE　　(エ)　∠B

4

(1)　四角形 ABCD において，辺 AD の延長と辺 BC との交点を E とする。



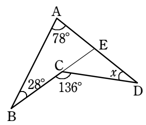
このとき，△ABE において，内角と外角の関係から

$\angle \mathrm{AEC}=28^\circ+50^\circ=78^\circ$

よって，△DEC において，内角と外角の関係から

$\angle x=78^\circ+34^\circ=112^\circ$

(2)　四角形 ABCD において，辺 BC の延長と辺 AD との交点を E とする。



このとき，△ABE において，内角と外角の関係から

$\angle \mathrm{BED}=78^\circ+28^\circ=106^\circ$

よって，△CDE において，内角と外角の関係から

$\angle x=136^\circ-106^\circ=30^\circ$

5

(1)　△DEC において，内角と外角の関係から

$\angle \mathrm{AED}=65^\circ+45^\circ=110^\circ$

よって，△ABE において，内角と外角の関係から

$\angle x=110^\circ-27^\circ=83^\circ$

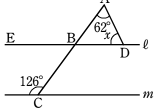
(2)　△ABE において，内角と外角の関係から

$\angle \mathrm{AEC}=33^\circ+44^\circ=77^\circ$

よって，△CDE において，内角と外角の関係から

$\angle x=77^\circ-36^\circ=41^\circ$

(3)　右の図において，平行線の同位角は等しいから



$\angle \mathrm{ABE}=126^\circ$

よって，△ABD において，内角と外角の関係から

$\angle x=126^\circ-62^\circ=64^\circ$

(4)　平行線の錯角は等しいから

$\angle \mathrm{BAC}=46^\circ$

よって，△ABC において，内角と外角の関係から

$\angle x=72^\circ-46^\circ=26^\circ$

(5)　△CDF において，内角と外角の関係から

$\angle x=113^\circ-29^\circ=84^\circ$

また，△ABD において，内角と外角の関係から

$\angle y=84^\circ-59^\circ=25^\circ$

(6)　△ABE において，内角と外角の関係から

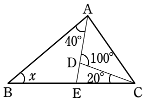
$\angle \mathrm{AEC}=39^\circ+50^\circ=89^\circ$

よって，△FEC において，内角と外角の関係から

$\angle x=89^\circ+37^\circ=126^\circ$

6

(1)　線分 AD の延長と辺 BC との交点を E とする。



△ABE において，内角と外角の性質から

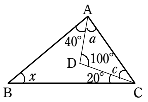
$\angle AEC = \angle x + 40°$

△DEC において，内角と外角の性質から

$(\angle x + 40°) + 20° = 100°$

よって　　$\angle x = 40°$

別解 1　$\angle DAC = \angle a$，$\angle DCA = \angle c$ とおく。



△DCA の内角の和は 180° であるから

$100° + \angle a + \angle c = 180°$

よって　　$\angle a + \angle c = 80°$

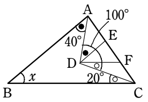
△ABC の内角の和は 180° であるから

$(40° + \angle a) + \angle x + (20° + \angle c) = 180°$

よって　　$\angle x = 120° - (\angle a + \angle c)$

$= 120° - 80° = 40°$

別解 2　点 D を通り，辺 AB，BC に平行な直線 DE，DF を引いて考えると



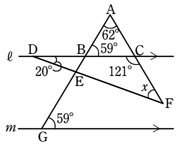
$\angle ADE = 40°$，$\angle CDF = 20°$，

$\angle EDF = \angle x$

よって　　$\angle x + 40° + 20° = 100°$

したがって　$\angle x = 40°$

(2)　平行線の同位角は等しいから



$\angle ABC = 59°$

よって，△ABC において，内角と外角の性質から

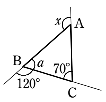
$\angle DCF = 62° + 59° = 121°$

△CDF の内角の和は 180° であるから

$121° + 20° + \angle x = 180°$

したがって　　$\angle x = 39°$

(3)　右の図で

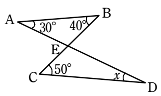


$\angle a = 180° - 120° = 60°$

よって，三角形の内角と外角の性質から

$\angle x = 60° + 70° = 130°$

(4)　△ABE において，内角と外角の性質から



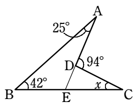
$\angle AEC = 30° + 40° = 70°$

△CDE において，内角と外角の性質から

$\angle x + 50° = 70°$

よって　　$\angle x = 20°$

(5)　線分 AD の延長と辺 BC との交点を E とする。



△ABE において，内角と外角の性質から

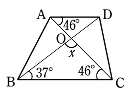
$\angle AEC = 25° + 42° = 67°$

△DEC において，内角と外角の性質から

$\angle x + 67° = 94°$

よって　　$\angle x = 27°$

(6)　AD∥BC であるから



$\angle OCB = 46°$

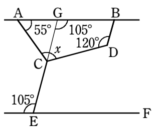
△OBC において，内角の和は 180° であるから

$\angle x + 37° + 46° = 180°$

よって　　$\angle x = 97°$

7

右の図のように，直線 EC と AB の交点を G とする。



AB∥EF であるから

$\angle CGB = 105°$

△ACG の内角と外角の関係から

$\angle ACG = 105° - 55° = 50°$

また，GC∥BD であるから

$\angle GCD = 180° - 120° = 60°$

したがって

$\angle x = 50° + 60° = 110°$

8

(1)　多角形の外角の和は 360° であるから，この多角形の内角の和は

$360° \times 5 = 1800°$

n 角形の内角の和が 1800° になるとすると

$180° \times (n-2) = 1800°$

$n - 2 = 10$

$n = 12$

よって　十二角形

(2)　正 n 角形の内角の和が 3240° になるとすると

$180° \times (n-2) = 3240°$

$n - 2 = 18$

$n = 20$

よって，正二十角形の 1 つの内角の大きさは

$3240° \div 20 = 162°$

別解　内角の和と外角の和の合計は

$3240° + 360° = 3600°$

1 つの角について，内角と外角の和は 180° であるから

$3600° \div 180° = 20$

より，この正多角形は，正二十角形である。

よって，1 つの内角の大きさは

$3240° \div 20 = 162°$

(3)　正 n 角形の外角の大きさはすべて等しく，その和は 360° であるから

$n = 360° \div 20° = 18$

よって，正十八角形の内角の和は

$180° \times (18-2) = 2880°$

(4)　1 つの内角の大きさが 150° であるような正多角形の 1 つの外角の大きさは

$180° - 150° = 30°$

正 n 角形の外角の大きさはすべて等しく，その和は 360° であるから

$n = 360° \div 30° = 12$

よって，この正多角形は　正十二角形

別解　1 つの内角の大きさが 150° である正 n 角形の内角の和は

$150° \times n$，$180° \times (n-2)$

と 2 通りに表される。

よって　　$150 \times n = 180 \times (n-2)$

$150n = 180n - 360$

$-30n = -360$

$n = 12$

したがって，この正多角形は　正十二角形

(5)　1 つの外角の大きさを $x°$ とすると，1 つの内角の大きさは $x° + 140°$ である。

ゆえに　　$x° + (x° + 140°) = 180°$

すなわち　　$2x° = 40°$

よって　　$x° = 20°$

外角の和は 360° であるから　$n = 360 \div 20 = 18$　　　答　正十八角形

別解　正 n 角形の外角の和は 360° である。

内角 1 つの大きさがその外角より 140° 大きいから

$180° \times (n-2) = 360° + 140° \times n$

よって　　$9(n-2) = 18 + 7n$

すなわち　　$2n = 36$

したがって　　$n = 18$　　　答　正十八角形

(6)　1 つの外角の大きさを $x°$ とすると，1 つの内角の大きさは $180° - x°$ である。

問題文より，1 つの内角の大きさは $7.5 \times x°$ でもあるから

$180° - x° = 7.5 \times x°$

両辺を 2 倍して　　$360° - 2x° = 15x°$

よって　　$x = \dfrac{360}{17}$

外角の和は 360° であるから　　$360 \div \dfrac{360}{17} = 17$　　　答　正十七角形

9

(1)　△ABC において

$\angle ABC + \angle ACB = 180° - \angle BAC$

$= 120°$

$\angle DBC = \dfrac{1}{2}\angle ABC$，$\angle DCB = \dfrac{1}{2}\angle ACB$ であるから

$\angle DBC + \angle DCB = \dfrac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$

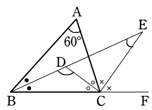
$= 60°$

よって，△DBC において

$\angle BDC = 180° - (\angle DBC + \angle DCB)$

$= 120°$

(2)　右の図において



$\angle ACB + \angle ACF = 180°$

$\angle ACD = \dfrac{1}{2}\angle ACB$，$\angle ACE = \dfrac{1}{2}\angle ACF$ であるから

$\angle ACD + \angle ACE$

$= \dfrac{1}{2}(\angle ACB + \angle ACF) = 90°$

すなわち　　$\angle DCE = 90°$

△DCE において，内角と外角の関係から

$\angle DEC + \angle DCE = \angle BDC$

よって　　$\angle DEC + 90° = 120°$

したがって　$\angle DEC = 30°$

10

五角形の内角の和は

$180° \times (5-2) = 540°$

であるから

$\angle x = 540° - (117° + 114° + \angle BCD + \angle AED)$

$= 309° - (\angle BCD + \angle AED)$

ここで，四角形 CDEF において

$\angle FCD + \angle FED = 360° - (140° + 114°) = 106°$

$\angle BCD = 2\angle FCD$，　$\angle AED = 2\angle FED$

であるから

$\angle BCD + \angle AED = 2(\angle FCD + \angle FED)$

$= 212°$

よって　$\angle x = 309° - 212° = 97°$

レベルB

11

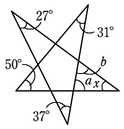
(1)　右の図で，三角形の内角と外角の関係から

$\angle a=31^\circ+50^\circ=81^\circ$

$\angle b=27^\circ+37^\circ=64^\circ$

よって　$\angle x=180^\circ-(81^\circ+64^\circ)$

$=35^\circ$



(2)　右の図で，三角形の内角と外角の関係から

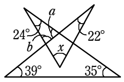
$\angle a=39^\circ+35^\circ=74^\circ$

よって　$\angle b=180^\circ-(24^\circ+74^\circ)$

$=82^\circ$

したがって，三角形の内角と外角の関係から

$\angle x=82^\circ-22^\circ=60^\circ$



(3)　三角形の内角の和は 180° であるから

$\angle x=180^\circ-(38^\circ+31^\circ)$

$=111^\circ$

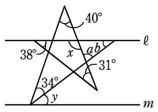
右の図で，三角形の内角と外角の関係から

$\angle a=40^\circ+34^\circ=74^\circ$

よって　$\angle b=111^\circ-74^\circ=37^\circ$

平行線の錯角は等しいから

$\angle y=\angle b=37^\circ$



12

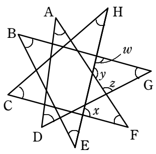
右の図のように各頂点を定める。三角形の内角と外角の関係から　$\angle x=\angle C+\angle H$，$\angle y=\angle x+\angle F$

また　$\angle z=\angle A+\angle D$，$\angle w=\angle B+\angle E$

四角形の内角の和は 360° であるから

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H$

$=\angle y+\angle z+\angle w+\angle G=360^\circ$



13

右の図のように点を定め，A と G を結ぶ。

四角形 ACEG の内角の和は 360°　…… ①

△AGJ において，内角と外角の性質から

$\angle JAG+\angle JGA=\angle HJG$　…… ②

△HJK において，内角と外角の性質から

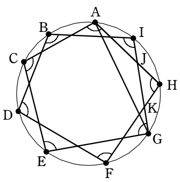
$\angle HJK+\angle KHJ=\angle JKF$　…… ③

②と③ から

$\angle JAG+\angle JGA+\angle KHJ=\angle JKF$

五角形 BDFKI の内角の和は　540°　…… ④

①と④ から　　$360^\circ+540^\circ=900^\circ$



1

右の図のように，直線 AE と CD の交点を G，直線 DF と AB の交点を H とする。

△CEG の内角と外角の関係から

$\angle EGC=115^\circ-40^\circ=75^\circ$

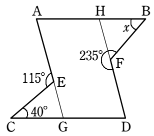
AG∥HD　であるから　　$\angle FDC=75^\circ$

AB∥CD　であるから　　$\angle FHB=75^\circ$

一方　　$\angle BFD=360^\circ-235^\circ=125^\circ$

△BFH の内角と外角の関係から

$\angle x=125^\circ-75^\circ=50^\circ$



2

直線 ℓ と辺 AB，AC との交点をそれぞれ D，E とする。

ℓ ∥ m より，同位角は等しいから

$\angle BDE=\angle x$

よって　　$\angle ADE=180^\circ-\angle x$

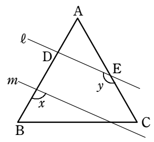
△ABC は正三角形であるから

$\angle DAE=60^\circ$

したがって，△ADE において，内角と外角の関係から

$\angle y=60^\circ+(180^\circ-\angle x)$

よって　　$\angle x+\angle y=240^\circ$



3

右の図のように，直線 ℓ と m に平行な直線 n，n′ を引く。

右の図で，m∥n′ より

$\angle g=\angle d$

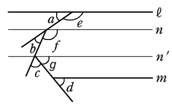
n∥n′ より　$\angle f=\angle c+\angle g=\angle c+\angle d$

ℓ ∥n より　$\angle e=\angle b+\angle f=\angle b+\angle c+\angle d$

$\angle a+\angle e=180^\circ$ であるから

$\angle a+(\angle b+\angle c+\angle d)=180^\circ$

すなわち　$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d=180^\circ$



4

△OBD は DO＝DB の二等辺三角形であるから

$\angle OBD=\angle BOD=23^\circ$

△OBD の内角と外角の性質により

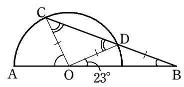
$\angle ODC=23^\circ+23^\circ=46^\circ$

△ODC は OD＝OC の二等辺三角形であるから

$\angle OCD=\angle ODC=46^\circ$

△OBC の内角と外角の性質により

$\angle AOC=23^\circ+46^\circ=69^\circ$



5

(1)　∠ABC の大きさを x とする。

PQ＝QB から

$\angle QPB=\angle QBP=x$

よって，△BPQ の内角と外角の関係から

$\angle PQA=2x$

PQ＝AP から

$\angle PAQ=\angle PQA=2x$

よって，△BPA の内角と外角の関係から

$\angle APC=3x$

AP＝CA から

$\angle ACP=\angle APC=3x$

よって，△ABC の内角について

$112^\circ+x+3x=180^\circ$

$4x=68^\circ$

ゆえに　　$x=17^\circ$

すなわち　　$\angle ABC=17^\circ$

(2)　∠ABC の大きさを x とする。

AP＝PB から

$\angle PAB=\angle PBA=x$

よって，△ABP の内角と外角の関係から

$\angle QPA=2x$

QP＝AQ から

$\angle QAP=\angle QPA=2x$

よって，△APQ の内角と外角の関係から

$\angle AQC=4x$

AQ＝AC から

$\angle ACQ=\angle AQC=4x$

よって，△ABC の内角について

$90^\circ+x+4x=180^\circ$

$5x=90^\circ$

ゆえに　　$x=18^\circ$

すなわち　　$\angle ABC=18^\circ$

6

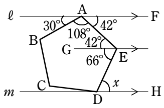
正五角形 ABCDE の内角の和は

$180^\circ\times(5-2)=540^\circ$

よって，正五角形の１つの内角の大きさは

$540^\circ\div5=108^\circ$

E を通り ℓ に平行な直線を引き，３点 F，G，H を右の図のように定めると



$\angle\mathrm{EAF}=180^\circ-(30^\circ+108^\circ)=42^\circ$

よって，平行線の錯角は等しいから

$\angle\mathrm{AEG}=42^\circ$

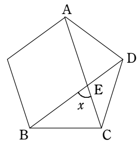
$\angle\mathrm{GED}=108^\circ-42^\circ=66^\circ$

したがって，平行線の錯角は等しいから

$\angle x=66^\circ$

7［岩手県］

右の図のように記号を決める。



正五角形の１つの内角の大きさは

$180^\circ\times3\div5=108^\circ$

△BCD は BC＝CD の二等辺三角形であるから

$\angle\mathrm{CDB}=(180^\circ-108^\circ)\div2$

$=36^\circ$

△ACD は CD＝DA の二等辺三角形であるから

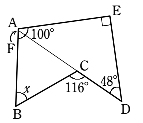
$\angle\mathrm{ACD}=36^\circ$

よって，△CDE において

$\angle x=36^\circ+36^\circ=72^\circ$

8

(1)　辺 DC の延長と辺 AB との交点を F とする。



四角形の内角の和は 360° であるから

$\angle\mathrm{AFD}=360^\circ-(100^\circ+48^\circ+90^\circ)$

$=122^\circ$

よって　$\angle\mathrm{BFC}=180^\circ-122^\circ$

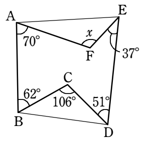
$=58^\circ$

したがって，三角形の内角と外角の関係から

$\angle x=116^\circ-58^\circ$

$=58^\circ$

(2)　A と E，B と D を結ぶ。



四角形の内角の和は 360° であるから

$\angle\mathrm{EAF}+\angle\mathrm{AEF}$

$=360^\circ-(70^\circ+62^\circ+51^\circ+37^\circ+\angle\mathrm{CBD}+\angle\mathrm{CDB})$

$=140^\circ-(\angle\mathrm{CBD}+\angle\mathrm{CDB})$

△CBD において

$\angle\mathrm{CBD}+\angle\mathrm{CDB}=180^\circ-106^\circ$

$=74^\circ$

であるから

$\angle\mathrm{EAF}+\angle\mathrm{AEF}=140^\circ-74^\circ$

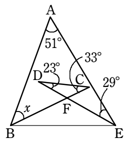
$=66^\circ$

よって，△AFE において

$\angle x=180^\circ-66^\circ$

$=114^\circ$

(3)　B と E を結ぶ。



△CDF において，内角と外角の関係から

$\angle\mathrm{DFB}=23^\circ+33^\circ$

$=56^\circ$

よって，△BFE において，内角と外角の関係から

$\angle\mathrm{FBE}+\angle\mathrm{FEB}=56^\circ$

ここで，△ABE において

$\angle x=180^\circ-(51^\circ+29^\circ+\angle\mathrm{FBE}+\angle\mathrm{FEB})$

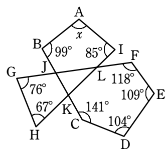
$=100^\circ-(\angle\mathrm{FBE}+\angle\mathrm{FEB})$

$=100^\circ-56^\circ$

$=44^\circ$

9

右の図のように各頂点を定める。



△GHL において，内角と外角の関係から

$\angle\mathrm{GLI}=76^\circ+67^\circ$

$=143^\circ$

五角形の内角の和は 540° であるから，

五角形 JCDEF において

$\angle\mathrm{CJF}=540^\circ-(141^\circ+104^\circ+109^\circ+118^\circ)$

$=68^\circ$

よって　$\angle\mathrm{BJL}=180^\circ-68^\circ$

$=112^\circ$

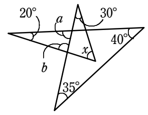
したがって，五角形 ABJLI において

$\angle x=540^\circ-(99^\circ+112^\circ+143^\circ+85^\circ)$

$=101^\circ$

10

(1)　右の図で，三角形の内角と外角の性質から



$\angle a=40^\circ+35^\circ=75^\circ$

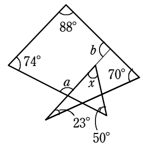
$\angle b=\angle x+30^\circ$

三角形の内角の和は 180° であるから

$20^\circ+75^\circ+(\angle x+30^\circ)=180^\circ$

よって　$\angle x=180^\circ-(20^\circ+75^\circ+30^\circ)=55^\circ$

(2)　右の図で，三角形の内角と外角の性質から



$\angle a=\angle x+50^\circ$

$\angle b=23^\circ+70^\circ=93^\circ$

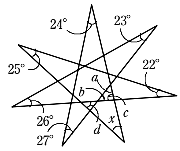
四角形の内角の和は 360° であるから

$(\angle x+50^\circ)+93^\circ+88^\circ+74^\circ=360^\circ$

よって　$\angle x+305^\circ=360^\circ$

したがって　$\angle x=360^\circ-305^\circ=55^\circ$

(3)　右の図で，三角形の内角と外角の性質から



$\angle a=24^\circ+27^\circ=51^\circ$

$\angle b=23^\circ+26^\circ=49^\circ$

$\angle d=25^\circ+22^\circ=47^\circ$

$\angle c=\angle x+\angle d=\angle x+47^\circ$

$\angle a+\angle b+\angle c=180^\circ$ であるから

$51^\circ+49^\circ+\angle x+47^\circ=180^\circ$

よって　$\angle x=180^\circ-(51^\circ+49^\circ+47^\circ)=33^\circ$

1

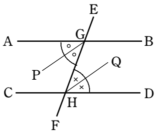
AB∥CD であるから

$\angle AGH=\angle GHD$　……①

GP，HQ は，それぞれ ∠AGH，∠GHD の二等分線であるから

$\angle PGH=\frac{1}{2}\angle AGH$　……②

$\angle GHQ=\frac{1}{2}\angle GHD$　……③



①，②，③ から　$\angle PGH=\angle GHQ$

錯角が等しいから　GP∥QH

2

(1)　右の図のように，線分 AB で折る前のテープのふち上の点を F，G とする。

このとき，平行線の錯角は等しいから

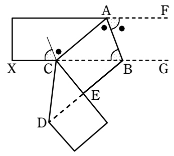
$\angle FAB=\angle ABC=70°$

また，折り返した角は等しいから

$\angle CAB=\angle FAB=70°$

よって，△ACB において，内角と外角の関係から

$\angle ACX=70°+70°=140°$



(2)　右の図のように，AC の延長上の点を H とし，$\angle ECD=z°$ とすると，折り返した角は等しいから

$\angle HCD=z°$

また，平行線の錯角は等しいから

$\angle EDC=z°$

よって，内角と外角の関係から

$\angle BEC=2z°$

$\angle ABC=x°$ であるから　$\angle BAF=x°$

よって　$\angle BAC=\angle BAF=x°$

△ABC において，内角と外角の関係から

$\angle HCB=2x°$

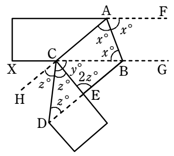
一方　$\angle HCB=y°+z°$

よって　$2x°=y°+z°$

$z°=2x°-y°$

したがって　$\angle BEC=2(2x°-y°)$

$=4x°-2y°$



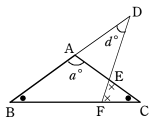
3

AB＝AC であるから

$\angle B=\angle C$

$=(180°-a°)\div 2$

$=90°-\frac{a°}{2}$



CE＝CF であるから

$\angle EFC=\left\{180°-\left(90°-\frac{a°}{2}\right)\right\}\div 2$

$=\left(90°+\frac{a°}{2}\right)\div 2=45°+\frac{a°}{4}$

△DBF の内角と外角の性質から

$45°+\frac{a°}{4}=90°-\frac{a°}{2}+d°$

よって　$d=\frac{3}{4}a-45$　……①

FB＝FD であるとすると　∠FDB＝∠FBD

よって　$d=90-\frac{a}{2}$　……②

①，② から　$\frac{3}{4}a-45=90-\frac{a}{2}$

これを解くと　$a=108$　　答（ア）$\frac{3}{4}a-45$　（イ）108

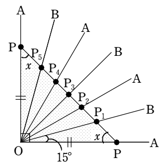
4

光が反射するごとに，反射した方の鏡を対称の軸にして折り返すと，光が通る道すじは右の図のような真っすぐな線になる。

右の図で，$\angle x$ の大きさを求めればよい。

$15°\times 6=90°$ であるから，右の図で影をつけた三角形は，直角二等辺三角形になる。

したがって　$\angle x=45°$



5

(1)　$\triangle OPP_1$ において，内角と外角の性質から

$\angle BP_1P=20°+30°=50°$

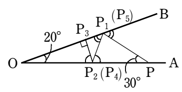
$\angle OP_1P_2=\angle BP_1P$ であるから　$\angle OP_1P_2=50°$　答

(2)　$\triangle OP_1P_2$ において，内角と外角の性質から

$\angle AP_2P_1=20°+50°=70°$

$\angle OP_2P_3=\angle AP_2P_1=70°$ であるから，$\triangle OP_2P_3$ において

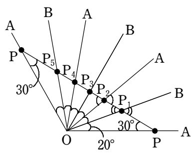
$\angle BP_3P_2=20°+70°=90°$　　答　$n=3$



(3)　(2) の結果より，$P\to P_1\to P_2\to P_3\to P_2\ (P_4)\to P_1\ (P_5)\to P$ の　5回　答

①　②　③　④　⑤

参考　光が反射するごとに，反射した方の鏡を対称の軸にして折り返してみると，光が通る道すじは右の図のような，真っすぐな線になる。なお，$\angle OP_1P_2=\angle BP_1P$ や $\angle OP_2P_3=\angle AP_2P_1$ は，右の図では，対頂角が等しいという関係で表されている。



6

(1)　△ABC において

$\angle ABC=20°+40°+20°=80°$

$\angle ACB=50°$ であるから

$\angle BAC=180°-(80°+50°)=50°$

(2)　(1) より，∠BAC＝∠BCA であるから

BA＝BC　……①

さらに，△BCE において

$\angle BCE=50°+30°=80°$ であるから

$\angle BEC=180°-(20°+80°)=80°$

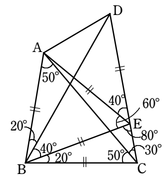
よって，∠BCE＝∠BEC であるから

BC＝BE　……②

①，② より，BA＝BE となるから　∠BAE＝∠BEA

ここで，$\angle ABE=20°+40°=60°$ であるから

$\angle BEA=(180°-60°)\div 2=60°$



(3)　△EDB において，内角と外角の性質から

$\angle EDB=\angle BEC-\angle DBE=80°-40°=40°$

(4)　△ABE は正三角形となるから

AE＝BE　……③

$\angle EDB=\angle EBD\ (=40°)$ であるから

BE＝DE　……④

③，④ より，AE＝DE となるから　∠EAD＝∠EDA

ここで，$\angle AED=180°-(60°+80°)=40°$ であるから

$\angle EAD=(180°-40°)\div 2=70°$

7［智弁学園和歌山］

半直線 FA と半直線 CB の交点を H とする。

HC∥FE より，∠H の外角の大きさは

114°

よって，△GAB において ∠A と ∠B の外角の和は　114°

$\angle GAB=a$，$\angle GBA=b$ とすると

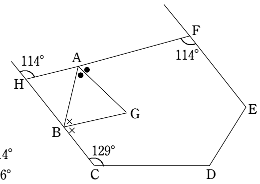
$(180°-2a)+(180°-2b)=114°$

$2a+2b=246°$

$a+b=123°$

したがって，△GAB において

$\angle AGB=180°-123°=57°$



8

右の図のように，点 A，B，C，D，E，F をとり，A と B を結ぶ。

また，直線 BF と 2 直線 ℓ，m の交点を，それぞれ G，H とし，図のように点 I をとる。

正六角形の 1 つの内角の大きさは 120° であるから　$\angle CAB=120°-90°=30°$

△ABG において，∠ABF＝90° であるから，内角と外角の性質より

$\angle AGB=\angle ABF-\angle GAB$

$=90°-(20°+30°)=40°$

$\ell\,/\!/\,m$ より，錯角は等しいから

$\angle IHD=\angle AGB=40°$

EF∥DI より，同位角は等しいから

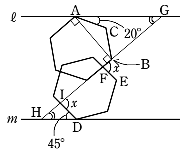
$\angle x=\angle FID$

ここで，△IHD において，内角と外角の性質から

$\angle FID=\angle IHD+\angle HDI$

$=40°+45°=85°$

したがって　$\angle x=85°$



9

△ABCにおいて

$\angle ABC+\angle ACB=180°-45°=135°$

△DBCにおいて

$\angle DBC+\angle DCB=180°-125°=55°$

これらのことを図の記号○，●で表すと

○＋○＋●＋●＋●＝135°　…… ①

○＋●＝55°　…… ②

② より　○＋○＋●＋●＝55°×2＝110°

であるから，① との差を考えて　●＝25°

これと ② から　○＝30°

したがって　$\angle ABC=60°$

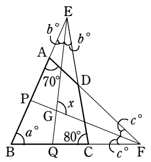
参考　○ を $a°$，● を $b°$ で表すと，①，② は

連立方程式　$\begin{cases} 2a+3b=135 \\ a+b=55 \end{cases}$

で表される。

連立方程式の解き方を学習している場合には，上の連立方程式を解いて答えを求めてもよい。

10



FGの延長と辺ABの交点をP，EGの延長と辺BCの交点をQとする。

右の図で，△EBCの内角の和は180°であるから

$a°+2b°+80°=180°$

よって　$a°+2b°=100°$　…… ①

△FABの内角の和は180°であるから

$a°+2c°+70°=180°$

よって　$a°+2c°=110°$　…… ②

△EQCの内角と外角の性質から　$\angle GQB=b°+80°$

△FAPの内角と外角の性質から　$\angle GPB=c°+70°$

四角形PBQGの内角の和は360°であるから

$(c°+70°)+a°+(b°+80°)+\angle x=360°$

$\angle x=210°-(a°+b°+c°)$

①＋② から　$2(a°+b°+c°)=210°$

よって　$a°+b°+c°=105°$

したがって　$\angle x=210°-105°=105°$

$\boxed{1}$★

(1)　△ABC≡△DFE

(2)　①　AC＝DE＝8 cm

　②　DF＝AB＝15 cm

　③　∠C＝∠E＝113°

　④　∠D＝∠A＝38°

　よって　∠F＝180°−(38°＋113°)＝29°

$\boxed{2}$★

△ABC≡△ONM，3 組の辺がそれぞれ等しい

△DEF≡△QRP，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい

△GHI≡△KJL，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい

$\boxed{3}$★★

△AOC と △BOD において

AO＝BO，CO＝DO

また，対頂角は等しいから

∠AOC＝∠BOD

よって　△AOC≡△BOD

このとき使った合同条件は，

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい

$\boxed{4}$

△ABE と △CBD において

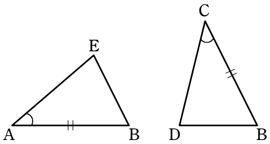
仮定から　AB＝CB　…… ①

∠A＝∠C　…… ②

共通な角であるから

∠B＝∠B　…… ③

①，②，③ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから



△ABE≡△CBD

$\boxed{5}$★

[仮定]　$\ell \parallel m$，AO＝DO

[結論]　BO＝CO

証明　△AOB と △DOC において

仮定から　AO＝DO　…… ①

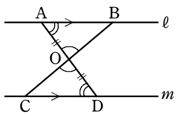
対頂角は等しいから

∠AOB＝∠DOC　…… ②

平行線の錯角は等しいから

∠BAO＝∠CDO　…… ③

①，②，③ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから



△AOB≡△DOC

合同な図形では対応する辺の長さは等しいから

BO＝CO

$\boxed{6}$★★

[仮定]　DE＝CE，AE＝FE

[結論]　AD∥BC

△AED と △FEC において

仮定から　DE＝CE　…… ①

AE＝FE　…… ②

対頂角は等しいから

∠AED＝∠FEC　…… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△AED≡△FEC

合同な図形では対応する角の大きさは等しいから

∠EDA＝∠ECF

よって，錯角が等しいから

AD∥BC

$\boxed{7}$★★

[仮定]　△ABD は AB＝DB の直角二等辺三角形，

△BCE は BC＝BE の直角二等辺三角形

[結論]　AE＝DC

[証明]　△ABE と △DBC において

仮定から　AB＝DB　…… ①

BE＝BC　…… ②

∠CBE＝∠ABD＝90°

∠CBE＝∠ABD の両辺に ∠ABC を加えると

∠CBE＋∠ABC＝∠ABD＋∠ABC

すなわち　∠ABE＝∠DBC　…… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABE≡△DBC

合同な図形では対応する辺の長さは等しいから　AE＝DC

$\boxed{8}$★

△ABG と △CBG において

正方形の 4 辺は等しいから

AB＝CB　…… ①

線分 BD は正方形の対角線であるから

∠ABG＝∠CBG（＝45°）　…… ②

共通な辺であるから

BG＝BG　…… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABG≡△CBG

合同な図形では対応する角の大きさは等しいから

∠BAG＝∠BCG　…… ④

AB∥DF より，錯角は等しいから

∠BAG＝∠CFG　…… ⑤

④，⑤ より　∠BCG＝∠CFG

$\boxed{9}$★★

△ACD と △CBE において

∠CAB＝∠CBA であるから，△CAB は

AC＝CB　…… ①

である二等辺三角形となる。

また，仮定から

AD＝CE　…… ②

仮定より AD∥BC で，平行線の錯角は等しいから

∠DAC＝∠ECB　…… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ACD≡△CBE

したがって　CD＝BE

$\boxed{10}$★★

△MBC と △NCB において

仮定から　BM＝CN　…… ①

共通な辺であるから　BC＝CB　…… ②

△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であるから

∠MBC＝∠NCB　…… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△MBC≡△NCB

よって　∠DCB＝∠DBC

△DBC は，2 つの角が等しいから，二等辺三角形である。

$\boxed{11}$★★

△ABD と △ACE において

△ABC，△ADE は正三角形であるから

AB＝AC　…… ①

AD＝AE　…… ②

また　∠BAD＝∠BAC−∠DAC＝60°−∠DAC

∠CAE＝∠DAE−∠DAC＝60°−∠DAC

よって　∠BAD＝∠CAE　…… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABD≡△ACE

したがって　BD＝CE

$\boxed{12}$★

(1)　△ABD≡△ACD，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい

(2)　△ABE≡△DCE，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい

$\boxed{13}$★

△CED と △CFB において

四角形 ABCD は正方形であるから

CD＝CB　　　　……①

∠CDE＝∠CBF＝90°　……②

△CEF は正三角形であるから

CE＝CF　　　　……③

①，②，③ より，直角三角形の斜辺と他の１辺がそれぞれ等しいから

△CED≡△CFB

よって　∠ECD＝∠FCB

$\boxed{14}$★★★

(1)　△ABD と △CAE において

∠ADB＝∠CEA＝90°　…… ①

△ABC は，∠A＝90° の直角二等辺三角形であるから

AB＝CA　　　　…… ②

△ABD において

∠ABD＝180°－(90°＋∠DAB)

＝90°－∠DAB

∠A＝90° であるから

∠CAE＝90°－∠DAB

よって　∠ABD＝∠CAE　　　…… ③

①，②，③ より，直角三角形の斜辺と１つの鋭角がそれぞれ等しいから

△ABD≡△CAE

(2)　(1) より BD＝AE，CE＝AD であるから

BD－CE＝AE－AD

＝DE

$\boxed{15}$★

△ABE と △CDF において

仮定から　BE＝DF　　……①

平行四辺形の対辺は等しいから

AB＝CD　　……②

平行四辺形の対辺は平行であるから

AB∥DC

平行線の錯角は等しいから

∠ABE＝∠CDF　……③

①，②，③ より，２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABE≡△CDF

合同な図形では対応する辺の長さは等しいから

AE＝CF

$\boxed{16}$★★

△ABC と △EAD において

仮定から　　AB＝EA　　…… ①

平行四辺形の対辺は等しいから

BC＝AD　　…… ②

AB＝AE であるから，△ABE は二等辺三角形である。

よって　　∠ABE＝∠AEB

平行四辺形の対辺は平行であるから　AD∥BC

平行線の錯角は等しいから

∠AEB＝∠EAD

よって　　∠ABC＝∠EAD　…… ③

①，②，③ より，２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABC≡△EAD　　終

$\boxed{17}$★★

四角形 ABCD は平行四辺形であるから

AB＝DC　　　……①

仮定から　　AE＝FC　　　……②

①，② より　AB－AE＝DC－FC

すなわち　　EB＝DF　　　……③

また，AB∥DC より　　EB∥DF　　……④

③，④ より，四角形 BFDE は，１組の対辺が平行でその長さが等しいから，

平行四辺形である。

$\boxed{18}$★

(1)　正方形

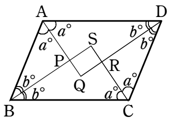
(2)　長方形，正方形，ひし形

(3)　長方形，正方形

(4)　正方形

(5)　長方形，正方形，ひし形

$\boxed{19}$★★★



証明　平行四辺形の２組の対角はそれぞれ等しいから，

∠PAB＝a°，∠PBA＝b° とすると，４つの頂点で

２等分された角の大きさは，右の図のようになる。

四角形 ABCD で，内角の和は 360° であるから

$2a°+2b°+2a°+2b°=360°$

$4a°+4b°=360°$

したがって　　$a°+b°=90°$　　……①

△PAB で，∠APB＝180°－(a°＋b°) であるから，① より

∠APB＝180°－90°＝90°

対頂角は等しいから　∠SPQ＝∠APB＝90°

同じようにして　∠QRS＝90°

∠PSR＝90°

∠PQR＝90°

したがって，４つの角が等しいから，四角形 PQRS は長方形である。　終

$\boxed{1}$

(1)　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

(2)　辺 AB に対応する辺は，辺 DE であるから　　$AB = DE = 6$ (cm)

また，$\angle EDF$ に対応する角は，$\angle BAC$ であるから

$\angle EDF = \angle BAC = 30^\circ$

$\angle DEF = 180^\circ - (\angle EDF + \angle DFE)$

$= 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ)$

$= 60^\circ$

$\boxed{2}$

$\triangle ABC$ と $\triangle JLK$ において

$AB = JL$

$BC = LK$

$\angle B = \angle L$

よって，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC \equiv \triangle JLK$

$\triangle DEF$ と $\triangle XWV$ において

$DE = XW$

$EF = WV$

$FD = VX$

よって，3 組の辺がそれぞれ等しいから

$\triangle DEF \equiv \triangle XWV$

$\triangle GHI$ と $\triangle QPR$ において

$GH = QP$

$\angle H = \angle P$

$\angle G = \angle Q$

よって，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle GHI \equiv \triangle QPR$

$\boxed{3}$

(1)　$AB = AC$

$BD = CD$

$AD = AD$

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$，3 組の辺がそれぞれ等しい

(2)　$AE = CE$

$EB = ED$

$\angle AEB = \angle CED$ (対頂角)

$\triangle ABE \equiv \triangle CDE$，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい

(3)　$AC = CA$

$\angle BAC = \angle DCA$

$\angle BCA = \angle DAC$

$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい

$\boxed{4}$

$\triangle ADO$ と $\triangle CBO$ において

仮定から　　$AO = CO$　　……①

$DO = BO$　　……②

対頂角は等しいから

$\angle AOD = \angle COB$　……③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

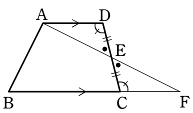
$\triangle ADO \equiv \triangle CBO$

$\boxed{5}$

[仮定]　$AD /\!/ BC$，$DE = CE$

[結論]　$\triangle ADE \equiv \triangle FCE$

証明　$\triangle ADE$ と $\triangle FCE$ において



$AD /\!/ BC$ より，錯角が等しいから

$\angle ADE = \angle FCE$　……①

仮定から　　$DE = CE$　　……②

対頂角は等しいから

$\angle DEA = \angle CEF$　　……③

①，②，③ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ADE \equiv \triangle FCE$

合同な図形では対応する辺の長さは等しいから

$AE = FE$　　終

$\boxed{6}$

[仮定]　$AO = BO$，$CO = DO$

[結論]　$AC /\!/ DB$

証明　$\triangle AOC$ と $\triangle BOD$ において

仮定から　　$AO = BO$　　…… ①

$CO = DO$　　…… ②

対頂角は等しいから

$\angle AOC = \angle BOD$　　…… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AOC \equiv \triangle BOD$

合同な図形では対応する角の大きさは等しいから

$\angle OAC = \angle OBD$

よって，錯角が等しいから

$AC /\!/ DB$　　終

$\boxed{7}$

[仮定]　$AB = AC$，$\angle BAC = 90^\circ$，

$AD = AE$，$\angle DAE = 90^\circ$

[結論]　$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$

証明　$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において

仮定から　　$AB = AC$　　……①

$AD = AE$　　……②

また　　$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$

$= 90^\circ + \angle CAD$

$\angle CAE = \angle DAE + \angle CAD$

$= 90^\circ + \angle CAD$

よって　　$\angle BAD = \angle CAE$　　……③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$

合同な図形では対応する辺の長さは等しいから

$BD = CE$

$\boxed{8}$

$\triangle ABP$ と $\triangle ADP$ において

四角形 ABCD は正方形であるから

$AB = AD$　　…… ①

線分 AC は正方形の対角線であるから

$\angle BAP = \angle DAP$ $(= 45^\circ)$　…… ②

また　　$AP = AP$ (共通)　　…… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABP \equiv \triangle ADP$

よって　　$\angle PBA = \angle PDA$

$AB /\!/ DC$ より，錯角は等しいから

$\angle CEB = \angle PBA$

したがって　$\angle CEB = \angle PDA$

$\boxed{9}$

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ は，底辺がそれぞれ BC，DE の二等辺三角形であるから

$AB = AC$　　…… ①

$AD = AE$　　…… ②

また，この 2 つの二等辺三角形の頂角の大きさが等しいから

$\angle BAD = \angle CAE$　…… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$

したがって　　$BD = CE$

$\boxed{10}$

[仮定]　$AB = AC$，$\angle BAP = \angle CAP$

[結論]　$\triangle PBC$ は二等辺三角形である。

証明　$\triangle ABP$ と $\triangle ACP$ において

仮定から

$AB = AC$，$\angle BAP = \angle CAP$

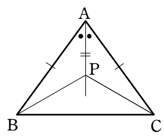
また　　$AP = AP$ (共通)

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABP \equiv \triangle ACP$

よって　　$PB = PC$

したがって，$\triangle PBC$ は二等辺三角形である。　終



11

△APC と △ABQ において
△ABP，△ACQ は正三角形であるから

$AP=AB$ …… ①
$AC=AQ$ …… ②

また　$\angle PAC=\angle PAB+\angle BAC$
$=60^\circ+\angle BAC$
$\angle BAQ=\angle BAC+\angle CAQ$
$=\angle BAC+60^\circ$

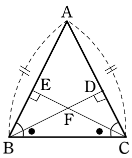
よって　$\angle PAC=\angle BAQ$ …… ③
①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△APC≡△ABQ
したがって　$PC=BQ$　終

12

△ABC と △FDE において
$\angle A=\angle F=90^\circ$
$BC=DE$
$\angle B=\angle D=35^\circ$
よって，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
△ABC≡△FDE
△GHI と △OMN において
$\angle H=\angle M=90^\circ$
$GI=ON$
$HI=MN$
よって，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから
△GHI≡△OMN
△JKL と △TUS において
$\angle K=\angle U=90^\circ$
$JL=TS$
$\angle J=\angle T=65^\circ$
よって，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
△JKL≡△TUS

13

証明　△DBC と △ECB において
AB＝AC であるから
$\angle DCB=\angle EBC$
AC⊥BD，AB⊥CE より
$\angle BDC=\angle CEB=90^\circ$
また　$BC=CB$ (共通)
直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
△DBC≡△ECB
よって　$DC=EB$　終

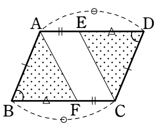


14

(1)　△ABD と △CAE において
仮定から　$AB=CA$ …… ①
$\angle BDA=\angle AEC=90^\circ$ …… ②
また　$\angle ABD=180^\circ-\angle BDA-\angle BAD$
$=90^\circ-\angle BAD$
$\angle CAE=180^\circ-\angle BAC-\angle BAD$
$=90^\circ-\angle BAD$
よって　$\angle ABD=\angle CAE$ …… ③
①，②，③ より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
△ABD≡△CAE
(2)　(1) より $BD=AE$，$CE=AD$
よって　$BD+CE=AE+AD=DE$

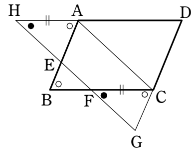
15

証明　△ABF と △CDE において
平行四辺形の対辺は等しいから
$AB=CD$ ……①，$BC=AD$ ……②
平行四辺形の対角は等しいから
$\angle B=\angle D$ ……③
② と AE＝CF より
$BC-CF=AD-AE$
したがって　$BF=DE$ ……④
①，③，④ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABF≡△CDE　終



16

証明　HA∥FC，HF∥AC であるから，四角形 HFCA は平行四辺形である。
△HEA と △FGC において
平行四辺形の対辺は等しいから
$HA=FC$ ……①
HD∥BC であるから
$\angle AHE=\angle CFG$ ……②
$\angle HAE=\angle EBF$ ……③
AB∥DG であるから
$\angle EBF=\angle FCG$ ……④
③，④ から　$\angle HAE=\angle FCG$ ……⑤
①，②，⑤ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△HEA≡△FGC
よって　$HE=FG$　終



17

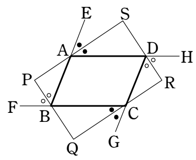
▱ABCD の対辺は平行であるから
AD∥BC
AD∥BC より，錯角は等しいから
$\angle FCE=\angle DFC$
仮定から　$\angle AEB=\angle DFC$
よって　$\angle AEB=\angle FCE$
同位角が等しいから　AE∥FC …… ①
また，AD∥BC から　AF∥EC …… ②
①，② より，2 組の対辺がそれぞれ平行であるから，四角形 AECF は平行四辺形である。

18

(1)　4 つの辺が等しい四角形は ひし形 である。
正方形は，4 つの辺が等しく，さらに 4 つの角が等しい四角形である。
(2)　1 組の対辺が平行である四角形は 台形 である。
平行四辺形は，2 組の対辺がそれぞれ平行である四角形である。
(3)　2 組の対辺がそれぞれ等しい四角形は 平行四辺形 である。
長方形は，4 つの角が等しい四角形である。
(4)　対角線の長さが等しく，それぞれの中点で交わる四角形は 長方形 である。
対角線がそれぞれの中点で交わる四角形は平行四辺形であるが，さらに対角線の長さが等しい四角形は長方形である。
(5)　○

19

証明　右の図のように，辺 BA，CB，DC，AD の延長上に，それぞれ点 E，F，G，H をとる。
AD∥BC であるから
$\angle EAD=\angle ABC$
$\angle FBA+\angle ABC=180^\circ$ であるから
$\angle FBA+\angle EAD=180^\circ$
よって　$\frac{1}{2}\angle FBA+\frac{1}{2}\angle EAD=90^\circ$
したがって　$\angle PBA+\angle EAS=90^\circ$
また，$\angle EAS=\angle PAB$ より
$\angle PBA+\angle PAB=90^\circ$
よって　$\angle P=180^\circ-90^\circ=90^\circ$
同じようにして　$\angle Q=\angle R=\angle S=90^\circ$
したがって，四角形 PQRS は長方形である。　終



第４章　合同と証明
レベルA

1

(1)　△ABC と△DCB において
仮定から　　AB＝DC　　……①
　　　　∠ABC＝∠DCB　……②
共通な辺であるから
　　　　BC＝CB　　……③
①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
　　　　△ABC≡△DCB

(2)　△OAC と△OBD において
仮定から　　OA＝OB　　……①
　　　　∠OAC＝∠OBD　……②
対頂角は等しいから
　　　　∠AOC＝∠BOD　……③
①，②，③ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
　　　　△OAC≡△OBD

(3)　△ABD と△CBD において
仮定から　AB＝CB　　……①
　　　　AD＝CD　　……②
共通な辺であるから
　　　　BD＝BD　　……③
①，②，③ より，3 組の辺がそれぞれ等しいから
　　　△ABD≡△CBD

(4)　△ABE と△ACD において
仮定から　　AB＝AC　　……①
　　　　　AE＝AD　　……②
共通な角であるから
　　　　∠BAE＝∠CAD　……③
①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
　　　　△ABE≡△ACD

(5)　△ABD と△CDB において
仮定から　AB＝CD　……①
　　　　AD＝CB　……②
共通な辺であるから
　　　　BD＝DB　……③
①，②，③ より，3 組の辺がそれぞれ等しいから
　　　　△ABD≡△CDB
合同な図形では対応する角の大きさは等しいから
　　　∠BAD＝∠DCB

(6)　△ABD と△CBD において
仮定から　∠ABD＝∠CBD　……①
　　　　∠ADB＝∠CDB　……②
共通な辺であるから
　　　　BD＝BD　　……③
①，②，③ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
　　　　△ABD≡△CBD
合同な図形では対応する辺の長さは等しいから
　　　　AB＝CB

(7)　△AEF と△DBC において
仮定から　AF＝DC　　……①
　　　　FE＝CB　　……②
AB＝DE であるから
　　AB＋BE＝DE＋EB
よって　　AE＝DB　　……③
①，②，③ より，3 組の辺がそれぞれ等しいから
　　　　△AEF≡△DBC
合同な図形では対応する角の大きさは等しいから
　　　∠EAF＝∠BDC
錯角が等しいから
　　　　AF∥CD

(8)　△OAB と△ODC において
仮定から　　AB＝DC　　……①
　　　　∠OAB＝∠ODC　……②
対頂角は等しいから
　　　　∠AOB＝∠DOC　……③
②，③ より，三角形の 2 組の角がそれぞれ等しいから，残りの 1 組も等しい。
したがって
　　　　∠ABO＝∠DCO　……④
①，②，④ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
　　　　△OAB≡△ODC
合同な図形では対応する辺の長さは等しいから
　　　　OA＝OD

2

△ABD と △BCE において
仮定から　∠BAD＝∠CBE
△ABC は正三角形であるから
　　　　AB＝BC
　　　∠ABD＝∠BCE
よって，三角形の合同条件は
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

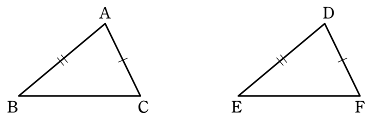
3

　　　BC＝BE　　……①
　　∠CAB＝∠EDB
　　∠ACB＝∠DEB　……②

△CAB と △EDB の 3 組の角のうち 2 組の角が等しいから，残りの 1 組も等しい。
したがって
　　∠ABC＝∠DBE　……③
①，②，③ より
合同な三角形の組は
　　△CAB と △EDB
合同条件は
　　1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい

4

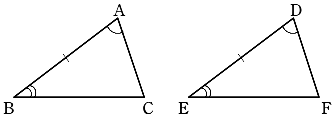
等しい関係を図に表すと，下のようになる。



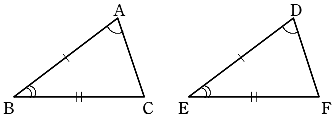
△ABC と △DEF が合同になるとすると，考えられる合同条件は
　　「3 組の辺がそれぞれ等しい」
または
　　「2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」
のどちらかである。
よって，残りの条件は
　　　BC＝EF　または　∠BAC＝∠EDF

5

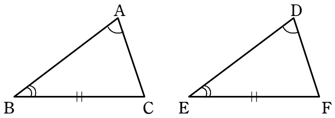
① $BC=EF$ の条件がなくなっても，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいという条件は残っているから，合同は証明できる。



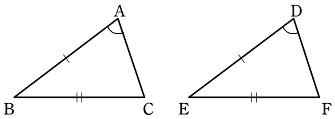
② $\angle A=\angle D$ の条件がなくなっても，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいという条件は残っているから，合同は証明できる。



③ $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$ より $\angle C=\angle F$ がいえる。
よって，$AB=DE$ の条件がなくなっても，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいという条件は残っているから，合同は証明できる。



④ $\angle B=\angle E$ の条件がなくなると，三角形のどの合同条件も満たさなくなる。

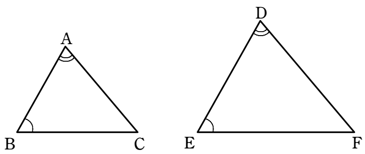


よって，なくなると合同であることを証明できなくなる条件は　　$\angle B=\angle E$

6

(1) 逆は「$a+b>0$ ならば $a>0$，$b>0$」
$a=5$，$b=-1$ のとき，$a+b>0$ であるが $b<0$ であるので，逆は正しくない。

(2) 逆は「$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において，
$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$ ならば $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$」
次の図のように，大きさが異なる場合があるので，逆は正しくない。



7

[仮定]　$AM=BM$，$MD/\!/BC$，$ME/\!/AC$
[結論]　$\triangle AMD\equiv\triangle MBE$
証明　$\triangle AMD$ と $\triangle MBE$ において
仮定から　　$AM=MB$　　…… ①
$MD/\!/BC$ より，同位角は等しいから
$\angle AMD=\angle MBE$　…… ②
$ME/\!/AC$ より，同位角は等しいから
$\angle DAM=\angle EMB$　…… ③
①，②，③ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
$\triangle AMD\equiv\triangle MBE$

8

$\triangle ABF$ と $\triangle CEF$ において
四角形 ABCD は長方形で，折り返した辺や角は等しいから
$AB=CE$　　…… ①
$\angle ABF=\angle CEF\ (=90°)$　…… ②
対頂角は等しいから
$\angle AFB=\angle CFE$　　…… ③
②，③ により，三角形の残りの角も等しいから
$\angle BAF=\angle ECF$　　…… ④
①，②，④ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
$\triangle ABF\equiv\triangle CEF$　終

9

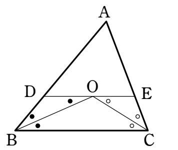
[仮定]　$AD=CE$，$AB/\!/FC$，$BF/\!/GD$
[結論]　$\triangle AGD\equiv\triangle CFE$
証明　$\triangle AGD$ と $\triangle CFE$ において
仮定から　　$AD=CE$　　…… ①
$AB/\!/FC$ より，錯角は等しいから
$\angle DAG=\angle ECF$　…… ②
また，対頂角は等しいから
$\angle CEF=\angle AEB$
$BE/\!/GD$ より，同位角は等しいから
$\angle ADG=\angle AEB$
よって　　$\angle ADG=\angle CEF$　…… ③
①，②，③ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
$\triangle AGD\equiv\triangle CFE$

10

$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ において
仮定から　　$AB=AC$　　…… ①
$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形であるから
$\angle ABC=\angle ACB$
すなわち　　$\angle ABE=\angle ACD$　…… ②
また，仮定から $BD=CE$ で，この両辺に DE を加えると
$BD+DE=CE+DE$
すなわち　　$BE=CD$　　…… ③
①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
$\triangle ABE\equiv\triangle ACD$

11

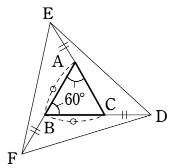
[仮定]　$\angle DBO=\angle OBC$，$\angle ECO=\angle OCB$，$DE/\!/BC$
[結論]　$\triangle BOD$ と $\triangle CEO$ は二等辺三角形である。
証明　$\triangle BOD$ において



仮定より $DE/\!/BC$ であるから
$\angle DOB=\angle OBC$
仮定より　$\angle DBO=\angle OBC$
よって　　$\angle DOB=\angle DBO$
したがって，$\triangle BOD$ は二等辺三角形である。
$\triangle CEO$ において
仮定より $DE/\!/BC$ であるから
$\angle EOC=\angle OCB$
仮定より　$\angle ECO=\angle OCB$
よって　　$\angle EOC=\angle ECO$
したがって，$\triangle CEO$ は二等辺三角形である。　終

12

証明　$\triangle ABC$ は正三角形であるから



$AB=BC$　…… ①
$\angle CAB=\angle ABC=60°$　…… ②
$\triangle AEF$ と $\triangle BFD$ において
仮定から　$AE=BF$　…… ③
① と $BF=CD$ から
$AB+BF=BC+CD$
よって　　$AF=BD$　…… ④
また，② により　$\angle EAF=180°-60°=120°$
$\angle FBD=180°-60°=120°$
したがって　　$\angle EAF=\angle FBD$　…… ⑤
③，④，⑤ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
$\triangle AEF\equiv\triangle BFD$　　よって　$EF=FD$　…… ⑥
$\triangle AEF$ と $\triangle CDE$ についても，同様にして
$\triangle AEF\equiv\triangle CDE$　　よって　$EF=DE$　…… ⑦
⑥，⑦ から　　$EF=FD=DE$
したがって，$\triangle DEF$ は正三角形である。　終

13

(1) 証明 △ABD と △BCE において

△ABC は正三角形であるから

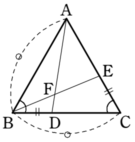
AB＝BC，∠ABD＝∠BCE

仮定から　BD＝CE

よって，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABD≡△BCE

したがって　AD＝BE　終



(2) 証明 (1) より △ABD≡△BCE であるから

∠BAD＝∠CBE　……①

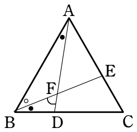
△ABF の内角と外角の性質から

∠BFD＝∠BAD＋∠ABF　……②

①，② から　∠BFD＝∠CBE＋∠ABF

＝∠ABD

＝60°　終



14

△EBC と △DCB において

仮定から　∠BEC＝∠CDB＝90°　……①

△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形であるから

∠EBC＝∠DCB　……②

共通な辺であるから

BC＝CB　……③

①，②，③ より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

△EBC≡△DCB

15

△PBC と △QRC において

四角形 ABCD は長方形で，折り返した辺や角は等しいから

BC＝RC　……①

∠PBC＝∠QRC（＝90°）……②

また，∠BCP＝90°－∠PCD，∠RCQ＝90°－∠PCD であるから

∠BCP＝∠RCQ　……③

①，②，③ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

△PBC≡△QRC

別解　△PBC と △QRC において

四角形 ABCD は長方形で，折り返した辺や角は等しいから

BC＝RC　……①

∠PBC＝∠QRC　(＝90°)　……②

また　∠APQ＝∠CPQ

AB∥DC より，錯角が等しいから

∠APQ＝∠CQP

よって，∠CPQ＝∠CQP より △CPQ は二等辺三角形であるから

CP＝CQ　……③

①，②，③ より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから

△PBC≡△QRC

16

(1) △PHA，△PHB，△PHC において

直線 PH と平面 ABC は垂直であるから

∠PHA＝∠PHB＝∠PHC＝90°　……①

PH は共通な辺であるから

PH＝PH＝PH　……②

また，△PAB，△PBC，△PCA はすべて合同な二等辺三角形であるから

PA＝PB＝PC　……③

①，②，③ から，△PHA，△PHB，△PHC は，すべて直角三角形で，おのおのの直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい。

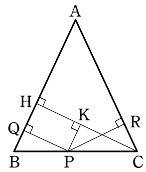
よって，△PHA，△PHB，△PHC はすべて合同である。

(2) 合同な図形の対応する辺の長さは等しい。

よって，(1) から

AH＝BH＝CH

17



四角形 PKHQ は長方形であるから

PQ＝KH

△PCK と △CPR において

∠PKC＝∠CRP＝90°　……①

AB∥KP であるから

∠KPC＝∠ABC

∠ABC＝∠ACB であるから

∠KPC＝∠RCP　……②

共通な辺であるから

PC＝CP　……③

①，②，③ より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

△PCK≡△CPR

合同な図形では対応する辺の長さは等しいから　CK＝PR

よって　PQ＋PR＝KH＋CK＝CH

18

(1) 平行四辺形の 2 組の対角はそれぞれ等しいから，∠A＝90° のとき，4 つの角がすべて 90° になる。

よって　長方形

(2) 平行四辺形の 2 組の対辺はそれぞれ等しいから，AB＝AD のとき，4 つの辺が等しくなる。

よって　ひし形

19

△ABE と △CDF において

仮定より　∠BEA＝∠DFC＝90°　……①

平行四辺形の対辺は等しいから

AB＝CD　……②

AB∥DC より，錯角は等しいから

∠BAE＝∠DCF　……③

①，②，③ より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

△ABE≡△CDF

よって　AE＝CF

20

△AEF と △CBF において

折り返した辺や角は等しいから

AE＝AD

∠AEF＝∠ADC

平行四辺形の対辺や対角は等しいから

AD＝CB

∠ADC＝∠CBF

よって　AE＝CB　……①

∠AEF＝∠CBF　……②

また，対頂角は等しいから

∠AFE＝∠CFB　……③

②，③ より，三角形の残りの角も等しいから

∠EAF＝∠BCF　……④

①，②，④ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

△AEF≡△CBF

21

線分 AE は ∠BAD の二等分線であるから

∠BAE＝∠DAE

AD∥BC より，錯角は等しいから

∠DAE＝∠AEB

よって　∠BAE＝∠AEB

したがって，△ABE は，2 つの角が等しいから，二等辺三角形である。

よって　AB＝BE

また，平行四辺形の対辺は等しいから

EC＋CD＝EC＋AB

＝EC＋BE

＝BC＝AD

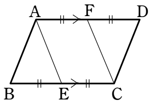
レベルB

22

△ABE と △FDA において
平行四辺形の対辺は等しいから　AB＝CD
△CFD は正三角形であるから　CD＝FD
よって　　AB＝FD　…… ①
△BEC は正三角形であるから　BE＝BC
平行四辺形の対辺は等しいから　BC＝AD
よって　　BE＝DA　…… ②
平行四辺形の対角は等しいから
　　∠ABC＝∠ADC
また，∠CBE＝∠CDF＝60° であるから
　　∠ABC＋∠CBE＝∠ADC＋∠CDF
すなわち　∠ABE＝∠FDA　…… ③
①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
　　△ABE≡△FDA

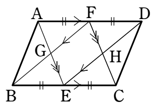
23

(1) 証明　四角形 AECF において



　　$AF=\frac{1}{2}AD$，　$EC=\frac{1}{2}BC$
AD＝BC であるから　　AF＝EC
また　　　AF∥EC
よって，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，
四角形 AECF は平行四辺形である。 終

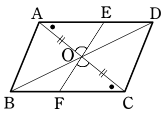
(2) 証明　(1) より，四角形 AECF が平行四辺形であるから



　　GE∥FH
同じように，$FD=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=BE$，FD∥BE より，
四角形 FBED が平行四辺形であるから
　　GF∥EH
よって，2 組の対辺が平行であるから，四角形 GEHF は平行四辺形である。 終

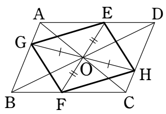
24

(1) 証明　△OAE と △OCF において



平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わるから
　　OA＝OC
AD∥BC から　　∠EAO＝∠FCO
対頂角は等しいから　　∠AOE＝∠COF
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
　　△OAE≡△OCF
したがって　　OE＝OF　終

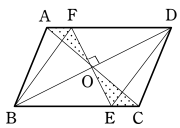
(2) 証明　(1) と同じようにして △OBG≡△ODH が



証明できるから　　OG＝OH
よって，四角形 EGFH において
　　OE＝OF，OG＝OH
対角線がそれぞれの中点で交わるから，四角形
EGFH は平行四辺形である。 終

25

証明　△AOF と △COE において



平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる
から　　AO＝CO
AD∥BC より，錯角が等しいから
　　∠FAO＝∠ECO
また，対頂角は等しいから　　∠AOF＝∠COE
よって，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
　　△AOF≡△COE
ゆえに　　OF＝OE　……①
平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから
　　BO＝OD　……②
仮定から　　EF⊥BD　……③
①，②，③ より，BD，EF はそれぞれの中点で垂直に交わるから，四角形 BEDF はひし形である。終

1

[仮定]　∠AOB＝90°，OA⊥QH，OH＝OP
(1)［結論］　∠OPA＝90°
証明　△AOP と △QOH において
仮定から　　OP＝OH　　　…… ①
A，Q は $\overset{\frown}{AB}$ 上の点であるから
　　OA＝OQ　　　…… ②
共通な角であるから
　　∠AOP＝∠QOH　　…… ③
①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
　　△AOP≡△QOH
合同な図形では対応する角の大きさは等しいから
　　∠OPA＝∠OHQ＝90°
(2)［結論］　HR＝PR
証明　△AHR と △QPR において
A，Q は $\overset{\frown}{AB}$ 上の点であるから
　　OA＝OQ
仮定から　OH＝OP
よって　　OA－OH＝OQ－OP
すなわち　HA＝PQ　　　…… ④
また，(1) より △AOP≡△QOH であるから
　　∠HAR＝∠PQR　　…… ⑤
また　∠OHQ＝∠OPA＝90° であるから
　　∠AHR＝∠QPR　　…… ⑥
④，⑤，⑥ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
　　△AHR≡△QPR
合同な図形では対応する辺の長さは等しいから　　HR＝PR
(3)［結論］　半直線 OR は ∠AOQ の二等分線
証明　△OHR と △OPR において
仮定から　　OH＝OP　　　…… ⑦
(2) より　　HR＝PR　　　…… ⑧
共通な辺であるから
　　OR＝OR　　　…… ⑨
⑦，⑧，⑨ より，3 組の辺がそれぞれ等しいから
　　△OHR≡△OPR
合同な図形では対応する角の大きさは等しいから　　∠HOR＝∠POR
したがって，半直線 OR は ∠AOQ の二等分線となる。

2

△ACH と △DAF において
四角形 ADEC は正方形であるから
　　AC＝DA　　　…… ①
線分 AE，CD は正方形の対角線であるから
　　∠CAH＝∠ADF（＝45°）　…… ②
また，∠ACH＝90°－∠HCE
　　∠FBC＝180°－(90°＋∠HCE)
　　　　＝90°－∠HCE
であるから　∠ACH＝∠FBC
DA∥BC より，錯角は等しいから
　　∠FBC＝∠DAF
よって　　∠ACH＝∠DAF　　…… ③
①，②，③ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
　　△ACH≡△DAF

3

△ADE は △ABC を回転したものであるから

△ADE≡△ABC ……①

△DEG と △BFG において

① より　DE＝BC

BC＝BF であるから　DE＝BF ……②

さらに，① より AE＝AC であるから

∠AEC＝∠ACE

よって　∠DEG＝90°－∠AEC

＝90°－∠ACE＝∠BCF ……③

また，BC＝BF であるから

∠BFG＝∠BCF ……④

③，④より　∠DEG＝∠BFG ……⑤

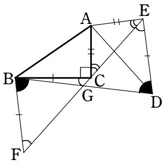
よって，ED∥BF であるから

∠GDE＝∠GBF ……⑥

②，⑤，⑥より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

△DEG≡△BFG

したがって　EG＝FG　終



4

△FGB と △DEB において

線分 BD は ∠ABC の二等分線であるから

∠FBG＝∠DBE

また　∠FGB＝∠DEB＝90°

したがって，△FGB と △DEB の残りの角も等しいから

∠BFG＝∠EDF

対頂角は等しいから

∠EFD＝∠BFG

よって　∠EFD＝∠EDF

したがって，2 つの角が等しいから，△EDF は二等辺三角形である。

したがって　ED＝EF

5

△PBC と △RAC において

△ABC と △RPC は正三角形であるから

BC＝AC ……①

PC＝RC ……②

また　∠PCB＝∠ACB－∠ACP

＝60°－∠ACP

∠RCA＝∠RCP－∠ACP

＝60°－∠ACP

よって　∠PCB＝∠RCA ……③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△PBC≡△RAC

したがって　PB＝RA

△QBP は正三角形であるから

PB＝PQ

よって　PQ＝RA

6

証明　△BCD と △ACE において

△ABC と △DCE は正三角形であるから

BC＝AC ……①

CD＝CE ……②

また　∠BCD＝∠BCA－∠DCA

＝60°－∠DCA

∠ACE＝∠DCE－∠DCA

＝60°－∠DCA

よって　∠BCD＝∠ACE ……③

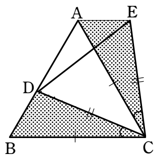
①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△BCD≡△ACE

したがって　∠DBC＝∠EAC

ここで，∠DBC＝∠ACB であるから　∠ACB＝∠EAC

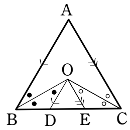
錯角が等しいから　AE∥BC　終



7

[仮定]　∠ABO＝∠DBO，∠ACO＝∠ECO，BD＝DE＝EC

[結論]　△ABC は正三角形である。



証明　仮定より　∠ABO＝∠DBO

AB∥OD から　∠ABO＝∠DOB

よって，∠DBO＝∠DOB であるから

BD＝OD ……①

仮定より　∠ACO＝∠ECO

AC∥OE から　∠ACO＝∠EOC

よって，∠ECO＝∠EOC であるから

EC＝OE ……②

BD＝DE＝EC ならば，① と ② から

OD＝DE＝OE

よって，△ODE は正三角形であるから

∠ODE＝∠OED＝60°

AB∥OD，AC∥OE であるから

∠ABC＝∠ODE＝60°，∠ACB＝∠OED＝60°

△ABC は底角が 60° の二等辺三角形であるから，正三角形である。　終

8

(1)　証明　△ADB と △BEC において

BD＝CE ……①

△ABC は正三角形であるから

AB＝BC ……②

∠ABC＝∠BCA＝60°

よって　∠ABD＝∠BCE＝120° ……③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ADB≡△BEC

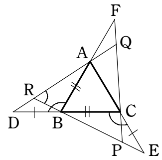
よって　∠BAD＝∠CBE ……④

∠QRP＋∠BAD＝∠ABE であるから

∠QRP＝∠ABE－∠BAD

＝∠ABE－∠CBE（④ より）

＝∠ABC＝60°　終



(2)　証明　(1) と同じようにして

∠RPQ＝∠PQR＝60°

3 つの角が等しいから，△PQR は正三角形である。　終

9

△ABI と △GFH において，

四角形 ABCD と四角形 EBFG は合同な長方形であるから

AB＝GF ……①

また，GH⊥AF，AI⊥BF から

∠AIB＝∠GHF＝90° ……②

△ABF において

∠ABF＝180°－(90°＋∠AFB)＝90°－∠AFB

また　∠GFH＝∠GFB－∠AFB＝90°－∠AFB

よって　∠ABF＝∠GFH

すなわち　∠ABI＝∠GFH ……③

①，②，③ より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

△ABI≡△GFH

ゆえに　AI＝GH

10

(1)　△ACE と △ADE において

仮定から

$\angle AEC = \angle AED = 90°$　…… ①

$AC = AD$　…… ②

また　$AE = AE$（共通）　…… ③

①，②，③ より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから

$\triangle ACE \equiv \triangle ADE$

(2)　△ACF と △ADF において

(1) から　$\angle CAE = \angle DAE$

すなわち　$\angle CAF = \angle DAF$　…… ④

仮定から　$AC = AD$　…… ⑤

また　$AF = AF$（共通）　…… ⑥

④，⑤，⑥ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ACF \equiv \triangle ADF$

(3)　(2) から　$\angle ADF = \angle ACF = 90°$

よって　$\angle BDF = 90°$

また，△ABC は，AC＝BC の直角二等辺三角形であるから

$\angle ABC = 45°$

すなわち　$\angle DBF = 45°$

ゆえに　$\angle DFB = 180° - (90° + 45°)$

$= 45°$

したがって，△DBF は

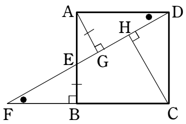
$\angle D = 90°$，$\angle B = \angle F = 45°$

となる。

よって，△DBF は直角二等辺三角形である。

11

証明　△AGD と △EBF において



AD∥FC より

$\angle ADG = \angle EFB$　…… ①

仮定より

$\angle AGD = \angle EBF = 90°$　…… ②

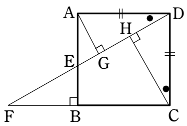
$AG = EB$　…… ③

また　$\angle GAD = 90° - \angle ADG$，$\angle BEF = 90° - \angle EFB$

よって，① より　$\angle GAD = \angle BEF$　…… ④

②，③，④ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AGD \equiv \triangle EBF$



よって　$DG = FB$　…… ⑤

また，△AGD と △DHC において

$\angle AGD = \angle DHC = 90°$，$AD = DC$

$\angle ADG = 90° - \angle CDH$

$= \angle DCH$

直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

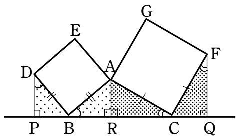
$\triangle AGD \equiv \triangle DHC$

よって　$DG = CH$　…… ⑥

⑤，⑥ から　$CH = FB$　終

12

証明　点 A から辺 BC に垂線 AR を引く。



△BDP と △ABR において

$\angle DPB = \angle BRA = 90°$　…… ①

四角形 ABDE は正方形であるから

$BD = AB$　…… ②

直角三角形 BDP の 2 つの鋭角の和は 90° であるから　$\angle BDP = 90° - \angle PBD$

また　$\angle ABR = \angle PBR - \angle PBD - \angle DBA$

$= 180° - \angle PBD - 90°$

$= 90° - \angle PBD$

よって　$\angle BDP = \angle ABR$　…… ③

①，②，③ より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

$\triangle BDP \equiv \triangle ABR$

よって　$DP = BR$

同じようにして，$\triangle FCQ \equiv \triangle CAR$ であるから　$FQ = CR$

したがって　$DP + FQ = BR + CR = BC$　終

13

(1)　×

(2)　1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，平行四辺形である。

(3)　2 組の対角がそれぞれ等しいから，平行四辺形である。

(4)　×

(5)　2 組の対辺がそれぞれ等しいから，平行四辺形である。

14

AB＝AE であるから

$\angle ABE = \angle AEB$　…… ①

AB∥FC より，錯角は等しいから

$\angle BFC = \angle ABE$

AD∥BC より，錯角は等しいから

$\angle FBC = \angle AEB$

① から　$\angle BFC = \angle FBC$

よって，△BCF は，2 つの角が等しいから，二等辺三角形である。

したがって　$BC = CF$

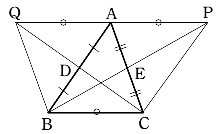
平行四辺形の対辺は等しいから

$BC = AD$

よって　$AD = CF$

15

証明　C と P，および B と Q を結ぶ。



四角形 ABCP において

仮定から　$BE = PE$

点 E は辺 AC の中点であるから

$AE = EC$

したがって，四角形 ABCP は，2 つの対角線 AC，BP がそれぞれの中点で交わるから，平行四辺形である。

よって　AP∥BC　……①，　$AP = BC$　……②

同じように，四角形 QBCA も平行四辺形であるから

QA∥BC　……③，　$QA = BC$　……④

①，③ から，3 点 P，A，Q は一直線上にある。

②，④ から　$AP = QA$

したがって，点 A は線分 PQ の中点である。終

16

(1)　△DEB と △CAE において

平行四辺形の対辺は等しいから

$OD=CE$ …… ①

$DE=OC$ …… ②

$OD=DB$ と ① から

$DB=CE$ …… ③

$OC=CA$ と ② から

$DE=CA$ …… ④

平行四辺形の対角は等しいから

$\angle ODE=\angle OCE$

このとき　$\angle BDE=\angle BDO-\angle ODE$

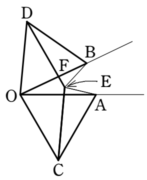
$=60^\circ-\angle OCE$

$=\angle ECA$ …… ⑤

③，④，⑤ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle DEB\equiv\triangle CAE$

(2)　線分 DE と OB の交点を F とする。



DE∥OC より，錯角は等しいから

$\angle OFD=\angle COF$

また，△BDF において，内角と外角の関係から

$\angle OFD=\angle BDE+\angle DBO$

$=\angle BDE+60^\circ$

また　$\angle COF=\angle BOA+\angle COA$

$=\angle BOA+60^\circ$

よって　$\angle BDE+60^\circ=\angle BOA+60^\circ$

したがって　$\angle BDE=\angle BOA$

(3)　△BDE と △BOA において

$BD=BO$ …… ⑥

$DE=OC$，$OC=OA$ であるから

$DE=OA$ …… ⑦

(2) から　$\angle BDE=\angle BOA$ …… ⑧

⑥，⑦，⑧ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BDE\equiv\triangle BOA$

よって　$BE=BA$

また，$\triangle DEB\equiv\triangle CAE$ より $BE=EA$ であるから，△ABE は正三角形である。

したがって　$\angle AEB=60^\circ$

17

△AEG と △CFH において

仮定から　$AE=CF$ …… ①

$AG=CH$ …… ②

▱ABCD の対角は等しいから　$\angle EAG=\angle FCH$ …… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AEG\equiv\triangle CFH$

よって　$EG=FH$ …… ④

△BHE と △DGF において

▱ABCD の対辺はそれぞれ等しいから

$AB=DC$ …… ⑤

$BC=AD$ …… ⑥

①，⑤ から　$AB-AE=DC-CF$

すなわち　$BE=DF$ …… ⑦

②，⑥ から　$BC-CH=AD-AG$

すなわち　$BH=DG$ …… ⑧

▱ABCD の対角は等しいから　$\angle EBH=\angle FDG$ …… ⑨

⑦，⑧，⑨ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

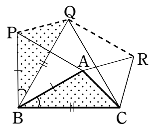
$\triangle BHE\equiv\triangle DGF$

よって　$EH=FG$ …… ⑩

④，⑩ より，四角形 EHFG は，2 組の対辺がそれぞれ等しいから，平行四辺形である。

18

(1)　証明　△ABC と △PBQ において



$AB=PB$

$BC=BQ$

$\angle ABC=60^\circ-\angle ABQ$

$=\angle PBQ$

よって，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC\equiv\triangle PBQ$　終

(2)　証明　$\triangle ABC\equiv\triangle PBQ$ であるから　$PQ=AC$

また，正三角形 ACR において　$AC=AR$

したがって　$PQ=AR$ …… ①

(1) と同じようにして　$\triangle ABC\equiv\triangle RQC$

よって　$QR=BA$

また，正三角形 PBA において　$BA=PA$

したがって　$QR=PA$ …… ②

①，② より，2 組の対辺がそれぞれ等しいから，四角形 PARQ は平行四辺形である。終

19

(1)　△DBE は，△ABC を回転移動させたものであるから

$DE=AC$

また，△ACF は AC を 1 辺とする正三角形であるから

$AC=CF=AF$

よって，辺 DE と長さが等しい辺は

辺 AC，CF，AF

(2)　△DBE は，△ABC を，点 B を中心として，時計の針の回転と反対向きに 60° 回転移動させたものであるから

$BE=BC$

$\angle CBE=60^\circ$

したがって，△EBC は，$BE=BC$ で，頂角が 60° の二等辺三角形であるから

$\angle BCE=\angle BEC$

$=(180^\circ-60^\circ)\div 2$

$=60^\circ$

よって　$BE=BC=CE$

したがって，△EBC は，3 辺が等しいから，正三角形である。

(3)　△ABC と △FEC において

△ACF は正三角形であるから

$AC=FC$ …… ①

$\angle ACF=60^\circ$

(2) より，△EBC も正三角形であるから

$BC=EC$ …… ②

$\angle BCE=60^\circ$

また　$\angle ACB=\angle BCE+\angle ACE$

$=60^\circ+\angle ACE$

$\angle FCE=\angle ACF+\angle ACE$

$=60^\circ+\angle ACE$

よって　$\angle ACB=\angle FCE$ …… ③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC\equiv\triangle FEC$

(4)　(1) から　$DE=AF$ …… ④

(3) より，$\triangle ABC\equiv\triangle FEC$ であるから

$AB=FE$

△ADB は，(2) と同様に考えることにより，正三角形であるから

$AB=AD$

よって　$AD=FE$ …… ⑤

④，⑤ より，四角形 DEFA は，2 組の対辺がそれぞれ等しいから，平行四辺形である。

1

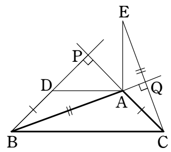
BC∥ℓ より，錯角は等しいから
∠EDB＝∠DBC　…… ①
また，半直線 BD は ∠ABC の二等分線であるから
∠EBD＝∠DBC　…… ②
よって，①，② から
∠EDB＝∠EBD
ゆえに，△EBD は二等辺三角形であり
EB＝ED　…… ③
また，BC∥ℓ より，同位角は等しいから
∠AED＝∠ABC，　∠ADE＝∠ACB
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であるから
∠ABC＝∠ACB
したがって　∠AED＝∠ADE
よって，△AED は二等辺三角形であり
AE＝AD　…… ④
仮定から　AB＝AC
これと ④ から
EB＝DC　…… ⑤
よって，③，⑤ から
ED＝DC　…… ⑥
一方，BG∥ℓ より，錯角は等しいから
∠DFC＝∠FCG　…… ⑦
また，半直線 CF は ∠ACG の二等分線であるから
∠DCF＝∠FCG　…… ⑧
よって，⑦，⑧ から
∠DFC＝∠DCF
ゆえに，△DCF は二等辺三角形であり
DC＝DF　…… ⑨
したがって，⑥，⑨ から
ED＝DF

2

[仮定]　AD＝BD，AE＝CE，
BE＝PE，CD＝QD
[結論]　3 点 P，A，Q は一直線上にある
[証明]　△ADQ と △BDC において
仮定から　AD＝BD　…… ①
QD＝CD　…… ②
対頂角は等しいから
∠ADQ＝∠BDC　…… ③
①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ADQ≡△BDC
合同な図形では対応する角の大きさは等しいから
∠QAD＝∠CBD
錯角が等しいから
AQ∥BC　…… ④
△AEP と △CEB において
仮定から　AE＝CE　…… ⑤
PE＝BE　…… ⑥
対頂角は等しいから
∠AEP＝∠CEB　…… ⑦
⑤，⑥，⑦ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△AEP≡△CEB
合同な図形では対応する角の大きさは等しいから
∠PAE＝∠BCE
錯角が等しいから
AP∥BC　…… ⑧
④，⑧ から，AQ，AP はともに BC と平行であることがわかる。
したがって，3 点 P，A，Q は一直線上にある。

3

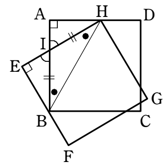
[仮定]　直線 AC⊥直線 BD，
直線 AB⊥直線 CE，
BD＝AC，CE＝AB
[結論]　△ABD≡△ECA
[証明]　△ABD と △ECA において
仮定から　BD＝CA　…… ①
AB＝EC　…… ②
直線 AC と直線 BD の交点を P，直線 AB と直線 CE の交点を Q とする。



△APB と △AQC において，対頂角は等しいから
∠PAB＝∠QAC　…… ③
仮定より，直線 AC⊥直線 BD，直線 AB⊥直線 CE であるから　∠APB＝∠AQC＝90°　…… ④
③，④ より，三角形の残りの角も等しいから
∠ABP＝∠QCA
すなわち　∠ABD＝∠ECA　…… ⑤
①，②，⑤ より，△ABD と △ECA の 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABD≡△ECA

4

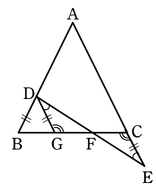
証明　B と H を結ぶ。



△ABH と △EHB において
∠HAB＝∠BEH＝90°　…… ①
BH＝HB (共通)　…… ②
2 つの正方形 ABCD，EFGH は合同であるから
AB＝EH　…… ③
①，②，③ より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから
△ABH≡△EHB
よって　∠ABH＝∠EHB
したがって　IH＝IB　…… ④
△AIH と △EIB において
① から　∠HAI＝∠BEI＝90°　…… ⑤
対頂角は等しいから　∠AIH＝∠EIB　…… ⑥
④，⑤，⑥ より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
△AIH≡△EIB　終

5

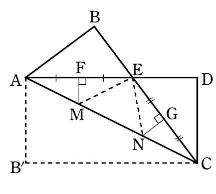
証明　線分 DE と辺 BC の交点を F とし，点 D を通り AC に平行な直線と辺 BC との交点を G とする。



△DGF と △ECF において
DG∥AE であるから
∠FDG＝∠FEC　…… ①
∠FGD＝∠FCE　…… ②
∠DGB＝∠ACB　…… ③
AB＝AC から　∠DBG＝∠ACB　…… ④
③，④ から　∠DGB＝∠DBG
よって　BD＝GD
これと仮定 CE＝BD から　GD＝CE　…… ⑤
①，②，⑤ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△DGF≡△ECF
よって　DF＝EF
したがって，線分 DE は辺 BC によって 2 等分される。終

6

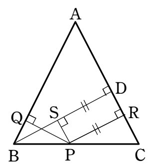
証明　(1)　折り返す前の点 B の位置を B′ とする。



折り返した角であるから
∠ECA＝∠B′CA　…… ①
平行線の錯角は等しいから
∠B′CA＝∠EAC　…… ②
①，②より　∠ECA＝∠EAC
よって，△EAC は二等辺三角形であるから
AE＝EC　終
(2)　△MAE において，仮定より
AF＝FE，MF⊥AE
よって，頂点から底辺に引いた垂線が底辺を 2 等分するから，△MAE は，MA＝ME の二等辺三角形である。
同じようにして，△NCE は NC＝NE の二等辺三角形である。
(1) より，AE＝EC，∠EAC＝∠ECA であるから，△MAE と △NCE は，底辺の長さと底角の大きさが等しい二等辺三角形である。
よって，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△MAE≡△NCE
したがって，ME＝NE であるから，△EMN は二等辺三角形である。終

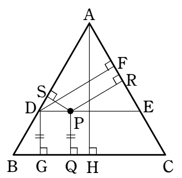
$\boxed{7}$

(1) 証明　頂点 B から辺 AC に垂線 BD を引き，点 P から BD に垂線 PS を引く。



△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であるから
　　∠ACB＝∠QBP　　　　……①
AC∥SP であるから
　　∠ACB＝∠SPB　　　　……②
①，② から　　∠QBP＝∠SPB　　……③
△QBP と △SPB において
　　∠BQP＝∠PSB＝90°　　……④
共通な辺であるから　BP＝PB　　……⑤
③，④，⑤ より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
　　△QBP≡△SPB
よって　　PQ＝BS
また，四角形 PRDS は長方形であるから　　PR＝SD
したがって　　PQ＋PR＝BS＋SD＝BD
線分 BD の長さは一定であるから，PQ＋PR は，P が辺 BC 上のどこにあっても 一定である。終

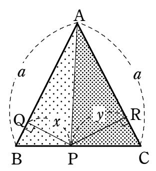
(2) 証明　右の図のように，点 P を通り，辺 BC に平行な直線と，辺 AB，AC との交点を，それぞれ D，E とする。



DE∥BC であるから
　　∠ADE＝∠B，∠AED＝∠C
∠B＝∠C (＝60°) であるから
　　∠ADE＝∠AED
よって，△ADE は AD＝AE の二等辺三角形であるから，点 D から辺 AE に引いた垂線を DF とすると，(1) により
　　PS＋PR＝DF　　……⑥
点 D から辺 BC に引いた垂線を DG とすると，四角形 DGQP は長方形であるから
　　PQ＝DG　　　　……⑦
△CAB は CA＝CB の二等辺三角形であるから，点 A から辺 BC に引いた垂線を AH とすると，(1) により
　　DF＋DG＝AH　　……⑧
⑥，⑦，⑧ から　　PQ＋PR＋PS＝AH
線分 AH の長さは一定であるから，PQ＋PR＋PS は，P が △ABC の内部のどこにあっても 一定である。終

[別証]　面積を利用した証明も，紹介しておこう。

(1) 証明　AB＝AC＝a とし，△ABC の面積を S とすると，△ABC は与えられた二等辺三角形であるから，a と S は一定である。



PQ＝x，PR＝y とおくと

$$\triangle ABP=\frac{1}{2}AB\times PQ=\frac{1}{2}ax$$

$$\triangle ACP=\frac{1}{2}AC\times PR=\frac{1}{2}ay$$

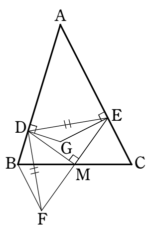
よって　　$S=\triangle ABP+\triangle ACP=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay=\frac{1}{2}a(x+y)$

したがって　　$x+y=\frac{2S}{a}$　　　すなわち　　$PQ+PR=\frac{2S}{a}$

$\frac{2S}{a}$ は一定であるから，PQ＋PR は，P が辺 BC 上のどこにあっても 一定である。終

$\boxed{8}$

(1)　△BFM と △CEM において



点 M は辺 BC の中点であるから
　　BM＝CM　……①
対頂角は等しいから
　　∠BMF＝∠CME　……②
また，BF∥EC より，錯角は等しいから
　　∠FBM＝∠ECM　……③
①，②，③ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
　　△ BFM≡△CEM
ゆえに　　MF＝ME
したがって　MD＝ME＝MF
また　　∠DME＝∠DMF＝90°
よって，△DEM と △DFM は，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，合同な直角二等辺三角形である。
ゆえに　　∠EDF＝45°＋45°＝90°

(2)　(1) より △DFM≡△DEM であるから，△ DFE は DF＝DE の直角二等辺三角形である。
△DBF と △DGE において
　　DF＝DE　　　　　……④
　　∠BDF＝∠BDG－∠FDG＝90°－∠FDG,
　　∠GDE＝∠FDE－∠FDG＝90°－∠FDG
であるから
　　∠BDF＝∠GDE　　　……⑤
また，∠MEG＝45°－∠GED，
　　∠MEC＝∠MFB＝45°＋∠BFD
であり，∠MEG＋∠MEC＝90° であるから
　　45°－∠GED＋45°＋∠BFD＝90°
すなわち　　∠BFD＝∠GED　……⑥
④，⑤，⑥ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
　　△DBF≡△DGE

$\boxed{9}$

(1)　△OAB と △DON において
四角形 OACD は正方形であるから
　　OA＝DO　　　　…… ①
四角形 OBEF は正方形であるから
　　OB＝OF　　　　…… ②
四角形 OFND は平行四辺形であるから
　　OF＝DN　　　　…… ③
よって，②，③ より
　　OB＝DN　　　　…… ④
また　　∠AOB＝360°－∠DOA－∠DOF－∠FOB
　　　　＝360°－90°－∠DOF－90°
　　　　＝180°－∠DOF
一方，平行四辺形 OFND において
∠ODN＋∠DOF＝180° であるから
　　∠ODN＝180°－∠DOF
したがって　∠AOB＝∠ODN　…… ⑤
①，④，⑤ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
　　△OAB≡△DON

(2)　(1) の結果 △OAB≡△DON から
　　∠OAB＝∠DON
よって　　∠OAB＋∠AOH＝∠DON＋∠AOH
　　　　＝∠NOH－∠AOD
　　　　＝180°－90°
　　　　＝90°
ゆえに，△OAH において
　　∠OHA＝180°－(∠OAH＋∠AOH)
　　　　＝180°－90°
　　　　＝90°
したがって　OH⊥AB

10

(1)　$\triangle BGE$ と $\triangle DFE$ において

E は対角線 BD の中点であるから

$BE=DE$ ……①

対頂角は等しいから

$\angle BEG=\angle DEF$ ……②

$AD /\!/ BC$ より，錯角は等しいから

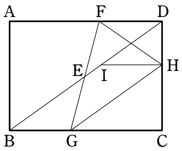
$\angle EBG=\angle EDF$ ……③

①，②，③より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BGE \equiv \triangle DFE$

よって　$BG=DF$

(2)　H を通り辺 AD に平行な直線と線分 BD との交点を I とする。



$BI /\!/ GH$，$BG /\!/ IH$

より，四角形 BGHI は，2 組の対辺がそれぞれ平行であるから，平行四辺形である。

よって　$GH=BI$ ……④

$BG=IH$ ……⑤

$\triangle FDH$ と $\triangle IHD$ において

$DH=HD$（共通） ……⑥

(1) の $BG=DF$ と⑤から

$DF=HI$ ……⑦

また　$\angle FDH=\angle IHD=90^\circ$ ……⑧

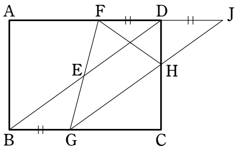
⑥，⑦，⑧より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle FDH \equiv \triangle IHD$

したがって　$FH=ID$ ……⑨

④，⑨から　$FH+GH=ID+BI=BD$

別解　AD の延長と GH の延長との交点を J とする。



$DJ /\!/ BG$，$BD /\!/ GJ$ から，四角形 DBGJ は平行四辺形である。

よって　$DJ=BG$，$BD=GJ$

$DJ=BG$ と (1) から　$DF=DJ$

$\triangle DFH$ と $\triangle DJH$ において

$DF=DJ$，$DH=DH$（共通），

$\angle FDH=\angle JDH=90^\circ$

ゆえに，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

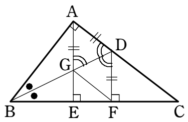
$\triangle DFH \equiv \triangle DJH$

したがって　$FH=JH$

よって　$FH+GH=JH+GH=GJ=BD$

11

証明　$\triangle ABD$ と $\triangle FBD$ において



$\angle BAD=\angle BFD=90^\circ$

$BD=BD$（共通）

点 D は $\angle B$ の二等分線上にあるから

$\angle ABD=\angle FBD$

よって，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから　$\triangle ABD \equiv \triangle FBD$

ゆえに　$AD=FD$ ……①

$\angle ADB=\angle FDB$ ……②

また，$AG \perp BC$，$DF \perp BC$ であるから

$AG /\!/ DF$ ……③

よって　$\angle AGD=\angle FDG$ ……④

②より $\angle ADG=\angle FDG$ であり，これと④から

$\angle AGD=\angle ADG$

よって　$AG=AD$ ……⑤

①，⑤から　$AG=FD$ ……⑥

③，⑥より，四角形 AGFD は，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，平行四辺形である。

さらに，⑤より，平行四辺形 AGFD は，隣り合う 2 辺が等しいから，ひし形である。 終

12

(1)　$\triangle ADE$ と $\triangle BDF$ において

点 D は辺 AB の中点であるから

$AD=BD$ ……①

対頂角は等しいから　$\angle ADE=\angle BDF$ ……②

また，仮定から　$AE /\!/ FB$ ……③

よって，錯角は等しいから　$\angle DAE=\angle DBF$ ……④

①，②，④より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ADE \equiv \triangle BDF$ ……⑤

よって　$AE=BF$ ……⑥

③，⑥より，四角形 AEBF は，1 組の対辺が平行で等しいから，平行四辺形である。

(2)　点 E は線分 CD の中点であるから

$CE=ED$ ……⑦

また，⑤から　$ED=FD$ ……⑧

⑦，⑧から　$FE=ED+FD=CE+ED=CD$

仮定より，$AB=CD$ であるから　$AB=FE$ ……⑨

$\triangle AEB$ と $\triangle FBE$ において　$EB=BE$（共通） ……⑩

⑥，⑨，⑩より，3 組の辺がそれぞれ等しいから

$\triangle AEB \equiv \triangle FBE$

よって　$\angle AEB=\angle FBE$ ……⑪

(1) より，四角形 AEBF は平行四辺形であるから，2 組の対角はそれぞれ等しい。

すなわち　$\angle AEB=\angle AFB$

$\angle FBE=\angle FAE$

これらと，⑪から

$\angle AEB=\angle AFB=\angle FBE=\angle FAE$

したがって，四角形 AEBF は，4 つの角がすべて等しいから，長方形である。

13

$\triangle AHC \equiv \triangle GDA$ から　$\angle CAH=\angle AGD$

よって　$\angle AGI+\angle GAI=\angle CAH+\angle GAI$

$=\angle HAI-\angle CAG$

$=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

ゆえに，$\triangle AIG$ において

$\angle AIG=180^\circ-(\angle AGI+\angle GAI)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

したがって　$AI \perp DG$

14

$\triangle ABC$ と $\triangle EAF$ において

$\triangle AEB$ と $\triangle ADF$ は直角二等辺三角形であるから

$AB=EA$ ……①

$AD=AF$

四角形 ABCD は平行四辺形であるから

$AD=BC$

よって　$BC=AF$ ……②

また　$\angle ABC+\angle BAD=180^\circ$

であり，$\angle EAF+\angle BAD=360^\circ-2\times 90^\circ=180^\circ$

であるから

$\angle ABC=\angle EAF$ ……③

①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC \equiv \triangle EAF$

よって　$\angle BAC=\angle AEF$ ……④

また　$\angle BAC+\angle EAH=90^\circ$ ……⑤

④，⑤から　$\angle AEH+\angle EAH=90^\circ$

ゆえに，$\angle AHE=90^\circ$ であるから

$AH \perp EF$

第５章　平行線と面積／三角形の成立

例題

1 ★★

AD∥BC であるから

△ABE＝△DBE　…… ①

BD∥EF であるから

△DBE＝△DBF　…… ②

①，②より　△ABE＝△DBF　…… ③

AB∥DC であるから

△DBF＝△DAF　…… ④

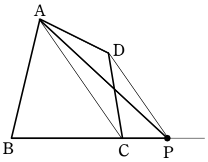
③，④より　△ABE＝△DAF

したがって，△ABE と面積の等しい三角形は

△DBE，△DBF，△DAF

2 ★★

D を通り AC に平行に引いた直線と半直線 BC の交点を P とする。



このとき，四角形 ABCD の面積と △ABP の面積は等しくなる。

このことを確かめる。

AC∥DP から　　△DAC＝△PAC

この両辺に △ABC の面積を加えると

△DAC＋△ABC＝△PAC＋△ABC

すなわち　(四角形 ABCD の面積)＝△ABP

したがって，D を通り AC に平行に引いた直線と半直線 BC の交点を P とすればよい。

3 ★★

(1)　辺 BC が最も大きい辺であるから，最も大きい角は　∠A

(2)　辺 CA が最も小さい辺であるから，最も小さい角は　∠B

(3)　$\angle C = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ)$

$= 80^\circ$

よって，∠C が最も大きい角であるから，最も大きい辺は　辺 AB

(4)　$\angle B = 180^\circ - (40^\circ + 50^\circ)$

$= 90^\circ$

よって，∠A が最も小さい角であるから，最も小さい辺は　辺 BC

4 ★★★

(1)　$|5-7|=2$，$5+7=12$ であるから，$|5-7|<10<5+7$ は成り立つ。
よって，3 辺の長さが 5 cm，7 cm，10 cm である三角形は存在する。

(2)　$|15-8|=7$，$15+8=23$ であるから，$|15-8|<6<15+8$ の
$|15-8|<6$ が成り立たない。
よって，3 辺の長さが 15 cm，8 cm，6 cm である三角形は存在しない。

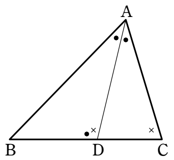
(3)　$|4-9|=5$，$4+9=13$ であるから，$|4-9|<14<4+9$ の
$14<4+9$ が成り立たない。
よって，3 辺の長さが 4 cm，9 cm，14 cm である三角形は存在しない。

(4)　$|7-9|=2$，$7+9=16$ であるから，$|7-9|<12<7+9$ は成り立つ。
よって，3 辺の長さが 7 cm，9 cm，12 cm である三角形は存在する。

5 ★★★

線分 AD は ∠A の二等分線であるから

∠BAD＝∠DAC　　　…… ①



△ADC において，内角と外角の関係から

∠ADB＝∠C＋∠DAC　…… ②

①，② から　∠ADB＝∠C＋∠BAD

よって　　　∠ADB＞∠BAD

したがって，△ABD において，辺と角の大小関係から

AB＞BD　終

例題演習

1

AB∥DC であるから

△ACE＝△ADE　…… ①

AC∥EF であるから

△ACE＝△ACF　…… ②

AD∥BC であるから

△ACF＝△DCF

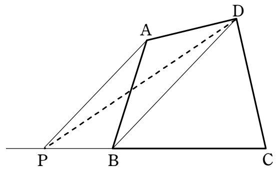
② から　　△ACE＝△DCF　…… ③

①，②，③ から，△ACE と面積の等しい三角形は

△ADE，△ACF，△DCF

2

点 A を通り，対角線 DB に平行な直線を引き，辺 CB の延長との交点を P とする。



このとき，AP∥DB であるから

△DBA＝△DBP

△DPC＝△DBC＋△DBP

＝△DBC＋△DBA

よって，△DPC の面積は四角形 ABCD の面積に等しい。

したがって，上のような方法で点 P の位置をとればよい。

3

(1)　辺 AB が最も大きい辺であるから，最も大きい角は　∠C

(2)　辺 CA が最も小さい辺であるから，最も小さい角は　∠B

(3)　$\angle C = 180^\circ - (50^\circ + 80^\circ) = 50^\circ$

よって，∠B が最も大きい角であるから，最も大きい辺は　辺 CA

(4)　$\angle A = 180^\circ - (65^\circ + 75^\circ) = 40^\circ$

よって，∠A が最も小さい角であるから，最も小さい辺は　辺 BC

4

(1)　$5<7$，$6<7$ で，$5+6>7$ であるから，5 cm，7 cm，6 cm を 3 辺の長さとする三角形は存在する。

(2)　$5<12$ で，$5+5<12$ であるから，12 cm，5 cm，5 cm を 3 辺の長さとする三角形は存在しない。

(3)　$3<12$，$9<12$ で，$3+9=12$ であるから，3 cm，9 cm，12 cm を 3 辺の長さとする三角形は存在しない。

(4)　$8<15$，$9<15$ で，$8+9>15$ であるから，8 cm，15 cm，9 cm を 3 辺の長さとする三角形は存在する。

5

AB＞AC であるから　　∠C＞∠B

また　　　∠APB＝∠C＋∠PAC＞∠C

よって　　∠APB＞∠B

ゆえに，△ABP において　　AB＞AP

レベルA

1

AD∥BC であるから

$\triangle GFD=\triangle GED$

よって　$\triangle AEG+\triangle GFD=\triangle AEG+\triangle GED$

$=\triangle AED$

$=\dfrac{1}{2}\times 8\times 5$

$=20\,(\mathrm{cm}^2)$

2

辺 AD を底辺と考えたとき，平行四辺形 ABCD と △ADP の高さは等しい。

よって　$\triangle ADP=\dfrac{1}{2}\times 40$

$=20\,(\mathrm{cm}^2)$

また，PQ＝DQ であるから

$\triangle APQ=\triangle ADQ$

よって　$\triangle APQ=\dfrac{1}{2}\triangle ADP$

$=\dfrac{1}{2}\times 20$

$=10\,(\mathrm{cm}^2)$

3

(ア)　BCF

(イ)　AFD

(ウ)　DEF

4

AC∥EF より　$\triangle ACF=\triangle ACE$　……①

AE∥DC より　$\triangle ADE=\triangle ACE$

AD∥FC より　$\triangle CDF=\triangle ACF$　……②

①，② より　$\triangle CDF=\triangle ACE$

よって，△ACE と面積が等しい三角形は

△ACF，△ADE，△CDF

5

(1)　DE∥AC より

$\triangle ADE=\triangle CDE$

△ADE と △CDE からそれぞれ △FDE を除くと

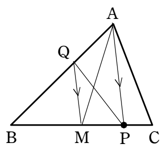
$\triangle ADF=\triangle CEF$

(2)　△ADE と △CDE にそれぞれ △DBE を加えると

$\triangle ABE=\triangle CDB$

6

A と P を線分で結び，M を通って，PA に平行な直線を引いて，辺 AB との交点を Q とすればよい。



証明　AP∥QM であるから

$\triangle PQM=\triangle AQM$

両辺に △QBM を加えると

$\triangle PQB=\triangle ABM$

BM＝MC より，△ABM は △ABC の面積の半分である。

よって，直線 PQ は △ABC の面積を２等分する。　終

7

３辺の長さが x，6，9 である三角形が存在するための条件は

$|6-9|<x<6+9$　　すなわち　$3<x<15$

8

△ABP において，∠ABP＝90° であるから　　$\angle APB<\angle ABP$

ゆえに　$AB<AP$

また $\angle ACP<90^\circ$，$\angle APC=\angle ABP+\angle PAB=90^\circ+\angle PAB>90^\circ$ であるから

$\angle ACP<\angle APC$

ゆえに　$AP<AC$

よって　$AB<AP<AC$

レベルB

1

線分 BE は平行四辺形 ABFE の面積を２等分するから

$\triangle ABE=\triangle EBF$　……①

AE∥BC であるから　　$\triangle ABE=\triangle ACE$　……②

EH∥DC であるから　　$\triangle DEH=\triangle CEH$

この両辺に △AHE を加えると

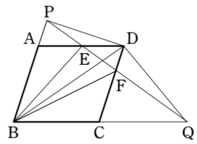
$\triangle AHD=\triangle ACE$　……③

①，②，③ から，△ABE と面積が等しい三角形は

△EBF，△ACE，△AHD

2

B と D を結ぶ。



BP∥CD であるから

$\triangle BDF=\triangle PDF$

AD∥BQ であるから

$\triangle BDE=\triangle QDE$

よって

$\triangle BDF+\triangle BDE=\triangle PDF+\triangle QDE$

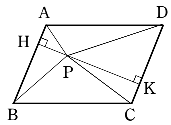
この両辺から △DEF の面積をひくと

$\triangle BEF=\triangle DPQ$

したがって，△DPQ の面積は　$12\,\mathrm{cm}^2$

参考　点 E が辺 AD の中点，点 F が辺 DC の３等分点のうちの１点である必要はない。

3



証明　P を通り，AB に垂直な直線と AB，CD との交点をそれぞれ H，K とすると

$\triangle PAB+\triangle PCD$

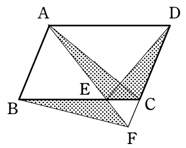
$=\dfrac{1}{2}AB\times PH+\dfrac{1}{2}AB\times PK$

$=\dfrac{1}{2}AB\times(PH+PK)$

$=\dfrac{1}{2}AB\times HK$

$=\dfrac{1}{2}\text{▱}ABCD$　終

4



証明　AB∥CF であるから

$\triangle BFC=\triangle AFC$

この両辺から共通の △ECF をひいて

$\triangle BFE=\triangle AEC$　……①

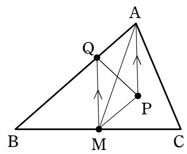
AD∥EC であるから

$\triangle AEC=\triangle DEC$　……②

①，② から　　$\triangle BFE=\triangle DEC$　終

5

A と P を線分で結び，M を通って，PA に平行な直線を引いて，辺 AB との交点を Q とすればよい。



証明　AP∥QM であるから

$\triangle PQM=\triangle AQM$

両辺に △QBM を加えると

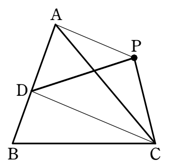
四角形 PQBM＝△ABM

BM＝MC より，△ABM は △ABC の面積の半分である。

よって，折れ線 MPQ は △ABC の面積を２等分する。　終

6

C を通り AP に平行に引いた直線と辺 AB の交点を D とする。



このとき，四角形 BCPD の面積と △ABC の面積は等しくなる。

このことを確かめる。

AP∥DC から

$\triangle ADC=\triangle PDC$

この両辺に △DBC の面積を加えると

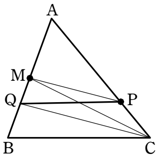
$\triangle ADC+\triangle DBC=\triangle PDC+\triangle DBC$

すなわち　　△ABC＝(四角形 BCPD の面積)

したがって，C を通り AP に平行に引いた直線と辺 AB の交点を D とすればよい。

7

Cを通りPMに平行に引いた直線と辺ABの交点をQとする。



このとき，線分PQは△ABCの面積を2等分する。
このことを確かめる。
PM∥CQより
　　△PMC＝△PMQ
であるから
　　△ACM＝△APQ

△ACMの面積は△ABCの面積の$\frac{1}{2}$であるから，△APQの面積も△ABCの面積の$\frac{1}{2}$となる。

したがって，Cを通りPMに平行に引いた直線と辺ABの交点をQとすればよい。

8

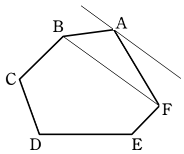
△PABの3辺の関係から　　AP＋BP＞AB　……①
同様に，△PBCについて　　BP＋CP＞BC　……②
　　　△PCAについて　　CP＋AP＞CA　……③
①，②，③の辺々を加えると
　　(AP＋BP)＋(BP＋CP)＋(CP＋AP)＞AB＋BC＋CA
すなわち　2(AP＋BP＋CP)＞AB＋BC＋CA

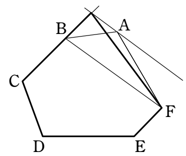
1

証明　AD∥FCから　　△DCF＝△ACF　……①
　　　BE∥FCから　　△ECF＝△BCF　……②
①，②の辺々をたして
　　△DCF＋△ECF＝△ABC　……③
また，AD∥BEから△DBE＝△ABEで，共通の△CBEをひいて
　　△DEC＝△ABC　……④
③，④の辺々をたして　　△DEF＝2△ABC
よって，△DEFの面積は△ABCの面積の2倍である。終

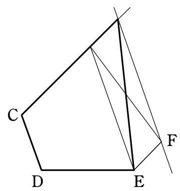
2

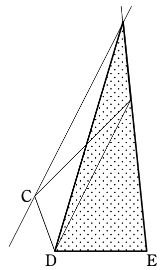
①　Aを通るBFと平行な直線をひく。　　②　△ABFと等しい面積の三角形をかく。





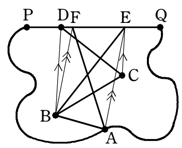
③　同様にして，面積の等しい三角形をかく。





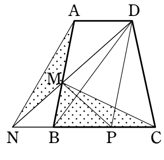
3

Cを通りBDに平行に引いた直線と直線PQとの交点をEとする。
このとき，△BCD＝△BEDであるから，この土地の面積は，折れ線A－B－Eによって2等分される。
次に，Bを通りAEに平行に引いた直線と直線PQとの交点をFとする。
このとき，△ABE＝△AFEであるから，この土地の面積は，直線AFによって2等分される。
よって，上のような点Fをとり直線AFを引けばよいから，右の図のようになる。



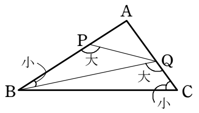
4

(1)　(c)
(2)　AD∥NCであるから
　　△ANB＝△DNB
この両辺から△MNBの面積をひくと
　　△AMN＝△DMB　……①
ここで，Dを通りABに平行な直線を考える。
AD＜BCであるから，この直線は線分BCと交わり，その交点をPとする。
AB∥DPであるから
　　△DMB＝△MBP　……②
①，②から
　　△AMN＝△MBP　……③
また，　△MBC＝△MBP＋△MPC
　　　　　＞△MBP
であるから，③より
　　△AMN＜△MBC
以上から，(c)が正しいことが証明された。



5

2 点 B，Q を線分で結ぶ。



△APQ の内角と外角の性質から，$\angle BPQ$ は鈍角である。

よって，$\angle PBQ < \angle BPQ$ であるから

$PQ < BQ$ …… ①

△ABQ の内角と外角の性質から，$\angle BQC$ は鈍角である。

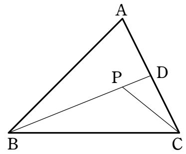
よって，$\angle BCQ < \angle BQC$ であるから

$BQ < BC$ …… ②

①，② より　$PQ < BC$　終

6

線分 BP の延長と辺 AC の交点を D とする。



△ABD において

$AB + AD > PB + PD$ …… ①

△DPC において

$DC + PD > PC$ …… ②

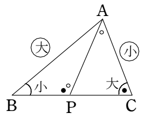
①，② から

$(AB + AD) + (DC + PD) > (PB + PD) + PC$

よって　$AB + AC > PB + PC$

7

(1) 証明　$AB > AC$ ならば　$\angle C > \angle B$ …… ①



△APC の内角と外角の性質から

$\angle APB = \angle C + \angle PAC$

したがって　$\angle APB > \angle C$ …… ②

①，② より　$\angle APB > \angle B$

よって，△ABP において，辺と角の大小関係から

$AB > AP$　終

(2) 証明　△ABP において　$AP < AB + BP$ …… ③

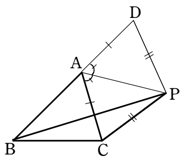
△APC において　$AP < CA + PC$ …… ④

③，④ の辺々をたして　$2AP < AB + (BP + PC) + CA$

すなわち　$2AP < AB + BC + CA$　終

8

BA の A を越える延長上に，$AC = AD$ となるように点 D をとる。



△PAC と △PAD において

$AC = AD$，PA は共通，$\angle PAC = \angle PAD$

よって　$\triangle PAC \equiv \triangle PAD$

したがって　$PC = PD$

また　$AB + AC = AB + AD = BD$

△BDP において，$BD < BP + PD$ であるから

$AB + AC < PB + PC$

$\boxed{1}$★

(1)　四角形 ABCD∽四角形 HGFE

(2)　(ア)　辺 AB と対応する辺は　辺 EF

　(イ)　∠G と対応する角は　∠C

$\boxed{2}$★

(1)　2つの三角形の対応する辺の長さの比は，BC : EF＝5 : 8 であるから，

相似比は　5 : 8

(2)　(1) より，相似比は 5 : 8 であるから　　AB : DE＝5 : 8

DE＝x cm とすると　4 : x＝5 : 8　　　これを解くと　$x=\frac{32}{5}$

よって　　DE＝$\frac{32}{5}$ cm

(3)　相似な図形では，対応する角の大きさは等しいから　　∠C＝∠F＝47°

$\boxed{3}$★

①　△ABC と △PRQ において

AB : PR＝8 : 4＝2 : 1,

BC : RQ＝6 : 3＝2 : 1,

CA : QP＝9 : 4.5＝2 : 1

3 組の辺の比がすべて等しいから　△ABC∽△PRQ

②　△DEF と △OMN において

DF : ON＝6 : 3＝2 : 1,

EF : MN＝4 : 2＝2 : 1,

∠F＝∠N＝60°

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから　△DEF∽△OMN

③　△GHI において

∠H＝180°−(70°＋50°)＝60°

△GHI と △LKJ において

∠I＝∠J＝50°，∠H＝∠K＝60°

2 組の角がそれぞれ等しいから　△GHI∽△LKJ

$\boxed{4}$★★

(1)　△ACE と △BDE において

AE : BE＝CE : DE＝1 : 2

∠AEC＝∠BED (対頂角)

よって，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ACE∽△BDE

(2)　△ADE と △ACB において

∠DAE＝∠CAB (共通)

∠ADE＝∠ACB＝60°

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ADE∽△ACB

(3)　△ABD と △CBA において

CB＝9＋3＝12　であるから

AB : CB＝BD : BA＝1 : 2

また　　　　∠ABD＝∠CBA (共通)

よって，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABD∽△CBA

$\boxed{5}$★★

(1)　△ABC と △AED において

∠ABC＝∠AED

∠BAC＝∠EAD (共通)

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△AED

相似な三角形の対応する辺の長さの比は等しいから

AB : AE＝AC : AD

$(6+x)$: 9＝12 : 6

これを解いて　　　$x=12$

(2)　△ABD と △ACB において

AB : AC＝AD : AB＝3 : 4　……①

∠BAD＝∠CAB (共通)

よって，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABD∽△ACB

① より，相似比は 3 : 4 であるから

BD : CB＝3 : 4

x : 18＝3 : 4

これを解いて　　　$x=\frac{27}{2}$

$\boxed{6}$★

△ABC と △EDC において

仮定より　∠BCA＝∠DCE　……①

また，BA＝BE より　　∠BAC＝∠BEA

対頂角は等しいから　　∠BEA＝∠DEC

よって　　∠BAC＝∠DEC　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから　　△ABC∽△EDC

$\boxed{7}$★★★

△ABC と △AED において

∠ACB＝∠ADE (仮定)

∠CAB＝∠DAE (共通)

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△AED

したがって，AB : AE＝AC : AD であるから

AD : AE＝AC : AB　　……①

△ADC と △AEB において

∠CAD＝∠BAE (共通)　……②

①，② より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ADC∽△AEB

$\boxed{8}$★★

(1)　△BFD と △CEF において

△ABC は正三角形であるから

∠DBF＝∠FCE＝60°　……①

△BFD において，内角と外角の関係から

∠BDF＋∠DBF＝∠DFC

よって　∠BDF＋∠DBF＝∠CFE＋∠DFE

∠DBF＝∠DFE＝60° であるから

∠BDF＝∠CFE　　　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△BFD∽△CEF

(2)　△FED をもどすと △AED と重なるから

AD＝FD＝14 cm

よって　　　AB＝14＋16＝30 (cm)

△ABC は正三角形であるから

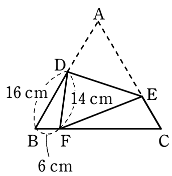
AC＝BC＝AB＝30 cm

△BFD∽△CEF より　BD : CF＝BF : CE

16 : (30−6)＝6 : CE

よって　　　　CE＝9 cm

したがって　　　AE＝30−9＝21 (cm)



$\boxed{9}$★

(1)　AB : BD＝AC : CE

9 : x＝12 : 8

$12x=72$

よって　　$x=6$

また　AC : AE＝BC : DE

12 : 20＝6 : y

$12y=120$

よって　　　$y=10$

(2)　AD : AB＝DE : BC

16 : 20＝24 : x

$16x=480$

よって　　$x=30$

また　AD : AB＝AE : AC

16 : 20＝y : 15

$20y=240$

よって　　　$y=12$

$\boxed{10}$★

(1)　$\ell \parallel m \parallel n$ より

$5 : x = 4 : 8$

よって　$x = 10$

(2)　$\ell \parallel m \parallel n$ より

$4 : (9-4) = x : 4$

よって　$x = \dfrac{16}{5}$

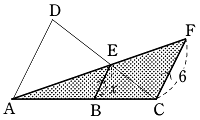
(3)　$\ell \parallel m \parallel n$ より

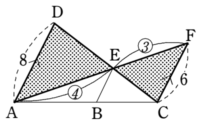
$20 : 16 = (x-20) : 20$

$20 \times 20 = 16 \times (x-20)$

よって　$x = 45$

$\boxed{11}$★★





BE$\parallel$CF であるから

$\mathrm{BE} : \mathrm{CF} = \mathrm{AE} : \mathrm{AF}$

よって　$x : 6 = \mathrm{AE} : \mathrm{AF}$　…… ①

AD$\parallel$CF であるから

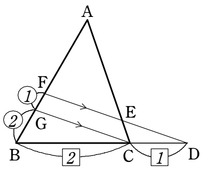
$\mathrm{AE} : \mathrm{EF} = \mathrm{AD} : \mathrm{FC}$

よって　$\mathrm{AE} : \mathrm{EF} = 8 : 6 = 4 : 3$　…… ②

①，② から　$x : 6 = 4 : (4+3)$

これを解くと　$x = \dfrac{24}{7}$　答

$\boxed{12}$★★



C を通り DF に平行に引いた直線と AB との交点を G とする。

CG$\parallel$DF であるから　$\mathrm{BG} : \mathrm{GF} = \mathrm{BC} : \mathrm{CD} = 2 : 1$

よって　$\mathrm{GF} = \dfrac{1}{3}\mathrm{BF} = \dfrac{2}{3}$ (cm)

FE$\parallel$GC であるから

$\mathrm{AE} : \mathrm{EC} = \mathrm{AF} : \mathrm{FG} = 3 : \dfrac{2}{3} = 9 : 2$　答

参考　メネラウスの定理を利用すると，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \times \dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = 1$ が成り立つことから

$$\frac{6}{2} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \times \frac{3}{2} = 1$$

よって，$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = \dfrac{2}{9}$ から　$\mathrm{AE} : \mathrm{EC} = 9 : 2$

$\boxed{13}$★

(1)　$\mathrm{BF} = 6 - 4 = 2$ (cm)

AB$\parallel$EF，AE$\parallel$BF であるから，四角形 ABFE は平行四辺形である。

よって　$\mathrm{AE} = \mathrm{BF} = 2$ cm

AE$\parallel$FC であるから　$\mathrm{AG} : \mathrm{GC} = \mathrm{AE} : \mathrm{FC}$

したがって　$\mathrm{AG} : \mathrm{GC} = 2 : 4 = 1 : 2$

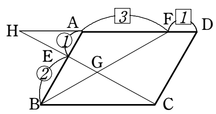
(2)　$\mathrm{EF} = \mathrm{AB} = 4$ cm

AE$\parallel$FC であるから　$\mathrm{EG} : \mathrm{GF} = \mathrm{AE} : \mathrm{FC}$

よって　$\mathrm{EG} : \mathrm{GF} = 1 : 2$

したがって，$\mathrm{EG} = \dfrac{1}{1+2}\mathrm{EF} = \dfrac{1}{3}\mathrm{EF}$ であるから　$\mathrm{EG} = \dfrac{1}{3} \times 4 = \dfrac{4}{3}$ (cm)

$\boxed{14}$★★



辺 DA の延長と線分 CE の延長の交点を H とする。

HF$\parallel$BC であるから　$\mathrm{FG} : \mathrm{GB} = \mathrm{HF} : \mathrm{BC}$

HA$\parallel$BC であるから　$\mathrm{HA} : \mathrm{BC} = \mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 1 : 2$

ここで，辺 BC の長さを a とすると　$\mathrm{HA} = \dfrac{1}{2}a$

また，AD＝BC であるから　$\mathrm{AF} = \dfrac{3}{4}a$

よって　$\mathrm{HF} = \mathrm{HA} + \mathrm{AF} = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{3}{4}a = \dfrac{5}{4}a$

したがって　$\mathrm{FG} : \mathrm{GB} = \mathrm{HF} : \mathrm{BC} = \dfrac{5}{4}a : a = 5 : 4$　答

$\boxed{15}$★

(1)　△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$

$5 : x = 10 : 8$

$x \times 10 = 5 \times 8$

よって　$x = 4$

(2)　△ABC において，AD は ∠A の外角の二等分線であるから

$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$

$(5+x) : x = 8 : 6$

$(5+x) \times 6 = x \times 8$

よって　$x = 15$

$\boxed{16}$★

(1)　△CBD において，点 E，F は，それぞれ辺 CD，CB の中点であるから，中点連結定理により

EF$\parallel$BD　…… ①

$\mathrm{EF} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BD}$

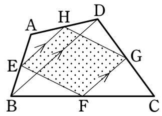
よって　$\mathrm{BD} = 2\mathrm{EF} = 16$ (cm)

(2)　△AEF において，① より DG$\parallel$EF であるから

$\mathrm{DG} : \mathrm{EF} = \mathrm{AD} : \mathrm{AE} = 1 : 2$

よって　$\mathrm{DG} = \dfrac{1}{2}\mathrm{EF} = 4$ (cm)

$\boxed{17}$★★



B と D を結ぶ。

△ABD において，中点連結定理により

EH$\parallel$BD，$\mathrm{EH} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BD}$

△CDB において，中点連結定理により

FG$\parallel$BD，$\mathrm{FG} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BD}$

したがって　EH$\parallel$FG，　EH＝FG

よって，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 EFGH は平行四辺形である。　終

$\boxed{18}$★★

△ADF∽△ABC であり，相似比は　$\mathrm{AF} : \mathrm{AC} = 6 : (6+8) = 3 : 7$

よって　$\triangle\mathrm{ADF} : \triangle\mathrm{ABC} = 3^2 : 7^2 = 9 : 49$

したがって　$\triangle\mathrm{ADF} = \dfrac{9}{49}\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{9}{49} \times 98 = 18$ (cm^2)

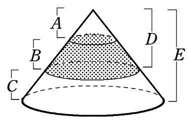
また，△FEC∽△ABC であり，相似比は　$\mathrm{FC} : \mathrm{AC} = 8 : (6+8) = 4 : 7$

よって　$\triangle\mathrm{FEC} : \triangle\mathrm{ABC} = 4^2 : 7^2 = 16 : 49$

したがって　$\triangle\mathrm{FEC} = \dfrac{16}{49}\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{16}{49} \times 98 = 32$ (cm^2)

よって　(四角形 BEFD)$= \triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{ADF} - \triangle\mathrm{FEC} = 98 - 18 - 32 = 48$ (cm^2)

$\boxed{19}$★★



3 等分された立体を，上から順に A，B，C とする。

また，A と B を合わせた円錐を D，もとの円錐を E とする。

$A \backsim D$ で，相似比は 1 : 2 であるから

(A の体積) : (D の体積)$= 1^3 : 2^3 = 1 : 8$　…… ①

$A \backsim E$ で，相似比は 1 : 3 であるから

(A の体積) : (E の体積)$= 1^3 : 3^3 = 1 : 27$

E の体積が 54π cm^3 であるから

(A の体積)$= \dfrac{1}{27} \times$(E の体積)$= \dfrac{1}{27} \times 54\pi = 2\pi$ (cm^3)

よって，① から

(D の体積)$= 8 \times$(A の体積)$= 8 \times 2\pi = 16\pi$ (cm^3)

したがって　(B の体積)＝(D の体積)－(A の体積)

$= 16\pi - 2\pi = 14\pi$ (cm^3)

第６章　相似
例題演習

1

(1)　四角形 ABCD∽四角形 ILKJ

(2)　(ア)　辺 BC と対応する辺は　辺 LK

　(イ)　辺 IJ と対応する辺は　辺 AD

　(ウ)　∠C と対応する角は　∠K

　(エ)　∠I と対応する角は　∠A

2

(1)　２つの四角形の対応する辺の長さの比は，$BC:FG=10:5=2:1$ であるから，
相似比は　$2:1$

(2)　(1) より，相似比は $2:1$ であるから　　$CD:GH=2:1$
$GH=x$ cm とすると　$8:x=2:1$　　　これを解くと　$x=4$
よって　　$GH=4$ cm

(3)　相似な図形では，対応する角の大きさは等しいから　∠H＝∠D
ここで，四角形 ABCD において

$$\angle D=360^\circ-(104^\circ+90^\circ+107^\circ)=59^\circ$$

よって　　$\angle H=59^\circ$

3

[1]　△ABC と △XWV において

$AB:XW=2:3$,　　$CA:VX=3:4.5=2:3$,　　$\angle A=\angle X=70^\circ$

２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから　　△ABC∽△XWV

[2]　△DEF と △TSU において

$DE:TS=4:6=2:3$,　　$EF:SU=6:9=2:3$,　　$FD:UT=8:12=2:3$

３組の辺の比がすべて等しいから　　△DEF∽△TSU

[3]　△GHI において　　$\angle G=180^\circ-(78^\circ+50^\circ)=52^\circ$
△GHI と △PQR において

$\angle G=\angle P=52^\circ$,　　$\angle I=\angle R=50^\circ$

２組の角がそれぞれ等しいから　　△GHI∽△PQR

(△JKL と △MNO は，どの三角形とも相似でない)

4

(1)　△ABE と △DCE において

$AE:DE=BE:CE=3:1$,
∠AEB＝∠DEC (対頂角)

２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから　△ABE∽△DCE

(2)　△ABC と △ADB において $AC=4+5=9$ (cm) であるから

$AB:AD=AC:AB=3:2$

また　∠BAC＝∠DAB (共通)
２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから　△ABC∽△ADB

(3)　△ABC と △AED において

∠BAC＝∠EAD (共通)
$\angle ABC=\angle AED=40^\circ$

２組の角がそれぞれ等しいから　△ABC∽△AED

5

(1)　△AEC と △BED において

$AE:BE=6:12=1:2$
$CE:DE=4:8=1:2$
∠AEC＝∠BED

よって，２組の辺の比が等しく，その間の角が等しいから

△AEC∽△BED

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$AC:BD=1:2$
$5:x=1:2$
$x\times1=5\times2$

よって　　$x=10$

(2)　△ADE と △ABC において

∠ADE＝∠ABC
∠DAE＝∠BAC　(共通)

よって，２組の角がそれぞれ等しいから

△ADE∽△ABC

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$DE:BC=AE:AC$
$6:x=8:(8+4)$
$6:x=2:3$
$x\times2=6\times3$

よって　　$x=9$

(3)　△ABC と △AED において

∠ABC＝∠AED
∠BAC＝∠EAD　(共通)

よって，２組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△AED

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$AB:AE=AC:AD$
$(4+x):6=8:4$
$(4+x)\times4=6\times8$
$4+x=6\times2$

よって　　$x=8$

(4)　△ABC と △DAC において

$AC:DC=24:16=3:2$
$BC:AC=36:24=3:2$
∠ACB＝∠DCA　(共通)

よって，２組の辺の比が等しく，その間の角が等しいから

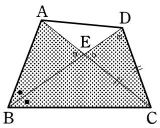
△ABC∽△DAC

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$AB:DA=3:2$
$21:x=3:2$
$3x=21\times2$

よって　　$x=14$

6



△ABE と △CBD において
仮定より　　∠ABE＝∠CBD　…… ①
また，CD＝CE であるから，二等辺三角形 CDE の底角
について　　∠CED＝∠CDB　…… ②
対頂角は等しいから

∠AEB＝∠CED　…… ③

②，③ より　　∠AEB＝∠CDB　…… ④
①，④ より，２組の角がそれぞれ等しいから　　△ABE∽△CBD　終

7

証明　△AEB と △ADC において

∠AEB＝∠ADC,　　∠EAB＝∠DAC　(共通)

２組の角がそれぞれ等しいから　　△AEB∽△ADC　……①
△ABC と △AED において
① から　　$AB:AC=AE:AD$
よって　　$AB:AE=AC:AD$
また　　∠CAB＝∠DAE　(共通)
したがって，２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△AED　終

8

(1)　△ACQ と △QBP において

$\angle ACQ=\angle QBP=60^\circ$　　……①

△ACQ において，内角と外角の関係から

∠CAQ＋∠ACQ＝∠BQA
$\angle CAQ+60^\circ=\angle BQP+60^\circ$

よって　　∠CAQ＝∠BQP　……②
①，② より，２組の角がそれぞれ等しいから　　△ACQ∽△QBP

(2)　$BQ=4$ cm であるから　　$CQ=10-4=6$ (cm)
△ACQ∽△QBP から　　$CQ:BP=CA:BQ$

$6:BP=10:4$　　　よって　$BP=2.4$ cm

9

(1) DE∥BC より

$AD : DB = AE : EC$

$6 : 3 = 4 : x$

$6 \times x = 3 \times 4$

よって　$x = 2$

また　$AD : AB = DE : BC$

$6 : 9 = y : 8$

$9 \times y = 6 \times 8$

よって　$y = \dfrac{16}{3}$

(2) DE∥BC より

$AB : AD = BC : DE$

$x : (x+6) = 12 : 18$

$x \times 18 = (x+6) \times 12$

よって　$x = 12$

また　$AB : BD = AC : CE$

$12 : 6 = 9 : y$

$12 \times y = 6 \times 9$

よって　$y = \dfrac{9}{2}$

(3) DE∥BC より

$AE : AC = DE : BC$

$8 : (x-8) = 16 : 20$

$16 \times (x-8) = 8 \times 20$

よって　$x = 18$

10

(1) $\ell \parallel m \parallel n$ より

$3 : 9 = 4 : x$

$3 \times x = 9 \times 4$

よって　$x = 12$

(2) $\ell \parallel m \parallel n$ より

$x : (24-x) = 6 : 9$

$x : (24-x) = 2 : 3$

$x \times 3 = (24-x) \times 2$

よって　$x = \dfrac{48}{5}$

(3) $\ell \parallel m \parallel n$ より

$4 : (x-4) = 3 : 5$

$(x-4) \times 3 = 4 \times 5$

よって　$x = \dfrac{32}{3}$

11

(1) AB∥CD より　$BE : EC = AB : CD$

よって　$BE : EC = 4 : 8 = 1 : 2$

さらに，EF∥CD より　$BF : FD = BE : EC$

$4 : x = 1 : 2$

$4 \times 2 = x \times 1$

したがって　$x = 8$

また，EF∥CD より　$EF : CD = BE : BC$

$y : 8 = 1 : (1+2)$

$y \times 3 = 8 \times 1$

したがって　$y = \dfrac{8}{3}$

(2) 直線 CE と線分 BF の交点を G とする。

EF∥CD より　$GF : GD = EF : CD$

$x : (x+12) = 4 : 16$

$x : (x+12) = 1 : 4$

$x \times 4 = (x+12) \times 1$

したがって　$x = 4$

また，EF∥AB より　$DF : DB = EF : AB$

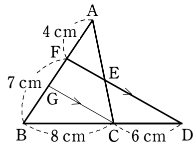
$12 : (12+4+y) = 4 : 7$

$12 \times 7 = (16+y) \times 4$

したがって　$y = 5$

12

(1) C を通り DF に平行に引いた直線と AB との交点を G とする。

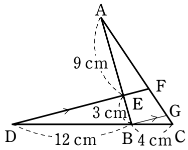


CG∥DF であるから　$BG : GF = BC : CD = 4 : 3$

よって　$GF = \dfrac{3}{7}BF = 3\,(\mathrm{cm})$

FE∥GC であるから　$AE : EC = AF : FG = 4 : 3$

(2) B を通り DF に平行に引いた直線と AC との交点を G とする。



BG∥DF であるから　$CG : GF = CB : BD = 1 : 3$

よって　$CG = \dfrac{1}{3}FG$

したがって　$FC = FG + \dfrac{1}{3}FG = \dfrac{4}{3}FG$

EF∥BG であるから　$AF : FG = AE : EB = 3 : 1$

よって　$AF = 3FG$

したがって　$AF : FC = 3FG : \dfrac{4}{3}FG = 9 : 4$

13

(1) EB∥DC であるから

$BF : FD = EB : DC$　　よって　$BF : FD = 2 : (3+2) = 2 : 5$

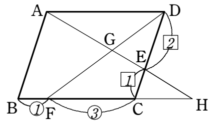
(2) EB∥DC であるから

$EF : FC = EB : DC$　　よって　$EF : FC = 2 : 5$

したがって，$EF = \dfrac{2}{2+5}EC = \dfrac{2}{7}EC$ であるから　$EF = \dfrac{2}{7} \times 14 = 4\,(\mathrm{cm})$

14

線分 AE，BC を延長して，その交点を H とする。



AD∥CH であるから

$AD : HC = DE : CE$

よって　$AD : HC = 2 : 1$

したがって　$HC = \dfrac{1}{2}AD$　……①

仮定から　$BF : FC = 1 : 3$

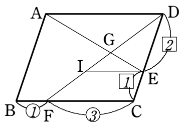
よって　$FC = \dfrac{3}{4}BC = \dfrac{3}{4}AD$　……②

①，② から　$FH = FC + CH = \dfrac{3}{4}AD + \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{5}{4}AD$

AD∥FH であるから

$DG : GF = AD : FH = AD : \dfrac{5}{4}AD = 4 : 5$

別解　点 E を通り，AD，BC に平行な線分を引き，線分 DF との交点を I とする。



IE∥FC であるから

$DI : IF = DE : EC = 2 : 1$

すなわち　$DI = \dfrac{2}{3}DF$　……③

$IE : FC = DE : DC = 2 : (2+1) = 2 : 3$

すなわち　$IE = \dfrac{2}{3}FC$

$FC = \dfrac{3}{4}BC = \dfrac{3}{4}AD$ であるから　$IE = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4}AD = \dfrac{1}{2}AD$

AD∥IE であるから

$DG : GI = AD : IE = AD : \dfrac{1}{2}AD = 2 : 1$

すなわち　$DG = \dfrac{2}{3}DI$

これと ③ から　$DG = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3}DF = \dfrac{4}{9}DF$

よって　$GF = DF - DG = DF - \dfrac{4}{9}DF = \dfrac{5}{9}DF$

したがって　$DG : GF = \dfrac{4}{9}DF : \dfrac{5}{9}DF = 4 : 5$

レベルA

$\boxed{15}$

(1)　△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$
$$5 : x = 10 : 8$$
$$5 \times 8 = x \times 10$$

よって　　$x = 4$

(2)　△ABC において，AD は ∠A の外角の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$
$$(3 + x) : x = 5 : 3$$
$$(3 + x) \times 3 = x \times 5$$

よって　　$x = \dfrac{9}{2}$

(3)　AB∥ED より　CD : CB = ED : AB

よって，CD : CB = 6 : 18 = 1 : 3 であるから　BD : DC = (3 − 1) : 1 = 2 : 1

△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$
$$2 : 1 = 18 : x$$
$$2 \times x = 1 \times 18$$

したがって　　$x = 9$

$\boxed{16}$

(1)　△ABE において，中点連結定理により

$$MD /\!/ AE \quad \cdots\cdots ①, \quad MD = \frac{1}{2}AE \quad \cdots\cdots ②$$

② より　　AE = 2MD = 8 (cm)

(2)　① より，MD∥FE であるから　FE : MD = CE : CD

$$FE : 4 = 1 : 2$$

よって　　FE = 2　　　したがって　　AF = 8 − 2 = 6 (cm)

$\boxed{17}$

△ABC において，中点連結定理により　　MP∥BC，$MP = \dfrac{1}{2}BC$

△DBC において，中点連結定理により　　QN∥BC，$QN = \dfrac{1}{2}BC$

したがって　　MP∥QN，MP = QN

よって，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 MPNQ は平行四辺形である。

$\boxed{18}$

四角形 ARPQ は平行四辺形であるから　　AB∥QP，AC∥RP

よって　　△ABC ∽ △RBP ∽ △QPC

また，BP : PC = 3 : 2 であるから，相似比は　BC : BP : PC = (3 + 2) : 3 : 2 = 5 : 3 : 2

したがって，面積比は　△ABC : △RBP : △QPC = $5^2 : 3^2 : 2^2$ = 25 : 9 : 4

よって　　$\triangle RBP = \dfrac{9}{25}\triangle ABC$，　$\triangle QPC = \dfrac{4}{25}\triangle ABC$

したがって，▱ARPQ の面積を S とおくと

$$S = \triangle ABC - \frac{9}{25}\triangle ABC - \frac{4}{25}\triangle ABC = \frac{12}{25}\triangle ABC$$

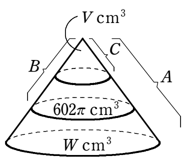
よって，▱ARPQ の面積は，△ABC の面積の $\dfrac{12}{25}$ 倍である。

$\boxed{19}$

もとの円錐を A，A から一番下の立体を取り除いた円錐を B，一番上の円錐を C とする。

A と B と C は相似で，その相似比は　　3 : 2 : 1

したがって，体積比は　　$3^3 : 2^3 : 1^3 = 27 : 8 : 1$



(1)　一番上の円錐の体積を V cm^3 とすると

$$602\pi : V = (8 - 1) : 1 = 7 : 1$$

よって　　$V = 602\pi \times \dfrac{1}{7} = 86\pi$ (cm^3)

(2)　一番下の立体の体積を W cm^3 とする。

(1) の結果から　$W : 86\pi = (27 - 8) : 1 = 19 : 1$

よって　　$W = 86\pi \times 19 = 1634\pi$ (cm^3)

$\boxed{1}$

△ABC と △ADE において

△ABD∽△ACE から

$$AB : AC = AD : AE$$

よって　　AB : AD = AC : AE　……①

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$$
$$\angle DAE = \angle DAC + \angle CAE$$

∠BAD = ∠CAE であるから

$$\angle BAC = \angle DAE \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$$

$\boxed{2}$

[1]　BD : DA = 6 : (3 + 9) = 1 : 2，BF : FC = 2 : (1 + 6) = 2 : 7

よって，DF と AC は平行でない。

[2]　BD : DA = 1 : 2，BG : GC = (2 + 1) : 6 = 1 : 2

よって，DG と AC は平行である。

[3]　BE : EA = (6 + 3) : 9 = 1 : 1，BF : FC = 2 : 7

よって，EF と AC は平行でない。

[4]　BE : EA = 1 : 1，BG : GC = 1 : 2

よって，EG と AC は平行でない。

以上から，辺 AC に平行な線分は　DG

$\boxed{3}$

EQ∥AD より　EQ : AD = BE : BA

$$2 : x = 3 : (3 + 4)$$

よって　　$x = \dfrac{14}{3}$

ER∥BC より　ER : BC = AE : AB

$$(2 + y) : 14 = 4 : (4 + 3)$$

よって　　$y = 6$

RF∥AD，AD∥EF∥BC より

$$RF : AD = CF : CD = BE : BA$$
$$z : \frac{14}{3} = 3 : (3 + 4)$$

よって　　$z = 2$

$\boxed{4}$

(1)　BE∥CF であるから　　BE : CF = AE : AF

よって　　x : 2 = AE : AF　……①

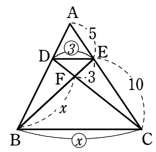
AD∥CF であるから　　AE : EF = AD : FC

よって　　AE : EF = 4 : 2 = 2 : 1　……②

①，② から　　$x : 2 = 2 : (2 + 1)$

これを解くと　$x = \dfrac{4}{3}$

(2)　DE∥BC であるから



$$EF : BF = DE : BC$$

よって　　3 : x = DE : BC　……①

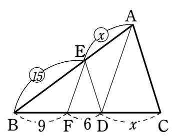
DE∥BC であるから

$$DE : BC = AE : AC$$
$$= 5 : (5 + 10) = 1 : 3 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　　$3 : x = 1 : 3$

これを解くと　$x = 9$

(3)　AC∥ED であるから



$$BD : DC = BE : EA$$

よって　　(9 + 6) : x = BE : EA　……①

AD∥EF であるから

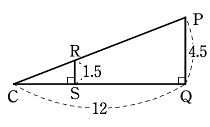
$$BE : EA = BF : FD$$

よって　　BE : EA = 9 : 6 = 3 : 2　……②

①，② から　　$15 : x = 3 : 2$

これを解くと　$x = 10$

$\boxed{5}$



歩き始めてから x 秒後に A 君の影の先端がちょうど C に到達するとする。

このとき，A 君を線分 RS とみると，

△CRS∽△CPQ であるから

$$CS : CQ = RS : PQ$$

よって　　$(12 - x) : 12 = 1.5 : 4.5$

これを解いて　　$x = 8$　　　したがって　8 秒後

6

DF∥AC より，BF : FC＝BD : DA＝3 : 2 であるから　$BF=\frac{3}{3+2}BC=\frac{3}{5}BC$

EG∥AB より，CG : GB＝CE : EA＝4 : 3 であるから　$CG=\frac{4}{4+3}BC=\frac{4}{7}BC$

よって　$GF=\frac{3}{5}BC+\frac{4}{7}BC-BC=\frac{6}{35}BC$

したがって　$BC : GF=BC : \frac{6}{35}BC=35 : 6$

7

(1)　AD∥BG であるから　AD : BG＝AE : BE＝2 : 1　　よって　AD＝2BG
BC＝AD であるから　CG＝2BG＋BG＝3BG
また，$DF=\frac{1}{2}AD$ であるから　DF＝BG
したがって　DF : CG＝BG : 3BG＝1 : 3
DF∥CG であるから　FH : HC＝DF : CG＝1 : 3

(2)　DH : GH＝DF : CG＝1 : 3 であるから　$DH=\frac{1}{1+3}DG=\frac{1}{4}DG$
また，DE : GE＝AE : BE＝2 : 1 であるから　$DE=\frac{2}{2+1}DG=\frac{2}{3}DG$
よって　$HE=\frac{2}{3}DG-\frac{1}{4}DG=\frac{5}{12}DG$
したがって　$DH : HE=\frac{1}{4}DG : \frac{5}{12}DG=3 : 5$

8

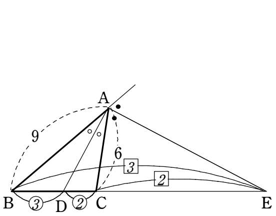
(1)　AG : GD＝3 : 2 であるから
$AG=\frac{3}{3+2}AD=\frac{3}{5}BC$
よって　$AG=\frac{3}{5}\times 7=\frac{21}{5}$
EH∥AG であるから
EH : AG＝BE : BA
$EH : \frac{21}{5}=3 : (3+4)$
$EH\times 7=\frac{21}{5}\times 3$
よって　$EH=\frac{9}{5}$

(2)　EF∥BC より
EF : BC＝AE : AB
EF : 7＝4 : (4＋3)
EF×7＝7×4
よって　EF＝4
したがって　$HF=EF-EH=4-\frac{9}{5}=\frac{11}{5}$

9

(1)　AD は ∠BAC の二等分線であるから
BD : DC＝AB : AC
よって　BD : DC＝9 : 6＝3 : 2
したがって　$BD=\frac{3}{5}BC=\frac{3}{5}\times 8=\frac{24}{5}$
BI は ∠ABD の二等分線であるから
AI : ID＝BA : BD
よって　$AI : ID=9 : \frac{24}{5}=15 : 8$

(2)　AD は ∠BAC の二等分線であるから
BD : DC＝AB : AC
よって
BD : DC＝9 : 6＝3 : 2
したがって
$BD=\frac{3}{5}BC,\ DC=\frac{2}{5}BC$　……①



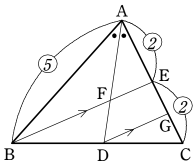
AE は ∠BAC の外角の二等分線であるから
BE : EC＝AB : AC
よって　BE : EC＝3 : 2
すなわち　BC : CE＝(3－2) : 2＝1 : 2
したがって　CE＝2BC　……②
①，② から　$DE=DC+CE=\frac{2}{5}BC+2BC=\frac{12}{5}BC$
よって　$BD : DE=\frac{3}{5}BC : \frac{12}{5}BC=1 : 4$

10

△ABM において，MD は ∠AMB の二等分線であるから
AD : DB＝MA : MB
△ACM において，ME は ∠AMC の二等分線であるから
AE : EC＝MA : MC
MB＝MC であるから　AD : DB＝AE : EC
よって，DE∥BC である。

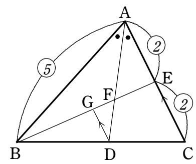
11

AE＝$2a$ とすると，仮定から
EC＝$2a$，AB＝$5a$
△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから
BD : DC＝AB : AC＝$5a$: $(2a+2a)$＝5 : 4
D を通り BE に平行に引いた直線と AC との交点を G とする。



DG∥BE であるから　EG : GC＝BD : DC＝5 : 4
よって　$EG=\frac{5}{5+4}EC=\frac{5}{9}EC=\frac{10}{9}a$
FE∥DG であるから　$AF : FD=AE : EG=2a : \frac{10}{9}a=9 : 5$

別解　上の解答と同様に AE＝$2a$ とすると
EC＝$2a$，AB＝$5a$
BD : DC＝5 : 4
D を通り AC に平行に引いた直線と BE との交点を G とする。



EC∥GD であるから
EC : GD＝BC : BD＝(5＋4) : 5＝9 : 5
AE∥GD，AE＝EC であるから
AF : FD＝AE : GD＝EC : GD＝9 : 5

12

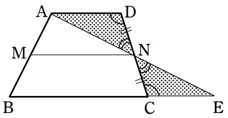
△ABC において，中点連結定理により　ED∥AB
平行線の同位角は等しいから　∠CED＝∠CAB＝80°
△EDC において　∠EDC＝180°－(26°＋80°)＝74°
よって，△FBD において，内角と外角の関係から　$\angle x=74°-42°=32°$

13

△ABC，△BCD，△CDE，△DEA，△EAB において，中点連結定理により
$PQ=\frac{1}{2}AC,\ QR=\frac{1}{2}BD,\ RS=\frac{1}{2}CE,\ ST=\frac{1}{2}DA,\ TP=\frac{1}{2}EB$
よって　$PQ+QR+RS+ST+TP=\frac{1}{2}(AC+BD+CE+DA+EB)$
$=\frac{1}{2}\times 30=15$ (cm)
したがって，五角形 PQRST の周の長さは 15 cm である。

14

(1) 証明　直線 AN と BC の交点を E とする。



△ADN と △ECN において

DN＝CN　(仮定)

∠AND＝∠ENC　(対頂角)

AD∥BE から

∠ADN＝∠ECN　(錯角)

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから　△ADN≡△ECN

したがって　AN＝EN　……①,　AD＝EC　……②

△ABE において，① から，M，N はそれぞれ辺 AB，AE の中点である。

よって，中点連結定理により　MN∥BE　……③,　$MN=\frac{1}{2}BE$　……④

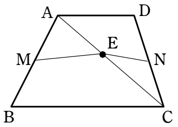
③ から　MN∥BC

②，④ から　$MN=\frac{1}{2}(BC+EC)=\frac{1}{2}(AD+BC)$　終

(2) (1) から　$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}(4+8)=6$ (cm)　答

(1) の 別証

証明　対角線 AC の中点を E とする。



△ABC において，M，E はそれぞれ辺 AB，AC の中点であるから，中点連結定理により

ME∥BC　……①

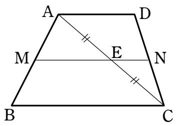
$ME=\frac{1}{2}BC$　……②

△CDA において，N，E はそれぞれ辺 CD，CA の中点であるから，中点連結定理により

EN∥AD　……③,　$EN=\frac{1}{2}AD$　……④

BC∥AD であるから，①，③ より　ME∥EN

すなわち，3 点 M，E，N は一直線上にあり，点 E は線分 MN 上にある。



よって，① から　MN∥BC

また　MN＝ME＋EN

②，④ から　$MN=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AD$

$=\frac{1}{2}(AD+BC)$　終

15

M と N を結ぶ。

四角形 ABNM において，AM∥BN，AM＝BN であるから，四角形 ABNM は平行四辺形である。

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから　MP＝PB

同様に，四角形 MNCD は平行四辺形であるから　MQ＝QC

よって，△MBC において，中点連結定理により　PQ∥BC

16

△ABC，△ACD において，中点連結定理により

EF∥AC，$EF=\frac{1}{2}AC$　HG∥AC，$HG=\frac{1}{2}AC$

よって　EF∥HG，$EF=HG=\frac{1}{2}AC$　……①

また，△ABD，△BCD において，中点連結定理により

EH∥BD，$EH=\frac{1}{2}BD$　FG∥BD，$FG=\frac{1}{2}BD$

よって　EH∥FG，$EH=FG=\frac{1}{2}BD$　……②

(1) AC＝BD のとき，①，② より　EF＝HG＝EH＝FG

したがって，四角形 EFGH の 4 辺はすべて等しいから，ひし形である。

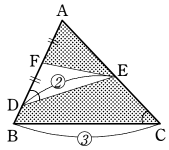
(2) 線分 BD と線分 AC の交点を I，線分 BD と線分 EF の交点を J，線分 AC と線分 EH の交点を K とする。

四角形 EJIK は平行四辺形であるから，∠AIB＝90° のとき ∠HEF＝90° である。

同様に，∠EFG＝∠FGH＝∠GHE＝90° であるから，四角形 EFGH は長方形である。

17

△ABC の面積を S とする。



△ABC∽△AED であり，相似比は

BC : ED＝3 : 2

よって，面積比は

△ABC : △AED＝$3^2 : 2^2$＝9 : 4

したがって　$\triangle AED=\frac{4}{9}S$

よって　(四角形 DBCE の面積)＝△ABC－△AED

$=S-\frac{4}{9}S=\frac{5}{9}S$

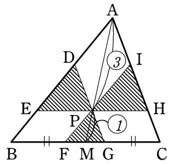
また　△AFE : △AED＝AF : AD＝1 : (1＋1)＝1 : 2

ゆえに　$\triangle AFE=\frac{1}{2}\triangle AED=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}S=\frac{2}{9}S$

したがって　$\frac{2}{9}S\div\frac{5}{9}S=\frac{2}{9}\times\frac{9}{5}=\frac{2}{5}$　答　$\frac{2}{5}$ 倍

18

AB∥IF，BC∥EH，CA∥GD であるから，△DEP，△PFG，△IPH は，△ABC と相似である。



[1] △PFG と △ABC の相似比は

PF : AB＝PM : AM＝1 : (3＋1)＝1 : 4

よって，面積比は

△PFG : △ABC＝$1^2 : 4^2$＝1 : 16

したがって　$\triangle PFG=\frac{1}{16}\triangle ABC=\frac{1}{16}\times320=20$ (cm²)

[2] △DEP と △ABC の相似比は　EP : BC＝EP : 2BM

ここで，EP : BM＝3 : (3＋1)＝3 : 4 であるから　EP : BC＝3 : (2×4)＝3 : 8

よって，面積比は　△DEP : △ABC＝$3^2 : 8^2$＝9 : 64

したがって　$\triangle DEP=\frac{9}{64}\triangle ABC=\frac{9}{64}\times320=45$ (cm^2)

[3] [2] と同様にして，△IPH と △ABC の面積比が 9 : 64 と求められる。

したがって　$\triangle IPH=\frac{9}{64}\triangle ABC=\frac{9}{64}\times320=45$ (cm^2)

[1]～[3] から，求める面積の和は　20＋45＋45＝110 (cm^2)

19 [常総学院]

(1) BG : GD＝CH : HD より　GH∥BC

よって　GH : BC＝DG : DB

GH : 6＝2 : 3

したがって　GH＝4 cm

(2) △DGH∽△DBC であり，相似比は

DG : DB＝2 : 3

よって，面積の比は　$2^2 : 3^2$＝4 : 9

したがって，△DBC と四角形 GHCB の面積の比は

9 : (9－4)＝9 : 5

三角錐 D－ABC の体積を V，立体 ABCHG の体積を W とすると

$V : W=9 : 5$

$W=\frac{5}{9}V$

$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times5=30$ (cm^3) であるから，求める立体の体積は

$\frac{5}{9}\times30=\frac{50}{3}$ (cm^3)

20 [福島県]

高さが 8 cm の円錐を X，切ったときの上側の円錐を Y とする。

円錐 X の体積は　$\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times8=96\pi$ (cm^3)

X と Y は相似で，その相似比は

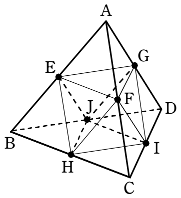
2 : 1

よって，体積の比は　$2^3 : 1^3=8 : 1$

したがって，求める立体の体積は

$96\pi\times\frac{8-1}{8}=84\pi$ (cm^3)

21

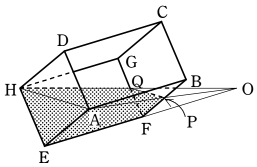


点 E，F，G は，それぞれ辺 AB，AC，AD の中点であるから，面 EFG と面 BCD は平行である。
よって，正四面体 ABCD と立体 AEFG は相似で，その相似比は　$2:1$
したがって，体積比は　$2^3:1^3=8:1$
よって，立体 AEFG の体積は　$\frac{1}{8}V$
同様にして，立体 BHJE，CIHF，DJIG の体積もそれぞれ $\frac{1}{8}V$ であることがわかる。
したがって　$V:V'=V:\left(V-\frac{1}{8}V\times4\right)=V:\frac{1}{2}V=2:1$

22

三角錐 P－QDR と三角錐 A－CDE は相似で，その相似比は　$2:(2+1)=2:3$
したがって，体積比は　$2^3:3^3=8:27$
立体 A－BCDE は正四角錐であるから，三角錐 A－CDE と A－CBE は合同である。
よって，三角錐 P－QDR と正四角錐 A－BCDE の体積比は　$8:(2\times27)=4:27$
したがって　$V:V'=4:(27-4)=4:23$

23



図のように，AP，EF，HQ の交点を O とする。
PF∥AE であるから
$\mathrm{OF}:\mathrm{OE}=\mathrm{PF}:\mathrm{AE}=1:2$
$\mathrm{OF}:(\mathrm{OF}+12)=1:2$
よって　$\mathrm{OF}=12$
このとき，三角錐 O－AEH の体積は
$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times8\times8\right)\times(12+12)=256\,(\mathrm{cm}^3)$
三角錐 O－PFQ の体積は
$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\times4\right)\times12=32\,(\mathrm{cm}^3)$
したがって，求める体積は　$256-32=224\,(\mathrm{cm}^3)$

レベルB

1

△AFE と △GHE において
∠AEF＝∠GEH（共通）　……①
△ABC≡△ADE であるから
∠FBG＝∠FDA
△FDA と △FBG において，内角と外角の関係から
∠FDA＋∠FAD＝∠FBG＋∠FGB
よって　∠FAD＝∠FGB
また，AB は ∠DAE を 2 等分しているから
∠FAD＝∠EAF
対頂角は等しいから　∠FGB＝∠EGH
よって　∠EAF＝∠EGH　……②
①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから
△AFE∽△GHE

2

点 A から辺 BC に引いた垂線の足を F，辺 AC と線分 BE の交点を G とする。
△BCG と △ACF において
∠BCG＝∠ACF（共通），　∠BGC＝∠AFC＝90°
よって，2 組の角がそれぞれ等しいから，残りの角も等しくなり
∠CBG＝∠CAF　……①
△BCE と △ADC において
$\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$ から　BC：AD＝2：1
BE＝2CA から　BE：AC＝2：1
よって　BC：AD＝BE：AC　……②
①，② より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから
△BCE∽△ADC
相似比は 2：1 であるから　CE：CD＝2：1

3

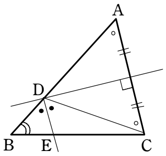
まず，△ACE≡△DCB を証明する。
△ACE と △DCB において
△ACD は正三角形であるから　AC＝DC　……①
△CBE は正三角形であるから　CE＝CB　……②
また　∠ACE＝180°－∠BCE＝180°－60°＝120°
∠DCB＝180°－∠ACD＝180°－60°＝120°
よって　∠ACE＝∠DCB　……③
①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから　△ACE≡△DCB
合同な図形では対応する角の大きさは等しいから　∠AEC＝∠DBC　……④
次に，△ADF と △BCH において　∠ADF＝∠BCH＝60°　……⑤
∠DAC＝∠ECB＝60° より，同位角が等しいから　AD∥CE
よって，錯角が等しいから　∠DAF＝∠AEC　……⑥
④，⑥ より　∠DAF＝∠CBH　……⑦
⑤，⑦ より，2 組の角がそれぞれ等しいから　△ADF∽△BCH

4

まず，△CBE≡△CDE と △BCM≡△ADM を証明する。
△CBE と △CDE において　CE＝CE（共通）
四角形 ABCD は正方形であるから
CB＝CD，　∠BCE＝∠DCE＝45°
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから　△CBE≡△CDE
合同な図形では対応する角の大きさは等しいから　∠CBE＝∠CDE　……①
また，△BCM と △ADM において
仮定から　CM＝DM
四角形 ABCD は正方形であるから　BC＝AD，　∠BCM＝∠ADM＝90°
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから　△BCM≡△ADM
合同な図形では対応する角の大きさは等しいから　∠CBM＝∠DAM　……②
①，② より　∠FDM＝∠DAM　……③
次に，△DFM と △ADM において　∠DMF＝∠AMD（共通）　……④
③，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから　△DFM∽△ADM

5

証明　垂直二等分線上の点から線分の２つの端点までの距離は等しいから，△DAC は DA＝DC の二等辺三角形である。



よって　$\angle DAC=\angle DCA$

したがって，△DAC において，内角と外角の性質から

$\angle BDC=2\angle DAC$

また，仮定より　$\angle BDC=2\angle BDE$

よって　$\angle DAC=\angle BDE$

すなわち　$\angle BAC=\angle BDE$

また　$\angle ABC=\angle DBE$　(共通)

したがって，△ABC と △DBE において，２組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$　終

6

△ABF と △FCE において

$\angle ABF=\angle FCE=90°$　……①

△ABF において　$\angle BAF+\angle AFB=90°$　……②

$\angle AFE=90°$ であるから

$\angle CFE+\angle AFB=90°$　……③

②，③ から　$\angle BAF=\angle CFE$　……④

①，④ より，２組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF \backsim \triangle FCE$

$AF=AD=10$ cm，$FE=DE=5$ cm であるから，△ABF と △FCE の相似比は

$AF:FE=10:5=2:1$　よって　$AB:FC=2:1$

$AB=x$ cm とすると　$x:FC=2:1$　したがって　$FC=\frac{1}{2}x$ cm

また，$BF:CE=2:1$ で，$CE=(x-5)$ cm であるから　$BF=2(x-5)$ cm

$BC=10$ cm であるから　$2(x-5)+\frac{1}{2}x=10$　これを解いて　$x=8$

よって　$AB=8$ cm

7

△FGI と △DBC において

$\angle FIG=\angle DCB=90°$　……①

線分 BD と FG の交点を P とする。

$\angle IGB=90°$ であるから　$\angle FGI+\angle BGP=90°$　……②

線分 FG を折り目として，点 B が移る点が E であるから　$BE\perp FG$

よって，$\angle BPG=90°$ であるから　$\angle DBC+\angle BGP=90°$　……③

②，③ から　$\angle FGI=\angle DBC$　……④

①，④ より，２組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle FGI \backsim \triangle DBC$

よって　$IF:CD=GI:BC$

$IF:3=3:6$

したがって　$IF=\frac{3}{2}$ cm

8

$DR=x$ cm とおく。

$QR/\!/BC$ より　$QR:BC=DR:DC$

$QR:10=x:8$

よって　$QR=\frac{5}{4}x$ cm

また，$AD/\!/PR/\!/BC$ より

$BP:BA=CR:CD=(8-x):8$

$PQ/\!/AD$ より

$PQ:AD=BP:BA$

$PQ:5=(8-x):8$

よって　$PQ=\frac{5}{8}(8-x)$ cm

$PQ:QR=1:3$ より，$3PQ=QR$ であるから

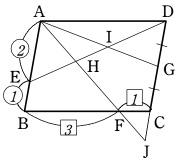
$3\times\frac{5}{8}(8-x)=\frac{5}{4}x$

これを解いて　$x=\frac{24}{5}$

したがって　$DR=\frac{24}{5}$ cm

9

直線 AF と直線 DC の交点を J とする。



$AB/\!/CJ$ であるから　$AB:JC=BF:CF=3:1$

よって　$JC=\frac{1}{3}AB$

したがって　$JD=JC+CD=\frac{1}{3}AB+AB=\frac{4}{3}AB$

また　$AE=\frac{2}{2+1}AB=\frac{2}{3}AB$

$AE/\!/DJ$ であるから　$EH:DH=AE:JD=\frac{2}{3}AB:\frac{4}{3}AB=1:2$

よって　$EH=\frac{1}{1+2}ED=\frac{1}{3}ED$　……①

また，$AE/\!/DG$ であるから

$EI:DI=AE:GD=\frac{2}{3}AB:\frac{1}{2}AB=4:3$

よって　$DI=\frac{3}{4+3}ED=\frac{3}{7}ED$　……②

①，② より　$EH:ID=\frac{1}{3}ED:\frac{3}{7}ED=7:9$

10

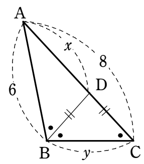
△ABC と △ADB において

仮定から　$\angle DBC=\angle ACB$，　$\angle DBC=\angle ABD$

よって　$\angle ACB=\angle ABD$

また　$\angle BAC=\angle DAB$　(共通)

２組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle ABC \backsim \triangle ADB$



したがって　$AB:AD=AC:AB$

$AD=x$ cm とすると　$6:x=8:6$

よって　$6\times6=x\times8$

これを解くと　$x=\frac{9}{2}$

したがって　$CD=8-\frac{9}{2}=\frac{7}{2}$ (cm)

$\angle DBC=\angle DCB$ であるから　$BD=CD$

よって　$BD=\frac{7}{2}$ cm

$\triangle ABC \backsim \triangle ADB$ であるから　$BC:DB=AC:AB$

$BC=y$ cm とすると　$y:\frac{7}{2}=8:6$

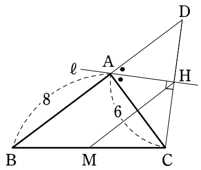
したがって　$y\times6=\frac{7}{2}\times8$

これを解くと　$y=\frac{14}{3}$

よって　$BC=\frac{14}{3}$ cm

11

BA と CH の交点を D とする。



△ACH と △ADH において

$AH=AH$

$\angle CAH=\angle DAH$

$\angle CHA=\angle DHA$

１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ACH\equiv\triangle ADH$

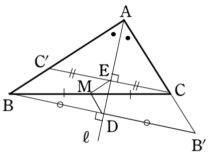
よって　$AD=AC=6$ cm

$CH=DH$

△BCD において，中点連結定理により　$MH=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times(8+6)=7$ (cm)

12

証明　線分 BD の延長と線分 AC の延長の交点を B′，線分 CE の延長と辺 AB の交点を C′ とする。
∠C′AC の二等分線が底辺 C′C に垂直であるから，
△AC′C は AC′＝AC の二等辺三角形である。
同様に，△ABB′ は AB＝AB′ の二等辺三角形である。



したがって　BC′＝B′C　……①
△CC′B において，点 E，M はそれぞれ辺 CC′，CB の中点であるから，中点連結定理により

$$\mathrm{ME}=\frac{1}{2}\mathrm{BC'}\quad\cdots\cdots①$$

同様にして　$\mathrm{MD}=\frac{1}{2}\mathrm{B'C}$　……③

①，②，③ から　MD＝ME

また　$\mathrm{MD}=\frac{1}{2}\mathrm{B'C}=\frac{1}{2}(\mathrm{AB'}-\mathrm{AC})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB}-\mathrm{AC})$　終

13

△ABD において，点 N，G は，それぞれ辺 AB，AD の中点であるから，中点連結定理により　NG∥BD
すなわち　GC∥BD　……①
また，△ADC において，点 G，M は，それぞれ辺 AD，AC の中点であるから，中点連結定理により　GM∥DC
すなわち　BG∥DC　……②
①，② より，四角形 BDCG は，2 組の対辺がそれぞれ平行であるから，平行四辺形である。
平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから，E は辺 BC の中点である。
よって，AE は △ABC の中線であるから，三角形の 3 つの中線は 1 点で交わる。

14［開明］

(1)　AD∥BE より　BP : PD＝BE : AD
＝3 : 5　……①

(2)　AB∥DF より　BQ : QD＝AB : DF
＝3 : 2　……②

① より　$\mathrm{BP}=\frac{3}{8}\mathrm{BD}$，$\mathrm{PD}=\frac{5}{8}\mathrm{BD}$

② より　$\mathrm{BQ}=\frac{3}{5}\mathrm{BD}$，$\mathrm{QD}=\frac{2}{5}\mathrm{BD}$

よって　$\mathrm{PQ}=\frac{3}{5}\mathrm{BD}-\frac{3}{8}\mathrm{BD}=\frac{9}{40}\mathrm{BD}$　……③

したがって　$\mathrm{BP}:\mathrm{PQ}:\mathrm{QD}=\frac{3}{8}:\frac{9}{40}:\frac{2}{5}$
＝15 : 9 : 16

(3)　AB∥DF より　AQ : QF＝3 : 2
よって，AQ : QF＝BE : EC であるから
AB∥QE
したがって　△ABQ＝△ABE
よって　△APQ＝△PBE
したがって　△APQ : △PBE＝1 : 1

(4)　③ より　$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{9}{40}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{9}{40}\times\frac{1}{2}S_1$

$$=\frac{9}{80}S_1$$

(3) より　$\triangle\mathrm{PBE}=\triangle\mathrm{APQ}=\frac{9}{80}S_1$　……④

QE∥DF より　△FQD＝△EFD

$\triangle\mathrm{EFD}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{DEC}$ で，$\triangle\mathrm{DEC}=\frac{2}{5}\triangle\mathrm{BCD}$ であるから

$$\triangle\mathrm{EFD}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}S_1=\frac{2}{15}S_1$$

よって　$\triangle\mathrm{FQD}=\frac{2}{15}S_1$　……⑤

④，⑤ より　$S_2=\frac{1}{2}S_1-\left(\frac{9}{80}S_1+\frac{2}{15}S_1\right)$

$$=\frac{61}{240}S_1$$

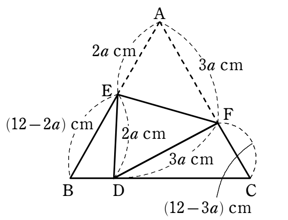
したがって　$S_1 : S_2=240 : 61$

15［三重県］

(1)　△BDE と △CFD において
正三角形 ABC の 3 つの角はすべて等しいので
∠EBD＝∠DCF＝60°　……①
∠BED＝180°－∠EBD－∠BDE
＝180°－60°－∠BDE
＝120°－∠BDE　……②
∠CDF＝180°－∠EDF－∠BDE
＝180°－60°－∠BDE
＝120°－∠BDE　……③
②，③ より　∠BED＝∠CDF　……④
①，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから
△BDE∽△CFD

(2)　(ア)　(1) で △BDE∽△CFD が証明されて折り返しているので
ED : DF＝AE : AF＝2 : 3
相似な図形の面積比は，相似比の 2 乗と等しいので
$\triangle\mathrm{BDE}:\triangle\mathrm{CFD}=2^2:3^2$
＝4 : 9

(イ)　AE : AF＝2 : 3 で AE＝$2a$ より
AF＝$3a$
BE＝$12-2a$，CF＝$12-3a$ となる。
△BDE∽△CFD で
AE : AF＝ED : DF＝2 : 3 より
BD : CF＝2 : 3
BD : $(12-3a)$＝2 : 3



$$\mathrm{BD}=\frac{2}{3}(12-3a)$$

BD＝$8-2a$

同様にして
BE : CD＝2 : 3
$(12-2a)$: CD＝2 : 3

$$\mathrm{CD}=\frac{3}{2}(12-2a)$$

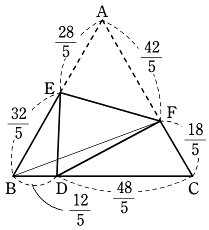
CD＝$18-3a$

BC＝BD＋CD＝12 より
$(8-2a)+(18-3a)=12$
$26-5a=12$
$-5a=-14$

$$a=\frac{14}{5}$$

よって　$a=\frac{14}{5}$

(ウ)　右の図の B と F を結ぶ。
△ABF の辺 AB 上に点 E がある。
$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\frac{28}{5}:\frac{32}{5}=7:8$ であり，
高さが共通しているから
△AEF : △BEF＝7 : 8　……①
また，△ABC の辺 AC 上に点 F がある。
$\mathrm{AF}:\mathrm{FC}=\frac{42}{5}:\frac{18}{5}=7:3$ であり，
高さが共通しているので
△ABF : △BCF＝7 : 3　……②



① より　△ABF : △AEF＝15 : 7　……③
② より　△ABC : △ABF＝10 : 7　……④
③，④ より　△ABC : △ABF : △AEF＝150 : 105 : 49
△DEF＝△AEF であるので
△ABC : △DEF＝150 : 49

$$\triangle\mathrm{DEF}=\frac{49}{150}\times\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，△ABC の面積の $\frac{49}{150}$ 倍になる。

16［愛知県］

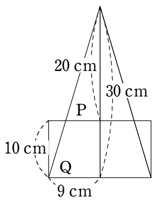
(1)　容器Ａの体積は　$\pi\times9^2\times10=810\pi$ (cm^3)

鉄のおもりＢの高さを h cm とすると

$$\frac{1}{3}\times\pi\times9^2\times h=810\pi$$

よって　　$h=30$ (cm)

(2)　鉄のおもりＢの容器Ａに入っていない部分をＰ，それ以外をＱとする。



ＰとＢの鉄のおもりＢは相似で

相似比は　　$(30-10):30=2:3$

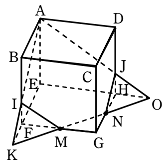
よって，体積比は　　$2^3:3^3=8:27$

あふれ出た水の体積はＱの体積と等しいから

$$810\pi\times\frac{27-8}{27}=570\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

17

(1)　３点Ａ，Ｍ，Ｎを通る平面と辺BF，DHとの交点をそれぞれＩ，Ｊとする。



また，AI，EF，NMの交点をＫとし，AJ，EH，MNの交点をＯとする。

△KMFと△NMGにおいて

FM＝GM

∠MFK＝∠MGN

∠KMF＝∠NMG

より，１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから　　△KMF≡△NMG

よって　　KF＝NG＝3 cm

IF∥AEであるから　　$\mathrm{IF}:\mathrm{AE}=\mathrm{KF}:\mathrm{KE}=3:(3+6)=1:3$

したがって　　IF＝2 cm

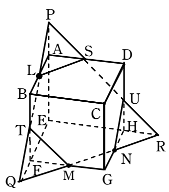
このとき，三角錐Ｋ－IFMの体積は　　$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times3\right)\times3=3\,(\mathrm{cm}^3)$

同様にして三角錐Ｏ－JHNの体積を求めると，$3\,\mathrm{cm}^3$ である。

また，三角錐Ａ－EKOの体積は　　$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times9\times9\right)\times6=81\,(\mathrm{cm}^3)$

よって，求める体積は　　$81-(3+3)=75\,(\mathrm{cm}^3)$

(2)　３点Ｌ，Ｍ，Ｎを通る平面と直線AE，EF，EH，AD，BF，DHとの交点をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒ，Ｓ，Ｔ，Ｕとする。



(1)と同様に考えると，三角錐Ｑ－TFMの体積は

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times3\right)\times3=\frac{9}{2}\ (\mathrm{cm}^3)$$

同様にして，三角錐Ｐ－LASの体積，三角錐Ｒ－UHNの体積を求めると，ともに $\dfrac{9}{2}\,\mathrm{cm}^3$ である。

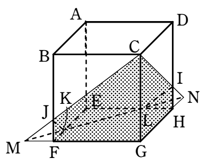
また，三角錐Ｐ－EQRの体積は　　$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times9\times9\right)\times9=\dfrac{243}{2}\ (\mathrm{cm}^3)$

よって，求める体積は　　$\dfrac{243}{2}-\left(\dfrac{9}{2}+\dfrac{9}{2}+\dfrac{9}{2}\right)=108\ (\mathrm{cm}^3)$

別解　３点Ｌ，Ｍ，Ｎを通る平面で立方体を切断し，２つの立体に分けると，２つの立体は合同になる。

よって，求める体積は立方体の体積の半分であり　$\dfrac{1}{2}\times(6\times6\times6)=108\ (\mathrm{cm}^3)$

18



CJ，GF，KLを延長し，その交点をＭとする。

また，CI，GH，KLを延長し，その交点をＮとする。

さらに，三角錐MGNC，MFKJ，NHLIの体積をそれぞれ V，V'，V'' とする。

三角錐MGNCと三角錐MFKJは相似で，相似比は

GC：FJ＝12：3＝4：1

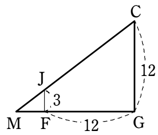
よって，体積比は　　$V:V'=4^3:1^3=64:1$

また，三角錐NGMCと三角錐NHLIは相似で，相似比は　　GC：HI＝12：3＝4：1

よって，体積比は　　$V:V''=4^3:1^3=64:1$

したがって，求める体積は

$$V-V'-V''=V-\frac{1}{64}V-\frac{1}{64}V=\frac{31}{32}V\quad\cdots\cdots①$$



ここで，JF∥CGであるから

MF：MG＝JF：CG

よって　　MF：(MF＋12)＝3：12

したがって　　MF＝4

同じように考えて　　NH＝4

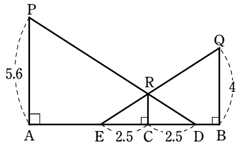
よって，三角錐MGNCの体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{MGN}\times\mathrm{CG}=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times(12+4)\times(12+4)\right\}\times12=512$$

①から，求める体積は　　$\dfrac{31}{32}V=\dfrac{31}{32}\times512=496\,(\mathrm{cm}^3)$

1

下の図のように，５秒後に花子さんが到着した地点をＣとし，このときにできる影の先端をそれぞれＤ，Ｅとする。また，街灯をそれぞれ線分 PA，QB とし，花子さんを線分 RC とする。



(1)　花子さんは毎秒 x m の速さで歩くとすると　　$AC=5x$ m，　$BC=3x$ m

△DRE は RD＝RE の二等辺三角形であるから　　∠ADP＝∠BEQ

よって，△ADP ∽ △BEQ であるから　　AD : BE＝AP : BQ

$$(5x+2.5):(3x+2.5)=5.6:4$$

これを解いて　　$x=\dfrac{5}{4}$

求める距離は $5x+3x=8x$ (m) であるから　　$8\times\dfrac{5}{4}=10$ (m)

(2)　$BC=3\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{15}{4}$ (m)

RC∥QB であるから　　RC : QB＝CE : BE

$$RC:4=2.5:\left(\frac{15}{4}+2.5\right)$$

これを解いて　　RC＝1.6

よって，花子さんの身長は　1.6 m

2

(1)　PP′∥RS∥QQ′ であるから

P′S : SQ′＝PR : RQ＝2 : 1

(2)　PP′∥OS であるから

AP′ : P′S＝AP : PO＝1 : 2　……①

また，QQ′∥OS であるから

BQ′ : Q′S＝BQ : QO＝1 : 3　……②

ここで，SQ′＝x とおく。

(1) より　　$P'S=2x$　……③

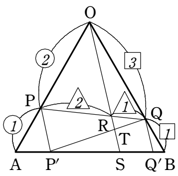
①，③ より　$AP'=x$　……④

② より　$BQ'=\dfrac{1}{3}x$　……⑤

③，④，⑤ より　$AS=AP'+P'S=x+2x=3x$

$$SB=SQ'+Q'B=x+\frac{1}{3}x=\frac{4}{3}x$$

したがって　　$AS:SB=3x:\dfrac{4}{3}x=9:4$



(3)　P′Q と RS の交点を T とする。

PP′∥OS∥QQ′ であるから，次の関係が，それぞれ成り立つ。

PP′ : OS＝AP : AO＝1 : 3　より　　$PP'=\dfrac{1}{3}OS$

RT : PP′＝QR : QP＝1 : 3　より　　$RT=\dfrac{1}{3}PP'=\dfrac{1}{9}OS$　……⑥

QQ′ : OS＝BQ : BO＝1 : 4　より　　$QQ'=\dfrac{1}{4}OS$

TS : QQ′＝P′S : P′Q′＝2 : 3　より　　$TS=\dfrac{2}{3}QQ'=\dfrac{1}{6}OS$　……⑦

⑥，⑦ より　　$RS=RT+TS=\dfrac{1}{9}OS+\dfrac{1}{6}OS=\dfrac{5}{18}OS$

$$OR=OS-RS=\frac{13}{18}OS$$

したがって　　$OR:RS=\dfrac{13}{18}OS:\dfrac{5}{18}OS=13:5$

3

(1)　五角形の内角の和は　$180°\times(5-2)=540°$

正五角形の内角は等しいから　$\angle ABC=\dfrac{540°}{5}=108°$

また，△BAC は BA＝BC の二等辺三角形であるから

$$\angle BAC=\frac{180°-\angle ABC}{2}=\frac{180°-108°}{2}=36°$$

(2)　証明　△BAC と △MAB において

∠BCA＝∠BAC＝36°

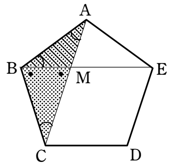
同様にして　　∠ABE＝36°

よって　　∠BCA＝∠MBA

また　　∠BAC＝∠MAB（共通）

したがって，２組の角がそれぞれ等しいから

△BAC∽△MAB　終



(3)　証明　∠CBM＝∠CBA－∠ABM＝108°－36°＝72°

△MAB において，内角と外角の性質から

∠CMB＝∠ABM＋∠MAB＝36°＋36°＝72°

よって，∠CBM＝∠CMB であるから，△CBM は CB＝CM の二等辺三角形である。

終

(4)　△BAC∽△MAB であるから

AB : AM＝AC : AB

正五角形 ABCDE の１辺を x cm とすると，

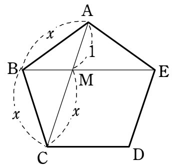
CM＝CB＝x であるから

$x:1=(1+x):x$

よって　　$x\times x=1\times(1+x)$

すなわち　　$x^2-x-1=0$

これを解くと　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$



$x>0$ であるから，正五角形の１辺の長さは　　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ cm

参考　$AM:MC=AM:AB=1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　は黄金比である。

4［2016 巣鴨］

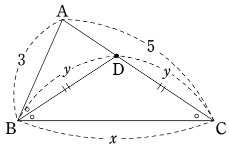
∠B の二等分線と AC との交点を D とする。

∠B＝2∠C より，△DBC は DB＝DC の二等辺三角形である。

２組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△ADB　……①

ここで，BC＝x，DB＝DC＝y とおくと



① より　　AC : AB＝BC : DB

$5:3=x:y$

$x=\dfrac{5}{3}y$　……②

同じく ① より　AB : AD＝AC : AB

$3:(5-y)=5:3$

$5(5-y)=3\times3$

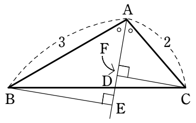
$y=\dfrac{16}{5}$

これを ② に代入して　　$x=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{16}{5}=\dfrac{16}{3}$

したがって，辺 BC の長さは　　$\dfrac{16}{3}$

5

点 C から直線 AE に引いた垂線の足を F とする。



△ABE と △ACF において

$\angle BAE = \angle CAF$

$\angle AEB = \angle AFC = 90°$

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABE \backsim \triangle ACF$

したがって　$AE : AF = AB : AC = 3 : 2$

よって　$AF = \frac{2}{3}AE,\ EF = \frac{1}{3}AE$

△BDE と △CDF において

$\angle BDE = \angle CDF$　(対頂角)

$\angle BED = \angle CFD = 90°$

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle BDE \backsim \triangle CDF$

したがって　$DE : DF = BD : CD$

ここで，直線 AE は ∠BAC の二等分線であるから，$BD : CD = AB : AC = 3 : 2$ であり

$DE : DF = 3 : 2$

よって　$DE = \frac{3}{5}EF = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}AE = \frac{1}{5}AE$

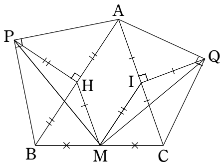
$DF = \frac{2}{5}EF = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}AE = \frac{2}{15}AE$

$AD = AF + DF = \frac{2}{3}AE + \frac{2}{15}AE = \frac{4}{5}AE$ であるから

$AD : DE = \frac{4}{5}AE : \frac{1}{5}AE = 4 : 1$

6［岡山白陵］

P から AB にひいた垂線を PH，Q から AC にひいた垂線を QI とする。



△HMP と △IQM において

△ABP，△ACQ は直角二等辺三角形であるから

$AH = BH = PH$　……①

$AI = IC = QI$　……②

仮定から　$BM = CM$　……③

中点連結定理により

①，②，③ から　$HM = \frac{1}{2}AC = AI$

$= IQ$　……④

同様に　$IM = HP$　……⑤

また，中点連結定理により

$HM \mathbin{/\!/} AC$

$IM \mathbin{/\!/} AB$

平行線の同位角は等しいから

$\angle BHM = \angle BAC = \angle MIC$

$\angle PHM = 90° + \angle BHM$

$\angle MIQ = 90° + \angle MIC$

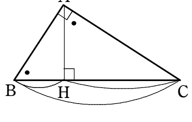
よって　$\angle PHM = \angle MIQ$　……⑥

④，⑤，⑥ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle HMP \equiv \triangle IQM$

よって　$PM = QM$

7



証明　$\triangle ABH \backsim \triangle CAH$ で，相似比は $AB : AC$ に等しいから

$\triangle ABH : \triangle CAH$

$= AB^2 : AC^2$　……①

△ABH と △CAH は高さが等しいから

$\triangle ABH : \triangle CAH = BH : CH$　……②

①，② から　$AB^2 : AC^2 = BH : CH$　……③

また，$\triangle CAH \backsim \triangle CBA$ で，相似比は $AC : BC$ に等しいから

$\triangle CAH : \triangle CBA = AC^2 : BC^2$　……④

△CAH と △CBA は高さが等しいから

$\triangle CAH : \triangle CBA = CH : BC$　……⑤

④，⑤ から　$AC^2 : BC^2 = CH : BC$　……⑥

③，⑥ から　$AB^2 : AC^2 : BC^2 = BH : CH : BC$　終

8［花園］

正六角形の 1 つの内角の大きさは

$\frac{180° \times 4}{6} = 120°$

よって，△OAB，△OBC，△OCD，△ODE，△OEF，△OFA は合同な正三角形である。

(1)　$CI \mathbin{/\!/} BO$ より　$CQ : QO = CI : BO$

$= 1 : 2$

(2)　直線 AH と OC の交点を R とする。

$CH \mathbin{/\!/} OA$ より

$RC : RO = CH : OA = 1 : 2$

よって　$CR = OC$

$OC = a$ とおくと，$CQ = \frac{1}{3}a$ であるから

$RQ = a + \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a$

$BA \mathbin{/\!/} RQ$ より

$BP : PQ = AB : RQ = a : \frac{4}{3}a$

$= 3 : 4$

(3)　$\triangle OAB = S$ とおく。

$BP : PQ = 3 : 4$ より　$BP : BQ = 3 : 7$

よって　$\triangle ABP = \frac{3}{7}\triangle ABQ$

$AB \mathbin{/\!/} OC$ より，$\triangle ABQ = \triangle OAB$ であるから

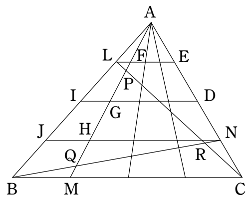
$\triangle ABP = \frac{3}{7}S$

線分 AH，BI，CJ，DK，EL，FG によって囲まれてできる正六角形の面積は，正六角形 ABCDEF の面積から，△ABP の面積の 6 倍をひけばよいから

$6S - \frac{3}{7}S \times 6 = \frac{24}{7}S$

$\frac{24}{7}S \div 6S = \frac{4}{7}$ より，$\frac{4}{7}$ 倍である。

9［鎌倉学園］



(1)　右の図のように点 D，E，F，G，H，I，J を定める。

$LF = x$ とすると

$BM = 4x,\ MC = 12x$

$HN = 12x \times \frac{3}{4} = 9x$

$LE \mathbin{/\!/} ID \mathbin{/\!/} JN \mathbin{/\!/} BC$ であるから

$HQ : QM = HN : BM = 9 : 4$

$FP : PM = LF : MC = 1 : 12$

$FG = GH = HM$ より，$QM = 4a$ とおくと

$HQ = 9a,\ AF = FG = GH = HM = 13a$

$FP = 13a \times 3 \times \frac{1}{1+12} = 3a$

$PM = 13a \times 3 - 3a = 36a$

よって　$AP : PQ : QM = (13a + 3a) : (36a - 4a) : 4a$

$= 16a : 32a : 4a$

$= 4 : 8 : 1$

(2)　(1) と同様にして　$CR : RP : PL = BQ : QR : RN = 4 : 8 : 1$

よって　$\triangle PQR = \frac{8}{8+1}\triangle LQR$

$= \frac{8}{9} \times \frac{8}{8+4}\triangle LBR$

$= \frac{8}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{1+8}{1+8+4}\triangle LBC$

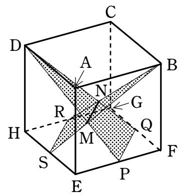
$= \frac{8}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{9}{13} \times \frac{3}{4}\triangle ABC$

$= \frac{4}{13}\triangle ABC$

したがって，△PQR の面積は △ABC の面積の $\frac{4}{13}$ 倍

10

線分 BS と線分 DP の交点を M，線分 BR と線分 DQ の交点を N とする。



△EFH において，中点連結定理により

$$PS /\!/ FH,\ PS=\frac{1}{2}FH$$

BD∥FH，BD＝FH であるから

$$PS /\!/ BD,\ PS=\frac{1}{2}BD$$

PS∥BD より　　DM : MP＝BD : PS＝2 : 1

同様に，QR∥FH，$QR=\frac{1}{2}FH$ であるから　　QR∥BD，$QR=\frac{1}{2}BD$

QR∥BD より　　DN : NQ＝BD : QR＝2 : 1

よって，DM : MP＝DN : NQ であるから　　MN∥PQ

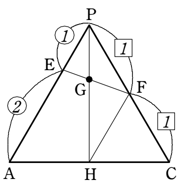
したがって　　MN : PQ＝DM : DP＝2 : 3

よって，線分 MN の長さは，線分 PQ の長さの $\frac{2}{3}$ 倍である。

11

(1)　H は正方形 ABCD の対角線の交点である。

△PAC において，2 点 F，H は，それぞれ辺 CP，CA の中点であるから，中点連結定理により



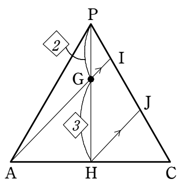
$$FH /\!/ PA \cdots\cdots ①,\quad FH=\frac{1}{2}PA \cdots\cdots ②$$

PA＝3PE であるから，② により　　$FH=\frac{3}{2}PE$

① により，PE∥FH であるから

$$PG : GH=PE : FH=PE : \frac{3}{2}PE=2 : 3$$

(2)　H を通り AI に平行に引いた直線と PC との交点を J とする。



GI∥HJ であるから　PI : IJ＝PG : GH

(1) により　　PI : IJ＝2 : 3

よって　　$PI=\frac{2}{3}IJ$

また，AI∥HJ であるから

IJ : JC＝AH : HC＝1 : 1

よって　　IC＝2IJ

したがって　　$PI : IC=\frac{2}{3}IJ : 2IJ=1 : 3$

12

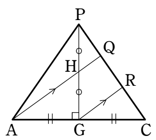
頂点 P から底面 ABCD に引いた垂線を PG とし，PG と MN の交点を H とする。

このとき，G は正方形 ABCD の対角線 AC，BD の交点で，H は AQ 上の点である。

△PBD において，中点連結定理により　　MN∥BD

よって　　PH : HG＝PM : MB＝1 : 1

G を通り AQ に平行に引いた直線と PC との交点を R とする。



GR∥AQ であるから　　CR : RQ＝CG : GA＝1 : 1

したがって　　CR＝RQ　……①

HQ∥GR であるから　　PQ : QR＝PH : HG＝1 : 1

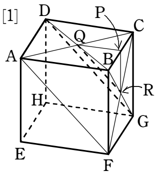
よって　　PQ＝QR　……②

①，② より，PQ＝QR＝RC であるから　PQ : QC＝1 : 2

13

図[1] のように，辺 BC の中点を P，AC と BD の交点を Q，FC と BG の交点を R とする。

[1]



このとき，図[2] のように，合同な立体 ABF−QPR と DCG−QPR を考えると，頂点 E を含まない方の立体は，この 2 つの立体を合わせたものになる。

立体 ABF−QPR について，この立体は，三角錐 C−ABF から相似な三角錐 C−QPR を取り除いたものである。

三角錐 C−ABF と三角錐 C−QPR の相似比は　2 : 1

したがって

（立体 ABF−QPR の体積）:（三角錐 C−ABF の体積）

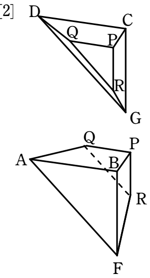
$$=(2^3-1^3) : 2^3=7 : 8$$

三角錐 C−ABF の体積は　$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times6\right)\times6=36\,(\mathrm{cm}^3)$

よって，立体 ABF−QPR の体積は　$36\times\frac{7}{8}=\frac{63}{2}\,(\mathrm{cm}^3)$

したがって，求める立体の体積は　$6^3-\frac{63}{2}\times2=153\,(\mathrm{cm}^3)$

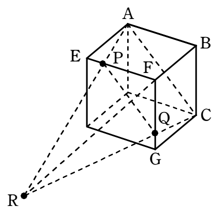
[2]



14

展開図を組み立てて，右の図のように点 B，C を定めると，小さい方の立体は，立体 PFQ−ABC である。

AP，BF の延長の交点を R とし，立方体の 1 辺の長さを a とする。



仮定より，$PF=FQ=\frac{3}{4}a$ であるから

$$PF : AB=\frac{3}{4}a : a=3 : 4$$

よって　　FR : BR＝3 : 4

FR : BF＝3 : 1

したがって　　FR＝$3a$

三角錐 R−PFQ と三角錐 R−ABC は相似で，その相似比は　3 : 4

よって，体積比は　　$3^3 : 4^3=27 : 64$

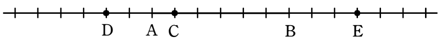
したがって，立体 PFQ−ABC と三角錐 R−ABC の体積比は　(64−27) : 64＝37 : 64

よって　　$V_1=\frac{37}{64}\times\left\{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a\times a\times(a+3a)\right\}=\frac{37}{96}a^3$

したがって　　$V_2=a^3-\frac{37}{96}a^3=\frac{59}{96}a^3$

よって　　$V_1 : V_2=\frac{37}{96}a^3 : \frac{59}{96}a^3=37 : 59$

$\boxed{1}$★



$\boxed{2}$★

G は △ABC の重心であるから　CG : GD＝2 : 1

12 : GD＝2 : 1

よって　GD＝6 cm

同様に　AG : GF＝2 : 1

DC∥EF であるから　DG : EF＝AG : AF

6 : EF＝2 : (2＋1)

したがって　EF＝9 cm

$\boxed{3}$★

(1)　△DBE : △DEC＝BE : EC＝2 : 3

(2)　△DBE : △DBC＝BE : BC＝2 : (2＋3)

＝2 : 5

(3)　△DBC : △ADC＝DB : AD＝2 : 1

すなわち　△DBC : △ADC＝2 : 1

よって　$\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{DBC}$

(2) の結果から　$\triangle\mathrm{DBE}=\dfrac{2}{5}\triangle\mathrm{DBC}$

したがって

$$\triangle\mathrm{DBE}:\triangle\mathrm{ADC}=\frac{2}{5}\triangle\mathrm{DBC}:\frac{1}{2}\triangle\mathrm{DBC}$$
$$=\left(10\times\frac{2}{5}\right):\left(10\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=4:5$$

(4)　△DBC : △ABC＝DB : AB＝2 : (1＋2)

＝2 : 3

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{DBC}$

(2) の結果から　$\triangle\mathrm{DBE}=\dfrac{2}{5}\triangle\mathrm{DBC}$

したがって

$$\triangle\mathrm{DBE}:\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{5}\triangle\mathrm{DBC}:\frac{3}{2}\triangle\mathrm{DBC}$$
$$=\left(10\times\frac{2}{5}\right):\left(10\times\frac{3}{2}\right)$$
$$=4:15$$

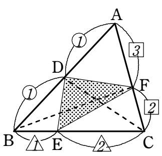
$\boxed{4}$★★

(1)　△ABC : △ADC＝AB : AD＝2 : 1

△ADC : △ADF＝AC : AF＝5 : 3

よって　$\triangle\mathrm{ADF}=\dfrac{3}{5}\triangle\mathrm{ADC}$

$=\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}\right)=\dfrac{3}{10}S$　答



(2)　△ABC : △BDC＝BA : BD＝2 : 1

△BDC : △BED＝BC : BE＝3 : 1

よって　$\triangle\mathrm{BED}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{BDC}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}\right)=\dfrac{1}{6}S$

△ABC : △CFB＝CA : CF＝5 : 2,

△CFB : △CFE＝CB : CE＝3 : 2

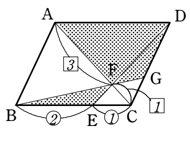
よって　$\triangle\mathrm{CFE}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{CFB}=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{2}{5}\triangle\mathrm{ABC}\right)=\dfrac{4}{15}S$

以上から　△DEF＝△ABC－△ADF－△BED－△CFE

$=S-\dfrac{3}{10}S-\dfrac{1}{6}S-\dfrac{4}{15}S=\dfrac{4}{15}S$　答

$\boxed{5}$★★

平行四辺形 ABCD の面積を S とする。



△ABC≡△CDA であるから　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}S$

AD∥EC であるから

AF : FC＝AD : CE＝(2＋1) : 1＝3 : 1

よって　△ABC : △FBC＝AC : FC＝4 : 1

また　△FBC : △FBE＝BC : BE＝3 : 2

したがって　$\triangle\mathrm{FBE}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{FBC}=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}\right)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{12}S$

AB∥GC であるから　CG : AB＝CF : AF＝1 : 3

よって　CG : CD＝1 : 3

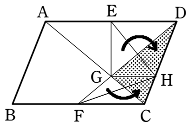
ゆえに　$\triangle\mathrm{CGF}=\dfrac{\mathrm{CG}}{\mathrm{CD}}\times\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CA}}\times\triangle\mathrm{CDA}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{24}S$

よって　(四角形 AFGD の面積)＝△CDA－△CGF＝$\dfrac{1}{2}S-\dfrac{1}{24}S=\dfrac{11}{24}S$

したがって　(△FBE の面積) : (四角形 AFGD の面積)＝$\dfrac{1}{12}S:\dfrac{11}{24}S$＝2 : 11　答

$\boxed{6}$★★

平行四辺形 ABCD の面積を S，四角形 EGFH の面積を T とする。



GH∥ED であるから

△GEH＝△GDH

GH∥FC であるから

△GFH＝△GCH

よって　T＝△GEH＋△GFH＝△GDH＋△GCH

＝△CGD

AD∥FC であるから　AG : GC＝AD : FC＝2 : 1

ゆえに　△CGD : △CAD＝CG : CA＝1 : (1＋2)＝1 : 3

また，△CAD≡△ACB であるから　$\triangle\mathrm{CAD}=\dfrac{1}{2}S$

よって　$T=\triangle\mathrm{CGD}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{CAD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{6}S$

したがって，四角形 EGFH の面積は，平行四辺形 ABCD の面積の $\dfrac{1}{6}$ 倍である。

$\boxed{7}$★★★

(1)　△APQ : △ABQ＝AP : AB＝1 : (1＋2)＝1 : 3

したがって　$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABQ}$

Q は辺 AC の中点であるから　$\triangle\mathrm{ABQ}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$

よって　$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}$

したがって　$\triangle\mathrm{APQ}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ABC}=1:6$

(2)　R，D から面 ABC に引いた垂線を，それぞれ RH，DK とする。

RH∥DK であるから　RH : DK＝AR : AD＝2 : (2＋3)＝2 : 5

よって　$\mathrm{RH}=\dfrac{2}{5}\mathrm{DK}$

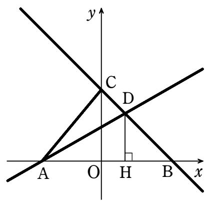
三角錐 APQR の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{APQ}\times\mathrm{RH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}\times\frac{2}{5}\mathrm{DK}=\frac{1}{15}\times\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{DK}$$
$$=\frac{1}{15}\times(\text{正四面体 ABCD の体積})$$

したがって，求める体積の比は　15 : 1

$\boxed{8}$★★★

D から x 軸に引いた垂線の足を H とする。



条件より，△DAB : △CAB＝2 : 3 であるから

DH : CO＝2 : 3

よって，C の y 座標は　$4\times\dfrac{3}{2}=6$

したがって，直線 BC の式は，$y=ax+6$ とおける。

点 (2, 4) を通ることから　$4=2a+6$

よって，$a=-1$ であるから，求める式は

$y=-x+6$　答

$\boxed{9}$★★

(1)　△ABC にチェバの定理を用いると

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$　すなわち　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{2}=1$

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{3}{8}$ より　BP : PC＝3 : 8

(2)　△ABC にチェバの定理を用いると

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$　すなわち　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{7}{2}=1$

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{10}{7}$ より　BP : PC＝10 : 7

$\boxed{10}$ ★★

(1)　仮定から　$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{3}{1}$，　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{3}{2}$

メネラウスの定理により　$\dfrac{3}{1}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{3}{2}=1$

$$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{2}{9}$$

よって　CQ : QA＝2 : 9

(2)　仮定から　$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{2+1}{1}=\dfrac{3}{1}$，　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{5+2}{2}=\dfrac{7}{2}$

メネラウスの定理により　$\dfrac{3}{1}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{7}{2}=1$

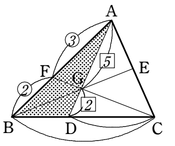
$$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{2}{21}$$

よって　CQ : QA＝2 : 21

$\boxed{11}$ ★★

△ABD と直線 FC において，メネラウスの定理により

$$\dfrac{BC}{CD}\times\dfrac{DG}{GA}\times\dfrac{AF}{FB}=1$$



DG : GA＝2 : 5，AF : FB＝3 : 2 であるから

$$\dfrac{BC}{CD}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{2}=1$$

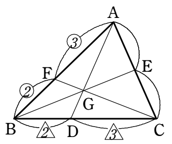
よって　$\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{5}{3}$

したがって　BC : CD＝5 : 3

よって　BD : DC＝(5−3) : 3＝2 : 3

△ABC において，チェバの定理により

$$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{AF}{FB}=1$$



BD : DC＝2 : 3，AF : FB＝3 : 2 であるから

$$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{3}{2}=1$$

よって　$\dfrac{CE}{EA}=1$

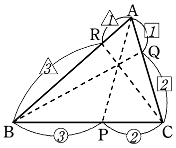
したがって　AE : EC＝1 : 1　答

$\boxed{12}$ ★★★

証明　BP : PC＝3 : 2，CQ : QA＝2 : 1，
AR : RB＝1 : 3

よって　$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1}\times\dfrac{1}{3}=1$

したがって，チェバの定理の逆により，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。　終



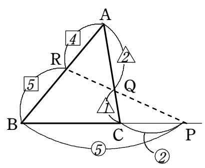
$\boxed{13}$ ★★★

証明　BP : PC＝5 : 2，CQ : QA＝1 : 2，
AR : RB＝4 : 5

よって

$$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}=1$$

したがって，メネラウスの定理の逆により，3 点 P，Q，R は一直線上にある。　終



$\boxed{14}$ ★★★

証明　DE は ∠ADB の二等分線であるから

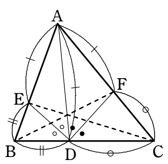
$$AE : EB＝DA : DB$$

よって　$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{DA}{DB}$

DF は ∠ADC の二等分線であるから

$$CF : FA＝DC : DA$$

よって　$\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{DC}{DA}$



したがって　$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CF}{FA}\times\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{DC}{DA}\times\dfrac{DA}{DB}=1$

よって，チェバの定理の逆により，3 直線 AD，BF，CE は 1 点で交わる。　終

$\boxed{15}$ ★★★

三角形の内角，外角の二等分線と比の定理により

$$BP : PC＝AB : AC,\ CQ : QA＝BC : AB,\ AR : RB＝AC : BC$$

すなわち　$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{AB}{AC}$，　$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{BC}{AB}$，　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{AC}{BC}$

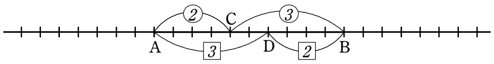
よって　$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{AB}{AC}\times\dfrac{BC}{AB}\times\dfrac{AC}{BC}$

$$=1$$

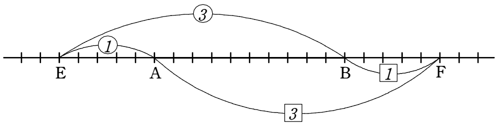
したがって，メネラウスの定理の逆により，3 点 P，Q，R は一直線上にある。　終

$\boxed{1}$

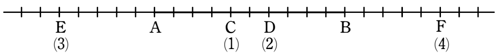
(1)，(2)　線分 AB の内分点 C，D は，下の図のようになる。



(3)，(4)　線分 AB の外分点 E，F は，下の図のようになる。



以上を１つの図に表すと，下のようになる。



$\boxed{2}$

(1)　E は辺 BC の中点である。

FE∥AB より　　FE : AB＝CE : CB＝1 : 2

よって　　$\mathrm{FE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=6\,(\mathrm{cm})$

HG∥FE より　　HG : FE＝AG : AE＝2 : 3

よって　　$\mathrm{HG}=\dfrac{2}{3}\mathrm{FE}=4\,(\mathrm{cm})$

(2)　FE∥AB より　CF : FA＝CE : EB＝1 : 1

したがって，F は辺 AC の中点であるから

$\mathrm{AF}=\dfrac{15}{2}\ \mathrm{cm}$

HG∥FE より　　AH : HF＝AG : GE＝2 : 1

よって　　$\mathrm{HF}=\dfrac{1}{3}\mathrm{AF}=\dfrac{5}{2}\,(\mathrm{cm})$

$\boxed{3}$

(1)　△DBE : △ADE＝DB : AD＝3 : 2

(2)　△DBE : △ABE＝DB : AB＝3 : (3＋2)＝3 : 5

(3)　△ABE : △AEC＝BE : EC＝1 : 2

よって　　△AEC＝2△ABE

(2) の結果から　　$\triangle\mathrm{DBE}=\dfrac{3}{5}\triangle\mathrm{ABE}$

したがって　　$\triangle\mathrm{DBE}:\triangle\mathrm{AEC}=\dfrac{3}{5}\triangle\mathrm{ABE}:2\triangle\mathrm{ABE}=3:10$

(4)　△AEC : △ABC＝EC : BC＝2 : (2＋1)＝2 : 3

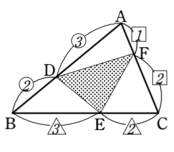
よって　　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{AEC}$

(3) の結果から　　$\triangle\mathrm{DBE}=\dfrac{3}{10}\triangle\mathrm{AEC}$

したがって　　$\triangle\mathrm{DBE}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{10}\triangle\mathrm{AEC}:\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{AEC}=1:5$

$\boxed{4}$

$$\triangle\mathrm{ADF}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}\times\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}}\times\triangle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{3}{3+2}\times\frac{1}{1+2}\times75=15$$
$$\triangle\mathrm{BED}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}}\times\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BA}}\times\triangle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{3}{3+2}\times\frac{2}{2+3}\times75=18$$



$$\triangle\mathrm{CFE}=\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CA}}\times\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CB}}\times\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{2+1}\times\frac{2}{2+3}\times75=20$$

したがって　　△DEF＝△ABC－△ADF－△BED－△CFE

$=75-15-18-20=22\,(\mathrm{cm}^2)$

$\boxed{5}$

平行四辺形 ABCD の面積を S とする。

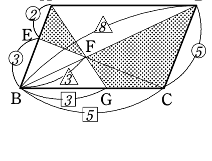
△ABD≡△CDB であるから

$\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}S$

EB∥DC であるから

BF : FD＝EB : DC＝3 : 5

よって　　△ABD : △ABF＝BD : BF



＝(3＋5) : 3＝8 : 3

また　　△ABF : △AEF＝AB : AE＝(2＋3) : 2＝5 : 2

したがって　　$\triangle\mathrm{AEF}=\dfrac{2}{5}\triangle\mathrm{ABF}=\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{3}{8}\triangle\mathrm{ABD}\right)$

$=\dfrac{3}{20}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{3}{40}S$

AD∥BG であるから　　BG : AD＝BF : FD＝3 : 5

よって　　BG : BC＝3 : 5

ゆえに　　$\triangle\mathrm{BGF}=\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BC}}\times\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BD}}\times\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{9}{80}S$

よって　　(四角形 DFGC の面積)＝$\triangle\mathrm{BCD}-\triangle\mathrm{BGF}=\dfrac{1}{2}S-\dfrac{9}{80}S=\dfrac{31}{80}S$

したがって　　(△AEF の面積) : (四角形 DFGC の面積)＝$\dfrac{3}{40}S:\dfrac{31}{80}S=6:31$

$\boxed{6}$

AD∥EF より　△AEF＝△DEF

よって　　△AEF＋△EBF＝△DEF＋△EBF＝△DBF

AD∥EF より　　DF : FC＝AE : EC＝1 : 2

よって　　$\triangle\mathrm{DBF}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{DBC}$

また，△DBC : △BAD＝BC : AD＝2 : 1 であるから，台形 ABCD の面積を S で表すと　　△DBC : S＝2 : 3

したがって　　$\triangle\mathrm{DBC}=\dfrac{2}{3}S$

よって　　$\triangle\mathrm{DBF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}S=\dfrac{2}{9}S$

したがって，△AEF の面積と △EBF の面積の和は，台形 ABCD の面積の $\dfrac{2}{9}$ 倍である。

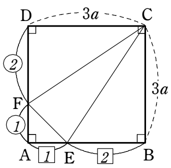
$\boxed{7}$

正四角錐 O－ABCD の底面である正方形 ABCD の面積を S，1 辺の長さを $3a$ とおくと

$S=3a\times3a=9a^2$

このとき　　$\triangle\mathrm{AEF}=\dfrac{1}{2}\times a\times a=\dfrac{1}{2}a^2$

$\triangle\mathrm{BCE}=\triangle\mathrm{CDF}=\dfrac{1}{2}\times2a\times3a=3a^2$



よって，三角錐 P－ECF の底面である △CFE の面積は

$\triangle\mathrm{CFE}=9a^2-\dfrac{1}{2}a^2-3a^2-3a^2=\dfrac{5}{2}a^2$

したがって　　$S:\triangle\mathrm{CFE}=9a^2:\dfrac{5}{2}a^2=18:5$

よって　　$S=\dfrac{18}{5}\triangle\mathrm{CFE}$

また，正四角錐 O－ABCD と三角錐 P－ECF の高さの比は，OA : PA＝3 : 2 であるから　　$V:V'=\left(\dfrac{18}{5}\times\dfrac{3}{2}\right):1=\dfrac{27}{5}:1=27:5$

$\boxed{8}$

D から x 軸に引いた垂線を DH とする。

条件より，△DAB : △CAB＝3 : 5 であるから

DH : CO＝3 : 5

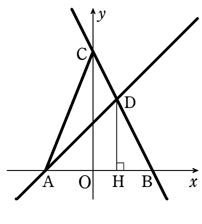
したがって，C の y 座標は　　$6\times\dfrac{5}{3}=10$

よって，直線 BC の式は，$y=ax+10$ とおける。

直線 BC が点 D (2，6) を通ることから　$6=2a+10$

$a=-2$

したがって，求める式は　　$y=-2x+10$



$\boxed{9}$

(1)　仮定から　$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{3}{4}$，　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{1}{2}$

チェバの定理により　$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=1$

$$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{8}{3}$$

よって　BP : PC＝8 : 3

(2)　仮定から　$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{3}{7+3}=\dfrac{3}{10}$，　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{2+1}{1}=\dfrac{3}{1}$

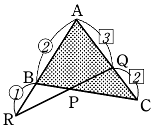
チェバの定理により　$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{1}=1$

$$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{10}{9}$$

よって　BP : PC＝10 : 9

$\boxed{10}$

(1)　△ABC と直線 QR において，メネラウスの定理により



$$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=1$$

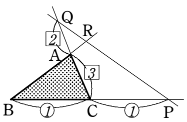
CQ : QA＝2 : 3，AR : RB＝(2＋1) : 1＝3 : 1
であるから

$$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{1}=1$$

よって　$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{1}{2}$

したがって　BP : PC＝1 : 2

(2)　△ABC と直線 PQ において，メネラウスの定理
により



$$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=1$$

BP : PC＝(1＋1) : 1＝2 : 1，
CQ : QA＝(3＋2) : 2＝5 : 2 であるから

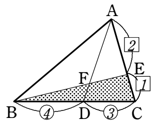
$$\dfrac{2}{1}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{AR}{RB}=1$$

よって　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{1}{5}$

ゆえに　AR : RB＝1 : 5

したがって　RA : AB＝1 : (5－1)＝1 : 4

(3)　△BCE と直線 AD において，メネラウスの定理により



$$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CA}{AE}\times\dfrac{EF}{FB}=1$$

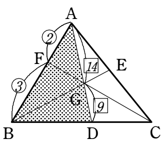
BD : DC＝4 : 3，CA : AE＝(1＋2) : 2＝3 : 2 である
から　$\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{EF}{FB}=1$

よって　$\dfrac{EF}{FB}=\dfrac{1}{2}$

したがって　EF : FB＝1 : 2

$\boxed{11}$

(1)　△ABD と直線 FC において，メネラウスの定理に
より　$\dfrac{BC}{CD}\times\dfrac{DG}{GA}\times\dfrac{AF}{FB}=1$

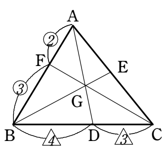


DG : GA＝9 : 14，AF : FB＝2 : 3 であるから

$$\dfrac{BC}{CD}\times\dfrac{9}{14}\times\dfrac{2}{3}=1$$

よって　$\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{7}{3}$　したがって　BC : CD＝7 : 3

△ABC において，チェバの定理により

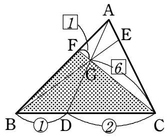


$$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{AF}{FB}=1$$

BD : DC＝(7－3) : 3＝4 : 3，AF : FB＝2 : 3 である
から　$\dfrac{4}{3}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{2}{3}=1$

よって　$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{9}{8}$　したがって　AE : EC＝8 : 9

(2)　△CBF と直線 DA において，メネラウスの定理に
より　$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CG}{GF}\times\dfrac{FA}{AB}=1$

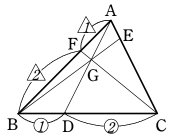


BD : DC＝1 : 2，CG : GF＝6 : 1 であるから

$$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{1}\times\dfrac{FA}{AB}=1$$

よって　$\dfrac{FA}{AB}=\dfrac{1}{3}$　したがって　FA : AB＝1 : 3

△ABC において，チェバの定理により

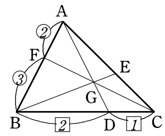


$$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{AF}{FB}=1$$

BD : DC＝1 : 2，AF : FB＝1 : (3－1)＝1 : 2 である
から　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{1}{2}=1$

よって　$\dfrac{CE}{EA}=4$　したがって　AE : EC＝1 : 4

(3)　△ABC において，チェバの定理により



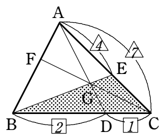
$$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{AF}{FB}=1$$

BD : DC＝2 : 1，AF : FB＝2 : 3 であるから

$$\dfrac{2}{1}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{2}{3}=1$$

よって　$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{3}{4}$　したがって　CE : EA＝3 : 4

△BCE と直線 AD において，メネラウスの定理により



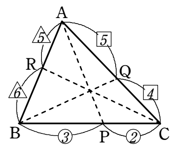
$$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CA}{AE}\times\dfrac{EG}{GB}=1$$

BD : DC＝2 : 1，CA : AE＝(3＋4) : 4＝7 : 4 である
から　$\dfrac{2}{1}\times\dfrac{7}{4}\times\dfrac{EG}{GB}=1$

よって　$\dfrac{EG}{GB}=\dfrac{2}{7}$　したがって　BG : GE＝7 : 2

$\boxed{12}$

証明　BP : PC＝3 : 2，CQ : QA＝4 : 5，
AR : RB＝5 : 6

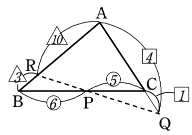


よって　$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{6}=1$

したがって，チェバの定理の逆により，3 直線 AP，
BQ，CR は 1 点で交わる。　終

$\boxed{13}$

証明　BP : PC＝6 : 5，　CQ : QA＝1 : 4，
AR : RB＝10 : 3



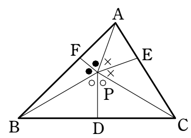
よって

$$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{6}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{10}{3}=1$$

したがって，メネラウスの定理の逆により，3 点 P，
Q，R は一直線上にある。　終

$\boxed{14}$

PD，PE，PF はそれぞれ ∠BPC，∠CPA，∠APB の
二等分線であるから



BD : DC＝PB : PC，　CE : EA＝PC : PA，
AF : FB＝PA : PB

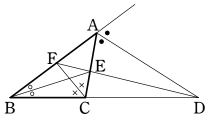
すなわち　$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{PB}{PC}$，$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{PC}{PA}$，$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{PA}{PB}$

よって　$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{PB}{PC}\cdot\dfrac{PC}{PA}\cdot\dfrac{PA}{PB}=1$

したがって，チェバの定理の逆により，AD，BE，CF は 1 点で交わる。

$\boxed{15}$

AD は ∠A の外角の二等分線であるから



$$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}\quad\cdots\cdots①$$

また，BE，CF は ∠B，∠C の二等分線であるから

$$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{BC}{BA}\quad\cdots\cdots②$$

$$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{CA}{CB}\quad\cdots\cdots③$$

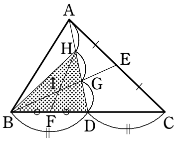
①，②，③ の辺々を掛けて　$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{BC}{BA}\cdot\dfrac{CA}{CB}=1$

よって，メネラウスの定理の逆により，3 点 D，E，F は 1 つの直線上にある。

レベルA

1

AD，BE は △ABC の中線であるから，
その交点 G は △ABC の重心である。
よって　　$AG : GD=2 : 1$
仮定より，$AG : HG=2 : 1$ であるから
　　　　$HG : GD=1 : 1$
したがって，HF，BG は △HBD の中線であるから，
その交点 I は △HBD の重心である。
よって　　$HI : IF=2 : 1$



2

(1)　$PR /\!/ BQ$ より　$PR : BQ=AP : AB=3 : (3+2)=3 : 5$

　よって　$PR=\dfrac{3}{5}BQ$　　また　$QC=\dfrac{1}{3}BQ$

　したがって　$PR : QC=\dfrac{3}{5}BQ : \dfrac{1}{3}BQ=9 : 5$

(2)　$PR /\!/ BQ$ より，$AR : RQ=AP : PB=3 : 2$ であるから

$$\triangle CRQ=\frac{2}{3}\triangle ARC=\frac{2}{3}\times 25=\frac{50}{3}\ (\mathrm{cm}^2)$$

　$\triangle PQR : \triangle CRQ=PR : QC$ で，(1) の結果から

$$\triangle PQR : \triangle CRQ=9 : 5$$

　よって　$\triangle PQR=\dfrac{9}{5}\triangle CRQ=\dfrac{9}{5}\times\dfrac{50}{3}=30\ (\mathrm{cm}^2)$

3

△ABC の面積を S とする。

$\dfrac{\triangle AEF}{\triangle ABC}=\dfrac{AF}{AB}\cdot\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}$ であるから

$$\triangle AEF=\frac{2}{5}\triangle ABC=\frac{2}{5}S$$

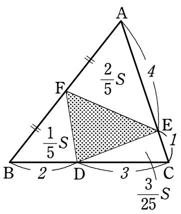
同様にして，$\dfrac{\triangle BDF}{\triangle ABC}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}$ から　$\triangle BDF=\dfrac{1}{5}S$

$\dfrac{\triangle CDE}{\triangle ABC}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{25}$ から　$\triangle CDE=\dfrac{3}{25}S$

ゆえに　$\triangle DEF=\triangle ABC-\triangle AEF-\triangle BDF-\triangle CDE$

$$=S-\frac{2}{5}S-\frac{1}{5}S-\frac{3}{25}S=\frac{7}{25}S$$

よって　$\dfrac{7}{25}S=14$　　したがって　$S=14\cdot\dfrac{25}{7}=50$



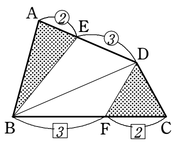
4

$\triangle ABE : \triangle ABD=AE : AD=2 : 5$
$\triangle CDF : \triangle CDB=CF : CB=2 : 5$

よって　$\triangle ABE+\triangle CDF=\dfrac{2}{5}\triangle ABD+\dfrac{2}{5}\triangle CDB$

$$=\frac{2}{5}(\triangle ABD+\triangle CDB)$$

$$=\frac{2}{5}\times 100=40\ (\mathrm{cm}^2)$$



5

(1)　∠BAD＝∠CAD であるから，三角形の内角の二等分線と比の定理により

$$BD : DC=AB : AC=15 : 9=5 : 3$$

　ここで，BC＝16 cm であるから

$$BD=\frac{5}{5+3}\times BC=\frac{5}{8}\times 16=10\ (\mathrm{cm})$$

(2)　∠ABF＝∠DBF であるから，三角形の内角の二等分線と比の定理により

$$AF : FD=BA : BD=15 : 10=3 : 2$$

(3)　(2) の結果より，$AF : FD=3 : 2$ であるから

$$\triangle ABF : \triangle ABD=3 : (3+2)=3 : 5$$

　よって　$\triangle ABD=\dfrac{5}{3}\triangle ABF$　……①

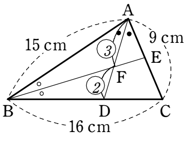
　また，$BD : DC=5 : 3$ であるから

$$\triangle ABD : \triangle ABC=5 : (5+3)=5 : 8$$

　よって　$\triangle ABC=\dfrac{8}{5}\triangle ABD$　……②

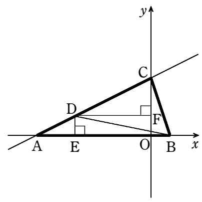
　①，② から　$\triangle ABC=\dfrac{8}{5}\times\dfrac{5}{3}\triangle ABF=\dfrac{8}{3}\triangle ABF$

　したがって　$\triangle ABF : \triangle ABC=3 : 8$



6

(1)　D から x 軸，y 軸に引いた垂線の足をそれぞれ E，F とする。



　$\triangle ABD : \triangle CBD=1 : 2$ であるから　$AD : DC=1 : 2$

　したがって，$DF : AO=CD : CA=2 : 3$ であるから

$$DF=\frac{2}{3}AO=\frac{2}{3}\times 12=8$$

　よって，D の x 座標は　-8

　同様に考えると，$DE : CO=1 : 3$ であるから　$DE=\dfrac{1}{3}CO=\dfrac{1}{3}\times 6=2$

　よって，D の y 座標は　2

　以上から，点 D の座標は　$(-8,\ 2)$

(2)　点 B を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線は，線分 AC の中点 M を通る。

　(1) と同様に考えると，M の座標は　$(-6,\ 3)$

　B と M を通る直線の式を $y=ax+b$ とおくと　$0=2a+b$，　$3=-6a+b$

　これを，連立方程式として解くと　$a=-\dfrac{3}{8}$，$b=\dfrac{3}{4}$

　よって，求める直線の式は　$y=-\dfrac{3}{8}x+\dfrac{3}{4}$

7

$\triangle CDB=\dfrac{1}{4}\triangle ABC$ であるから

$$\triangle ABC : \triangle CDB=4 : 1$$

よって　$AD : DB=(4-1) : 1=3 : 1$

点 A から x 軸に垂線 AE を引き，点 D から，x 軸，線分 AE にそれぞれ垂線 DF，DG を引く。

点 D の座標を $(x,\ y)$ とする。

$DF /\!/ AE$ であるから　$BF : FE=BD : DA$

すなわち　$(6-x) : \{x-(-2)\}=1 : 3$

よって　$x=4$

$GD /\!/ EB$ であるから　$AG : GE=AD : DB$

すなわち　$(4-y) : y=3 : 1$

よって　$y=1$

したがって，点 D の座標は　$(4,\ 1)$

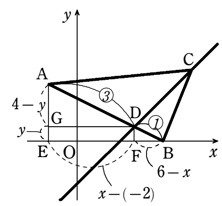
求める直線の式を $y=ax+b$ とおく。

　$x=4$ のとき $y=1$ であるから　$1=4a+b$　……①

　$x=8$ のとき $y=5$ であるから　$5=8a+b$　……②

①，② を解くと　$a=1$，$b=-3$

したがって　$y=x-3$



8

(1)　$CD /\!/ BO$ であるから　$\triangle BOC=\triangle BOD$

　$DO : OA=3 : 7$ であるから　$\triangle BOD : \triangle ABO=DO : OA=3 : 7$

　よって　$\triangle BOC : \triangle ABO=3 : 7$

(2)　点 B の座標を $(a,\ b)$ とおく。

$$\text{(四角形 ABCO の面積)}=\triangle BOC+\triangle ABO$$
$$=\triangle BOD+\triangle ABO$$
$$=\triangle ABD$$

　△ABD において，AD を底辺と考えたときの高さは，点 B の y 座標 b である。

　四角形 ABCO の面積が 25，$AD=7-(-3)=10$ であるから

$$25=\frac{1}{2}\times 10\times b\qquad したがって\qquad b=5$$

　すなわち　$B(a,\ 5)$

　$CD /\!/ BO$ であるから，直線 OB の傾きと，直線 DC の傾きは等しい。

　OB の傾きは　$\dfrac{5-0}{a-0}=\dfrac{5}{a}$，　DC の傾きは　$\dfrac{4-0}{1-(-3)}=1$

　よって　$\dfrac{5}{a}=1$　　したがって　$a=5$

　よって，点 B の座標は　$(5,\ 5)$

9

(ア)　TC　　(イ)　OA　　(ウ)　OA

レベルB

[10]

（ア）QC　　（イ）$\dfrac{DQ}{QC}$　　（ウ）$\dfrac{AQ}{QD}$

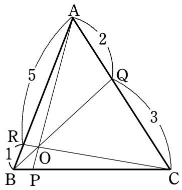
[11]

(1)　△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち　$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{1}=1$

$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{2}{15}$ より　　BP : PC＝2 : 15



(2)　△ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

(1) より，BC : CP＝17 : 15 であるから

$$\frac{17}{15}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{5}{1}=1$$

$\dfrac{PO}{OA}=\dfrac{3}{17}$ より　　PO : OA＝3 : 17

(3)　△OBC と △ABC において，辺 BC を共通の底辺とみると，高さの比は PO : PA に等しい。
したがって，面積比 △OBC : △ABC は，PO : PA に等しい。
(2) より，PO : PA＝3 : 20 であるから　　△OBC : △ABC＝3 : 20

[12]

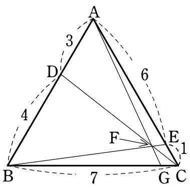
(1)　AD＝3，DB＝7－3＝4，AE＝6，CE＝7－6＝1
チェバの定理により

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

ゆえに　$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{BG}{GC}\cdot\dfrac{1}{6}=1$

よって　BG＝8GC

ゆえに　$CG=\dfrac{1}{9}\cdot BC=\dfrac{1}{9}\cdot 7=\dfrac{7}{9}$



(2)　△ABC と直線 EF について，メネラウスの定理により

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$$

ゆえに　$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=1$

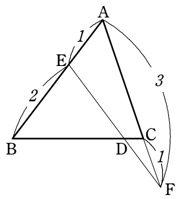
よって　BD : DC＝6 : 1

△AEF と直線 BC について，メネラウスの定理により

$$\frac{ED}{DF}\cdot\frac{FC}{CA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$$

ゆえに　$\dfrac{ED}{DF}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}=1$

よって　ED : DF＝4 : 3

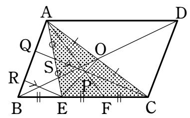


[1]

(1)　ER∥CQ であるから

BR : RQ＝BE : EC＝1 : 2

(2)　△AEC において，AF，EO は中線であるから，その交点 P は △AEC の重心である。
よって，直線 CP と辺 AE の交点を S とすると，S は辺 AE の中点である。
また，QS∥RE であるから，中点連結定理の逆により，点 Q は線分 AR の中点である。
よって　　RQ＝QA



(1) より，$BR=\dfrac{1}{2}RQ$ であるから

$$AQ : QB=RQ : \left(RQ+\frac{1}{2}RQ\right)=RQ : \frac{3}{2}RQ=2 : 3$$

[2]

証明　線分 AC，BD の交点を I とする。
長方形 AEGC を取り出して考える。
AI＝IC であるから

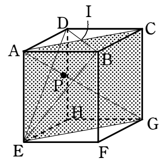
$$AI=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}EG$$

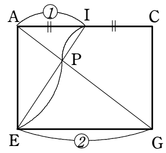
AI∥EG であるから

EP : PI＝EG : AI

$$=EG : \frac{1}{2}EG=2 : 1$$

IB＝DI であるから，EI は △BDE の中線であり，点 P はその中線を 2 : 1 に内分する。
したがって，点 P は △BDE の重心である。　終





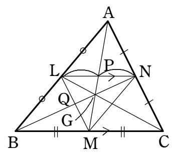
[3]

証明　△ABC の重心を G とする。
△ABC において，点 L，N はそれぞれ辺 AB，AC の中点であるから，中点連結定理により

LN∥BC

よって，線分 AM と LN の交点を P とすると，△ABM において，中点連結定理の逆により，点 P は線分 AM の中点である。
よって，中点連結定理により

$$LP=\frac{1}{2}BM,\ NP=\frac{1}{2}CM$$



BM＝CM であるから　　LP＝NP
よって，点 P は線分 LN の中点であるから，線分 MP は △LMN の中線である。
また，線分 BN と LM の交点を Q とすると，同様にして，線分 NQ は △LMN の中線である。
△LMN の中線 MP，NQ の交点は G であるから，△LMN の重心は点 G である。
よって，△ABC の重心と △LMN の重心は一致する。　終

$\boxed{4}$

(1)　$AD /\!/ EG /\!/ BC$ であるから

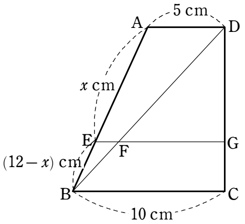
$DG : DC = AE : AB = x : 12$

$\triangle DBC$ において

$FG : BC = DG : DC$

すなわち　$FG : 10 = x : 12$

よって　$FG = \dfrac{5}{6}x$ cm



(2)　$\triangle ABD$ において，$EF /\!/ AD$ であるから

$EF : AD = BE : BA$

すなわち　$EF : 5 = (12-x) : 12$

よって　$EF = \dfrac{5}{12}(12-x)$

$EF : FG = 1 : 4$ であるから

$\dfrac{5}{12}(12-x) : \dfrac{5}{6}x = 1 : 4$

よって　$\dfrac{5}{6}x = 4 \times \dfrac{5}{12}(12-x)$

これを解くと　$x = 8$

(3)　$\triangle DFG = S$ とする。

$FG /\!/ BC$ であるから　$\triangle DFG \backsim \triangle DBC$

$DF : DB = AE : AB$ より，$DF : DB = 8 : 12 = 2 : 3$ であるから，

面積比は　$\triangle DFG : \triangle DBC = 2^2 : 3^2 = 4 : 9$

よって　$\triangle DBC = \dfrac{9}{4}S$

また，$\triangle ABD : \triangle DBC = AD : BC = 1 : 2$ であるから

$\triangle ABD = \dfrac{1}{2}\triangle DBC = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{4}S = \dfrac{9}{8}S$

よって，台形 ABCD の面積は

$\triangle ABD + \triangle DBC = \dfrac{9}{8}S + \dfrac{9}{4}S = \dfrac{27}{8}S$

であるから，台形 ABCD の面積は $\triangle DFG$ の $\dfrac{27}{8}$ 倍である。

$\boxed{5}$

(1)　$\triangle APE : \triangle EPC = AE : EC = 2 : 1$

よって　$\triangle APE = 2\triangle EPC = 2y$

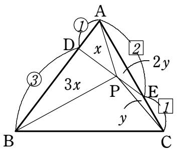
したがって

$\triangle ADE = \triangle APD + \triangle APE$

$= x + 2y$ (cm^2)

$\triangle BPD : \triangle APD = BD : DA = 3 : 1$

よって　$\triangle BPD = 3\triangle APD = 3x$



$\triangle PBC = \dfrac{1}{2}\triangle ABC$　であるから

$\triangle PBC = \triangle BPD + \triangle APD + \triangle APE + \triangle EPC$

$= 3x + x + 2y + y = 4x + 3y$ (cm^2)

(2)　$\triangle ADE = \dfrac{AD}{AB} \times \dfrac{AE}{AC} \times \triangle ABC = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3} \times 30 = 5$

よって，(1) から　$x + 2y = 5$　…… ①

また　$\triangle PBC = \dfrac{1}{2}\triangle ABC = 15$

よって，(1) から　$4x + 3y = 15$　…… ②

①，② を解くと　$x = 3$，$y = 1$

$\boxed{6}$

(1)　AS は $\angle DAB$ の二等分線であるから　$DS : SB = AD : AB = 6 : 10 = 3 : 5$

$DP /\!/ AB$ より　$DP : AB = DS : SB$

$DP : 10 = 3 : 5$

$DP = 6$

よって，$PC = 10 - 6 = 4$ であるから

$DP : PC = 6 : 4 = 3 : 2$

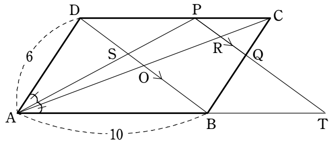
(2)　平行四辺形 ABCD の面積を S とすると　$\triangle ACD = \dfrac{1}{2}S$

$DP : PC = 3 : 2$ であるから

$\triangle ACP = \dfrac{2}{3+2}\triangle ACD = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2}S = \dfrac{1}{5}S$

よって，$\triangle ACP$ の面積は平行四辺形 ABCD の面積の $\dfrac{1}{5}$ 倍である。

(3)　直線 AB と直線 PQ の交点を T とする。



$PQ /\!/ DB$ より　$BQ : QC = DP : PC = 3 : 2$

また，$BT /\!/ PC$ より　$BT : PC = BQ : QC$

$BT : 4 = 3 : 2$

よって　$BT = 6$

$AT /\!/ PC$ より

$AR : RC = AT : PC = (10+6) : 4 = 4 : 1$

したがって

$\triangle ARP = \dfrac{4}{4+1}\triangle ACP = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{5}S = \dfrac{4}{25}S$

$PR /\!/ SO$ より　$\triangle ARP \backsim \triangle AOS$

$AS : SP = AB : DP = 5 : 3$ であるから，その相似比は

$AP : AS = (5+3) : 5 = 8 : 5$

よって，面積比は　$8^2 : 5^2 = 64 : 25$

したがって，四角形 ORPS の面積は　$\dfrac{64-25}{64}\triangle ARP = \dfrac{39}{64} \times \dfrac{4}{25}S = \dfrac{39}{400}S$

よって，四角形 ORPS の面積は平行四辺形 ABCD の面積の $\dfrac{39}{400}$ 倍である。

$\boxed{7}$

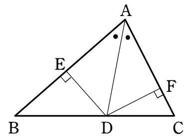
(1)　点 D から，辺 AB，AC に引いた垂線の足を，それぞれ E，F とする。

このとき，$\triangle ADE$ と $\triangle ADF$ において

$\angle DEA = \angle DFA = 90°$

$AD = AD$　(共通)

$\angle EAD = \angle FAD$　(仮定)



直角三角形 ADE と ADF は，斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから　$\triangle ADE \equiv \triangle ADF$

よって　$DE = DF$

ここで，$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において，底辺をそれぞれ AB，AC として考えると，高さが $DE = DF$ で等しいから，その面積比は，底辺の長さの比に等しい。

したがって　$\triangle ABD : \triangle ACD = AB : AC$

(2)　$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において，底辺をそれぞれ BD，DC として考えると，高さが等しいから，その面積比は，底辺の長さの比に等しい。

よって　$\triangle ABD : \triangle ACD = BD : DC$

これと，(1) の結果から　$BD : DC = AB : AC$

$\boxed{8}$

DN と EM の交点を O とする。

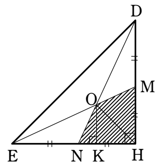
DN，EM は $\triangle DEH$ の中線であるから，その交点 O は $\triangle DEH$ の重心である。

よって　$EO : EM = 2 : 3$

O から辺 EH に引いた垂線の足を K とすると，

$OK /\!/ MH$ であるから　$OK : MH = EO : EM$

$OK : 3 = 2 : 3$



よって　$OK = 2$

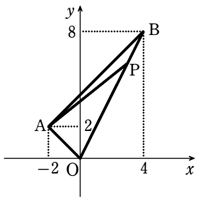
したがって　$\triangle ONH = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$ (cm^2)

同様に考えると　$\triangle OMH = 3$ (cm^2)

したがって，求める体積は　$\dfrac{1}{3} \times (3+3) \times 6 = 12$ (cm^3)

9

(1)　△AOB は上底の長さが 2，下底の長さが 8，高さが 6 の台形から，底辺の長さが 2，高さが 2 の直角三角形と，底辺の長さが 4，高さが 8 の直角三角形を除いたものである。



よって

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times6\times(2+8)-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times4\times8=12$

$\triangle ABP=3$ のとき，$\triangle AOP=12-3=9$ であるから

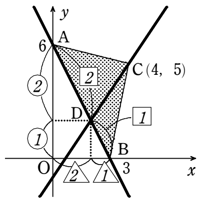
$OP:OB=9:12=3:4$

したがって，P の x 座標は $4\times\frac{3}{4}=3$，y 座標は $8\times\frac{3}{4}=6$

すなわち，P の座標は　(3，6)

(2)　条件より，$\triangle ADC:\triangle BDC=2:1$ であるから

$AD:DB=2:1$



よって，D の x 座標は $3\times\frac{2}{3}=2$，y 座標は $6\times\frac{1}{3}=2$

すなわち，D の座標は (2，2) である。

C と D を通る直線の式を $y=ax+b$ とおくと

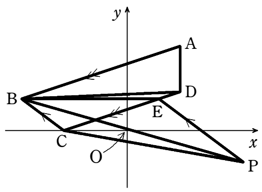
$5=4a+b$

$2=2a+b$

これを，連立方程式として解くと　$a=\frac{3}{2}$，$b=-1$

よって，求める直線の式は　　$y=\frac{3}{2}x-1$

10



(1)　直線 AB の傾きは　　$\frac{3-8}{(-10)-5}=\frac{1}{3}$

AB∥CD より，直線 CD の式は $y=\frac{1}{3}x+k$ とおける。

C を通ることから　　$0=\frac{1}{3}\times(-6)+k$

$k=2$

よって，直線 CD の式は　　$y=\frac{1}{3}x+2$　　……①

また，直線 BC の傾きは　　$\frac{0-3}{-6-(-10)}=-\frac{3}{4}$

BC∥EP より，直線 EP の式は $y=-\frac{3}{4}x+m$ とおける。

直線 EP は点 P を通るから　　$-3=-\frac{3}{4}\times11+m$

$m=\frac{21}{4}$

よって，直線 EP の式は　　$y=-\frac{3}{4}x+\frac{21}{4}$　　……②

①，② を連立方程式として解くと　　$x=3$，$y=3$

したがって，E の座標は　(3，3)

(2)　BC∥EP より　$\triangle PBC=\triangle EBC$

よって，$\triangle DBC:\triangle EBC=11:9$ であるから　　$CD:CE=11:9$

D の x 座標を t とすると　$\{t-(-6)\}:\{3-(-6)\}=11:9$　　したがって　$t=5$

また，D の y 座標は　　$\frac{1}{3}\times5+2=\frac{11}{3}$

よって，D の座標は　　$\left(5,\ \frac{11}{3}\right)$

11

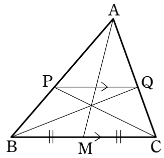
チェバの定理により　$\frac{BM}{MC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AD}{DB}=1$

仮定より　$\frac{BM}{MC}=\frac{1}{1}=1$　であるから　$\frac{CE}{EA}\times\frac{AD}{DB}=1$　　よって　$\frac{CE}{EA}=\frac{DB}{AD}$

すなわち　　　$AE:EC=AD:DB$

線分の比と平行線の定理から　　DE∥BC

12



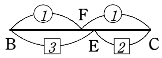
PQ∥BC であるから　　$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$

また，M は辺 BC の中点であるから　　$BM=MC$

よって　　$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AP}{PB}=1\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AQ}{QC}=1$

したがって，チェバの定理の逆により，3 直線 AM，BQ，CP は 1 点で交わる。

13



(1)　$BE:EC=3:2$ であるから　　$BE=\frac{3}{5}BC$　……①

点 F は，辺 BC の中点であるから　$BF=\frac{1}{2}BC$

このとき　　$EF=BE-BF=\frac{3}{5}BC-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{10}BC$　……②

①，② から　$BE:EF=\frac{3}{5}BC:\frac{1}{10}BC=6:1$

(2)　(1) の結果から　　$\frac{BE}{EF}=\frac{6}{1}$

三角形の重心は，各中線を 2：1 に内分するから　　$\frac{FG}{GA}=\frac{1}{2}$

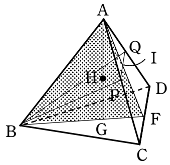
仮定から　　$\frac{AD}{DB}=\frac{1}{3}$

よって　　$\frac{BE}{EF}\times\frac{FG}{GA}\times\frac{AD}{DB}=\frac{6}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=1$

したがって，メネラウスの定理の逆により，3 点 D，G，E は一直線上にある。

1

直線 BG と辺 CD の交点を F とし，線分AF と PQ の交点を I とする。



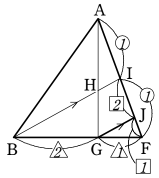
△ACD において，点 P，Q はそれぞれ辺 AC，AD の中点であるから，中点連結定理により

PQ∥CD

よって，中点連結定理の逆により

AI : IF＝1 : 1　　……①

線分 AG，BF を含む平面の上で考える。



点 G は △BCD の重心であるから

BG : GF＝2 : 1

ここで，BI∥GJ となるように辺 AF 上に点 J をとる。

BI∥GJ であるから

IJ : JF＝BG : GF＝2 : 1

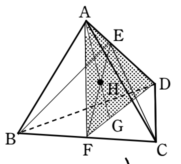
よって，① から　　$IJ=\frac{2}{3}\times IF=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}AF=\frac{1}{3}AF$

HI∥GJ であるから

$AH : HG=AI : IJ=\frac{1}{2}AF : \frac{1}{3}AF=3 : 2$

2

線分 AD，AG を含む平面の上で考える。

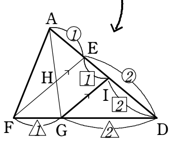


直線 DG と辺 BC との交点を F とすると，点 H は線分 AG，EF の交点となる。

点 G は △BCD の重心であるから

DG : GF＝2 : 1

ここで，FE∥GI となるように，辺 AD 上に点 I をとる。



FE∥GI であるから

DI : IE＝DG : GF＝2 : 1

よって　　$EI=\frac{1}{3}DE=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}AD=\frac{2}{9}AD$

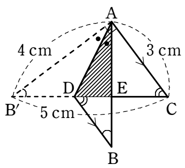
HE∥GI であるから

AH : HG＝AE : EI

$=\frac{1}{3}AD : \frac{2}{9}AD=3 : 2$　答

3

右の図のように，もとの三角形を △AB′C とし，AB と DC の交点を E とする。



△AB′C において　　　∠B′＋∠C＝90°

AC∥DB であるから　　∠BDE＝∠ACE

折り返した角は等しいから　∠AB′E＝∠EBD

よって，△BDE において　∠B＋∠D＝90°

したがって，AE⊥DC である。

△AB′E と △CB′A において

∠AEB′＝∠CAB′　(＝90°)

∠AB′E＝∠CB′A　(共通)

2 組の角がそれぞれ等しいから　　△AB′E∽△CB′A

よって　　AE : CA＝AB′ : CB′

AE : 3＝4 : 5

$AE=\frac{12}{5}$

同様にして　B′E : B′A＝AB′ : CB′

B′E : 4＝4 : 5

$B'E=\frac{16}{5}$

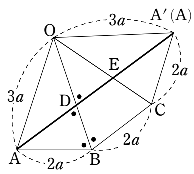
よって　　$\triangle AB'E=\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}\times\frac{12}{5}=\frac{96}{25}\ (cm^2)$

∠B′AD＝∠EAD であるから　　　$B'D : DE=AB' : AE=4 : \frac{12}{5}=5 : 3$

したがって，求める図形の面積は　　$\triangle ADE=\frac{96}{25}\times\frac{3}{5+3}=\frac{36}{25}\ (cm^2)$

4

(1)　正三角錐の側面の展開図を考える。糸の長さが最短となるためには，右の図のように，直線 AA′ と辺 OB，OC の交点をそれぞれ D，E とすればよい。



このとき，図は左右対称であるから　　AA′∥BC

[1]　AD の長さについて

△OAB と △OBC は合同な二等辺三角形であるから　　∠OBA＝∠OBC

また，平行線の錯角は等しいから

∠OBC＝∠ADB

よって　　∠OBA＝∠ADB

したがって，△ABD は AB＝AD の二等辺三角形である。

よって　　$AD=2a$

[2]　DE の長さについて

△OAB∽△ABD であるから

OA : AB＝AB : BD

$3a : 2a=2a : BD$

$BD=\frac{4}{3}a$

よって　　$OD=3a-\frac{4}{3}a=\frac{5}{3}a$

DE∥BC であるから

DE : BC＝OD : OB

$DE : 2a=\frac{5}{3}a : 3a$

したがって　　$DE=\frac{10}{9}a$

[3]　EA′ の長さについて　　$EA'=AD=2a$

[1]～[3] から，求める糸の長さは　　$AD+DE+EA'=2a+\frac{10}{9}a+2a=\frac{46}{9}a$

(2)　2 つの立体について，底面を △ODE，四角形 DBCE と考えると，高さが等しいから，体積比は △ODE と四角形 DBCE の面積比に等しい。

△ODE と △OBC は相似で，相似比は (1) から

$DE : BC=\frac{10}{9}a : 2a=5 : 9$

よって　　　　$\triangle ODE : \triangle OBC=5^2 : 9^2=25 : 81$

したがって　　$V : V'=25 : (81-25)=25 : 56$

5

(1)　△BCF と直線 AE について，メネラウスの定理により　$\frac{BE}{EC}\times\frac{CA}{AF}\times\frac{FQ}{QB}=1$

仮定から　　$\frac{BE}{EC}=\frac{2}{1}$，　$\frac{CA}{AF}=\frac{2+1}{1}=\frac{3}{1}$

よって　　$\frac{2}{1}\times\frac{3}{1}\times\frac{FQ}{QB}=1$

$\frac{FQ}{QB}=\frac{1}{6}$

したがって　　BQ : QF＝6 : 1

(2)　(1) の結果より，BQ : QF＝6 : 1 であるから

△BQA : △ABF＝6 : (6＋1)＝6 : 7

よって　　$\triangle ABF=\frac{7}{6}\triangle BQA$　……①

また，CF : AF＝2 : 1 であるから

△ABF : △ABC＝1 : (2＋1)＝1 : 3

したがって　　△ABC＝3△ABF　　……②

①，② から　　$\triangle ABC=3\times\frac{7}{6}\triangle BQA=\frac{7}{2}\triangle BQA$

よって　　△ABC : △BQA＝7 : 2

(3)　△CRB，△APC についても，(2) と同様に考えて

$\triangle CRB=\triangle APC=\triangle BQA=\frac{2}{7}\triangle ABC$

このとき　　△PQR＝△ABC－△CRB－△APC－△BQA

$=\triangle ABC-3\times\frac{2}{7}\triangle ABC=\frac{1}{7}\triangle ABC$

したがって　　△ABC＝7△PQR

よって，△ABC の面積は，△PQR の面積の 7 倍である。

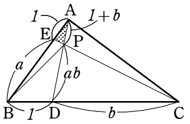
6 [青チャート数学A 宮崎大]

(1) △ABD と直線 CE について，メネラウスの定理により　$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}}=1$

よって　$\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1+b}{b}\cdot\dfrac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}}=1$　　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{DP}}=\dfrac{1+b}{ab}$

したがって　$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=(1+b):ab$

(2) $\dfrac{\triangle\mathrm{APE}}{\triangle\mathrm{APB}}=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{1+a}$，$\dfrac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{1+b}$



更に，(1) から

$$\frac{\triangle\mathrm{APB}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}=\frac{1+b}{1+b+ab}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\triangle\mathrm{APE}}{\triangle\mathrm{ABC}}&=\frac{\triangle\mathrm{APE}}{\triangle\mathrm{APB}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{APB}}{\triangle\mathrm{ABD}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{ABC}}\\&=\frac{1}{1+a}\cdot\frac{1+b}{1+b+ab}\cdot\frac{1}{1+b}\\&=\frac{1}{(1+a)(1+b+ab)}\end{aligned}$$

すなわち　$\triangle\mathrm{APE}:\triangle\mathrm{ABC}=1:(1+a)(1+b+ab)$

7

(1) △ABC において，チェバの定理により

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1\quad\cdots\cdots①$$

また，△ABC と直線 RS について，メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}\times\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1\quad\cdots\cdots②$$

①，② から　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}$

よって　$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{BS}:\mathrm{SC}$

(2) $\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{CAP}$ であるとき，AP は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$

これと (1) から

$$\mathrm{BS}:\mathrm{SC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$

よって，AS は ∠A の外角の二等分線である。

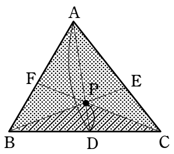
$\angle\mathrm{A}+(\angle\mathrm{A}\text{ の外角})=180^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{PAS}&=\angle\mathrm{CAP}+\angle\mathrm{CAS}\\&=\frac{1}{2}\{\angle\mathrm{A}+(\angle\mathrm{A}\text{ の外角})\}=90^\circ\end{aligned}$$

8

証明　$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{PBC}=\mathrm{AD}:\mathrm{PD}$ であるから

$$\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AD}}=\frac{\triangle\mathrm{PBC}}{\triangle\mathrm{ABC}}$$



同様にして　$\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{BE}}=\dfrac{\triangle\mathrm{PCA}}{\triangle\mathrm{ABC}}$

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{CF}}=\frac{\triangle\mathrm{PAB}}{\triangle\mathrm{ABC}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AD}}+\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{BE}}+\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{CF}}&=\frac{\triangle\mathrm{PBC}}{\triangle\mathrm{ABC}}+\frac{\triangle\mathrm{PCA}}{\triangle\mathrm{ABC}}+\frac{\triangle\mathrm{PAB}}{\triangle\mathrm{ABC}}\\&=\frac{\triangle\mathrm{PBC}+\triangle\mathrm{PCA}+\triangle\mathrm{PAB}}{\triangle\mathrm{ABC}}\\&=\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{ABC}}=1\end{aligned}$$ 終

9

(1) △ABP と直線 RC について，メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}\times\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}\times\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

よって　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BC}}\times\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}$

(2) △APC と直線 QB について，メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BP}}\times\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}\times\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=1$$

よって　$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BC}}\times\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}+\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}&=\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BC}}\times\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}+\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BC}}\times\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}\\&=\left(\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BC}}+\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BC}}\right)\times\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}\\&=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BC}}\times\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

すなわち　$\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}+\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}$

10

△BCG と直線 DQF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DG}}\cdot\frac{\mathrm{GQ}}{\mathrm{QB}}=1\quad\cdots\cdots①$$

ここで，四角形 ABCD，EBFP，PFCG，AEGD はいずれも平行四辺形であるから

$$\mathrm{CD}=\mathrm{BA},\quad \mathrm{BF}=\mathrm{EP},$$
$$\mathrm{FC}=\mathrm{PG},\quad \mathrm{DG}=\mathrm{AE}$$

よって，① は　$\dfrac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PG}}\cdot\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}\cdot\dfrac{\mathrm{GQ}}{\mathrm{QB}}=1$　　すなわち　$\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PG}}\cdot\dfrac{\mathrm{GQ}}{\mathrm{QB}}=1$

したがって，△EBG と 3 点 A，P，Q において，メネラウスの定理の逆により，3 点 A，P，Q は 1 つの直線上にある。

1 ★

(1)　$\angle x$ は $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角であるから　$\angle x=\angle \mathrm{ACD}=68^\circ$
　△ABE の内角と外角について　$\angle y=110^\circ-68^\circ=42^\circ$

(2)　$\angle x$ は $\overset{\frown}{\mathrm{BAD}}$ に対する中心角であるから　$\angle x=2\angle \mathrm{BCD}=2\times104^\circ=208^\circ$
　このとき　$\angle \mathrm{BOD}=360^\circ-208^\circ=152^\circ$
　$\angle y$ は $\overset{\frown}{\mathrm{BCD}}$ に対する円周角であるから　$\angle y=\frac{1}{2}\angle \mathrm{BOD}=\frac{1}{2}\times152^\circ=76^\circ$

(3)　∠BOC は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する中心角であるから　$\angle x=2\angle \mathrm{BAC}=2\times58^\circ=116^\circ$
　OB＝OC であるから　$\angle y=(180^\circ-116^\circ)\div2=32^\circ$

(4)　$\angle x$ は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角であるから　$\angle x=\frac{1}{2}\angle \mathrm{BOC}=\frac{1}{2}\times70^\circ=35^\circ$
　△DCO の内角と外角について　$\angle \mathrm{BDC}=70^\circ+23^\circ=93^\circ$
　△DAB の内角と外角について　$\angle y=93^\circ-35^\circ=58^\circ$

(5)　∠ABC は半円の弧に対する円周角であるから　$\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$
　△ABC において　$\angle \mathrm{BCA}=180^\circ-(90^\circ+53^\circ)=37^\circ$
　$\angle x$ は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角であるから　$\angle x=\angle \mathrm{BCA}=37^\circ$
　AC と BD の交点を E とすると，△ABE の内角と外角について
　$\angle \mathrm{ABD}=118^\circ-53^\circ=65^\circ$
　$\angle y$ は $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角であるから　$\angle y=\angle \mathrm{ABD}=65^\circ$

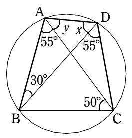
(6)　F と C を結ぶ。
　∠BFC は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角であるから　$\angle \mathrm{BFC}=\angle \mathrm{BAC}=41^\circ$
　よって　$\angle \mathrm{CFD}=74^\circ-41^\circ=33^\circ$
　$\angle x$ は $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角であるから　$\angle x=\angle \mathrm{CFD}=33^\circ$

2 ★★

(1)　1 つの円の弧の長さは，円周角の大きさに比例するから
　$36^\circ:\angle x=2:3$
　$2\angle x=108^\circ$
　よって　$\angle x=54^\circ$

(2)　長さの等しい弧に対する円周角は等しいから　$\angle x=\angle \mathrm{ACD}=48^\circ$
　また，∠ABD＝∠ADB であるから　$\angle \mathrm{BAD}=180^\circ-48^\circ\times2=84^\circ$
　よって　$\angle y=84^\circ-28^\circ=56^\circ$

3 ★★



2 点 A，D は直線 BC について同じ側にあり，
∠BAC＝∠BDC であるから，円周角の定理の逆に
より，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角について
　$\angle x=\angle \mathrm{ACB}=50^\circ$
△ABD の内角について
　$\angle y=180^\circ-(55^\circ+30^\circ+50^\circ)=45^\circ$

4 ★

△ABC と △AED において
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角より　∠ACB＝∠ADE
∠ABC は半円の弧に対する円周角であるから
　$\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$
仮定より，∠AED＝90° であるから
　∠ABC＝∠AED
よって，2 組の角がそれぞれ等しいから
　△ABC∽△AED

5 ★★

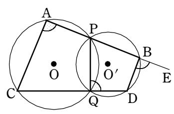
線分 AB は直径で，半円の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{ADB}}$ に対する円周角から　$\angle \mathrm{ACB}=90^\circ$
よって　$\angle \mathrm{ECF}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$
同様に，∠ADB＝90° より　$\angle \mathrm{EDF}=90^\circ$
2 点 C，D は直線 EF の同じ側にあり，∠ECF＝∠EDF であるから，円周角の定理の逆により，4 点 C，D，E，F は 1 つの円周上にある。
また，∠ECF＝∠EDF＝90° であるから，
その円は，線分 EF を直径とする円である。　終

6 ★

(1)　四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle x=71^\circ$
　△ABE において　$\angle y=180^\circ-(71^\circ+68^\circ)=41^\circ$

(2)　△BEC の内角と外角について　$\angle \mathrm{ECB}=93^\circ-31^\circ=62^\circ$　よって　$\angle x=62^\circ$
　四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle \mathrm{CDF}=93^\circ$
　よって，△DCF において　$\angle y=180^\circ-(93^\circ+62^\circ)=25^\circ$

7 ★★

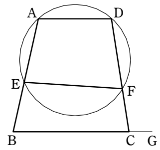


右の図のように，P と Q を結び，半直線 ABE を引く。
四角形 ACQP は円 O に内接しているから
　∠PAC＝∠PQD　…… ①
四角形 PQDB は円 O′ に内接しているから
　∠PQD＝∠EBD　…… ②
①，② から　∠PAC＝∠EBD
したがって，同位角が等しいから　AC∥BD　終

8 ★★

①　$\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{BCD}=95^\circ+75^\circ=170^\circ$
　よって，対角の和が 180° ではないから，円に内接しない。
②　△BCD において
　$\angle \mathrm{BCD}=180^\circ-(59^\circ+49^\circ)=72^\circ$
　であるから
　$\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{BCD}=108^\circ+72^\circ=180^\circ$
　よって，対角の和が 180° であるから，円に内接する。
③　AD∥BC から　$\angle \mathrm{ABC}=62^\circ$
　よって，頂点 D の外角はそれと隣り合う内角の対角に等しくないから，円に内接しない。
したがって，円に内接するのは　②

9 ★★



右の図のように，辺 BC の延長を BG とする。
AD∥BC であるから　∠ADF＝∠GCF
四角形 AEFD は円に内接するから
　∠ADF＝∠BEF
よって　∠BEF＝∠GCF
したがって，四角形 EBCF は，頂点 C の外角がそれと隣り合う内角の対角に等しいから，円に内接する。

10 ★

AP＝x とおくと　BP＝$10-x$
よって　BQ＝$10-x$
また，AR＝AP＝x であるから　CR＝$8-x$
よって　CQ＝$8-x$
したがって，辺 BC の長さについて
　$(10-x)+(8-x)=12$
　$x=3$
すなわち　AP＝3

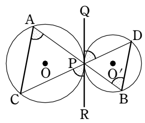
11 ★★

円外の点からその円に引いた 2 本の接線の長さは等しいから
円 O について　AM＝PM，　円 O′ について　BM＝PM
よって　AM＝BM
したがって，点 M は線分 AB の中点である。　終

12 ★

(1)　接線と弦のつくる角の定理により　$\angle x=47^\circ$，$\angle y=65^\circ$
(2)　$\angle x=50^\circ$
　また，∠CAB＝90° であるから，△ABC において
　$\angle y=180^\circ-(50^\circ+90^\circ)=40^\circ$
(3)　$\angle x=107^\circ$
　また，△BDA において　$\angle y=107^\circ-72^\circ=35^\circ$

13 ★★



点 P を通る共通接線を QR とする。
接線と弦のつくる角の定理により
　∠CPR＝∠CAP
　∠DPQ＝∠DBP
また，対頂角は等しいから
　∠CPR＝∠DPQ
よって　∠CAP＝∠DBP
したがって，錯角が等しいから　AC∥DB　終

14 ★★★

△ABP と △ACQ において
四角形 APCQ は円に内接するから
　∠APB＝∠AQC　…… ①
接線と弦のつくる角の定理により
　∠ABP＝∠APQ　…… ②
$\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}$ に対する円周角より　∠APQ＝∠ACQ　…… ③
②，③ より　∠ABP＝∠ACQ　…… ④
①，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから　△ABP∽△ACQ

15 ★

(1)　方べきの定理により
　$\mathrm{PA}\times\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\times\mathrm{PD}$
　$5\times4=6\times x$
　よって　$x=\frac{10}{3}$

(2)　方べきの定理により
　$\mathrm{PA}\times\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\times\mathrm{PD}$
　$6\times(6+x)=5\times(5+7)$
　$6\times(6+x)=60$
　$6+x=10$
よって　$x=4$

(3)　方べきの定理により
　$\mathrm{PA}\times\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$
　$4\times(4+x)=6^2$
　$4x=20$
よって　$x=5$

例題演習

16 ★★

直線 AB と CD の交点を P とする。

① $PA\times PB=4\times 6=24$,　$PC\times PD=3\times 8=24$

よって　$PA\times PB=PC\times PD$

② $PA\times PB=4\times 8=32$,　$PC\times PD=3\times 9=27$

③ $PA\times PB=3\times(3+9)=36$,　$PC\times PD=4\times(4+5)=36$

よって　$PA\times PB=PC\times PD$

したがって，方べきの定理の逆により，4 点 A，B，C，D が 1 つの円周上にあるものは

①と③

17 ★★

円 O において，方べきの定理により　$PA\times PB=PT^2$　…… ①

円 O′ において，方べきの定理により　$PA\times PB=PT'^2$　…… ②

①，②から　$PT^2=PT'^2$

$PT>0$，$PT'>0$ であるから　$PT=PT'$　終

18 ★★★

円 O において，方べきの定理により

$PT^2=PA\times PB$

円 O′ において，方べきの定理により

$PT^2=PC\times PD$

よって　$PA\times PB=PC\times PD$

したがって，方べきの定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

19 ★★

2 つの円の中心間の距離を d とおく。

(1)　$15>10+4$

よって，$d>r+r'$ となるから，2 つの円は一方が他方の外部にある。

(2)　$15=20-5$

よって，$d=r-r'$ となるから，2 つの円は内接する。

(3)　$12-5<15<12+5$

よって，$r-r'<d<r+r'$ となるから，2 つの円は 2 点で交わる。

(4)　$15=9+6$

よって，$d=r+r'$ となるから，2 つの円は外接する。

1

(1) 点 A を含まない $\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角は

$\angle BOC=360°-140°=220°$

$\angle BAC$ は，点 A を含まない $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角であるから

$\angle x=\dfrac{1}{2}\times 220°=110°$

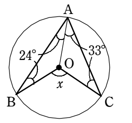
(2) $\angle ACB$ は $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であるから

$\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times 80°=40°$

$\triangle DBC$ において　$\angle x=180°-(\angle DBC+\angle DCB)$

$=180°-(62°+40°)=78°$

(3) 2 点 A，O を結ぶ。



$\angle BAC=\angle OAB+\angle OAC$

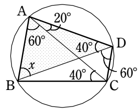
$=\angle OBA+\angle OCA$

$=24°+33°=57°$

$\angle x$ は $\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角であるから

$\angle x=2\angle BAC=2\times 57°=114°$

(4) $\angle BAC$ は $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角であるから



$\angle BAC=\angle BDC=60°$

$\angle ADB$ は $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であるから

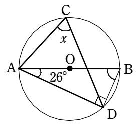
$\angle ADB=\angle ACB=40°$

よって，$\triangle ABD$ において

$\angle x=180°-(\angle BAC+\angle DAC+\angle ADB)$

$=180°-(60°+20°+40°)=60°$

(5) 2 点 B，D を結ぶ。



$\angle ADB$ は半円の弧に対する円周角であるから

$\angle ADB=90°$

$\triangle ABD$ において

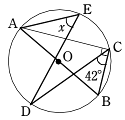
$\angle ABD=180°-(\angle BAD+\angle ADB)$

$=180°-(26°+90°)=64°$

$\angle ACD$ は $\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角であるから

$\angle x=\angle ABD=64°$

(6) 2 点 A，C を結ぶ。



$\angle ACB$ は半円の弧に対する円周角であるから

$\angle ACB=90°$

よって　$\angle ACD=90°-42°=48°$

$\angle AED$ は $\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角であるから

$\angle x=\angle ACD=48°$

2

(1) 1 つの円の弧の長さは，円周角の大きさに比例するから

$34°:\angle x=2:3$

$2\angle x=34°\times 3$

$\angle x=51°$

(2) 等しい弧に対する円周角は等しいから

$\angle x=\angle ACB=50°$

また　$\angle ADB=\angle ACB=50°$

$\triangle ABD$ において，三角形の内角の和は $180°$ であるから

$\angle x+46°+\angle y+50°=180°$

$50°+46°+\angle y+50°=180°$

$\angle y=34°$

3

(1) 2 点 A，D は直線 BC について同じ側にあり，$\angle BAC=\angle BDC$ であるから，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

このとき，$\angle x$ は $\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角であるから　$\angle x=\angle CBD=24°$

(2) $\triangle ABD$ において　$\angle BDA=180°-(90°+32°)=58°$

よって，2 点 C，D は直線 AB について同じ側にあり，$\angle BCA=\angle BDA$ であるから，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

このとき，$\angle ACD$ は $\overset{\frown}{DA}$ に対する円周角であるから　$\angle ACD=\angle ABD=32°$

よって，$\triangle ECD$ の内角と外角について　$\angle x=78°-32°=46°$

4

$\triangle ABQ$ と $\triangle APB$ において

共通な角であるから

$\angle BAQ=\angle PAB$　…… ①

$AB=AC$ であるから

$\angle ABQ=\angle ACB$

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角について

$\angle APB=\angle ACB$

よって　$\angle ABQ=\angle APB$　…… ②

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABQ\backsim\triangle APB$

$\boxed{5}$

△ABCは，AB＝ACの二等辺三角形であるから

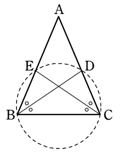
$\angle ABC = \angle ACB$

また，仮定より

$\angle EBD = \frac{1}{2}\angle ABC$

$\angle DCE = \frac{1}{2}\angle ACB$

よって　$\angle EBD = \angle DCE$



2点B，Cは直線EDについて同じ側にあり，

∠EBD＝∠DCEであるから，円周角の定理の逆により，4点B，C，D，Eは1つの円周上にある。

$\boxed{6}$

(1)　△ABEの内角について　$\angle BAE = 180° - (65° + 30°) = 85°$

四角形ABCDは円に内接しているから　$\angle x = \angle BAD = 85°$

(2)　△ABFの内角と外角の関係から　$\angle EAD = \angle x + 56°$

四角形ABCDは円に内接しているから　$\angle ADE = \angle x$

△ADEの内角について　$32° + (\angle x + 56°) + \angle x = 180°$

よって　$\angle x = 46°$

$\boxed{7}$

四角形ACQPは円Oに内接しているから

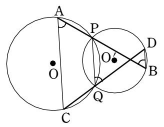
$\angle PAC = \angle PQD$　…… ①

円O′において，円周角の定理により

$\angle PQD = \angle PBD$　…… ②

①，②から　$\angle PAC = \angle PBD$

したがって，錯角が等しいから　AC∥DB



$\boxed{8}$

①　$\angle DAB + \angle BCD = 120° + 70° = 190°$

よって，対角の和が180°ではないから，円に内接しない。

②　△ACDの内角について

$\angle CDA = 180° - (20° + 30°) = 130°$

よって　$\angle ABC + \angle CDA = 50° + 130° = 180°$

したがって，対角の和が180°であるから，円に内接する。

③　$\angle DAB = 180° - 65° = 115°$

よって，頂点Cの外角がそれと隣り合う内角の対角∠DABに等しいから，円に内接する。

$\boxed{9}$

証明　AD∥BCであるから

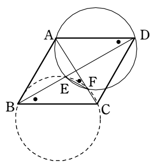
$\angle EBC = \angle ADE$

$\overset{\frown}{AE}$に対する円周角より

$\angle AFE = \angle ADE$

よって　$\angle EBC = \angle AFE$

したがって，四角形EBCFは円に内接する。　終



$\boxed{10}$

AP＝x cmとおく。

点Aから引いた接線の長さは等しいから

$AR = AP = x$

よって　$BP = 9 - x$，　$CR = 7 - x$

点Bから引いた接線の長さは等しいから

$BQ = BP = 9 - x$

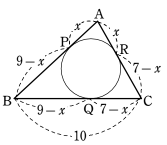
点Cから引いた接線の長さは等しいから

$CQ = CR = 7 - x$

したがって，辺BCの長さについて　$(9 - x) + (7 - x) = 10$

これを解くと　$x = 3$

よって　AP＝3 cm　答



$\boxed{11}$

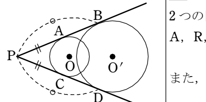
円の外部の点からその円に引いた2つの接線の長さは等しいから

$PB = PD$　…… ①

$PA = PC$　…… ②

①，②から　$PB - PA = PD - PC$

すなわち　$AB = CD$



$\boxed{12}$

(1)　$\angle x = \angle ACB = 74°$

$\angle y = \angle ABC = 56°$

(2)　$\angle x = 70°$

△ABCは，BA＝BCの二等辺三角形であるから　$\angle BAC = \angle BCA = 70°$

よって，△ABCの内角について　$\angle y = 180° - 70° \times 2 = 40°$

(3)　$\angle x = 108°$

△ABDの内角と外角について　$\angle BAD = 108° - 70° = 38°$

よって　$\angle y = 180° - (108° + 38°) = 34°$

$\boxed{13}$

点Pを通る共通接線をQRとする。

接線と弦のつくる角の定理により

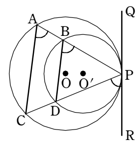
$\angle CPR = \angle CAP$

$\angle DPR = \angle DBP$

$\angle CPR = \angle DPR$　であるから

$\angle CAP = \angle DBP$

よって，同位角が等しいから　AC∥BD



$\boxed{14}$

証明　△BCDと△FEAにおいて

$\overset{\frown}{AE}$に対する円周角より　$\angle ABE = \angle AFE$

すなわち　$\angle DBC = \angle AFE$　…… ①

右側の円において，接弦定理により

$\angle ACD = \angle DAP$

すなわち　$\angle BCD = \angle DAP$　…… ②

対頂角は等しいから　$\angle DAP = \angle FAQ$　…… ③

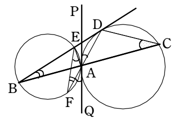
左側の円において，接弦定理により

$\angle FAQ = \angle FEA$　…… ④

②，③，④から　$\angle BCD = \angle FEA$　…… ⑤

①，⑤より，2組の角がそれぞれ等しいから

△BCD∽△FEA　終



$\boxed{15}$

(1)　$PA \times PB = PC \times PD$

$2 \times 6 = x \times 4$

よって　$x = 3$

(2)　$PB = 8 + 8 - 4 = 12$

$PA \times PB = PC \times PD$

$4 \times 12 = 6 \times x$

よって　$x = 8$

(3)　$PD = x - 9$

$PA \times PB = PC \times PD$

$6 \times 12 = 9 \times (x - 9)$

よって　$x = 17$

(4)　$PA \times PB = PC \times PD$

$8 \times 15 = x \times 12$

よって　$x = 10$

(5)　$PA \times PB = PC \times PD$

$4 \times (4 + x) = 6 \times (6 + 10)$

よって　$x = 20$

(6)　$PA \times PB = PT^2$

$3 \times (3 + x) = 6^2$

よって　$x = 9$

(7)　$PA \times PB = PT^2$

$9 \times (9 + 7) = x^2$

よって　$x = 12$

$\boxed{16}$

PA＝5，PD＝5＋3＝8，

PB＝4，PC＝4＋6＝10であるから

$PA \times PD = PB \times PC\ (= 40)$

よって，方べきの定理の逆により，4点A，B，C，Dは1つの円周上にある。

すなわち，四角形ABCDは円に内接する。

$\boxed{17}$

円Oにおいて，方べきの定理により　$EA \times EB = EC^2$　…… ①

円O′において，方べきの定理により　$EA \times EB = ED^2$　…… ②

①，②から　$EC^2 = ED^2$

$EC > 0$，$ED > 0$であるから　$EC = ED$

$\boxed{18}$

2つの円の交点をQ，Rとする。

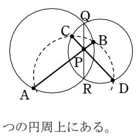
A，R，B，Qを通る円において，方べきの定理により

$PA \times PB = PQ \times PR$

また，C，R，D，Qを通る円において，方べきの定理により

$PC \times PD = PQ \times PR$

よって　$PA \times PB = PC \times PD$



したがって，方べきの定理の逆により，4点A，B，C，Dは1つの円周上にある。

レベルA

$\boxed{19}$

2 つの円の中心間の距離を d cm とおくと　$d=12$

(1)　$r=10$，$r'=4$ であるから

$$r-r'=10-4=6,\ \ r+r'=10+4=14$$

$r-r'<d<r+r'$ となっているから，2 つの円は 2 点で交わる。

(2)　$r=20$，$r'=8$ であるから

$$r-r'=20-8=12,\ \ r+r'=20+8=28$$

$d=r-r'$ となっているから，2 つの円は内接する。

(3)　$r=5$，$r'=7$ であるから

$$r'-r=7-5=2,\ \ r'+r=7+5=12$$

$d=r+r'$ となっているから，2 つの円は外接する。

(4)　$r=5$，$r'=3$ であるから

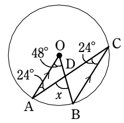
$$r-r'=5-3=2,\ \ r+r'=5+3=8$$

$d>r+r'$ となっているから，2 つの円のうち一方が他方の外部にある。

$\boxed{1}$

(1)　OA∥CB であるから

$$\angle \mathrm{OAC}=\angle \mathrm{ACB}=24^\circ$$



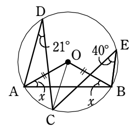
$\angle$AOB は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角であるから

$$\angle \mathrm{AOB}=2\angle \mathrm{ACB}=2\times 24^\circ=48^\circ$$

△OAD の内角と外角の性質により

$$\angle x=\angle \mathrm{OAD}+\angle \mathrm{AOD}$$
$$=24^\circ+48^\circ=72^\circ$$

(2)　2 点 O，C を結ぶ。



$\angle$AOC は $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ に対する中心角であるから

$$\angle \mathrm{AOC}=2\angle \mathrm{ADC}$$
$$=2\times 21^\circ=42^\circ$$

$\angle$BOC は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する中心角であるから

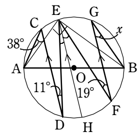
$$\angle \mathrm{BOC}=2\angle \mathrm{BEC}$$
$$=2\times 40^\circ=80^\circ$$

△OAB において

$$2\angle x=180^\circ-\angle \mathrm{AOB}=180^\circ-(42^\circ+80^\circ)=58^\circ$$

よって　　$\angle x=29^\circ$

(3)　円周上に点 H を，CD∥EH となるようにとる。



CD∥EH であるから

$$\angle \mathrm{DEH}=\angle \mathrm{CDE}=11^\circ$$

GF∥EH であるから

$$\angle \mathrm{FEH}=\angle \mathrm{GFE}=19^\circ$$

よって　　$\angle \mathrm{DEF}=11^\circ+19^\circ=30^\circ$

また，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ は半円の弧であるから　　$\angle \mathrm{AEB}=90^\circ$

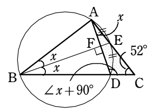
よって　　$\angle \mathrm{ACD}+\angle \mathrm{DEF}+\angle \mathrm{FGB}=90^\circ$

すなわち　　$38^\circ+30^\circ+\angle x=90^\circ$

したがって　　$\angle x=22^\circ$

(4)　$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}=\overset{\frown}{\mathrm{ED}}$ であるから

$$\angle \mathrm{CBE}=\angle \mathrm{ABE}=\angle x$$



よって，△FBD の内角と外角の性質により

$$\angle \mathrm{ADC}=\angle x+90^\circ$$

ここで，$\angle$EAD は，$\overset{\frown}{\mathrm{ED}}$ に対する円周角であるから

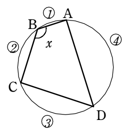
$$\angle \mathrm{EAD}=\angle \mathrm{EBD}=\angle x$$

よって，△ADC において

$$\angle x+(\angle x+90^\circ)+52^\circ=180^\circ$$

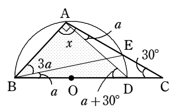
これを解いて　　$\angle x=19^\circ$

(5)　$\angle$ABC は $\overset{\frown}{\mathrm{ADC}}$ に対する円周角であるから



$$\angle x=180^\circ\times\frac{3+4}{1+2+3+4}$$
$$=180^\circ\times\frac{7}{10}$$
$$=126^\circ$$

(6)　線分 AD，BE を引く。



$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}:\overset{\frown}{\mathrm{ED}}=3:1$ であるから

$$\angle \mathrm{ABE}=3\angle \mathrm{EBD}$$

よって，$\angle \mathrm{EBD}=a$ とおくと

$$\angle \mathrm{ABE}=3a$$

$\angle$EAD は $\overset{\frown}{\mathrm{ED}}$ に対する円周角であるから

$$\angle \mathrm{EAD}=\angle \mathrm{EBD}=a$$

△ADC の内角と外角の性質により　　$\angle \mathrm{ADB}=a+30^\circ$

また，$\angle \mathrm{BAD}=90^\circ$ であるから，△ABD において

$$(3a+a)+(a+30^\circ)+90^\circ=180^\circ$$

これを解いて　　$a=12^\circ$

したがって　　$\angle x=90^\circ+12^\circ=102^\circ$

2

(1)　接弦定理により

$\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{BAT}=54^\circ$

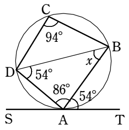
四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle \mathrm{DAB}=180^\circ-94^\circ=86^\circ$

△ABD において

$\angle x=180^\circ-(86^\circ+54^\circ)$

$=40^\circ$



(2)　２点 A，C を結ぶ。

接弦定理により

$\angle \mathrm{ACD}=\angle \mathrm{DAS}=65^\circ$

$\angle \mathrm{ACB}=\angle \mathrm{BAT}=39^\circ$

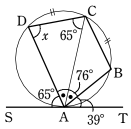
よって　$\angle \mathrm{DAB}=180^\circ-(65^\circ+39^\circ)=76^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}=\overset{\frown}{\mathrm{CB}}$ から　　$\angle \mathrm{DAC}=\angle \mathrm{CAB}$

よって　$\angle \mathrm{DAC}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{DAB}=38^\circ$

△ACD において

$\angle x=180^\circ-(38^\circ+65^\circ)=77^\circ$



(3)　２点 A，B を結ぶ。

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}:\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=2:5$ から

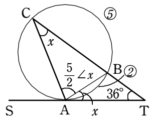
$\angle \mathrm{CAB}=\dfrac{5}{2}\angle \mathrm{ACB}=\dfrac{5}{2}\angle x$

接弦定理により

$\angle \mathrm{BAT}=\angle \mathrm{ACB}=\angle x$

△ATC において　　$\left(\dfrac{5}{2}\angle x+\angle x\right)+36^\circ+\angle x=180^\circ$

これを解いて　　$\angle x=32^\circ$



(4)　２点 E と C，F と C をそれぞれ結ぶ。

$\angle \mathrm{ECB}$ は $\overset{\frown}{\mathrm{EB}}$ の中心角であるから

$\angle \mathrm{ECB}=2\angle \mathrm{EAB}=2\times 17^\circ=34^\circ$

よって，接弦定理により

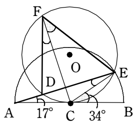
$\angle \mathrm{CFE}=\angle \mathrm{ECB}=34^\circ$

また，△CEA において，CE＝CA であるから

$\angle \mathrm{CEA}=\angle \mathrm{CAE}=17^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角により　　$\angle \mathrm{DFC}=\angle \mathrm{DEC}=17^\circ$

よって　$\angle x=17^\circ+34^\circ=51^\circ$



(5)　AD は ∠A の二等分線であるから

$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{CAD}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{A}=29^\circ$

接弦定理により　$\angle \mathrm{CAE}=\angle \mathrm{B}=48^\circ$

よって　$\angle \mathrm{DAE}=29^\circ+48^\circ=77^\circ$

また，△ABD において，内角と外角の性質から

$\angle \mathrm{ADC}=\angle \mathrm{ABD}+\angle \mathrm{BAD}$

$=48^\circ+29^\circ=77^\circ$

よって　$\angle \mathrm{ADC}=\angle \mathrm{DAE}$　……①

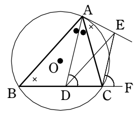
図のように点 F をとると，AD∥EC であるから

$\angle \mathrm{ADC}=\angle \mathrm{ECF}$　……②

①，② から　$\angle \mathrm{DAE}=\angle \mathrm{ECF}$

よって，四角形 ADCE は円に内接するから，$\overset{\frown}{\mathrm{CE}}$に対する円周角より

$\angle x=\angle \mathrm{CDE}=\angle \mathrm{CAE}=48^\circ$



3

(1)　△ABC において　　$\angle \mathrm{ABC}=180^\circ-(50^\circ+48^\circ)=82^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}=\overset{\frown}{\mathrm{CQ}}$ であるから　　$\angle \mathrm{QAC}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\times 50^\circ=25^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{CR}}=\overset{\frown}{\mathrm{AR}}$ であるから　　$\angle \mathrm{CBR}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{CBA}=\dfrac{1}{2}\times 82^\circ=41^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{QC}}$ に対する円周角より　$\angle \mathrm{QPC}=\angle \mathrm{QAC}=25^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{CR}}$ に対する円周角より　$\angle \mathrm{CPR}=\angle \mathrm{CBR}=41^\circ$

よって　　　　　　　　　　$\angle \mathrm{RPQ}=25^\circ+41^\circ=66^\circ$

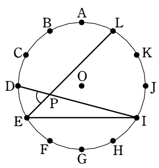
(2)　円の中心を O とする。

$\angle \mathrm{DIE}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{DOE}=\dfrac{1}{2}\times 360^\circ\times\dfrac{1}{12}=15^\circ$

$\angle \mathrm{IEL}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{IOL}=\dfrac{1}{2}\times 360^\circ\times\dfrac{3}{12}=45^\circ$

よって，△PEI の内角と外角について

$\angle \mathrm{DPE}=15^\circ+45^\circ=60^\circ$



4

(1)　四角形 ABFE は円 O′ に内接しているから

$\angle \mathrm{DAB}=69^\circ$

よって，△ADB において

$\angle \mathrm{DBA}=180^\circ-(69^\circ+56^\circ)=55^\circ$

四角形 ACDB は円 O に内接しているから

$\angle \mathrm{ACD}=180^\circ-55^\circ=125^\circ$

(2)　直線 CB と AE の交点を F とする。

△CFE の内角と外角について

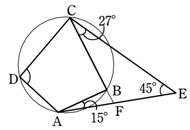
$\angle \mathrm{AFC}=27^\circ+45^\circ=72^\circ$

よって，△AFB において

$\angle \mathrm{ABF}=180^\circ-(15^\circ+72^\circ)=93^\circ$

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle \mathrm{CDA}=\angle \mathrm{ABF}=93^\circ$



(3)　A と D を結ぶ。

AB＝CD であるから，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ より

$\angle \mathrm{CAD}=\angle \mathrm{BCA}=38^\circ$

よって　$\angle \mathrm{BAD}=40^\circ+38^\circ=78^\circ$

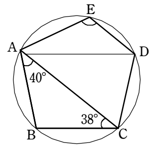
四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle \mathrm{BCD}=180^\circ-78^\circ=102^\circ$

よって　$\angle \mathrm{ACD}=102^\circ-38^\circ=64^\circ$

四角形 ACDE は円に内接しているから

$\angle \mathrm{AED}=180^\circ-64^\circ=116^\circ$



(4)　円 O の半径 OB を引く。

$\angle \mathrm{AOB}$は，円 O の $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角であるから

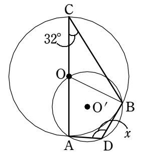
$\angle \mathrm{AOB}=2\angle \mathrm{ACB}=2\times 32^\circ=64^\circ$

$\angle x$ の頂点を D とすると，四角形 OADB は円 O′ に内接しているから

$\angle \mathrm{AOB}+\angle \mathrm{ADB}=180^\circ$

$64^\circ+\angle x=180^\circ$

よって　　　　　　$\angle x=116^\circ$



(5)　$\angle \mathrm{BAC}=x$，$\angle \mathrm{ACD}=y$ とおくと，仮定から

$\angle \mathrm{ABE}=2\angle \mathrm{ACD}=2y$

$\angle \mathrm{AEB}=4\angle \mathrm{ACD}=4y$

点 A，D，E，F は１つの円周上にあるから

$\angle \mathrm{ADC}+\angle \mathrm{AEB}=180^\circ$

すなわち　$\angle \mathrm{ADC}+4y=180^\circ$

よって　　$\angle \mathrm{ADC}=180^\circ-4y$

△ABE の内角の和が 180° であるから

$x+2y+4y=180^\circ$

すなわち　$x+6y=180^\circ$　　……①

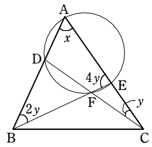
△ADC の内角の和が 180° であるから

$x+y+(180^\circ-4y)=180^\circ$

すなわち　$x-3y=0^\circ$　　……②

①，②を解くと　　$x=60^\circ$，$y=20^\circ$

したがって　　$\angle \mathrm{BAC}=60^\circ$



5

(1)　A と D を結ぶ。

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle \mathrm{C}+\angle \mathrm{BAD}=180^\circ$

四角形 ADEF も円に内接しているから

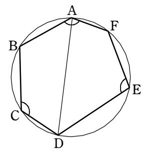
$\angle \mathrm{E}+\angle \mathrm{FAD}=180^\circ$

このとき

$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{C}+\angle \mathrm{E}=(\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{FAD})+\angle \mathrm{C}+\angle \mathrm{E}$

$=(\angle \mathrm{C}+\angle \mathrm{BAD})+(\angle \mathrm{E}+\angle \mathrm{FAD})$

$=180^\circ+180^\circ=360^\circ$



(2)　A と D，A と F をそれぞれ結ぶ。

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle \mathrm{BAD}+\angle c=180^\circ$　……①

四角形 ADEF は円に内接しているから

$\angle \mathrm{DAF}+\angle e=180^\circ$　……②

四角形 AFGH は円に内接しているから

$\angle \mathrm{FAH}+\angle g=180^\circ$　……③

$\angle a=\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{DAF}+\angle \mathrm{FAH}$ であるから，①，②，③ より

$\angle a+\angle c+\angle e+\angle g=(\angle \mathrm{BAD}+\angle c)+(\angle \mathrm{DAF}+\angle e)+(\angle \mathrm{FAH}+\angle g)$

$=180^\circ+180^\circ+180^\circ=540^\circ$

$\boxed{6}$

(1)　△ABD において　　$\angle ABD=180°-(90°+56°)=34°$

$\angle BEC=\angle BDC=90°$ で，$BM=MC$ であるから，4 点 B，C，D，E は，BC を直径，M を中心とする円周上にある。

よって，$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角と中心角の関係から

$$\angle EMD=2\angle EBD=2\times 34°=68°$$

(2)　∠ADB，∠ACB は半円の弧に対する円周角であるから

$\angle ADB=90°$，$\angle ACB=90°$

△ACP の内角と外角について

$\angle PAC+\angle APC=\angle ACB$

$\angle PAC+66°=90°$

$\angle PAC=24°$

よって，$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角より　　$\angle CBD=\angle CAD=24°$

$\angle ADE=\angle EQA=90°$ であるから，四角形 ADEQ は円に内接する。

その円の $\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角より　　$\angle DQE=\angle DAE=24°$

また，$\angle BCE=\angle EQB=90°$ であるから，四角形 BCEQ は円に内接する。

その円の $\overset{\frown}{CE}$ に対する円周角より　　$\angle CQE=\angle CBE=24°$

したがって

$\angle CQD=\angle CQE+\angle DQE$

$=24°+24°=48°$

(3)　AD は ∠BAC の二等分線であるから

$$\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 56°=28°$$

接線と弦のつくる角の定理により

$\angle CAE=\angle ABC=52°$

よって　　$\angle DAE=28°+52°=80°$

また，△ABD において，内角と外角の関係により

$\angle ADC=\angle ABD+\angle BAD=52°+28°=80°$

ゆえに　　$\angle ADC=\angle DAE$ ……①

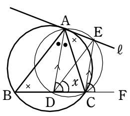
図のように BC の延長に点 F をとると，AD∥EC より

$\angle ADC=\angle ECF$ ……②

①，② より　$\angle DAE=\angle ECF$

よって，四角形 ADCE は，頂点 C の外角がそれと隣り合う内角の対角に等しいから，円に内接する。

したがって　$\angle x=\angle CDE=\angle CAE=52°$



$\boxed{7}$

(1)　$\angle BCE=x$ とおく。

接線と弦のつくる角の定理により

$\angle EAC=\angle BCE=x$

AB は円の直径であるから　　$\angle ACB=90°$

よって，△AEC の内角について

$24°+x+(90°+x)=180°$

$x=33°$

したがって　$\angle BCE=33°$

(2)　$\angle ACD=a$ とおく。

$\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{CD}=1:2$ より　　$\angle CAD=2\angle ACD=2a$

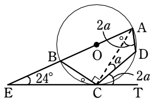
また，接線と弦のつくる角の定理により　　$\angle DCT=\angle CAD=2a$

よって，点 C における角について

$33°+90°+a+2a=180°$

$a=19°$

したがって　$\angle DCT=2\times 19°=38°$



$\boxed{8}$

$\angle ACB=180°-(52°+63°)=65°$

(1)　$\angle APB=\angle ACB$ であるから，点 P は，円 O の周上にある。

(2)　$\angle APB>\angle ACB$ であるから，点 P は，円 O の内部にある。

(3)　$\angle APB<\angle ACB$ であるから，点 P は，円 O の外部にある。

$\boxed{9}$

$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$ であるから　$\angle BAD=\angle CAD$

よって，AD は ∠BAC の二等分線であるから

$BE:EC=AB:AC=5:4$

したがって　　$BE=6\times\dfrac{5}{5+4}=\dfrac{10}{3}$ (cm)

$\boxed{10}$

△OAP と △OCQ において

四角形 APOQ は円に内接しているから

$\angle APO=\angle CQO$ ……①

△ABO と △ACO は 3 組の辺がそれぞれ等しいから

△ABO≡△ACO

よって，△ABO と △ACO はともに直角二等辺三角形で

$AO=CO$ ……②

$\angle OAP=\angle OCQ\ (=45°)$ ……③

①，③ より，残りの角も等しいから

$\angle AOP=\angle COQ$ ……④

②，③，④ より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

△OAP≡△OCQ

$\boxed{11}$

△ECB と △FDB において

円 O′ の $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角より

$\angle CEB=\angle DFB$ ……①

円 O の $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角より

$\angle ACB=\angle ADB$

よって　　$\angle ECB=\angle FDB$ ……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ECB∽△FDB

$\boxed{12}$

(1)　△DAE と △DCF において

対頂角は等しいから

$\angle ADE=\angle CDF$ ……①

3 点 A，C，E を通る円の $\overset{\frown}{AC}$ に対する円周角より

$\angle DEA=\angle DFC$ ……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△DAE∽△DCF

(2)　△BCE と △DCF において

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle EBC=\angle FDC$ ……③

② より　$\angle BEC=\angle DFC$ ……④

③，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△BCE∽△DCF

$\boxed{13}$

(1)　証明　△ACE と △BCD において

△ABC，△DCE は正三角形であるから

$AC=BC$ ……①

$CE=CD$ ……②

$\angle ACB=\angle DCE=60°$

また　$\angle ACE=\angle DCE+\angle ACD$

$=60°+\angle ACD$

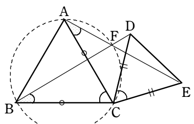
$\angle BCD=\angle ACB+\angle ACD$

$=60°+\angle ACD$

よって　　$\angle ACE=\angle BCD$ ……③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ACE≡△BCD　終



(2)　証明　△ACE≡△BCD であるから　　$\angle EAC=\angle DBC$

したがって，2 点 A，B は直線 FC の同じ側にあり，$\angle FAC=\angle FBC$ である。

よって，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，F は 1 つの円周上にある。　終

$\boxed{14}$

P と D を結ぶ。

四角形 BDPF は円に内接しているから

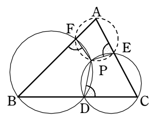
$\angle BFP=\angle CDP$ …… ①

四角形 DCEP は円に内接しているから

$\angle AEP=\angle CDP$ …… ②

①，② から　$\angle BFP=\angle AEP$

よって，四角形 AFPE は円に内接する。　終



$\boxed{15}$

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle BCD=\angle EAD$

△ADE の外接円において，$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角より

$\angle EAD=\angle EGD$

したがって　$\angle EGD=\angle FCD$

よって，四角形 DGFC は，頂点 G の外角がそれと隣り合う内角の対角に等しいから，円に内接する。

$\boxed{16}$

△EBD は二等辺三角形であるから

$\angle EBD=\angle EDB=a$

とおける。

四角形 BDQP は円に内接しているから

$\angle APQ=\angle BDQ=a$

四角形 APQC は円に内接しているから

$\angle ACE=\angle APQ=a$

よって　$\angle ABD=\angle ACE=a$

したがって，四角形 ABDC において，1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しいから，円に内接する。

レベルB

17

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times3=6$

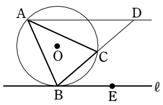
内接円の中心を I とし，半径を r とする。
$\triangle ABC$ の面積について

$\triangle ABC=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA$

$6=\frac{1}{2}\times5\times r+\frac{1}{2}\times4\times r+\frac{1}{2}\times3\times r$

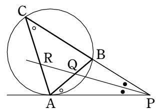
これを解いて　$r=1$
よって，内接円の半径は　1
別解　内接円の中心を I とし，内接円と辺 AB，BC，CA との接点をそれぞれ P，Q，R とする。
$\angle QCR=\angle IQC=\angle IRC=90^\circ$ であるから
$\angle QIR=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+90^\circ)=90^\circ$
よって，四角形 IQCR は長方形である。
また，CQ＝CR であるから，四角形 IQCR は正方形である。
したがって，内接円の半径を r とすると
$CQ=CR=r$
$AP=AR=3-r$
$BP=BQ=4-r$
AB＝5 から　$AP+BP=5$
$(3-r)+(4-r)=5$
$r=1$
よって，内接円の半径は　1

18



右の図のように，ℓ 上に E をとる。
$\triangle ABC$ と $\triangle DBA$ において
$\angle ABC=\angle DBA$（共通）……①
接線と弦のつくる角の定理により
$\angle BAC=\angle CBE$
AD∥BE であるから
$\angle BDA=\angle CBE$
よって　$\angle BAC=\angle BDA$　……②
①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle ABC\backsim\triangle DBA$

19

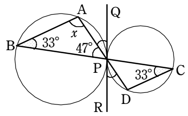


接線と弦のつくる角の定理により
$\angle BAP=\angle BCA$
仮定から　$\angle APQ=\angle CPR$
$\triangle APQ$ の内角と外角について
$\angle AQR=\angle BAP+\angle APQ$
$\triangle CPR$ の内角と外角について
$\angle ARQ=\angle BCA+\angle CPR$
よって　$\angle AQR=\angle ARQ$
したがって，$\triangle AQR$ は $\angle AQR=\angle ARQ$ の二等辺三角形で，AQ＝AR である。

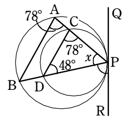
20

(1)　2 つの円が外接するとき　$13=r+5$　　よって　$r=8$
(2)　2 つの円が異なる 2 点で交わるとき　$r-5<13<r+5$
$r-5<13$ を解いて　$r<18$
$13<r+5$ を解いて　$8<r$
よって　$8<r<18$

1



(1)　点 P を通る共通接線 QR を引く。
接弦定理により
$\angle DCP=\angle DPR$
対頂角は等しいから
$\angle DPR=\angle APQ$
接弦定理により　$\angle APQ=\angle ABP$
よって　$\angle ABP=\angle DCP=33^\circ$
$\triangle ABP$ において　$\angle x=180^\circ-(33^\circ+47^\circ)=100^\circ$



(2)　点 P を通る共通接線 QR を引く。
大きい方の円において，接弦定理により
$\angle BPR=\angle BAP$
小さい方の円において，接弦定理により
$\angle DPR=\angle DCP$
よって　$\angle DCP=\angle BAP=78^\circ$
$\triangle PCD$ において　$\angle x=180^\circ-(78^\circ+48^\circ)=54^\circ$

2

(1)　$\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ において
対頂角は等しいから　$\angle AEB=\angle DEC$
$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角より　$\angle BAE=\angle CDE$
よって，2 組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle ABE\backsim\triangle DCE$
したがって　$BE:CE=AB:DC=3:2$　……①
同様に，$\triangle AED\backsim\triangle BEC$ から　$DE:CE=AD:BC=1:2$　……②
①，② から　$BE:ED=3:1$
(2)　$\triangle ABE\backsim\triangle DCE$ から　$\triangle ABE:\triangle DCE=3^2:2^2=9:4$
また，BD : ED＝4 : 1 であるから　$\triangle BCD:\triangle DCE=4:1=16:4$
したがって　$\triangle ABE:\triangle BCD=9:16$
(3)　$\triangle ABE$ と $\triangle DBC$ において
$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角より　$\angle BAE=\angle BDC$
DA＝CD より，$\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{CD}$ であるから
$\angle ABE=\angle DBC$
よって，2 組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle ABE\backsim\triangle DBC$
(2) より，$\triangle ABE:\triangle DBC=9:16$ であるから，相似比は 3 : 4 で
$AB:DB=3:4$
$9:DB=3:4$
$DB=12\,\mathrm{cm}$
したがって　$DE=12\times\frac{1}{3+1}=3\,(\mathrm{cm})$

3

$\angle DAB=\angle DAC$，$\angle DAB=\angle DBE$ から　$\angle DAC=\angle DBE$
よって，2 点 A，B は直線 EC について同じ側にあり，$\angle EAC=\angle EBC$ であるから，4 点 A，B，E，C は 1 つの円周上にある。
このとき，$\overset{\frown}{BE}$ に対する円周角より　$\angle BCE=\angle BAE$
よって，$\angle CBE=\angle BCE$ となるから　$BE=CE$
また，BE＝EF であるから　$BE=CE=EF$
したがって，点 C は線分 BF を直径，点 E を中心とする円周上にある。
よって　$\angle BCF=90^\circ$

4

(1)　円周角の定理により　$\angle PAB=\frac{1}{2}\angle POB$
すなわち　$\angle QAC=\frac{1}{2}\angle POC$
CQ は $\angle ACP$ の二等分線であるから
$\angle QCA=\frac{1}{2}\angle PCO$
したがって　$\angle QAC+\angle QCA=\frac{1}{2}(\angle POC+\angle PCO)$
$\triangle POC$ において，$\angle CPO=90^\circ$ であるから
$\angle POC+\angle PCO=180^\circ-90^\circ=90^\circ$
よって　$\angle QAC+\angle QCA=\frac{1}{2}\times90^\circ=45^\circ$
(2)　$\triangle PQC$ と $\triangle BRC$ において
CQ は $\angle ACP$ の二等分線であるから
$\angle QCP=\angle RCB$　……①
$\triangle QAC$ において，(1) の結果により
$\angle PQC=45^\circ$　……②
また，$\triangle PQR$ において，$\angle APB$ は半円の弧に対する円周角であるから
$\angle QPR=90^\circ$
よって　$\angle PRQ=180^\circ-(90^\circ+45^\circ)=45^\circ$
対頂角は等しいから　$\angle BRC=45^\circ$　……③
②，③ から　$\angle PQC=\angle BRC$　……④
①，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle PQC\backsim\triangle BRC$

5

証明　$\triangle ABD$ と $\triangle BCE$ において

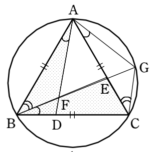
仮定から　$AB=BC$　……①

$BD=CE$　……②

$\angle ABD=\angle BCE$　……③

①，②，③より，２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD\equiv\triangle BCE$　……④



$\triangle ABF$ と $\triangle ACG$ において

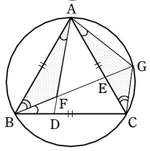
仮定から　$AB=AC$　……⑤

④から　$\angle BAF=\angle CBG$

$\overset{\frown}{CG}$ に対する円周角より

$\angle CBG=\angle CAG$

よって　$\angle BAF=\angle CAG$　……⑥



$\overset{\frown}{AG}$ に対する円周角より

$\angle ABF=\angle ACG$　……⑦

⑤，⑥，⑦より，１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF\equiv\triangle ACG$

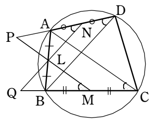
したがって　$BF=CG$　終

6

証明　$\triangle ABD$ において，点 L，N はそれぞれ辺 AB，AD の中点であるから，中点連結定理により

$LN /\!/ BD$

よって　$\angle ANL=\angle ADB$　……①



また，$\triangle BCA$ において，点 M，L はそれぞれ辺 BC，BA の中点であるから，中点連結定理により

$ML /\!/ CA$

よって　$\angle BML=\angle BCA$　……②

また，$\angle ADB$ と $\angle BCA$ は $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であるから

$\angle ADB=\angle BCA$　……③

①，②，③から　$\angle ANL=\angle BML$

したがって，２点 N，M は直線 PQ の同じ側にあり，$\angle PNQ=\angle PMQ$ である。

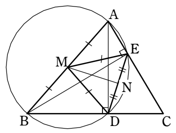
よって，円周角の定理の逆により，４点 M，N，P，Q は１つの円周上にある。　終

7

証明　$\angle ADB$ は直角であるから，３点 A，D，B は AB を直径とする円周上にある。

また，$\angle AEB$ は直角であるから，３点 A，E，B は AB を直径とする円周上にある。

よって，４点 A，B，D，E は AB を直径とする円周上にある。



その円において，MD，ME は半径であるから，

$\triangle MDE$ は $MD=ME$ の二等辺三角形である。

ゆえに，点 N は辺 DE の中点であるから，線分 MN は，頂点 M から底辺 DE へ引いた二等辺三角形 MDE の中線である。

したがって，$MN\perp DE$ である。　終

8

証明　$\triangle BEG$ において，内角と外角の性質から

$\angle FGH=\angle GBE+\angle BEG$

$\triangle HED$ において，内角と外角の性質から

$\angle FHG=\angle EDH+\angle DEH$

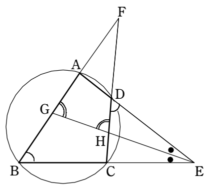
四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle GBE=\angle EDH$

また，GE は $\angle E$ の二等分線であるから

$\angle BEG=\angle DEH$

したがって　$\angle FGH=\angle FHG$　終



9

(1)　証明　$\angle AED=90°$，$\angle DFA=90°$ であるから

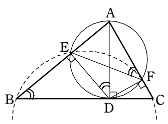
$\angle AED+\angle DFA=90°+90°=180°$

よって，４点 A，E，D，F は１つの円周上にある。　終

(2)　証明　(1)から，右の図のような４点 A，E，D，F を通る円がかける。

その円において，$\overset{\frown}{AE}$ に対する円周角より

$\angle AFE=\angle ADE$　……①



$\triangle ABD$ において

$\angle ABD=180°-(90°+\angle BAD)$

$=90°-\angle BAD$

$\triangle ADE$ において

$\angle ADE=180°-(90°+\angle EAD)=90°-\angle BAD$

よって　$\angle ABD=\angle ADE$　……②

①，②から　$\angle AFE=\angle ABD$

したがって，４点 B，C，F，E は１つの円周上にある。　終

10

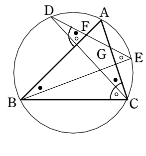
証明　線分 BE，CD を引く。

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AE}$ であるから　$\angle ACD=\angle FBE$

$\overset{\frown}{BD}$ に対する円周角より　$\angle BCD=\angle BEF$

よって　$\angle GCB=\angle ACD+\angle BCD$

$=\angle FBE+\angle BEF$



$\triangle FBE$ の内角と外角の性質から

$\angle FBE+\angle BEF=\angle BFD$

したがって　$\angle GCB=\angle BFD$

よって，四角形 FBCG は円に内接する。　終

11

(1)　証明　点 Q は $\triangle CDA$ の重心であるから，線分 CD の中点を F とすると

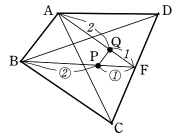
$FQ:QA=1:2$

また，点 P は $\triangle BCD$ の重心であるから

$FP:PB=1:2$

よって　$FQ:QA=FP:PB$

したがって　$AB /\!/ QP$　終



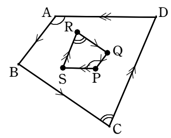
(2)　証明　(1)と同じようにして，$BC /\!/ RQ$，$CD /\!/ SR$，$DA /\!/ PS$ が成り立つ。

よって，$AB /\!/ QP$，$DA /\!/ PS$ であるから

$\angle DAB=\angle SPQ$　……①

また，$BC /\!/ RQ$，$CD /\!/ SR$ であるから

$\angle BCD=\angle QRS$　……②



四角形 ABCD が円に内接しているから

$\angle DAB+\angle BCD=180°$

よって，①，②から　$\angle SPQ+\angle QRS=180°$

したがって，４点 P，Q，R，S は１つの円周上にある。　終

12

(1)　$\triangle OAP$ は底角が $60°$ の二等辺三角形であるから，正三角形であり

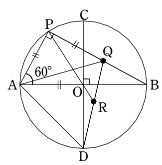
$OA=PA$　……①

$\angle APB$ は半円の弧に対する円周角であるから

$\angle APB=90°$

$PA=PQ$ より，$\triangle PAQ$ は直角二等辺三角形である。

① より，$\triangle OAD$ と $\triangle PAQ$ は合同な直角二等辺三角形である。



したがって　$AD=AQ$　……②

$\angle PAQ=45°$ であるから

$\angle QAB=60°-45°=15°$

よって　$\angle QAD=15°+45°=60°$　……③

②，③より，$\triangle ADQ$ は頂角が $60°$ の二等辺三角形であるから，正三角形である。

(2)　$\triangle OAP$，$\triangle ADQ$ がともに正三角形であるから

$\angle APR=\angle AQR\ (=60°)$

このことと，２点 P，Q が直線 AR について同じ側にあることから，４点 A，P，Q，R は１つの円周上にある。

すなわち，四角形 APQR は円に内接する。

(3)　(2)より　$\angle ARQ=180°-\angle APQ=180°-90°=90°$

$\triangle ADQ$ は正三角形であり，正三角形において，頂点から底辺に引いた垂線は底辺を２等分するから，R は線分 QD の中点である。

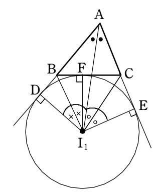
13

$\angle A$ 内の傍接円をかく。辺 AB，AC の延長との接点をそれぞれ D，E とし，辺 BC との接点を F とする。

AD，AE は円 I_1 の接線であるから

$\angle AI_1D=\angle AI_1E$

よって　$\angle AI_1D=\dfrac{1}{2}\angle DI_1E$　……①



BD，BF，CE，CF は円 I_1 の接線であるから

$\angle BI_1D=\angle BI_1F$，　$\angle CI_1E=\angle CI_1F$

よって　$\angle BI_1C=\dfrac{1}{2}\angle DI_1E$　……②

①，② から　$\angle BI_1C=\angle AI_1D$

$\triangle AI_1D$ において

$\angle AI_1D=180°-\left(\dfrac{1}{2}\angle A+90°\right)=90°-\dfrac{1}{2}\angle A$

したがって　$\angle BI_1C=90°-\dfrac{1}{2}\angle A$　答

$\boxed{14}$

$\angle BAC=2a$，$\angle ABC=2b$ とおくと

$\angle BAI=\angle CAI=a$，$\angle ABI=\angle CBI=b$

(1)　$\triangle ABI$ の内角と外角について

$\angle BID=\angle BAI+\angle ABI=a+b$

$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角より

$\angle CBD=\angle CAI=a$

よって　　$\angle DBI=a+b$

したがって，$\angle BID=\angle DBI$ より，$\triangle DBI$ は $DB=DI$ の二等辺三角形である。

(2)　$\angle CBE=2k$ とおくと

$\angle CBI_1=\angle EBI_1=k$

このとき　$\angle DBI_1=\angle CBI_1-\angle CBD=k-a$

$\triangle ABI_1$ の内角と外角について

$\angle BI_1A=\angle EBI_1-\angle BAI_1=k-a$

すなわち　$\angle BI_1D=k-a$

したがって，$\angle DBI_1=\angle BI_1D$ より，$\triangle BI_1D$ は $DB=DI_1$ の二等辺三角形である。

(1) より，$DB=DI$ であるから　　$DI=DI_1$

$\boxed{15}$

(1)　$\triangle ABC$ と $\triangle BDE$ において

仮定から　　$AB=BD$

接線と弦のつくる角の定理により

$\angle BAC=\angle DBE$

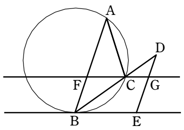
$AB /\!/ DE$ であるから

$\angle ABC=\angle BDE$

よって，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC\equiv\triangle BDE$

(2)　DE と FC の交点を G とする。



$BD=AB=8$ cm，$BC=5$ cm から

$DC=3$ cm

また，(1) の結果により

$DE=BC=5$ cm

$CG /\!/ BE$ であるから

$DG:GE=DC:CB=3:5$

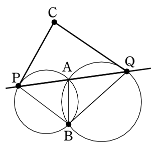
$GE=5\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{25}{8}$ (cm)

四角形 FBEG は 2 組の対辺がそれぞれ平行であるから，平行四辺形である。

よって　　$FB=GE=\dfrac{25}{8}$ cm

したがって　$AF=8-\dfrac{25}{8}=\dfrac{39}{8}$ (cm)

$\boxed{16}$



点 B と点 P，A，Q をそれぞれ結ぶ。

CP は $\triangle PBA$ の外接円の接線であるから

$\angle CPA=\angle ABP$

CQ は $\triangle QBA$ の外接円の接線であるから

$\angle CQA=\angle ABQ$

したがって

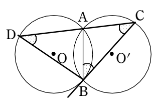
$\angle PCQ+\angle PBQ=\angle PCQ+\angle CPA+\angle CQA$

$=180^\circ$

よって，四角形 CPBQ は 1 組の対角の和が 180° であるから，円に内接する。

すなわち，4 点 B，C，P，Q は 1 つの円周上にある。

$\boxed{17}$



直線 CA と円 O との交点を D とする。

直線 BC は円 O の接線であるから，接弦定理により

$\angle ABC=\angle ADB$　……①

円 O と円 O′ の半径は等しいから，

$\angle ACB=\angle ADB$　……②

①，② から　$\angle ABC=\angle ACB$

ゆえに，$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形である。終

$\boxed{18}$

$\triangle DAC$ と $\triangle DCB$ において　　　$\angle ADC=\angle CDB$　(共通)　……①

接線と弦のつくる角の定理により　　$\angle CAD=\angle BCD$　　　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから　　$\triangle DAC\backsim\triangle DCB$

また，方べきの定理により

$DB\times DA=DC^2$

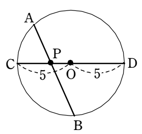
$4\times(4+6\times2)=DC^2$

$DC>0$ であるから　　$DC=8$

$\triangle DAC\backsim\triangle DCB$ より

$AC:CB=DC:DB=8:4=2:1$

$\boxed{19}$



点 P を通る円 O の直径の両端を，それぞれ C，D とすると，

方べきの定理により

$PC\times PD=PA\times PB$

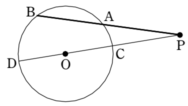
すなわち　　$(5-OP)\times(5+OP)=21$

よって　　$25-OP^2=21$

したがって　　$OP^2=4$

$OP>0$ であるから　$OP=2$ cm

$\boxed{20}$



右の図のように，PO と円 O との交点を C，D とする。

このとき，方べきの定理により

$PA\times PB=PC\times PD$

ここで，$PC=PO-OC$，$PD=PO+OD$ から

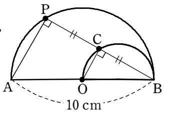
$PA\times PB=(PO-OC)\times(PO+OD)$

$=(PO-r)(PO+r)$

$=PO^2-r^2$

1

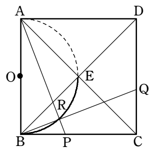
(1)　線分ABの中点をOとすると　OB＝5 cm
中点連結定理により ∠OCB＝∠APB＝90° であるから，円周角の定理の逆により，点Cは線分OBを直径とする円周上を動く。
点PがAと一致するときCはOと重なり，点PがBと一致するときCはBと重なる。



よって，点Cの軌跡は，線分OBを直径とする円の $\overset{\frown}{OB}$ である。

したがって，求める長さは　$\pi\times5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}\pi$ (cm)

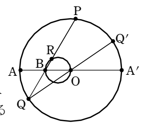
(2)　辺ABは一定で，∠ARB＝90° であるから，円周角の定理の逆により，点Rは辺ABを直径とする円周上を動く。
辺ABの中点をO，正方形ABCDの対角線AC，BDの交点をEとする。
点PがBと一致するときRはBと重なり，点PがCと一致するときRはEと重なる。



よって，点Rの軌跡は，円Oの $\overset{\frown}{BE}$ である。

∠BOE＝90° であるから，求める長さは　$\pi\times5\times\dfrac{90}{360}=\dfrac{5}{4}\pi$

(3)　直線OQと円Oとの交点で，Qとは異なる点をQ′とする。
中点連結定理により　　∠QRO＝∠QPQ′＝90°
線分OBは一定で，∠BRO＝90° であるから，円周角の定理の逆により，点Rは線分OBを直径とする円周上を動く。
点PがAと一致するときRはOと重なり，点PがPQ⊥OAとなる位置にいるときRはBと重なり，点PがA′と一致するときRはOと重なる。



よって，点Pが $\overset{\frown}{AA'}$ 上を動いたとき，点Rの軌跡の長さは，OBを直径とする円の1周分である。
したがって，求める長さは　2π

2

半直線 AI_1 は，△ABCの∠Aの二等分線であり，半直線 AI_2 は，△ABCの∠Aの外角の二等分線である。

内角と外角の和は180° であるから　　$\angle I_1AC+\angle I_2AC=\dfrac{1}{2}\times180°=90°$　…… ①

同様に　$\angle I_1AB+\angle I_3AB=90°$ もわかる。
よって，3点 I_2，A，I_3 は一直線上にある。
ゆえに，① より　$I_1A\perp I_2I_3$　…… ②
同様に　　　　$I_2B\perp I_3I_1$　…… ③
　　　　　　　$I_3C\perp I_1I_2$　…… ④
したがって，②，③，④ より，Iは $\triangle I_1I_2I_3$ の垂心となる。

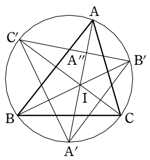
3

△ABCにおいて，AI，BI，CIはそれぞれ，∠A，∠B，∠Cの二等分線であるから

$\angle IAB=\dfrac{1}{2}\angle A,\quad \angle IBA=\dfrac{1}{2}\angle B,\quad \angle ICB=\dfrac{1}{2}\angle C$

よって　　$\angle IAB+\angle IBA+\angle ICB=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=90°$

このとき，△IABにおいて
　　∠IAB＋∠IBA＝∠AIB′
また，$\overset{\frown}{C'B}$ に対する円周角より
　　∠ICB＝∠IB′C′
したがって，AIとB′C′の交点をA″とすると，
△IA″B′において
　　∠A″IB′＋∠A″B′I
　　＝∠IAB＋∠IBA＋∠ICB＝90°
よって，∠IA″B′＝90° から　IA⊥B′C′
同様にして　　IB⊥C′A′，IC⊥A′B′
したがって，Iは△A′B′C′の垂心である。

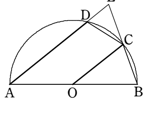


4

直線ADとBCの交点をEとする。
このとき，OC∥AEで，BO : OA＝1 : 1であるから
　　BC : CE＝1 : 1
よって　CE＝3 cm
△OBCと△CDEにおいて
四角形ABCDは円に内接しているから
　　∠OBC＝∠CDE
OC∥AEであるから　∠OCB＝∠CED
よって，2組の角がそれぞれ等しいから
　　△OBC∽△CDE
したがって　OC : CE＝BC : DE
OCは半円の半径であるから

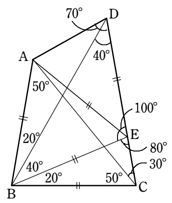
$\dfrac{9}{2} : 3=3 : DE$

　　DE＝2 cm
OC : AE＝1 : 2であるから　　AE＝9 cm
よって　　AD＝9－2＝7 (cm)



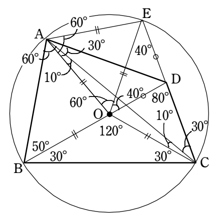
5

(1)　線分CD上に点Eを，BC＝CE …… ① となるようにとる。
△BCEはBC＝BEの二等辺三角形であるから
　　∠BEC＝∠BCE＝50°＋30°＝80°
　　∠CBE＝180°－2×80°＝20°
よって　　∠DBE＝60°－20°＝40°
ここで，△ABCにおいて
　　∠BAC＝180°－{(20°＋60°)＋50°}
　　　　＝50°
よって，△ABCにおいて∠BAC＝∠BCAであるから　　BA＝BC …… ②



①，② より，BA＝BEとなるから，△BAEは二等辺三角形である。
また，∠ABE＝20°＋40°＝60° であるから，△BAEは正三角形である。
よって　　EA＝EB　…… ③
ここで，△CBDにおいて
　　∠BDC＝180°－{60°＋(50°＋30°)}＝40°
よって，△EBDにおいて∠EDB＝∠EBDであるから　ED＝EB …… ④
③，④ より，ED＝EAであるから，△EDAは二等辺三角形である。
よって　　2∠ADE＝180°－∠AED　…… ⑤
ここで　　∠BED＝180°－80°＝100°
また，△BAEは正三角形であるから　∠AEB＝60°
よって　　∠AED＝100°－60°＝40°
したがって，⑤ から　　$\angle ADE=\dfrac{180°-40°}{2}=70°$
よって　　$\angle x=\angle ADE-\angle BDC=70°-40°=30°$

(2)　線分BD上に点Oを，BO＝COとなるようにとり，点Oを中心，OBを半径とする円Oをかく。
△OBCはOB＝OCの二等辺三角形であるから　　∠OCB＝∠OBC＝30°
　　∠BOC＝180°－2×30°＝120°
　　　　　　　　　　　　…… ①
ここで，△ABCにおいて
　　∠BAC＝180°－{(50°＋30°)＋40°}
　　　　＝60°　　　　　…… ②



①，② より，$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$ であるから，∠BACは円Oの $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角に等しい。
よって，点Aは円O上の点である。
ここで，線分CDの延長と円Oの交点をEとすると　OA＝OE

また，∠AOEは円Oの $\overset{\frown}{AE}$ に対する中心角であるから
　　∠AOE＝2∠ACE＝2×30°＝60°
よって，△OAEは正三角形であるから　AE＝AO　…… ③
また，△OCEはOC＝OEの二等辺三角形であるから
　　∠OED＝∠OCD＝∠OCA＋∠DCA
　　　　＝(40°－30°)＋30°＝40°　　　　…… ④
△DBCにおいて　　∠BDC＝180°－{30°＋(30°＋40°)}＝80°
また，△DEOの内角と外角の性質により　∠DOE＝80°－40°＝40°　…… ⑤
④，⑤ より，△DEOにおいて∠OED＝∠DOEであるから　DE＝DO …… ⑥
また　　AD＝AD (共通) …… ⑦
③，⑥，⑦ から，△AEDと△AODにおいて，3組の辺がそれぞれ等しいから
　　△AED≡△AOD

よって　　$\angle EAD=\angle OAD=\dfrac{1}{2}\angle OAE=\dfrac{1}{2}\times60°=30°$

また，△OACにおいてOA＝OCであるから　∠OAC＝∠OCA＝10°
したがって　　$\angle x=\angle OAD-\angle OAC=30°-10°=20°$

6

∠BAC＝a とおく。
BI，CIはそれぞれ，∠ABC，∠BCAの二等分線であるから

$\angle IBC+\angle ICB=\dfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCA)=\dfrac{1}{2}(180°-a)=90°-\dfrac{a}{2}$

よって，△IBCにおいて

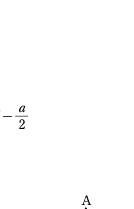
$\angle BIC=180°-\left(90°-\dfrac{a}{2}\right)=90°+\dfrac{a}{2}$

△IBCの外接円Dにおいて，Iを含まない方の $\overset{\frown}{BC}$ 上にEをとる。
四角形BECIは円に内接するから

$\angle BEC=180°-\left(90°+\dfrac{a}{2}\right)=90°-\dfrac{a}{2}$

$\overset{\frown}{BIC}$ に対する円周角と中心角の関係から

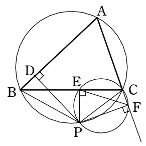
$\angle BDC=2\times\left(90°-\dfrac{a}{2}\right)=180°-a$



ゆえに　∠BAC＋∠BDC＝180°
したがって，四角形ABDCは，1組の対角の和が180° であるから，円に内接する。
よって，4点A，B，C，Dは1つの円周上にある。

7

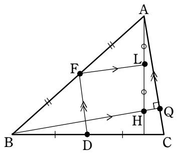
(1)　$\angle PEC = \angle PFC = 90^\circ$
であるから，四角形 CEPF は円に内接する。
したがって　$\angle PEF = \angle PCF$
また，四角形 ABPC は円に内接しているから
$\angle PBD = \angle PCF$
よって　$\angle PBD = \angle PEF$



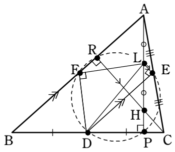
(2)　$\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$ であるから，四角形 DBPE は円に内接する。
よって　$\angle PBD + \angle PED = 180^\circ$
これと (1) の結果から
$\angle PEF + \angle PED = 180^\circ$
したがって，3 点 D，E，F は一直線上にある。

8

(1)　証明　△ABH において，点 F，L はそれぞれ辺 AB，AH の中点であるから，中点連結定理により
FL∥BH
また，△ABC において，点 F，D はそれぞれ辺 BA，BC の中点であるから，中点連結定理により
FD∥AC
点 H は △ABC の垂心であるから
BH⊥AC
よって　FL⊥FD　……①　終

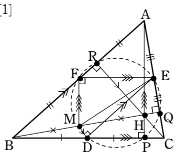


(2)　証明　△ACH において，点 L，E はそれぞれ辺 AH，AC の中点であるから，中点連結定理により
EL∥CH
また，△ABC において，点 E，D はそれぞれ辺 CA，CB の中点であるから，中点連結定理により
ED∥AB
点 H は △ABC の垂心であるから
CH⊥AB
よって　EL⊥ED　……②
また　$\angle DPL = 90^\circ$　……③
①，②，③ から，点 F，E，P は，DL を直径とする円周上にある。
したがって，5 つの点 L，F，D，P，E は 1 つの円周上にある。　終

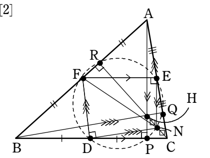


(3)　証明　(1)，(2) と同じように考えると
[1]　FM⊥FE，　DM⊥DE，　$\angle EQM = 90^\circ$
よって，点 F，D，Q は EM を直径とする円周上にある。
したがって，5 つの点 M，D，Q，E，F は 1 つの円周上にある。
[2]　DN⊥DF，　EN⊥EF，　$\angle FRN = 90^\circ$
よって，点 D，E，R は FN を直径とする円周上にある。
したがって，5 つの点 N，E，R，F，D は 1 つの円周上にある。

[1]



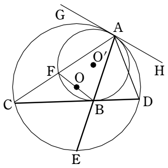
[2]



(2) の直径 DL の円，[1] の直径 EM の円，[2] の直径 FN の円はすべて 3 点 D，E，F を通る。
3 点 D，E，F を通る円は 1 つしかないから，3 つの円は一致する。
したがって，9 つの点 P，Q，R，D，E，F，L，M，N は 1 つの円周上にある。　終

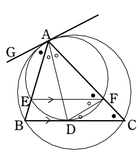
9

右の図のように，AC と円 O′ の交点を F とする。
また，2 つの円の共通接線を GH とする。
このとき，△AFB と △ABD において
接線と弦のつくる角の定理により
$\angle AFB = \angle ABD$　……①
また，$\angle GAF = \angle ABF$，$\angle GAC = \angle ADB$ から
$\angle ABF = \angle ADB$　……②
①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから
△AFB∽△ABD
したがって，$\angle FAB = \angle BAD$ から
$\angle COE = \angle EOD$
よって　$\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{ED}$



10

証明　小さい方の円と線分 AB，AC との交点をそれぞれ E，F とする。
また，点 A を通る共通接線を引き，共通接線上の右の図のような位置に点 G をとる。
小さい方の円において，接弦定理により
$\angle GAE = \angle AFE$
大きい方の円において，接弦定理により
$\angle GAE = \angle ACB$
よって　$\angle AFE = \angle ACB$
同位角が等しいから　EF∥BC
よって　$\angle EFD = \angle CDF$　……①
また，小さい方の円において，接弦定理により
$\angle CDF = \angle DAF$　……②
$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角より　$\angle EFD = \angle EAD$　……③
①，②，③ から　$\angle DAF = \angle EAD$
すなわち，$\angle BAD = \angle CAD$ であるから，AD は $\angle BAC$ の二等分線である。　終



11

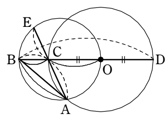
$FA = x$ とおく。
円 O において，方べきの定理により
$EP \times EQ = EA \times EB$
円 B において，方べきの定理により
$EP \times EQ = EF \times EG$
よって　$EA \times EB = EF \times EG$
$(4+x) \times (4+x+2) = 4 \times \{4+(x+2) \times 2\}$
$(x+4)(x+6) = 4(2x+8)$
$x^2 + 2x - 8 = 0$
$(x-2)(x+4) = 0$
$x > 0$ より　$x = 2$
よって，円 B の半径は　$2+2=4$

12

方べきの定理により
$BE \times BA = BM \times BD$
よって　$BM = \dfrac{BE \times BA}{BD}$
$CF \times CA = CD \times CM$
よって　$CM = \dfrac{CF \times CA}{CD}$
$BM = CM$ であるから
$\dfrac{BE \times BA}{BD} = \dfrac{CF \times CA}{CD}$　……①
AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから
$AB : AC = BD : DC$
よって　$AB \times DC = AC \times BD$
$\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{CA}{CD}$　……②
①，② から
$\dfrac{BE \times BA}{BD} = \dfrac{CF \times BA}{BD}$
したがって　$BE = CF$

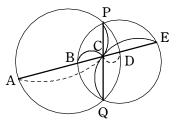
13

証明　左側の円について，方べきの定理により
$CB \times CO = CA \times CE$　……①
右側の円について，方べきの定理により
$AB^2 = BC \times BD$
$BD = BO + OD = BO + OC$ であるから
$AB^2 = BC \times (BO + OC)$
$= BC \times BO + CB \times CO$
① を代入して　$AB^2 = BC \times BO + CA \times CE$　終



14

(1)　証明　左側の円について，方べきの定理により
$CA \times CD = CP \times CQ$
右側の円について，方べきの定理により
$CB \times CE = CP \times CQ$
よって　$CA \times CD = CB \times CE$　終



(2)　証明　(1) を利用して
$AB \times CD = (AC - BC) \times CD$
$= AC \times CD - BC \times CD$
$= BC \times CE - BC \times CD$
$= BC \times (CE - CD)$
$= BC \times DE$　終

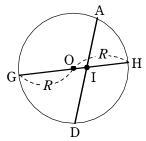
15

(1)　$\triangle$ABC の外接円で，点 I を通る直径の両端を，それぞれ G，H とすると，方べきの定理により

$$IA\times ID=IG\times IH$$

よって

$$IA\times ID=(R+OI)\times(R-OI)=R^2-OI^2$$



(2)　証明　$\triangle$AIF と $\triangle$EDB において

仮定から　　$\angle AFI=90^\circ$

DE は $\triangle$ABC の外接円の直径であるから

$\angle EBD=90^\circ$

よって　　$\angle AFI=\angle EBD$　……①

AI は $\angle$BAC の二等分線であるから

$\angle BAD=\angle FAI$

$\overset{\frown}{BD}$ に対する円周角より　　$\angle BAD=\angle BED$

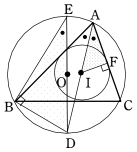
よって　　$\angle FAI=\angle BED$　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AIF\backsim\triangle EDB$

よって　　AI : ED＝IF : DB

したがって　　$AI\times BD=ED\times IF$　終



(3)　証明　$\triangle$ABI において，内角と外角の性質から

$\angle DIB=\angle IAB+\angle IBA$　……③

また　　$\angle DBI=\angle DBC+\angle IBC$

ここで　　$\angle DBC=\angle DAC$

$=\angle IAB$

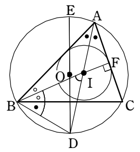
また　　$\angle IBC=\angle IBA$

よって　　$\angle DBI=\angle IAB+\angle IBA$　……④

③，④ から　　$\angle DIB=\angle DBI$

したがって，$\triangle$DBI は二等辺三角形であり

BD＝DI　終



(4)　(1) から　　$R^2-OI^2=IA\times ID$

これと (3) から　　$R^2-OI^2=IA\times BD$

これと (2) から　　$R^2-OI^2=ED\times IF$

$ED=2R$，$IF=r$ であるから　　$R^2-OI^2=2R\times r$

したがって　　$OI^2=R^2-2Rr$

16

(1)　証明　AH⊥BC であるから，AH は円の直径である。

よって　　$\angle AEH=90^\circ$

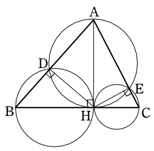
すなわち　　$\angle HEC=90^\circ$

よって，線分 HC は，$\triangle$EHC の外接円の直径である。

AH⊥CH であるから，AH は $\triangle$EHC の外接円の接線である。

したがって，この外接円において，方べきの定理により

$AH^2=AE\times AC$　終



(2)　証明　(1) と同様に考えると，直線 AH は $\triangle$DBH の外接円に接するから

$AH^2=AD\times AB$

これと (1) から　　$AE\times AC=AD\times AB$

よって，方べきの定理の逆により，4 点 D，B，C，E は 1 つの円周上にある。　終

17

(1)　$\triangle$PAO と $\triangle$PRA において

$\angle APO=\angle RPA$（共通）……①

OP は円の直径であるから　$\angle PAO=90^\circ$

また，$\angle PRA=90^\circ$ であるから

$\angle PAO=\angle PRA$　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle PAO\backsim\triangle PRA$

よって　　PA : PR＝PO : PA

$PA^2=PO\times PR$

$\angle PAO=90^\circ$ より，PA は点 A において円 O に接するから，方べきの定理により

$PA^2=PQ\times PT$

したがって　$PO\times PR=PQ\times PT$

よって，方べきの定理の逆により，4 点 O，R，Q，T は 1 つの円周上にある。

すなわち，四角形 ORQT は円に内接する。

(2)　四角形 ORQT は円に内接するから

$\angle RQT=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

ST は円 O の直径であるから　$\angle SQT=90^\circ$

よって，3 点 Q，R，S は一直線上にある。

18

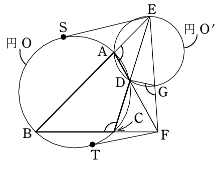
四角形 ABCD が内接している円を円 O とする。

また，$\triangle$ADE の外接円を円 O′ とし，円 O′ と EF との交点を G とする。

円 O において，方べきの定理により

$ES^2=ED\times EC$　……①

$FT^2=FD\times FA$　……②



四角形 ABCD は円 O に内接するから

$\angle EAD=\angle BCD$

四角形 EADG は円 O′ に内接するから

$\angle FGD=\angle EAD$

よって，$\angle BCD=\angle FGD$ であるから，四角形 DCFG は円に内接する。

したがって，方べきの定理により

$ED\times EC=EG\times EF$　……③

①，③ より　$ES^2=EG\times EF$　……④

円 O′ において，方べきの定理により

$FD\times FA=FG\times FE$　……⑤

②，⑤ より　$FT^2=FG\times FE$　……⑥

④，⑥ より　$ES^2+FT^2=EG\times EF+FG\times FE$

$=(EG+FG)\times EF$

$=EF^2$

19

$\angle BEC=\angle BFC=90^\circ$ であるから，4 点 B，C，E，F は 1 つの円周上にある。

よって，方べきの定理により

$BH\times HE=CH\times HF$　……①

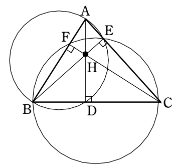
$\angle AEB=\angle ADB=90^\circ$ であるから，4 点 A，B，D，E は 1 つの円周上にある。

よって，方べきの定理により

$AH\times HD=BH\times HE$　……②

①，② から

$AH\times HD=BH\times HE=CH\times HF$　終



20

4 点 A，D，B，E は同一円周上にあるから，方べきの定理により

$CA\times CB=CD\times CE$　……①

PA，PB は円の接線であるから

$\angle OAP=90^\circ$，$\angle OBP=90^\circ$

よって，四角形 APBO は円に内接するから，方べきの定理により

$CA\times CB=CP\times CO$　……②

①，② から　$CD\times CE=CP\times CO$

したがって，方べきの定理の逆により，4 点 P，O，D，E は 1 つの円周上にある。終

21

(1)　証明　$\triangle$POS と $\triangle$PSH において

$\angle OPS=\angle SPH$（共通）　……①

PS は円 O の接線であるから

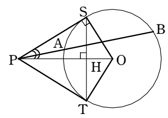
$\angle PSO=90^\circ$

また　　$\angle PHS=90^\circ$

よって　　$\angle PSO=\angle PHS$　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle POS\backsim\triangle PSH$　終



(2)　証明　(1) から　　PO : PS＝PS : PH

よって　　$PH\times PO=PS^2$

また，方べきの定理により　　$PA\times PB=PS^2$

したがって　　$PH\times PO=PA\times PB$

よって，方べきの定理の逆により，4 点 A，B，H，O は 1 つの円周上にある。　終

第9章　三平方の定理
例題

$\boxed{1}$

解説

(1)　三平方の定理により　　$(\sqrt{5})^2+x^2=3^2$

　よって　　$x^2=4$

　$x>0$ であるから　$x=2$

(2)　三平方の定理により　　$(2\sqrt{3})^2+4^2=x^2$

　よって　　$x^2=28$

　$x>0$ であるから　$x=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

$\boxed{2}$

解説

(1)　$\mathrm{BD}=a$ cm とおく。

　直角三角形 ABD において

$$3^2+4^2=a^2$$
$$a^2=25$$

　$a>0$ であるから　$a=5$

　直角三角形 BCD において

$$(\sqrt{5})^2+x^2=5^2$$
$$x^2=20$$

　$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{5}$

(2)　$\mathrm{BC}=a$ cm とおく。

　直角三角形 ABC において

$$4^2+5^2=a^2$$
$$a^2=41$$

　$a>0$ であるから　$a=\sqrt{41}$

　直角三角形 BCD において

$$(\sqrt{41})^2+2^2=x^2$$
$$x^2=45$$

　$x>0$ であるから　$x=3\sqrt{5}$

(3)　$\mathrm{AB}=a$ cm とおく。

　直角三角形 ABD において

$$a^2+2^2=6^2$$
$$a^2=32$$

　$a>0$ であるから　$a=4\sqrt{2}$

　直角三角形 ABC において

$$(4\sqrt{2})^2+(2+4)^2=x^2$$
$$x^2=68$$

　$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{17}$

$\boxed{3}$

解説

この直角三角形の斜辺の長さは $x+2$ であるから，三平方の定理により

$$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$

$x>0$ であるから　　$x=3$

$\boxed{4}$

解説

①　$4^2+6^2=52$，$8^2=64$

　4^2+6^2 と 8^2 が等しくないから，直角三角形ではない。

②　$8^2+15^2=289$，$17^2=289$

　$8^2+15^2=17^2$ であるから，17 cm の辺を斜辺とする直角三角形である。

③　$(2\sqrt{3})^2=12$，$6^2=36$，$(4\sqrt{3})^2=48$

$$(2\sqrt{3})^2+6^2=48$$

　$(2\sqrt{3})^2+6^2=(4\sqrt{3})^2$ であるから，$4\sqrt{3}$ cm の辺を斜辺とする直角三角形である。

④　$(3\sqrt{2})^2=18$，$(4\sqrt{3})^2=48$，$(2\sqrt{5})^2=20$

$$(3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5})^2=38$$

　$(3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5})^2$ と $(4\sqrt{3})^2$ が等しくないから，直角三角形ではない。

以上から，直角三角形であるのは　　② と ③

$\boxed{5}$

解説

(1)　$x:2:y=1:1:\sqrt{2}$　が成り立っている。

　$x:2=1:1$　　から　$x=2$

　$2:y=1:\sqrt{2}$　から　$y=2\sqrt{2}$

(2)　$2:x:y=1:2:\sqrt{3}$　が成り立っている。

　$2:x=1:2$　　から　$x=4$

　$2:y=1:\sqrt{3}$　から　$y=2\sqrt{3}$

(3)　$x:y:6=1:2:\sqrt{3}$　が成り立っている。

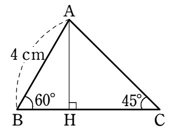
　$x:6=1:\sqrt{3}$　から　$x=2\sqrt{3}$

　$y:6=2:\sqrt{3}$　から　$y=4\sqrt{3}$

$\boxed{6}$

解説

(1)　点 A から辺 BC に垂線 AH を引く。



　△ABH において，

$$\mathrm{BH}:\mathrm{AB}:\mathrm{AH}=1:2:\sqrt{3}$$

　であるから

$$\mathrm{BH}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\times4=2\ \text{(cm)}$$

$$\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}\ \text{(cm)}$$

　△ACH において，$\mathrm{AH}:\mathrm{CH}=1:1$ であるから

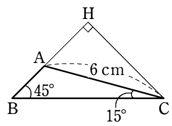
$$\mathrm{CH}=\mathrm{AH}=2\sqrt{3}\ \text{(cm)}$$

　よって　　$\mathrm{BC}=2+2\sqrt{3}$ (cm)

　したがって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\times(2+2\sqrt{3})\times2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

(2)　点 C から辺 BA の延長に引いた垂線を CH とする。



　△ABC の内角と外角について

$$\angle\mathrm{CAH}=45^\circ+15^\circ=60^\circ$$

　よって，△ACH において

$$\mathrm{AH}:\mathrm{AC}:\mathrm{CH}=1:2:\sqrt{3}$$

　であるから

$$\mathrm{HA}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}=\frac{1}{2}\times6=3\ \text{(cm)}$$

$$\mathrm{CH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}\ \text{(cm)}$$

　△BCH において，$\mathrm{BH}:\mathrm{CH}=1:1$ であるから

$$\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=3\sqrt{3}\ \text{(cm)}$$

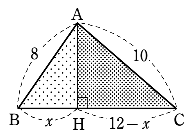
　よって　　$\mathrm{AB}=3\sqrt{3}-3$ (cm)

　したがって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\times(3\sqrt{3}-3)\times3\sqrt{3}=\frac{27-9\sqrt{3}}{2}\ (\text{cm}^2)$$

$\boxed{7}$

解説



$\mathrm{BH}=x$ cm とすると，$\mathrm{CH}=(12-x)$ cm である。

直角三角形 ABH において，三平方の定理により

$$x^2+\mathrm{AH}^2=8^2$$

よって　　$\mathrm{AH}^2=64-x^2$　　　…… ①

直角三角形 ACH において，三平方の定理により

$$(12-x)^2+\mathrm{AH}^2=10^2$$

よって　　$\mathrm{AH}^2=100-(12-x)^2$　…… ②

①，② から　　$64-x^2=100-(12-x)^2$

よって　　　$24x=108$

したがって　　$x=\dfrac{9}{2}$

① に代入して　$\mathrm{AH}^2=64-\left(\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{175}{4}$

$\mathrm{AH}>0$ であるから　　$\mathrm{AH}=\sqrt{\dfrac{175}{4}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$ (cm)　答

8

解説

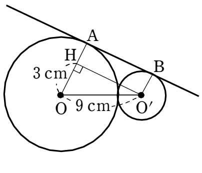
(1)　O′から，線分 OA に引いた垂線の足を H とすると

$OH=6-3=3\,(\mathrm{cm})$

△OO′H において

$O'H=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

AB＝O′H であるから　$AB=6\sqrt{2}$ cm

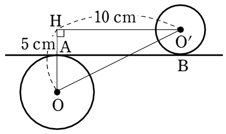


(2)　O′から，直線 OA に引いた垂線の足を H とすると　$OH=3+2=5\,(\mathrm{cm})$

$O'H=AB=10\,(\mathrm{cm})$

△OO′H において

$OO'=\sqrt{5^2+10^2}=5\sqrt{5}\ (\mathrm{cm})$



9

解説

PC＝x cm とする。

AP＝PC＝x(cm) であるから

$PB=8-x\,(\mathrm{cm})$

△PBC において　$(8-x)^2+6^2=x^2$

これを解いて　$x=\dfrac{25}{4}$

よって　$PC=\dfrac{25}{4}$ cm

10

解説

(1)　円の外部の点からその円に引いた２つの接線の長さは等しいから

AR＝AP＝3 cm，BQ＝BP＝10 cm

四角形 OQCR は１辺 x cm の正方形であるから　CQ＝CR＝x cm

よって　BC＝$(x+10)$ cm，CA＝$(x+3)$ cm

(2)　$AB=3+10=13$ (cm)

直角三角形 ABC において，三平方の定理により

$(x+10)^2+(x+3)^2=13^2$

$x^2+13x-30=0$

$(x-2)(x+15)=0$

$x>0$ であるから　$x=2$

よって，円 O の半径は　2 cm

11

解説

円 O′の半径を r cm とする。

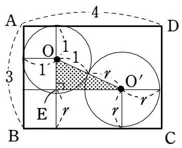
また，O を通り辺 AB に平行な直線と，O′を通り辺 BC に平行な直線の交点を E とする。

２つの円 O，O′は外接しているから

$OO'=r+1$

また，図から　$OE=3-1-r=2-r$　……①

$O'E=4-1-r=3-r$　……②



直角三角形 OEO′において

$(2-r)^2+(3-r)^2=(r+1)^2$

すなわち　$r^2-12r+12=0$

これを解くと　$r=\dfrac{12\pm\sqrt{96}}{2}=6\pm2\sqrt{6}$

①，②から　$r<2$

したがって　$r=6-2\sqrt{6}$

答　$(6-2\sqrt{6})$ cm

12

解説

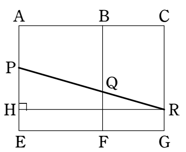
右の図のような展開図の一部において，PQ＋QR の長さが最小となるのは，３点 P，Q，R が一直線上にあるとき，すなわち線分 BF と PR の交点の位置に点 Q があるときである。

R から AE に垂線 RH を引くと

$PH=5-2-1=2$ (cm)

$RH=4+3=7$ (cm)

よって，直角三角形 RPH において



$RP=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$ (cm)

したがって，求める PQ＋QR の長さは

$\sqrt{53}$ cm

13

解説

円錐の底面と球との接点を C，円錐の母線 AB と球との接点を D とする。

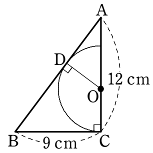
直角三角形 ABC において　$AB=\sqrt{9^2+12^2}=15$

△AOD∽△ABC であるから　AO : AB＝OD : BC

球 O の半径を x cm とすると，AO＝$(12-x)$ cm で

$(12-x):15=x:9$

よって　$x=\dfrac{9}{2}$　　答　$\dfrac{9}{2}$ cm



14

解説

$MN=\sqrt{2}MD=4\sqrt{2}$，$EG=\sqrt{2}EF=8\sqrt{2}$

また，直角三角形 MAE において　$ME^2=4^2+8^2=80$

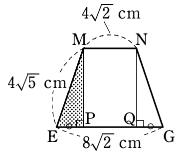
ME＞0 であるから　$ME=4\sqrt{5}$

同様に　$NG=4\sqrt{5}$

よって　ME＝NG　……①

また　MN∥EG　……②

①，②から，四角形 MEGN は等脚台形である。



M，N から辺 EG に引いた垂線の足を，それぞれ P，Q とすると，$PQ=4\sqrt{2}$，

EP＝GQ であるから　$EP=(8\sqrt{2}-4\sqrt{2})\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{2}$

直角三角形 MEP において　$(2\sqrt{2})^2+MP^2=(4\sqrt{5})^2$

$MP^2=72$

MP＞0 であるから　$MP=6\sqrt{2}$

よって，求める面積は　$\dfrac{1}{2}\times(4\sqrt{2}+8\sqrt{2})\times6\sqrt{2}=72$　　答　72 cm²

15

解説

底面の対角線 AC，BD の交点を H とすると

∠OHA＝90°

$AC=6\sqrt{2}$ cm で，点 H は線分 AC の中点であるから

$AH=3\sqrt{2}$ cm

よって，△OAH において

$OH^2=5^2-(3\sqrt{2})^2=7$

OH＞0 であるから　$OH=\sqrt{7}$ cm

したがって，求める体積は

$\dfrac{1}{3}\times6\times6\times\sqrt{7}=12\sqrt{7}$ (cm³)

16

解説

△BCD は１辺 6 cm の正三角形であるから，辺 BC の中点を M とすると

$DM=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

よって，△BCD の面積は

$\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ (cm²)

H は △BCD の重心であるから　$DH=\dfrac{2}{3}DM=2\sqrt{3}$

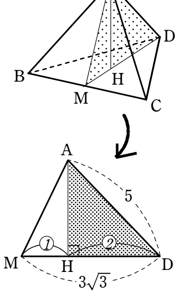
よって，直角三角形 AHD において

$AH=\sqrt{5^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$

したがって，正三角錐の体積は

$\dfrac{1}{3}\times\triangle BCD\times AH=\dfrac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times\sqrt{13}$

$=3\sqrt{39}$ (cm³)　答



$\boxed{1}$

(解説)

三平方の定理を用いる。

(1)　$3^2+2^2=x^2$

$x^2=13$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{13}$

(2)　$4^2+8^2=x^2$

$x^2=80$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

(3)　$9^2+x^2=15^2$

$x^2=144$

$x>0$ であるから　$x=12$

(4)　$x^2+4^2=6^2$

$x^2=20$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(5)　$(\sqrt{15})^2+x^2=8^2$

$x^2=49$

$x>0$ であるから　$x=7$

(6)　$(\sqrt{6})^2+x^2=(3\sqrt{2})^2$

$x^2=12$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$\mathrm{AC}=a$ cm とおく。

直角三角形 ABC において

$(4\sqrt{2})^2+3^2=a^2$

$a^2=41$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{41}$

直角三角形 ACD において

$4^2+x^2=(\sqrt{41})^2$

$x^2=25$

$x>0$ であるから　$x=5$

(2)　$\mathrm{BC}=a$ cm とおく。

直角三角形 ABC において

$6^2+7^2=a^2$

$a^2=85$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{85}$

直角三角形 DBC において

$(\sqrt{85})^2+6^2=x^2$

$x^2=121$

$x>0$ であるから　$x=11$

(3)　直角三角形 OAB において

$\mathrm{OB}^2=1^2+1^2=2$

直角三角形 OBC において

$\mathrm{OC}^2=\mathrm{OB}^2+1^2=2+1$

$=3$

直角三角形 OCD において

$\mathrm{OD}^2=\mathrm{OC}^2+1^2=3+1$

$=4$

直角三角形 ODE において

$\mathrm{OE}^2=\mathrm{OD}^2+1^2=4+1$

$=5$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{5}$

$\boxed{3}$

(解説)

この直角三角形の斜辺の長さは $x+6$ であるから，三平方の定理により

$x^2+(x+3)^2=(x+6)^2$

$x^2-6x-27=0$

$(x+3)(x-9)=0$

$x>0$ であるから　　$x=9$

$\boxed{4}$

(解説)

①　$5^2+7^2=74$，$9^2=81$

5^2+7^2 と 9^2 が等しくないから，直角三角形ではない。

②　$3^2+(3\sqrt{3})^2=36$，$6^2=36$

$3^2+(3\sqrt{3})^2=6^2$ であるから，6 cm の辺を斜辺とする直角三角形である。

③　$21^2+20^2=841$，$29^2=841$

$21^2+20^2=29^2$ であるから，29 cm の辺を斜辺とする直角三角形である。

④　$(\sqrt{11})^2+(\sqrt{10})^2=21$，$(2\sqrt{5})^2=20$

$(\sqrt{11})^2+(\sqrt{10})^2$ と $(2\sqrt{5})^2$ が等しくないから，直角三角形ではない。

以上から，直角三角形であるのは

②と③

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　$5:x:y=1:2:\sqrt{3}$　が成り立っている。

$5:x=1:2$　　から　$x=10$

$5:y=1:\sqrt{3}$　から　$y=5\sqrt{3}$

(2)　$4:x:y=1:1:\sqrt{2}$　が成り立っている。

$4:x=1:1$　　から　$x=4$

$4:y=1:\sqrt{2}$　から　$y=4\sqrt{2}$

(3)　$x:6:y=1:2:\sqrt{3}$　が成り立っている。

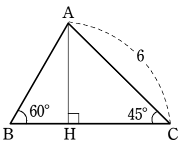
$x:6=1:2$　　から　$x=3$

$6:y=2:\sqrt{3}$　から　$y=3\sqrt{3}$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　点 A から辺 BC に引いた垂線の足を H とする。



△AHC において，

$\mathrm{AH}:\mathrm{HC}:\mathrm{CA}=1:1:\sqrt{2}$

であるから

$\mathrm{AH}=6\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

$\mathrm{HC}=\mathrm{AH}=3\sqrt{2}$

△ABH において，$\mathrm{BH}:\mathrm{AH}=1:\sqrt{3}$ であるから

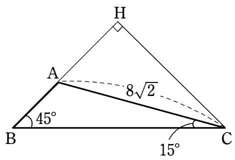
$\mathrm{BH}=3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

よって　　$\mathrm{BC}=\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

したがって，△ABC の面積は

$\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{6}+3\sqrt{2})\times3\sqrt{2}=3\sqrt{3}+9$

(2)　点 C から直線 BA に引いた垂線の足を H とすると



$\angle\mathrm{HAC}=45^\circ+15^\circ=60^\circ$

したがって，△ACH において，

$\mathrm{HA}:\mathrm{AC}:\mathrm{CH}=1:2:\sqrt{3}$

であるから

$\mathrm{HA}=8\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=4\sqrt{2}$

$\mathrm{CH}=8\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{6}$

△BCH において，$\mathrm{HB}:\mathrm{CH}=1:1$ であるから

$\mathrm{HB}=\mathrm{CH}=4\sqrt{6}$

よって　　$\mathrm{AB}=4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$

したがって，△ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\times(4\sqrt{6}-4\sqrt{2})\times4\sqrt{6}=48-16\sqrt{3}$

7

解説

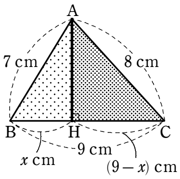
BH$=x$ cm とする。
直角三角形 ABH において

$$x^2+\mathrm{AH}^2=7^2$$

よって　$\mathrm{AH}^2=7^2-x^2$　…… ①
直角三角形 ACH において

$$(9-x)^2+\mathrm{AH}^2=8^2$$

よって　$\mathrm{AH}^2=8^2-(9-x)^2$　…… ②
①，② から　$7^2-x^2=8^2-(9-x)^2$
これを解いて　$x=\dfrac{11}{3}$



よって，① から　$\mathrm{AH}^2=7^2-\left(\dfrac{11}{3}\right)^2=\dfrac{320}{9}$

AH>0 であるから　$\mathrm{AH}=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$　　　答　$\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ cm

8

解説

(1)　O′ から，線分 OA に垂線 O′H を引くと

$$\mathrm{OH}=5-2$$
$$=3\ (\mathrm{cm})$$

△OO′H において

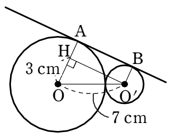
$$\mathrm{O'H}^2=7^2-3^2=40$$

O′H>0 であるから

$$\mathrm{O'H}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\ (\mathrm{cm})$$

AB$=$O′H であるから

$$\mathrm{AB}=2\sqrt{10}\ \mathrm{cm}$$



(2)　O′ から，直線 OA に垂線 O′H を引くと

$$\mathrm{OH}=5+3$$
$$=8\ (\mathrm{cm})$$
$$\mathrm{OO'}=10\ (\mathrm{cm})$$

△OO′H において

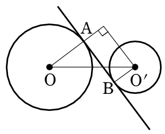
$$\mathrm{O'H}^2=10^2-8^2=36$$

O′H>0 であるから

$$\mathrm{O'H}=6\ (\mathrm{cm})$$

AB$=$O′H であるから

$$\mathrm{AB}=6\ \mathrm{cm}$$



9

解説

AE$=x$ とすると　EF$=$EB$=5-x$
また　FC$=$BC$=13$
△CDF において，三平方の定理により

$$\mathrm{CF}^2=\mathrm{CD}^2+\mathrm{DF}^2$$
$$13^2=5^2+\mathrm{DF}^2$$
$$\mathrm{DF}^2=144$$

DF>0 より　DF$=12$

$$\mathrm{AF}=13-12=1$$

△AEF において，三平方の定理により

$$\mathrm{EF}^2=\mathrm{AE}^2+\mathrm{AF}^2$$
$$(5-x)^2=x^2+1^2$$
$$25-10x+x^2=x^2+1$$
$$-10x=-24$$
$$x=\frac{12}{5}$$

よって　$\mathrm{AE}=\dfrac{12}{5}$

10

解説

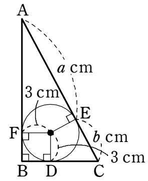
(1)　右の図のように，接点 D，E，F を定め，AE$=a$ cm，CE$=b$ cm とおくと

$$\mathrm{AB}=(a+3)\ \mathrm{cm}$$
$$\mathrm{BC}=(b+3)\ \mathrm{cm}$$

△ABC の周の長さについて

$$(a+3)+(b+3)+(a+b)=40$$
$$a+b=17$$

よって，斜辺の長さは　17 cm　答



(2)　(1) の結果から　$b=17-a$
このとき　AB$=a+3$，BC$=b+3=20-a$，CA$=17$
三平方の定理により　$(a+3)^2+(20-a)^2=17^2$
整理して　$a^2-17a+60=0$

$$(a-5)(a-12)=0$$

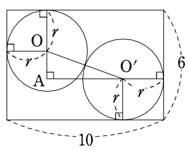
よって，$a=5$，12 から　$(a,\ b)=(5,\ 12)$，$(12,\ 5)$
$(a,\ b)=(5,\ 12)$ のとき　AB$=8$ cm，BC$=15$ cm
これは AB$>$AC を満たさず適さない。
$(a,\ b)=(12,\ 5)$ のとき　AB$=15$ cm，BC$=8$ cm
これは AB$>$AC を満たす。
したがって，　AB$=15$ cm，BC$=8$ cm

11

解説

右の図のように，円の中心を O，O′ とし，線分 OO′ を斜辺とする直角三角形 OAO′ をつくる。
円の半径を r とすると

$$\mathrm{OO'}=2r$$
$$\mathrm{OA}=6-2r$$
$$\mathrm{AO'}=10-2r$$



よって，△OAO′ において

$$36-24r+4r^2+100-40r+4r^2=4r^2$$
$$4r^2-64r+136=0$$
$$r^2-16r+34=0$$
$$r=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\times1\times34}}{2\times1}$$
$$=8\pm\sqrt{30}$$

$0<r<3$ であるから，$r=8-\sqrt{30}$ は問題に適するが，$r=8+\sqrt{30}$ は問題に適さない。
したがって，求める円の半径は　$8-\sqrt{30}$

12

解説

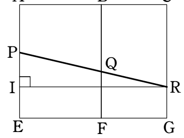
右の図のような展開図の一部において，PQ＋QR の長さが最小となるのは，3 点 P，Q，R が一直線上にあるとき，すなわち線分 BF と PR の交点の位置に点 Q があるときである。
R から AE に引いた垂線の足を I とすると

$$\mathrm{PI}=5-3=2\ (\mathrm{cm}),\ \mathrm{RI}=5+4=9\ (\mathrm{cm})$$

したがって，直角三角形 RPI において

$$\mathrm{RP}=\sqrt{2^2+9^2}=\sqrt{85}\ (\mathrm{cm})$$

よって，求める PQ＋QR の長さは　$\sqrt{85}$ cm



13

解説

右の図のように，球の底面との接点を C，母線 AB における接点を D とする。
直角三角形 ABC において

$$\mathrm{AB}=\sqrt{12^2+5^2}=13\ (\mathrm{cm})$$

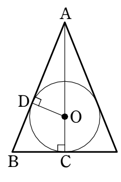
△AOD∽△ABC であるから

$$\mathrm{AO}:\mathrm{AB}=\mathrm{OD}:\mathrm{BC}$$

球 O の半径を x cm とすると

$$(12-x):13=x:5$$
$$5(12-x)=13x$$
$$x=\frac{10}{3}$$

よって，球 O の半径は　$\dfrac{10}{3}$ cm



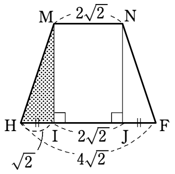
14

解説

四角形 MNFH は MH＝NF であるから，等脚台形である。

$MN=CN\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$HF=GF\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$



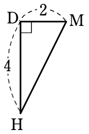
M，N から辺 HF にそれぞれ垂線 MI，NJ を引くと

$IJ=MN=2\sqrt{2}$

$HI=FJ=(HF-IJ)\div 2=\sqrt{2}$

直角三角形 MHI において

$MI^2=MH^2-(\sqrt{2})^2=MH^2-2$　……①



ここで，直角三角形 DHM において　　$MH^2=2^2+4^2=20$

① に代入して　　　$MI^2=20-2=18$

$MI>0$ であるから　　$MI=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

よって，台形 MNFH の面積は

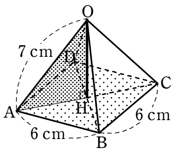
$(MN+HF)\times MI\div 2=(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times 3\sqrt{2}\div 2$

$=18\,(cm^2)$　答

15

解説

底面の対角線の交点を H とすると，OH と面 ABCD は垂直になるから，線分 OH の長さは，正四角錐の高さである。



底面 ABCD は正方形であるから

$AC=\sqrt{2}AB=6\sqrt{2}$

よって　　$AH=\frac{1}{2}AC=3\sqrt{2}$

△OAH は直角三角形であるから　　$(3\sqrt{2})^2+OH^2=7^2$

$OH^2=31$

$OH>0$ であるから　　$OH=\sqrt{31}$

よって，求める体積は　　$\frac{1}{3}\times 6^2\times\sqrt{31}=12\sqrt{31}$　　　答　$12\sqrt{31}$ cm^3

16

解説

正四面体の頂点から底面に引いた垂線は，底面の正三角形の重心を通る。O から底面 ABC に引いた垂線を OH，AH と BC の交点を M とする。

△ABC は正三角形で，M は辺 BC の中点であるから

$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}\,(cm)$

H は △ABC の重心で，AH : HM＝2 : 1 であるから

$AH=\frac{2}{3}AM=2\sqrt{3}\,(cm)$

直角三角形 OAH において

$OH^2=OA^2-AH^2=6^2-(2\sqrt{3})^2=24$

$OH>0$ であるから　　$OH=2\sqrt{6}$ cm

よって，正四面体 OABC の体積は

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}\right)\times 2\sqrt{6}=18\sqrt{2}\,(cm^3)$

$\boxed{1}$

(解説)

(1) $3^2+2^2=x^2$

$x^2=13$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{13}$

(2) $(2\sqrt{3})^2+4^2=x^2$

$x^2=28$

$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{7}$

(3) $6^2+x^2=10^2$

$x^2=64$

$x>0$ であるから　$x=8$

(4) $(\sqrt{5})^2+x^2=3^2$

$x^2=4$

$x>0$ であるから　$x=2$

(5) $x^2+6^2=8^2$

$x^2=28$

$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{7}$

(6) $(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2=x^2$

$x^2=25$

$x>0$ であるから　$x=5$

(7) $AB:AC=1:\sqrt{2}$ であるから

$6:x=1:\sqrt{2}$

よって　$x=6\sqrt{2}$

(8) $AC:BC=1:\sqrt{2}$ であるから

$x:4=1:\sqrt{2}$

$\sqrt{2}x=4$

よって　$x=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

(9) $AC:BC=1:\sqrt{3}$ であるから

$\sqrt{6}:x=1:\sqrt{3}$

$x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

(10) $BC:AC=2:\sqrt{3}$ であるから

$x:9=2:\sqrt{3}$

$\sqrt{3}x=18$

よって　$x=\dfrac{18}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}$

(11) $\triangle BCD$ において

$BC^2+1^2=(2\sqrt{2})^2$

$BC^2=7$

$BC>0$ であるから　$BC=\sqrt{7}$

$\triangle ABC$ において

$(\sqrt{7})^2+3^2=x^2$

$x^2=16$

$x>0$ であるから　$x=4$

(12) A から辺 BC にひいた垂線を AH とする。

$\triangle ABH$ において

$AB:AH=2:\sqrt{3}$ から　$AH=4\sqrt{3}$ cm

よって，$\triangle AHC$ において

$AH:AC=1:\sqrt{2}$ から　$x=4\sqrt{6}$

(13) A から直線 BC にひいた垂線を AH とする。

このとき，$\triangle AHB$ において，$\angle ABH=60°$，$\angle BAH=30°$ である。

よって，$HB:AB=1:2$ から　$HB=6$ cm

$HB:AH=1:\sqrt{3}$ から　$AH=6\sqrt{3}$ cm

$\triangle AHC$ は直角二等辺三角形になるから

$CH=AH=6\sqrt{3}$ cm

したがって　$x=6\sqrt{3}-6$

(14) $AB:AH=2:\sqrt{3}$ であるから

$10:x=2:\sqrt{3}$

$2x=10\sqrt{3}$

よって　$x=5\sqrt{3}$

(15) H は弦 AB の中点になる。

直角三角形 AOH において

$AH^2+4^2=6^2$

$AH^2=20$

$AH>0$ であるから　$AH=2\sqrt{5}$

よって　$x=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

(16) H は弦 AB の中点になるから

$BH=6$ cm

直角三角形 BOH において

$6^2+x^2=7^2$

$x^2=13$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{13}$

(17) 円の接線は，接点を通る半径に垂直である。

よって，直角三角形 AOP において

$x^2+2^2=8^2$

$x^2=60$

$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{15}$

(18) 円の接線は，接点を通る半径に垂直である。

よって，直角三角形 AOP において

$6^2+x^2=(2\sqrt{15})^2$

$x^2=24$

$x>0$ であるから　$x=2\sqrt{6}$

$\boxed{2}$

(解説)

$a^2=(m-n)^2=m^2-2mn+n^2$

$b^2=(2\sqrt{mn})^2=4mn$

$c^2=(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$

よって　$a^2+b^2=(m^2-2mn+n^2)+4mn$

$=m^2+2mn+n^2$

$=c^2$

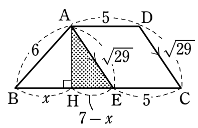
したがって，$a^2+b^2=c^2$ であるから，長さ c の辺を斜辺とする直角三角形である。

$\boxed{3}$

(解説)

頂点 A から辺 BC へ垂線 AH を引く。

また，頂点 A を通り，辺 DC に平行な直線と辺 BC の交点を E とすると，四角形 AECD は平行四辺形である。



よって　$BE=12-5=7$

$BH=x$ cm とおくと　$HE=BE-BH=7-x$

直角三角形 ABH において　$x^2+AH^2=6^2$

よって　$AH^2=36-x^2$　……①

直角三角形 AEH において　$(7-x)^2+AH^2=(\sqrt{29})^2$

よって　$AH^2=29-(7-x)^2$　……②

①，② から　$36-x^2=29-(7-x)^2$

よって　$14x=56$

したがって　$x=4$

① に代入して　$AH^2=36-4^2=20$

$AH>0$ であるから　$AH=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

よって，台形 ABCD の面積は

$(5+12)\times AH\div2=17\times2\sqrt{5}\div2=17\sqrt{5}$ (cm²)

4

解説

(1)　AP$=x$ cm とすると　PD$=9-x$(cm)

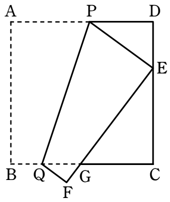
また　　PE$=$AP$=x$(cm)

△PED において　$(9-x)^2+3^2=x^2$

これを解いて　　$x=5$

よって　　AP$=5$ cm

(2)　正方形 ABCD を折り返したとき，B が移った点を F とし，EF と QC の交点を G とする。



△PED と △EGC において

$\angle$PDE$=\angle$ECG$=90°$　……①

△PED において

$\angle$DPE$+\angle$PED$=90°$　……②

$\angle$PEG$=90°$ であるから

$\angle$CEG$+\angle$PED$=90°$　……③

②，③ から　$\angle$DPE$=\angle$CEG　……④

①，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△PED ∽ △EGC

したがって　EG : GC : CE$=5:3:4$

CE$=9-3=6$(cm) であるから　EG$=6\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{15}{2}$(cm)

GC$=6\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{2}$(cm)

EF$=9$ cm であるから　　GF$=9-\dfrac{15}{2}=\dfrac{3}{2}$(cm)

ここで，BQ$=y$ cm とすると　QF$=y$ cm，　QG$=9-\left(y+\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{9}{2}-y$(cm)

△QFG において　$y^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{9}{2}-y\right)^2$　　これを解いて　$y=2$

よって　　BQ$=2$ cm

別解　Q と E を結ぶ。

BQ$=y$ cm とすると

QF$=$BQ$=y$ (cm)

CQ$=9-y$ (cm)

また　EF$=$AB$=9$ (cm)

EC$=9-$DE$=6$ (cm)

△EFQ において　$y^2+9^2=$QE^2　……①

△ECQ において　$(9-y)^2+6^2=$QE^2　……②

①，② から　$y^2+9^2=(9-y)^2+6^2$

これを解いて　$y=2$

よって　　BQ$=2$ cm

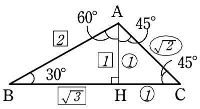
5

解説

(1)　$\angle$C$=180°-(30°+105°)=45°$

頂点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと

$\angle$BAH$=60°$，　$\angle$CAH$=45°$



直角三角形 CHA において，

AH : CH : AC$=1:1:\sqrt{2}$ であるから

$$\text{AH}=\text{CH}=4\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

直角三角形 ABH において，AH : AB : BH$=1:2:\sqrt{3}$ であるから

AB$=2$AH$=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ (cm)

BH$=\sqrt{3}$AH$=\sqrt{3}\times2\sqrt{2}=2\sqrt{6}$

よって　BC$=$BH$+$CH$=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$ (cm)

また　△ABC$=\dfrac{1}{2}\times$BC$\times$AH$=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})\times2\sqrt{2}$

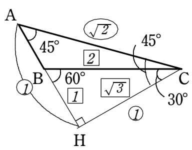
$=4\sqrt{3}+4$ (cm^2)

(2)　$\angle$A$=180°-(15°+120°)=45°$

頂点 C から線分 AB の延長に垂線 CH を引くと

$\angle$CBH$=60°$

$\angle$ACH$=30°+15°=45°$



直角三角形 ACH において，

AH : CH : AC$=1:1:\sqrt{2}$ であるから

$$\text{AH}=\text{CH}=6\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

直角三角形 BCH において，BH : BC : CH$=1:2:\sqrt{3}$ であるから

$$\text{BC}=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{CH}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times3\sqrt{2}=2\sqrt{6}\ \text{(cm)}$$

$$\text{BH}=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{CH}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times3\sqrt{2}=\sqrt{6}$$

よって　AB$=$AH$-$BH$=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ (cm)

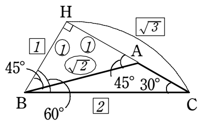
また　△ABC$=\dfrac{1}{2}\times$AB$\times$CH$=\dfrac{1}{2}\times(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\times3\sqrt{2}$

$=9-3\sqrt{3}$ (cm^2)

(3)　$\angle$C$=180°-(15°+135°)=30°$

頂点 B から線分 CA の延長に垂線 BH を引くと

$\angle$CBH$=60°$，　$\angle$ABH$=45°$



直角三角形 HBA において，

HB : HA : AB$=1:1:\sqrt{2}$ であるから

AB$=\sqrt{2}$HB　……①

また，HB$=$HA であるから，この長さを x cm とする。

直角三角形 HBC において，BH : BC : CH$=1:2:\sqrt{3}$ であるから

BC$=2$BH　……②

また　BH : CH$=1:\sqrt{3}$

すなわち　$x:(x+2)=1:\sqrt{3}$

よって　$\sqrt{3}x=x+2$

したがって　$(\sqrt{3}-1)x=2$

よって　$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$

② から　BC$=2(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}+2$ (cm)

① から　AB$=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (cm)

したがって　△ABC$=\dfrac{1}{2}\times$AC$\times$BH$=\dfrac{1}{2}\times2\times(\sqrt{3}+1)$

$=\sqrt{3}+1$ (cm^2)

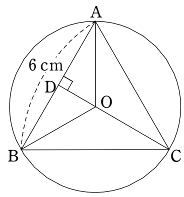
6 ［2016 鎌倉学園］

解説

円の中心を O，内接する三角形を △ABC とする。

O から AB へ垂線をひき，AB との交点を D とする。

△OAD は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であるから



$$\text{OD}=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{AD}=\sqrt{3}\ \text{(cm)}$$

OC$=$OA$=2$OD$=2\sqrt{3}$ (cm)

よって，円の半径は　$2\sqrt{3}$ cm

正三角形の高さ CD は　$3\sqrt{3}$ cm

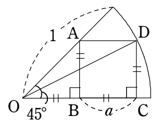
したがって，求める面積は

$$\pi\times(2\sqrt{3})^2-\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=12\pi-9\sqrt{3}\ \text{(cm}^2\text{)}$$

7 ［2014 大阪星光学院］

解説

右の図のように，正方形を ABCD，おうぎ形の中心を O，正方形の 1 辺の長さを a とする。



△OAB は直角二等辺三角形であるから

OB$=$AB$=a$

△OCD において，三平方の定理により

$(2a)^2+a^2=1^2$

$5a^2=1$

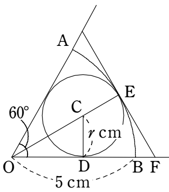
$a^2=\dfrac{1}{5}$

$a>0$ であるから　$a=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

よって，求める長さは　$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

8［2014 専修大学松戸］

（解説）



円の中心を C，円と OB，$\overset{\frown}{AB}$ との接点をそれぞれ D，E とし，円 C の半径を r cm とする。

OA，OB は円 C の接線であるから

$\angle CDO=90°$

$\angle BOC=\angle AOC=30°$

よって，$\triangle COD$ は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であるから

$OC=2r$ cm

$OE=OC+CE$

$=2r+r$

$=3r$

よって　$3r=5$

$r=\dfrac{5}{3}$ (cm)

したがって，円の半径は　$\dfrac{5}{3}$ cm

9

（解説）

IJ＝AB であるから　$AB^2+EI^2=IJ^2+EI^2$

$\angle EIJ=90°$ であるから　$IJ^2+EI^2=EJ^2$

JB＝IA であるから　$BE^2+IA^2=BE^2+JB^2$

$\angle JBE=90°$ であるから　$BE^2+JB^2=EJ^2$

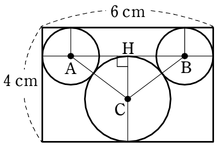
正十角形 ABCDEFGHIJ の外接円の半径は 1 であるから

$EJ=1\times2=2$

したがって　$AB^2+BE^2+EI^2+IA^2=EJ^2+EJ^2=2\times2^2=8$

10

（解説）



$AB=6-(1+1)=4$ (cm)

C から線分 AB に引いた垂線の足を H とする。

$\triangle ACB$ は CA＝CB の二等辺三角形であるから，H は辺 AB の中点で

$AH=4\times\dfrac{1}{2}=2$ (cm)

円 C の半径を r cm とすると

$AC=1+r$ (cm)

$CH=4-(1+r)=3-r$ (cm)

$\triangle ACH$ において

$2^2+(3-r)^2=(1+r)^2$

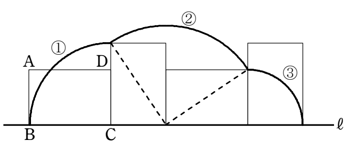
これを解いて　$r=\dfrac{3}{2}$

よって，円 C の半径は　$\dfrac{3}{2}$ cm

11

（解説）

(1)　B の軌跡は，次の図のようになる。



長方形の対角線の長さは

$\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$ (cm)

① の部分は半径 6 cm，中心角 90° の扇形の弧，

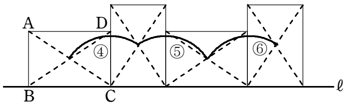
② の部分は半径 $2\sqrt{13}$ cm，中心角 90° の扇形の弧，

③ の部分は半径 4 cm，中心角 90° の扇形の弧である。

よって，求める軌跡の長さは

$$2\pi\times6\times\frac{90}{360}+2\pi\times2\sqrt{13}\times\frac{90}{360}+2\pi\times4\times\frac{90}{360}=(5+\sqrt{13})\pi\ (\text{cm})$$

(2)　O の軌跡は，次の図のようになる。



④，⑤，⑥ の部分は，それぞれ半径 $\sqrt{13}$ cm，中心角 90° の扇形の弧であるから，

求める軌跡の長さは　$\left(2\pi\times\sqrt{13}\times\dfrac{90}{360}\right)\times3=\dfrac{3\sqrt{13}}{2}\pi$ (cm)

12［2014 花園］

（解説）

(1)　$O_1O_2=1+3=4$

点 O_1 から線分 O_2B に垂線をひき，線分 O_2B との交点を E とする。

四角形 $ABEO_1$ は長方形となり

$BE=AO_1=1$

よって　$EO_2=3-1=2$

したがって，$\triangle O_1O_2E$ は 3 辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形となるから

$\angle O_1O_2B=60°$

(2)　$O_1E=\sqrt{3}EO_2=2\sqrt{3}$ であるから

$AB=2\sqrt{3}$

(3)　$\angle AO_1O_2=\angle DO_1O_2=90°+30°=120°$ であるから，$\overset{\frown}{AD}$ の中心角は

$360°-120°\times2=120°$

$\angle BO_2O_1=\angle CO_2O_1=60°$ であるから，$\overset{\frown}{BC}$ の中心角は

$360°-60°\times2=240°$

よって，求めるひもの長さは

$$2\sqrt{3}\times2+2\pi\times1\times\frac{120}{360}+2\pi\times3\times\frac{240}{360}=4\sqrt{3}+\frac{14}{3}\pi$$

(4)　台形 ABO_2O_1 の面積は

$\dfrac{1}{2}\times(1+3)\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

よって，求める面積は

$$4\sqrt{3}\times2+\pi\times1^2\times\frac{120}{360}+\pi\times3^2\times\frac{240}{360}=8\sqrt{3}+\frac{19}{3}\pi$$

13

（解説）

$\triangle ABC$ において　$AC=\sqrt{4^2+3^2}=5$ (cm)

よって，AE＝5 cm であるから

$DE=5-3=2$ (cm)

$\triangle DCE$ において　$CE=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ (cm)

線分 AC は直径であるから　$\angle APC=90°$

$\triangle ACE$ は，AC＝AE の二等辺三角形であるから，P は辺 CE の中点で

$CP=2\sqrt{5}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{5}$ (cm)

$\triangle ACP$ において　$AP=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$ (cm)

また，$\angle DAQ=\angle PAE$，$\angle ADQ=\angle APE$ より，$\triangle AQD\backsim\triangle AEP$ であるから

$AQ:AE=AD:AP$

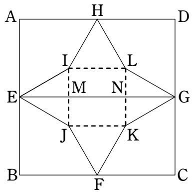
$AQ:5=3:2\sqrt{5}$

よって　$AQ=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ cm

14［2016 青雲］

解説

右の図のように，正四角錐の底面を IJKL，EG と IJ，LK との交点をそれぞれ M，N とする。



AD＝3 cm，MN＝1 cm より，EM＝NG＝1 cm である。

展開図を組み立てた正四角錐の高さを EO とする。

△EMO において，三平方の定理により

$$\mathrm{EO}^2=\mathrm{EM}^2-\left(\frac{1}{2}\mathrm{MN}\right)^2$$

$$\mathrm{EO}^2=1-\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{EO}^2=\frac{3}{4}$$

EO＞0 より　$\mathrm{EO}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (cm)

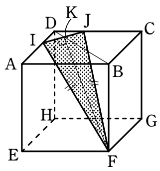
よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\ (\mathrm{cm}^3)$$

15

解説

△FIJ は FI＝FJ の二等辺三角形である。



また，直角三角形 DIJ において，DI : DJ : IJ＝1 : 1 : $\sqrt{2}$ であるから

$$\mathrm{IJ}=\mathrm{DI}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}\qquad\cdots\cdots①$$

F から辺 IJ に垂線 FK を引くと，K は線分 BD，IJ の交点である。

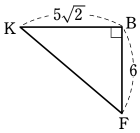
直角三角形 BFK において

$$\mathrm{FK}^2=\mathrm{BF}^2+\mathrm{BK}^2=6^2+\mathrm{BK}^2\quad\cdots\cdots②$$

ここで　$\mathrm{BK}=\mathrm{BD}-\mathrm{DK}$

$$=\mathrm{AD}\times\sqrt{2}-\mathrm{DI}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=6\sqrt{2}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$



①，② から　$\mathrm{FK}^2=36+(5\sqrt{2})^2=86$

FK＞0 であるから　$\mathrm{FK}=\sqrt{86}$

よって，△IJF の面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{IJ}\times\mathrm{FK}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{86}=2\sqrt{43}\ (\mathrm{cm}^2)$$

16

解説

(1)　四面体 DBEG は直方体 ABCD－EFGH から 4 つの四面体 ABDE，BCDG，BEFG，DEGH を取り除いたものである。

直方体の体積は　$3\times3\times4=36$

4 つの四面体の体積はすべて　$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\times3\right)\times4=6$

したがって，四面体 DBEG の体積は　$36-4\times6=12\,(\mathrm{cm}^3)$

(2)　直角三角形 ABD，ABE，ADE において

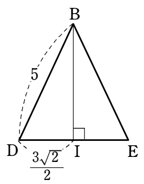
$$\mathrm{BD}=\sqrt{3^2+4^2}=5,\qquad \mathrm{BE}=\sqrt{3^2+4^2}=5,\qquad \mathrm{DE}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

よって，△BDE は BD＝BE の二等辺三角形である。

頂点 B から辺 DE に垂線 BI を引く。

直角三角形 BDI において

$$\mathrm{BI}=\sqrt{5^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{82}}{2}$$



よって，△BDE の面積は

$$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{82}}{2}=\frac{3\sqrt{41}}{2}\ (\mathrm{cm}^2)$$

点 G から △BDE に引いた垂線を GJ とすると，四面体 DBEG の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BDE}\times\mathrm{GJ}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{41}}{2}\times\mathrm{GJ}=\frac{\sqrt{41}}{2}\mathrm{GJ}$$

これと (1) から　$12=\dfrac{\sqrt{41}}{2}\mathrm{GJ}$

よって　$\mathrm{GJ}=\dfrac{24\sqrt{41}}{41}$　　答　$\dfrac{24\sqrt{41}}{41}$ cm

17［2016 函館ラ・サール］

解説

(1)　△ABD において

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2=4$$

$$\mathrm{BD}^2=2^2=4$$

よって，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{BD}^2$ が成り立つから

$$\angle\mathrm{BAD}=90^\circ$$

(2)　△ABC において，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$ が成り立つから

$$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$$

さらに，△ACD において，$\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{CD}^2$ が成り立つから

$$\angle\mathrm{CAD}=90^\circ$$

したがって，求める立体の体積は

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

(3)　$\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

(4)　求める高さを h cm とすると

$$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times h=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$h=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって，求める高さは　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ cm

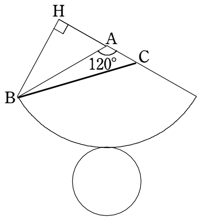
18

解説

(1)　母線 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+2^2}=6$$

よって，展開図における側面の扇形の中心角の大きさは　$360^\circ\times\dfrac{2\pi\times2}{2\pi\times6}=120^\circ$



よって，右の展開図における線分 BC に糸が一致するとき，糸の長さは最も短くなる。

図のように，B から CA の延長に引いた垂線の足を H とすると

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=3$$

$$\mathrm{BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}=3\sqrt{3}$$

したがって，直角三角形 BCH において

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+(3+2)^2}=2\sqrt{13}$$

よって，求める糸の長さは　$2\sqrt{13}$

(2)　条件から，線分 BC 上の点 D について，AD⊥BC となる。

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AD}=3\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times\mathrm{AD}=3\sqrt{3}$$

これを解いて　$\mathrm{AD}=\dfrac{3\sqrt{39}}{13}$

19

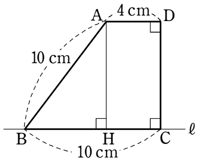
(解説)

(1)　A から BC に引いた垂線の足を H とする。

直角三角形 ABH において

$$AH=\sqrt{10^2-6^2}=8\,(\mathrm{cm})$$

1 回転させてできる立体は，底面の半径 8 cm，高さ 4 cm の円柱と，底面の半径 8 cm，高さ 6 cm の円錐を組み合わせたものになる。



よって，求める体積は

$$\pi\times8^2\times4+\frac{1}{3}\times\pi\times8^2\times6=384\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

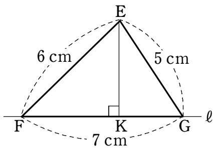
(2)　E から FG に引いた垂線の足を K とする。

FK＝x cm とすると，直角三角形 EFK において

$$EK^2=6^2-x^2$$

直角三角形 EGK において

$$EK^2=5^2-(7-x)^2$$



よって　$6^2-x^2=5^2-(7-x)^2$

これを解いて　$x=\dfrac{30}{7}$

したがって　$EK=\sqrt{6^2-\left(\dfrac{30}{7}\right)^2}=\dfrac{12\sqrt{6}}{7}$ (cm)

1 回転させてできる立体は，底面の半径 EK，高さ FK の円錐と，底面の半径 EK，高さ GK の円錐を組み合わせたものになる。

よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\pi\times EK^2\times FK+\frac{1}{3}\times\pi\times EK^2\times GK=\frac{1}{3}\times\pi\times EK^2\times(FK+GK)$$

$$=\frac{1}{3}\times\pi\times EK^2\times FG=\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{12\sqrt{6}}{7}\right)^2\times7$$

$$=\frac{288}{7}\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

20［2014 福岡大学附属大濠］

(解説)

(1)　正方形の 1 辺の長さと対角線の長さの比は $1:\sqrt{2}$ であるから，求める長さは

$$6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

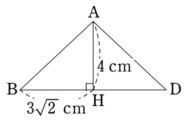
(2)　$\dfrac{1}{3}\times(6\times6)\times4=48\,(\mathrm{cm}^3)$

(3)　底面 BCDE の対角線 BD の中点を H とする。

$$BH=\frac{1}{2}BD$$

$$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}$$

$$=3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$



△ABH において，三平方の定理により

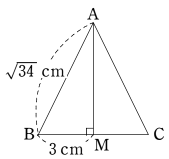
$$AB=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+4^2}$$

$$=\sqrt{34}\ (\mathrm{cm})$$

△ABM において，三平方の定理により

$$AM=\sqrt{(\sqrt{34})^2-3^2}$$

$$=5\,(\mathrm{cm})$$



(4)　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times6\times5=15\,(\mathrm{cm}^2)$

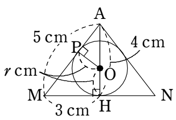
よって，求める表面積は

$$6\times6+15\times4=96\,(\mathrm{cm}^2)$$

(5)　辺 DE の中点を N，球 O と AM の交点を P とし，面 AMN について考える。

△APO と △AHM において

$$\angle APO=\angle AHM=90^\circ$$



共通であるから

$$\angle PAO=\angle HAM$$

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle APO\backsim\triangle AHM$$

よって　$AO:AM=PO:HM$

球 O の半径を r cm とすると

$$(4-r):5=r:3$$

$$3(4-r)=5r$$

$$12-3r=5r$$

$$8r=12$$

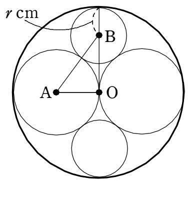
$$r=\frac{3}{2}$$

したがって，球 O の半径は $\dfrac{3}{2}$ cm

1

解説

中円２個の接点をＯとすると，Ｏは大円の中心である。
右の図のように，中円の中心をＡ，小円の中心をＢとし，小円の半径を r cm とする。



$$OA=10\times\frac{1}{2}=5\,(cm)$$
$$OB=10-r\,(cm)$$
$$AB=5+r\,(cm)$$

$\angle AOB=90°$ であるから，$\triangle AOB$ において

$$5^2+(10-r)^2=(5+r)^2$$

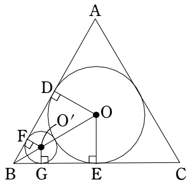
これを解いて　$r=\dfrac{10}{3}$

よって，小円の半径は　$\dfrac{10}{3}$ cm

2［2014 開明］

解説

右の図のように，正三角形ABCに内接する大円の中心をＯ，小円の中心をＯ′とする。また，辺ABと２つの円Ｏ，Ｏ′との接点をＤ，Ｆ，辺BCと２つの円Ｏ，Ｏ′との交点をＥ，Ｇとする。
円Ｏの半径を r とすると，△ABCの面積について



$$\frac{1}{2}\times6\times r\times3=\frac{1}{2}\times6\times\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$r=\sqrt{3}$$

$\triangle OBD\equiv\triangle OBE$ より，$\angle OBD=\angle OBE=30°$ であるから

$$OB=2OE=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

円Ｏ′の半径を r' とする。
$\triangle O'BF\equiv\triangle O'BG$ より，$\angle O'BF=\angle O'BG=30°$ であるから，３点Ｂ，Ｏ′，Ｏは一直線上にある。
$BO'=2O'G=2r'$ であるから

$$2r'+r'+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$
$$3r'=\sqrt{3}$$
$$r'=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

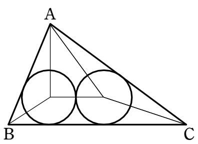
よって，小円の半径は　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3

解説

(1)　Ａから辺BCに引いた垂線の足をＨとする。
　BH$=x$ とすると
　　$\triangle ABH$ において　$AH^2=13^2-x^2$
　　$\triangle ACH$ において　$AH^2=20^2-(21-x)^2$
　よって　$13^2-x^2=20^2-(21-x)^2$
　これを解いて　$x=5$
　このとき　$AH=\sqrt{13^2-5^2}=12$
　したがって，求める垂線の長さは　12

(2)　求める円の半径を r とする。
　△ABCを右の図のように分けて考えると，
　△ABCの面積について



$$\frac{1}{2}\times13\times r+\frac{1}{2}\times(2r+21)\times r+\frac{1}{2}\times20\times r+\frac{1}{2}\times2r\times(12-r)$$
$$=\frac{1}{2}\times21\times12$$

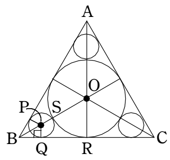
　これを解いて　$r=\dfrac{42}{13}$

　よって，円の半径は　$\dfrac{42}{13}$

4［2016 久留米大学附設］

解説

右の図のように，円の中心をＯ，Ｐとし，Ｏ，ＰからBCに垂線OR，PQをひく。
このとき，Ａ，Ｏ，Ｒは１つの直線上にあり，△ARBと△ARCはARについて対称である。
よって　$BR=CR=6\div2=3$ (cm)
△OBRは３つの角が30°，60°，90°の直角三角形であるから



$$OR=3\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ (cm)$$

また　$OB=2OR=2\sqrt{3}$ cm
△PBQは３つの角が30°，60°，90°の直角三角形であるから，PQ$=x$ cm とすると，BP$=2x$ cm と表される。
図において　$OB=OS+SP+PB$

$$2\sqrt{3}=\sqrt{3}+x+2x$$
$$3x=\sqrt{3}$$
$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

円Ｏの周の長さは　$2\pi\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$ (cm)
円Ｐの周の長さは　$2\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (cm)
３つの小さい円の半径はすべて等しいから，求める長さの和は

$$2\sqrt{3}\pi+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\times3=4\sqrt{3}\pi\ (cm)$$

5

解説

(1)　Ｂの y 座標は　$y=\dfrac{2}{3}\times3=2$
　Ｂは関数 $y=ax^2$ のグラフ上の点であるから，$x=3$，$y=2$ を $y=ax^2$ に代入して
　　$2=a\times3^2$
　よって　$a=\dfrac{2}{9}$

(2)　Ａの y 座標は，$y=\dfrac{2}{9}\times(-3)^2=2$ であるから　A$(-3,\ 2)$
　Ｃの y 座標は，$y=\dfrac{2}{9}\times6^2=8$ であるから　C$(6,\ 8)$
　よって，直線ACの傾きは　$\dfrac{8-2}{6-(-3)}=\dfrac{2}{3}$
　したがって，直線ACとOBの傾きは等しいから　AC∥OB
　よって，四角形OBCAは台形である。
　台形OBCAの高さを h とすると，h は辺ACを底辺とみたときの△ABCの高さに等しい。
　$AC=\sqrt{\{6-(-3)\}^2+(8-2)^2}=3\sqrt{13}$ であるから，△ABCの面積は

$$\frac{1}{2}\times AC\times h=\frac{3\sqrt{13}}{2}h\quad\cdots\cdots①$$

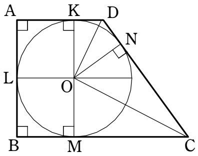
　一方，点Ｂの座標は(3，2)であるから，辺ABを底辺とみたときの△ABCの高さは
　　(Ｃの y 座標)−(Ｂの y 座標)$=8-2=6$
　よって，△ABCの面積は

$$\frac{1}{2}\times AB\times6=\frac{1}{2}\times(3+3)\times6=18\quad\cdots\cdots②$$

　①，②から　$\dfrac{3\sqrt{13}}{2}h=18$
　これを解いて　$h=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$
　したがって，台形OBCAの高さは　$\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$

$\boxed{6}$

(解説)



内接円の中心をOとし，内接円Oと辺DA，AB，BC，CDとの接点を，それぞれK，L，M，Nとする。

AD∥BCより，KM＝AB＝8であるから，円Oの半径は4である。

よって，AK＝4であるから

$DK=6-4=2$

△ODKにおいて

$OD^2=2^2+4^2=20$

CN＝xとおくと，△OCNにおいて

$OC^2=x^2+4^2$

また，DN＝DK＝2であるから　CD＝$x+2$

∠KOD＝∠DON，∠NOC＝∠COM，∠KOM＝180°であるから　∠COD＝90°

したがって，△OCDにおいて

$20+(x^2+4^2)=(x+2)^2$

これを解いて　　　$x=8$

CM＝CN＝8であるから　BC＝4＋8＝12

よって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\times(6+12)\times8-\pi\times4^2=72-16\pi$$

$\boxed{7}$

(解説)

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角より

$\angle ACB=\angle ADB=60°$

$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角より

$\angle ACD=\angle ABD=60°$

よって，∠ACB＝∠ACDであるから

BE：ED＝BC：CD＝1：2

したがって　$BE=\frac{1}{3}BD=1$(cm)

Aから辺BDに引いた垂線の足をHとすると

$$AH=AB\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{(cm)}$$

また，$BH=\frac{3}{2}$ cmであるから

$$EH=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\text{(cm)}$$

よって，△AEHにおいて

$$AE=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{7}\text{(cm)}$$

$\boxed{8}$［2014 筑紫女学園］

(解説)

(1)　おうぎ形MEFの半径はMN＝AB＝2，中心角は120°であるから，面積は

$$\pi\times2^2\times\frac{120}{360}=\frac{4}{3}\pi$$

(2)　M，Nはそれぞれ辺AD，BCの中点であるから

$$NM/\!/AB,\ \angle BNM=\frac{1}{2}\angle BNC=\frac{1}{2}a°$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ABN=\angle BNM=\frac{1}{2}a°$$

(3)　NM∥ABより　∠BEM＝∠ENM

$$=\frac{1}{2}\angle EMF$$

$$=60°$$

よって，△BEMは3つの角が30°，60°，90°の直角三角形であるから

$$BE=\frac{1}{2}EM=\frac{1}{2}MN=1$$

したがって　EP：PM＝BE：MN＝1：2

(4)　(3)から　　$BM=\sqrt{3}BE=\sqrt{3}$

BP：PN＝BE：MN＝1：2

よって　　　$\triangle MNP=\frac{2}{3}\triangle BMN$

$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle BEP=\frac{1}{3}\triangle BME$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

よって，求める面積の和は

$$2\times(\triangle BEP+\triangle MNP)=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$\boxed{9}$［2014 専修大学松戸］

(解説)

(1)　円の接線の性質から

DE＝DA＝3 (cm)

CE＝CB＝6 (cm)

よって　　CD＝3＋6＝9 (cm)

(2)　半円の半径をr cmとする。

Dから BCに垂線DHをひくと　DH＝AB＝$2r$ cm

△CDHにおいて，三平方の定理により

$$DH=\sqrt{CD^2-CH^2}$$

$$=\sqrt{81-(6-3)^2}$$

$$=6\sqrt{2}\ \text{(cm)}$$

よって　　$2r=6\sqrt{2}$

$r=3\sqrt{2}$

したがって，半円の半径は　　$3\sqrt{2}$ cm

(3)　BC，CDは，半円Oの接線であるから

∠OBC＝∠OEC＝90°

よって，4点O，B，C，EはOCを直径とする円周上にある。

△OBCにおいて，三平方の定理により

$$OC=\sqrt{OB^2+BC^2}$$

$$=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+6^2}$$

$$=3\sqrt{6}\ \text{(cm)}$$

したがって，求める円の半径は　$\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm

$\boxed{10}$［2014 渋谷教育学園幕張］

解説

(1)　点Rがx軸上にあるとき，PQとx軸の頂点をHとすると　PH＝QH

よって　$x^2=-(x-6)$

$x^2+x-6=0$

$(x-2)(x+3)=0$

$x=2,\ -3$

ここで，△PHRは3つの角が30°，60°，90°の直角三角形であるから

$\mathrm{PH}:\mathrm{HR}=1:\sqrt{3}$

$\mathrm{HR}=\sqrt{3}\,\mathrm{PH}$

$x=2$のとき，PH＝4であるから　$\mathrm{HR}=\sqrt{3}\times4=4\sqrt{3}$

よって，点Rの座標は　$(2+4\sqrt{3},\ 0)$

$x=-3$のとき，PH＝9であるから　$\mathrm{HR}=\sqrt{3}\times9=9\sqrt{3}$

よって，点Rの座標は　$(-3+9\sqrt{3},\ 0)$

(2)　点RからPQに下ろした垂線とPQとの交点をIとすると，△PHRは3つの角が30°，60°，90°の直角三角形であるから

$\mathrm{PI}:\mathrm{IR}=1:\sqrt{3}$

PQ＝tとすると　$\mathrm{PI}=\dfrac{1}{2}t$

$\dfrac{1}{2}t:\mathrm{IR}=1:\sqrt{3}$

$\mathrm{IR}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

正三角形PQRの面積が$9\sqrt{3}$であるから

$\dfrac{1}{2}\times t\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}t=9\sqrt{3}$

$t^2=36$

$t>0$であるから　$t=6$

$t=6$のとき　$\mathrm{IR}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$

$t=6$となるP，Qのx座標は

$x^2-(x-6)=6$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0,\ 1$

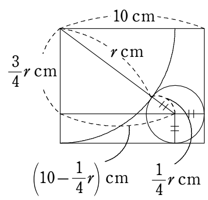
$x=0$のとき，Iの座標は$(0,\ -3)$であるから，Rの座標は　$(3\sqrt{3},\ -3)$

$x=1$のとき，Iの座標は$(1,\ -2)$であるから，Rの座標は　$(1+3\sqrt{3},\ -2)$

$\boxed{11}$［2014 大阪教育大学附属池田］

解説

(1)　おうぎ形の半径をr cmとすると，中心角が90°であるから，おうぎ形の弧の長さは



$2\pi r\times\dfrac{90^\circ}{360^\circ}=\dfrac{1}{2}\pi r$ (cm)

底面の円の半径をx cmとすると

$2\pi x=\dfrac{1}{2}\pi r$

$x=\dfrac{1}{4}r$ (cm)

右の図から，三平方の定理により

$\left(\dfrac{3}{4}r\right)^2+\left(10-\dfrac{1}{4}r\right)^2=\left(\dfrac{5}{4}r\right)^2$

$3r^2+16r-320=0$

解の公式により　$r=\dfrac{-16\pm\sqrt{16^2-4\times3\times320}}{2\times3}$

$=\dfrac{-16\pm64}{6}$

$=-\dfrac{40}{3},\ 8$

$r>0$より　$r=8$

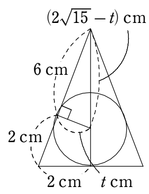
よって，底面の半径は　$\dfrac{1}{4}\times8=2$ (cm)

(2)　円錐の高さは　$\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$ (cm)

よって，円錐の体積は

$\dfrac{1}{3}\times\pi\times2^2\times2\sqrt{15}=\dfrac{8\sqrt{15}}{3}\pi$ (cm^2)

(3)　底面との接点と側面との接点を通る面で円錐を切り，球の半径をt cmとすると，右の図のような直角三角形ができるから，三平方の定理により



$6^2+t^2=(2\sqrt{15}-t)^2$

$4\sqrt{15}\,t=24$

$t=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$

よって，球の半径は　$\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$ (cm)

$\boxed{12}$［2016 城西大学附属川越］

解説

(1)　AT∥EFより

$\mathrm{AT}:\mathrm{EF}=\mathrm{AS}:\mathrm{SE}$

$\mathrm{AT}:12=1:3$

よって　AT＝4 cm

(2)　直線BCと直線FPとの交点をUとする。

(1)と同様に考えると，線分CUの長さは4 cmである。

直線TU上に線分RQがあり，△BTUは直角二等辺三角形である。

よって，△ATRも直角二等辺三角形であるから

AR＝AT＝4 cm

(3)　DR＝DQ＝12－4＝8 (cm)

よって　$\mathrm{RQ}=8\sqrt{2}$ cm

AS : SE＝1 : 3より

$\mathrm{AS}=12\times\dfrac{1}{4}=3$ (cm)

$\mathrm{SE}=12\times\dfrac{3}{4}=9$ (cm)

△ARSにおいて

$\mathrm{RS}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ (cm)

△SEFにおいて

$\mathrm{SF}=\sqrt{9^2+12^2}=15$ (cm)

したがって，求める周の長さは

$(5+15)\times2+8\sqrt{2}=40+8\sqrt{2}$ (cm)

$\boxed{13}$［2014 東北学院榴ヶ岡］

解説

(1)　円錐の高さをHO，母線をHCとすると，△OCHにおいて，三平方の定理により

$\mathrm{HO}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (cm)

円錐の体積は

$\dfrac{1}{3}\pi\times2^2\times2\sqrt{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ (cm^3)

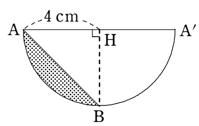
(2)　側面のおうぎ形の中心角の大きさをa°とすると

$2\pi\times4\times\dfrac{a}{360}=2\pi\times2$

$a=180$

よって，中心角の大きさは　180°

(3)　(ア)　かけたひもは，右の側面の展開図の線分ABである。



△ABHは直角二等辺三角形より，ひもの長さは

$\sqrt{2}\,\mathrm{AH}=4\sqrt{2}$ (cm)

(イ)　求める面積は右の図の弦ABと弧ABに囲まれた部分の面積であるから

$\pi\times4^2\times\dfrac{90}{360}-\dfrac{1}{2}\times4\times4=4\pi-8$ (cm^2)

14

(解説)

(1)　点Pが辺BFの中点の位置にあるとき，切り口は正三角形になる。

したがって　$5\div1=5$ (秒後)

また，このとき切り口は，1辺の長さが $5\sqrt{2}$，高さが $5\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ の正三角形になるから，その面積は

$$\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times\frac{5\sqrt{6}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

(2)　点Pが辺CDの中点の位置にあるとき，切り口は正六角形になる。

したがって　$(10+10+5)\div1=25$ (秒後)

また，このとき切り口は，1辺の長さが $5\sqrt{2}$ の正六角形になるから，その面積は，(1) で求めた正三角形の面積の6倍で

$$\frac{25\sqrt{3}}{2}\times6=75\sqrt{3}$$

(3)　点Pは17秒後に，辺BC上の $BP=7$ の位置にある。

このとき，切断面と辺ABの交点をQとすると，IJ∥QPで

$BQ=7$

このとき　$IJ=\sqrt{2}FJ=5\sqrt{2}$

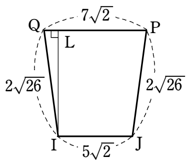
$PQ=\sqrt{2}BP=7\sqrt{2}$

また，Pから辺FGに引いた垂線の足をKとすると，直角三角形PJKにおいて

$PJ=\sqrt{10^2+(7-5)^2}=2\sqrt{26}$

同様に　$QI=2\sqrt{26}$

よって，切り口は，右の図のような等脚台形である。



ここで，IからPQに引いた垂線の足をLとすると

$LQ=(7\sqrt{2}-5\sqrt{2})\div2=\sqrt{2}$

直角三角形ILQにおいて

$IL=\sqrt{(2\sqrt{26})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{102}$

したがって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\times(7\sqrt{2}+5\sqrt{2})\times\sqrt{102}=12\sqrt{51}$$

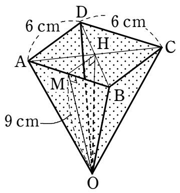
15

(解説)

(1)　Oから辺ABに引いた垂線の足をMとする。

△OABはABを底辺とする二等辺三角形であるから，Mは辺ABの中点である。

また，Oから水面ABCDに引いた垂線の足をHとすると，Hは正方形ABCDの対角線の交点，すなわち対角線ACの中点である。



よって　$HM=3$ cm

このとき，直角三角形OHMにおいて

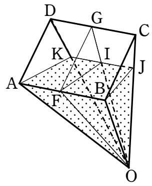
$OH=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$ (cm)

したがって，求める高さは　$6\sqrt{2}$ cm

(2)　辺AB，DCの中点をそれぞれF，Gとし，OGと水面の交点をIとする。

また，水面とOC，ODの交点をそれぞれJ，Kとする。

このとき，JK⊥OG，FI⊥OGであるから，線分OIの長さが求める高さである。



$OI=x$ cm とすると　$GI=9-x$ (cm)

△OFIにおいて　$FI^2=9^2-x^2$

△FIGにおいて　$FI^2=6^2-(9-x)^2$

よって　$9^2-x^2=6^2-(9-x)^2$

これを解いて　$x=7$

したがって，水面までの高さは　7 cm

(3)　(2) において，JK∥CDであるから

$JK:CD=OJ:OC$

$=OI:OG=7:9$

よって　$JK:6=7:9$

$JK=\dfrac{14}{3}$ cm

また　$FI=\sqrt{9^2-7^2}=4\sqrt{2}$ (cm)

したがって，水面がつくる図形は，上底が $\dfrac{14}{3}$ cm，下底が6 cm，高さが $4\sqrt{2}$ cm の台形である。

よって，求める面積は

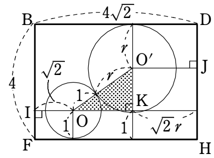
$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{14}{3}+6\right)\times4\sqrt{2}=\frac{64\sqrt{2}}{3}\ (\text{cm}^2)$$

16

(解説)

半径1 cmの球の中心をOとし，もう一方の球の中心をO′，半径を r cm とする。

与えられた立体を，4点B，F，H，Dを通る平面で切断すると，右の図のようになる。



2つの球は外接しているから

$OO'=r+1$

Oから線分BFに垂線OIを引き，O′から線分DHに垂線O′Jを引く。

また，Oを通り線分BDに平行な直線と，O′を通り線分BFに平行な直線の交点をKとする。

$OI=\sqrt{2}$，$O'J=\sqrt{2}r$ であるから，図より

$OK=4\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}r=3\sqrt{2}-\sqrt{2}r$

$O'K=4-1-r=3-r$

よって，直角三角形OO′Kにおいて，次の等式が成り立つ。

$(1+r)^2=(3\sqrt{2}-\sqrt{2}r)^2+(3-r)^2$

したがって　$r^2-10r+13=0$

これを解いて　$r=\dfrac{10\pm\sqrt{48}}{2}=5\pm2\sqrt{3}$

$r<4$ であるから　$r=5-2\sqrt{3}$　　答　$(5-2\sqrt{3})$ cm

17［2014 日本大学第二］

解説

(1)　△ABD の面積について，次の等式が成り立つ。

$$\triangle ABD=\triangle OAB+\triangle OBD+\triangle OAD$$

BD と CE の交点を H とすると

$$AH=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$$

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

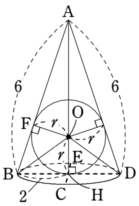
よって，球の半径を r とすると

$$8\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times6\times r+\frac{1}{2}\times4\times r+\frac{1}{2}\times6\times r$$

$$8\sqrt{2}=8r$$

$$r=\sqrt{2}$$

したがって，球の半径は　$\sqrt{2}$

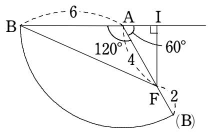


(2)　面 ABD において，円 O の外部の点 B から円 O にひいた接線の長さは等しいから

$$BF=BC=2$$

よって，最も短くなるときの線は，右の図の側面の展開図で，線分 BF となる。

側面のおうぎ形の中心角の大きさを $x°$ とすると，おうぎ形の弧の長さと底面の円周の長さは等しいから



$$2\pi\times6\times\frac{x}{360}=2\pi\times2$$

$$x=120$$

したがって，点 F から線分 BA の延長にひいた垂線を FI とすると，△AFI は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形となる。

$AF=6-2=4$ であるから

$$AI=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}\times4=2$$

$$FI=\sqrt{3}AI=2\sqrt{3}$$

△BFI において，三平方の定理より

$$BF=\sqrt{BI^2+FI^2}$$

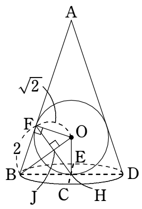
$$=\sqrt{(6+2)^2+(2\sqrt{3})^2}$$

$$=2\sqrt{19}$$

(3)　3 点 F，E，C を通る平面と，面 ABD が交わってできる線分は，図の線分 FH となる。

ここで，四角形 OFBH は線分 OB を軸とする線対称な図形であるから，対応する 2 点 F，H を結ぶ線分 FH と線分 OB は垂直である。

よって，FH と OB の交点を J とすると，OJ⊥FH より，線分 OJ の長さを求めればよい。



△OFB と △OJF において

$\angle FOB=\angle JOF$ (共通)

$\angle OFB=\angle OJF=90°$

2 組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle OFB\backsim\triangle OJF$

よって　　$OF:OJ=OB:OF$

ここで　　$OF=\sqrt{2}$

$$OB=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$$

であるから　$\sqrt{2}:OJ=\sqrt{6}:\sqrt{2}$

$$OJ=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$OJ=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

18［2016 洛南］

解説

(1)　△ABD は AB＝AD の直角二等辺三角形であるから

$$AB=AD=\frac{1}{\sqrt{2}}BD=2$$

△ABE において，三平方の定理により

$$BE^2=AB^2+AE^2$$

$$20=4+AE^2$$

$$AE^2=16$$

$AE>0$ より　$AE=4$

(2)　四面体 BDEG の 4 つの面はすべて合同である。

BD の中点を P とすると，△BEP において，三平方の定理により

$$BE^2=PE^2+BP^2$$

$$20=PE^2+2$$

$$PE^2=18$$

$PE>0$ より　$PE=3\sqrt{2}$

よって，求める表面積は

$$\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\right)\times4=24$$

(3)　EG の中点を Q，PQ の中点を O とすると，OB＝OD＝OE＝OG となり，点 O は求める球の中心である。

△OEQ において，三平方の定理により

$$OE^2=OQ^2+EQ^2$$

$$=2^2+(\sqrt{2})^2$$

$$=6$$

$OE>0$ より　$OE=\sqrt{6}$

(4)　求める球の半径を r とする。

(2) より，四面体の各面の面積は　$24\div4=6$

四面体の体積は

$$2\times2\times4-\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times4\right\}\times4=\frac{16}{3}$$

球の中心と各頂点を結ぶと，四面体は 4 つの合同な四面体に分けられるから

$$\left(\frac{1}{3}\times6\times r\right)\times4=\frac{16}{3}$$

$$r=\frac{2}{3}$$

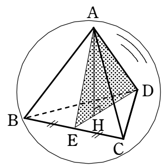
よって，求める半径は　$\frac{2}{3}$

19

解説

辺 BC の中点を E とする。また，頂点 A から底面 BCD に垂線 AH を引く。

△ABC，△BCD は正三角形であるから



$$AE=DE=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

H は △BCD の重心であるから

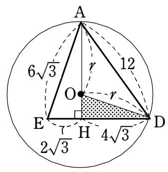
$$EH=\frac{1}{3}\times6\sqrt{3}=2\sqrt{3}，DH=\frac{2}{3}\times6\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

直角三角形 AEH において

$$AH^2=(6\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2=96$$

$AH>0$ であるから　　$AH=4\sqrt{6}$

球の中心を O とし，球の半径を r cm とすると，直角三角形 ODH において



$$OH^2+HD^2=OD^2$$

すなわち　　$(4\sqrt{6}-r)^2+(4\sqrt{3})^2=r^2$

よって　　$8\sqrt{6}r=144$

したがって　　$r=\dfrac{144}{8\sqrt{6}}=3\sqrt{6}$ (cm)

参考　球の中心 O は，高さ AH を 3：1 に内分している。

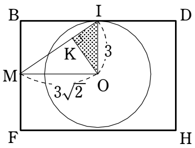
これは，1 辺の長さが 12 cm の正四面体のすべての面に接するような球の中心と一致している。

レベルC

20

解説

球の中心を O，球と面 ABCD の接点を I とする。
切り口の図形は円であり，その中心を K とする。
切り口の円は点 I を通るから，IK はその半径である。
与えられた立体を面 BFHD で切断した断面図は右の図のようになる。



$$\mathrm{OI}=\frac{6}{2}=3$$

$$\mathrm{OM}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

よって，直角三角形 IMO において

$$\mathrm{MI}^2=3^2+(3\sqrt{2})^2=27$$

$\mathrm{MI}>0$ であるから　　$\mathrm{MI}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\mathrm{OK}\perp\mathrm{IM}$ であるから　　$\triangle\mathrm{IMO}\backsim\triangle\mathrm{IOK}$

よって　　$\mathrm{IM}:\mathrm{IO}=\mathrm{IO}:\mathrm{IK}$

すなわち　　$3\sqrt{3}:3=3:\mathrm{IK}$

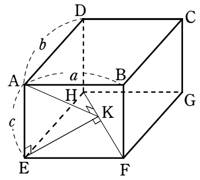
これを解いて　　$\mathrm{IK}=\sqrt{3}$

したがって，切り口の図形の面積は　　$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$ (cm²)

1 ［高校の問題集より］

解説

(1)　$\mathrm{AE}\perp$平面 EFGH，$\mathrm{AK}\perp\mathrm{FH}$ であるから，
$\triangle$AEK がつくる平面と FH は垂直である。
よって　　$\mathrm{EK}\perp\mathrm{FH}$



(2)　(1) より

$$\triangle\mathrm{EFH}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{FH}\cdot\mathrm{EK}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\mathrm{EK}\quad\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{EF}\perp\mathrm{EH}$ であるから

$$\triangle\mathrm{EFH}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EH}=\frac{1}{2}ab\quad\cdots\cdots②$$

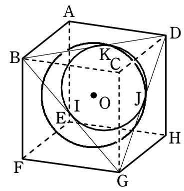
①，② から　　$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\mathrm{EK}=ab$　　　よって　$\mathrm{EK}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

したがって　$\mathrm{AK}=\sqrt{\mathrm{AE}^2+\mathrm{EK}^2}=\sqrt{c^2+\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$

2

解説

(1)　$\triangle$BGD の辺 BG，GD，DB の中点をそれぞれ I，J，K とすると，球 O は，点 I，J，K でそれぞれ，面 BFGC，CGHD，ABCD に接する。
よって，切り口の円は，3 点 I，J，K を通る。
このとき，$\triangle$IJK は正三角形で，その 1 辺の長さは

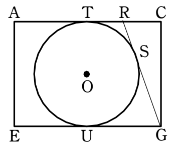


$$\frac{1}{2}\mathrm{BD}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

切り口の円の中心は，正三角形 IJK の重心に一致するから，求める半径は

$$2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ (\mathrm{cm})$$

(2)　球 O と面 PGQ，ABCD，EFGH との接点を，それぞれ S，T，U とし，線分 PQ の中点を R とする。
このとき，4 点 A，E，G，C を通る平面で切って考えると，その切断面は，右の図のようになる。



$\mathrm{RC}=x$ cm とおく。
$\mathrm{AC}=\mathrm{EG}=4\sqrt{2}$ (cm) であるから

$$\mathrm{TC}=\mathrm{UG}=2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

$$\mathrm{RS}=\mathrm{RT}=2\sqrt{2}-x\ (\mathrm{cm})$$

$$\mathrm{GS}=\mathrm{GU}=2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

よって，直角三角形 GCR において

$$x^2+4^2=(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-x)^2$$

これを解いて　　$x=\sqrt{2}$

したがって　$\mathrm{CP}=\mathrm{CQ}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ (cm)

よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 2\right)\times 4=\frac{8}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

3［2016 立教新座］

(解説)

(1)　台形 BCGF において，点 C から辺 FG に垂線をひき，辺 FG との交点を T とする。

TG$=(10-4)\div 2=3$ (cm) であるから

$$\mathrm{CT}=\sqrt{5^2-3^2}=4\ \text{(cm)}$$

よって，台形 BCGF の面積は

$$\frac{1}{2}\times(4+10)\times 4=28\ (\text{cm}^2)$$

同様に，台形 CDHG において，辺 GH に対する高さは

$$\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}\ \text{(cm)}$$

よって，台形 CDHG の面積は

$$\frac{1}{2}\times(4+8)\times\sqrt{21}=6\sqrt{21}\ (\text{cm}^2)$$

したがって，求める表面積は

$$4\times 4+10\times 8+(28+6\sqrt{21})\times 2=152+12\sqrt{21}\ (\text{cm}^2)$$

(2)　頂点 B，C，D から長方形 EFGH にそれぞれ垂線をひき，長方形 EFGH との交点を B′，C′，D′ とする。

直線 B′I と辺 EH の交点を L，直線 D′I と辺 EF との交点を M とする。

IL$=(8-4)\div 2=2$ (cm),

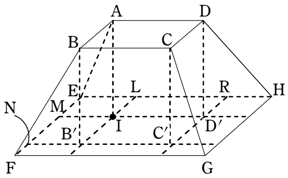
IM$=(10-4)\div 2=3$ (cm) であるから

$$\mathrm{EI}^2=2^2+3^2=13$$

△AIE において

$$\mathrm{AI}^2=5^2-13=12$$

AI>0 であるから　AI$=2\sqrt{3}$ cm



(3)　JK$=x$ cm とする。

点 K から辺 GH に垂線をひき，辺 GH との交点を P，辺 CD との交点を Q とする。

BC∥FG より

$$\mathrm{KC}:\mathrm{KG}=4:10=2:5$$

CQ∥GP より

$$\mathrm{CQ}:\mathrm{GP}=\mathrm{KC}:\mathrm{KG}=2:5$$

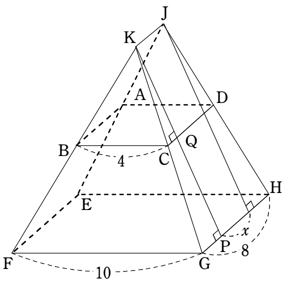
CQ$=\dfrac{4-x}{2}$ cm，GP$=\dfrac{8-x}{2}$ cm であるから

$$\frac{4-x}{2}:\frac{8-x}{2}=2:5$$

$$8-x=10-\frac{5}{2}x$$

$$x=\frac{4}{3}$$

よって　　JK$=\dfrac{4}{3}$ cm



(4)　(2)の図において，直線 C′B′ と辺 EF の交点を N，直線 C′D′ と辺 EH との交点を R とする。

立体 ABCD－EFGH は，直方体 ABCD－IB′C′D′ と，四角錐 A－EMIL 4 つ分と，三角柱 AIL－DD′R 2 つ分と，三角柱 AIM－BB′N 2 つ分に分けられる。

よって，求める立体の体積は

$$4\times4\times2\sqrt{3}+\left(\frac{1}{3}\times2\times3\times2\sqrt{3}\right)\times4+\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times4\right)\times2$$
$$+\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\times4\right)\times2$$
$$=88\sqrt{3}\ (\text{cm}^3)$$

4［2014 茨城県］

(解説)

(1)　直角三角形 ABD において，三平方の定理により

$$\mathrm{BD}=\sqrt{3^2+4^2}=5\ \text{(cm)}$$

△BIF において，∠IBF$=90^\circ$，∠BIF$=60^\circ$ であるから

$$\mathrm{BI}:\mathrm{BF}=1:\sqrt{3}$$
$$\mathrm{BI}:3\sqrt{3}=1:\sqrt{3}$$
$$\mathrm{BI}=3\ \text{(cm)}$$

よって　　DI$=$BD$-$BI$=5-3=2$ (cm)

△DIJ において，∠IDJ$=90^\circ$，∠DIJ$=60^\circ$ であるから

$$\mathrm{DI}:\mathrm{DJ}=1:\sqrt{3}$$
$$2:\mathrm{DJ}=1:\sqrt{3}$$
$$\mathrm{DJ}=2\sqrt{3}\ \text{(cm)}$$

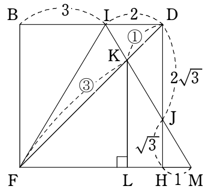
よって　　JH$=$DH$-$DJ$=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$ (cm)

したがって，四角錐 JEFGH の体積は

$$\frac{1}{3}\times3\times4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}\ (\text{cm}^3)$$

(2)　右の図のように，点 K から線分 FH にひいた垂線と線分 FH の交点を L とする。

また，直線 IJ と FH の交点を M とする。



ID∥HM であるから

$$\mathrm{ID}:\mathrm{HM}=\mathrm{DJ}:\mathrm{JH}$$
$$=2\sqrt{3}:\sqrt{3}$$
$$=2:1$$

ID$=2$ cm であるから　HM$=1$ cm

また，ID∥FM であるから

$$\mathrm{DK}:\mathrm{KF}=\mathrm{ID}:\mathrm{FM}$$
$$=2:(5+1)$$
$$=1:3$$

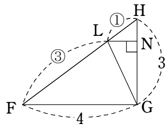
さらに，KL∥DH より

$$\mathrm{KL}:\mathrm{DH}=\mathrm{FK}:\mathrm{FD}=3:4$$

よって　　KL$:3\sqrt{3}=3:4$

$$\mathrm{KL}=\frac{9\sqrt{3}}{4}\ \text{(cm)}$$

△FGH において，点 L から線分 GH にひいた垂線と線分 GH の交点を N とすると



$$\mathrm{FL}:\mathrm{LH}=\mathrm{FK}:\mathrm{KD}=3:1$$

LN∥FG であるから　　HN$:$NG$=1:3$

よって　NG$=\dfrac{3}{1+3}$HG$=\dfrac{3}{4}\times3=\dfrac{9}{4}$ (cm)

また，LN$:$FG$=1:4$ であるから

$$\mathrm{LN}:4=1:4$$
$$\mathrm{LN}=1\ \text{(cm)}$$

直角三角形 LNG において，三平方の定理により

$$\mathrm{LG}^2=\mathrm{NG}^2+\mathrm{LN}^2$$
$$=\left(\frac{9}{4}\right)^2+1^2$$
$$=\frac{97}{16}$$

直角三角形 KLG において，三平方の定理により

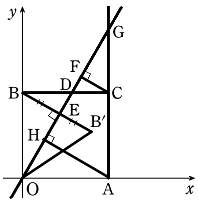
$$\mathrm{GK}^2=\mathrm{KL}^2+\mathrm{LG}^2$$
$$=\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{97}{16}$$
$$=\frac{340}{16}$$
$$=\frac{85}{4}$$

GK>0 より　GK$=\dfrac{\sqrt{85}}{2}$ (cm)

$\boxed{5}$［2016 慶應義塾］

解説

右の図のように点を定める。



直線の傾きは $\sqrt{3}$ であるから　$\angle\mathrm{GOA}=60^\circ$

よって　　　$\angle\mathrm{BOE}=30^\circ$

したがって　$\angle\mathrm{OBE}=60^\circ$

$\triangle\mathrm{OBE}\equiv\triangle\mathrm{OB'E}$ より，$\triangle\mathrm{OBB'}$ は正三角形で，

1 辺の長さが 2 であるから，点 B′ の座標は　$(\sqrt{3},\ 1)$

よって，点 B′ は正方形 OACB の内部にあるから，

求める回転体の体積は △GOA の回転体から △GDC の回転体を除いたものである。

△OAH と △DCF と △GDC と △GOA はすべて，3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であり，点 D は $y=\sqrt{3}x$ 上の点で，y 座標が 2 であるから

$$2=\sqrt{3}x$$
$$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって
$$\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{OA}=\sqrt{3}$$
$$\mathrm{FC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{DC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=\sqrt{3}-1$$
$$\mathrm{OG}=2\mathrm{OA}=4$$
$$\mathrm{GD}=2\mathrm{DC}=2\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=4-\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

したがって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\pi\times\mathrm{AH}^2\times(\mathrm{OH}+\mathrm{HG})-\frac{1}{3}\pi\times\mathrm{FC}^2\times(\mathrm{GF}+\mathrm{FO})$$
$$=\frac{\pi}{3}\times(\sqrt{3})^2\times4-\frac{\pi}{3}\times(\sqrt{3}-1)^2\times\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=4\pi-8\pi+\frac{40\sqrt{3}}{9}\pi$$
$$=\frac{4(10\sqrt{3}-9)}{9}\pi$$

$\boxed{6}$［2016 東海］

解説

(1)　$\mathrm{OB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CO}=3:4:5$ より，$\mathrm{OB}=3k$，$\mathrm{BC}=4k$，$\mathrm{CO}=5k$ とすると

$$\mathrm{OB}^2+\mathrm{BC}^2=(3k)^2+(4k)^2$$
$$=9k^2+16k^2$$
$$=25k^2$$
$$=(5k)^2$$
$$=\mathrm{CO}^2$$

三平方の定理の逆により　$\angle\mathrm{OBC}=90^\circ$

点 B から y 軸に下ろした垂線と y 軸との交点を D とする。

△OBC と △ODB において

$\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{ODB}=90^\circ$　……①

共通な角であるから

$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{DOB}$　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle\mathrm{OBC}\backsim\triangle\mathrm{ODB}$

点 B の座標を $\left(b,\ \frac{1}{4}b^2\right)$ とすると，$\mathrm{OB}:\mathrm{BC}=3:4$ より

$$\mathrm{OD}:\mathrm{DB}=3:4$$
$$\frac{1}{4}b^2:b=3:4$$
$$b^2=3b$$
$$b(b-3)=0$$

図より，$b>0$ であるから，点 B の x 座標は　3

(2)　△OBD において，三平方の定理により

$$\mathrm{OB}^2=3^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2$$
$$=\left(\frac{15}{4}\right)^2$$

$\mathrm{OB}>0$ より　$\mathrm{OB}=\frac{15}{4}$

よって
$$\mathrm{OC}=\frac{5}{3}\times\frac{15}{4}$$
$$=\frac{25}{4}$$

点 A の y 座標は $\frac{25}{4}$ であるから，$y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して

$$\frac{25}{4}=\frac{1}{4}x^2$$
$$x=\pm5$$

図より，$x<0$ であるから　$x=-5$

ここで
$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{25}{4}=\frac{75}{8}$$
$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\times5\times\frac{25}{4}=\frac{125}{8}$$

$\triangle\mathrm{OBC}<\triangle\mathrm{OAC}$ より，直線 ℓ は線分 AC 上を通る。

直線 ℓ と線分 AC との交点を E とし，E の座標を $\left(-t,\ \frac{25}{4}\right)$ とすると

$$\triangle\mathrm{OAE}=\frac{1}{2}\left(\frac{75}{8}+\frac{125}{8}\right)=\frac{25}{2}$$

よって
$$\frac{1}{2}\times\{-t-(-5)\}\times\frac{25}{4}=\frac{25}{2}$$
$$5-t=4$$
$$t=1$$

したがって，E の座標は $\left(-1,\ \frac{25}{4}\right)$ であるから，直線 ℓ の傾きは

$$-\frac{25}{4}\div1=-\frac{25}{4}$$

$\boxed{7}$［2014 徳島文理］

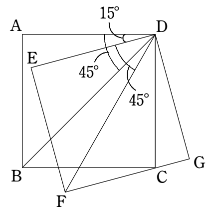
解説

(1)　$\triangle\mathrm{ADB}$，$\triangle\mathrm{EDF}$ はともに直角二等辺三角形であるから

$\angle\mathrm{ADE}+\angle\mathrm{EDB}=\angle\mathrm{ADB}=45^\circ$

$\angle\mathrm{BDF}+\angle\mathrm{EDB}=\angle\mathrm{EDF}=45^\circ$

よって　$\angle\mathrm{BDF}=\angle\mathrm{ADE}=15^\circ$



(2)　辺 BC と対角線 DF の交点を H とする。

△DBH と △CFH において

$\angle\mathrm{DBH}=\angle\mathrm{CFH}=45^\circ$

$\angle\mathrm{DHB}=\angle\mathrm{CHF}$　（対頂角）

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle\mathrm{DBH}\backsim\triangle\mathrm{CFH}$

よって　$\mathrm{DB}:\mathrm{CF}=\mathrm{DH}:\mathrm{CH}$　……①

ここで　$\mathrm{DB}=\sqrt{2}\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$　……②

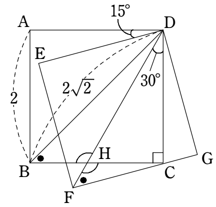
また，$\angle\mathrm{CDH}=\angle\mathrm{BDC}-\angle\mathrm{BDF}=45^\circ-15^\circ=30^\circ$

より，△CDH は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形であるから

$\mathrm{DH}:\mathrm{CH}=2:1$　……③

①，②，③ より

$$2\sqrt{2}:\mathrm{CF}=2:1$$
$$\mathrm{CF}=\sqrt{2}$$



(3)　正方形 DEFG の 1 辺の長さを x とする。

直角三角形 DCG において

$\mathrm{DC}=2$，$\mathrm{DG}=x$，$\mathrm{CG}=x-\sqrt{2}$

三平方の定理により

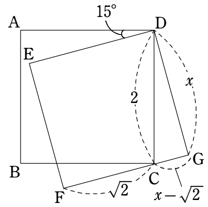
$$\mathrm{DG}^2+\mathrm{CG}^2=\mathrm{DC}^2$$
$$x^2+(x-\sqrt{2})^2=2^2$$

整理すると　$x^2-\sqrt{2}x-1=0$

解の公式により　$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$

$x>0$ であるから　$x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

よって，正方形 DEFG の 1 辺の長さは　$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$



8 ［2014 ラ･サール］

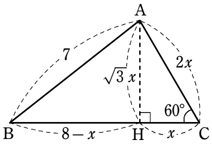
(解説)

(1)　ACの長さを $2x$ とする。

Aから辺BCに引いた垂線と辺BCとの交点をHとすると

$\mathrm{CH}=x,\quad \mathrm{BH}=8-x,\quad \mathrm{AH}=\sqrt{3}\,x$

となる。



直角三角形ABHに三平方の定理を用いて

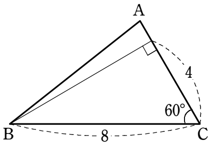
$$(8-x)^2+(\sqrt{3}\,x)^2=7^2$$

$$4x^2-16x+15=0$$

これを解いて

$$x=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\times4\times15}}{2\times4}$$

$$=\frac{16\pm\sqrt{16}}{8}=\frac{16\pm4}{8}$$



よって　　$x=\frac{5}{2}$　または　$x=\frac{3}{2}$

△ABCは鋭角三角形であるから，辺ACの長さは4より大きい。

したがって　　$\mathrm{AC}=5$

(2)　△ADCと△DFCにおいて

共通な角であるから　∠ACD＝∠DCF　……①

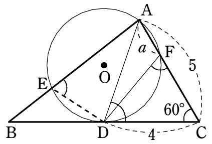
BCは円Oの接線で，Dは接点であるから

∠ADC＝∠AED　……②

四角形AEDFは円Oに内接しているから

∠AED＝∠DFC　……③

②，③より　∠ADC＝∠DFC　……④



①，④より，2組の角がそれぞれ等しいから　　△ADC∽△DFC

AFの長さを a とする。

△ADC∽△DFCより　　AC : DC＝DC : FC

5 : 4＝4 : $(5-a)$

$5(5-a)=16$ より　　$a=\frac{9}{5}$

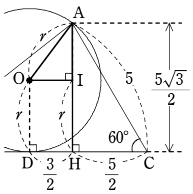
したがって　　$\mathrm{AF}=\frac{9}{5}$

(3)　Oから線分AHに引いた垂線と線分AHの交点をIとする。

また，円Oの半径を r とする。

$\mathrm{CH}=\frac{5}{2}$，$\mathrm{DC}=4$ であるから　$\mathrm{DH}=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$

また，$\mathrm{AH}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ であるから　$\mathrm{AI}=\frac{5\sqrt{3}}{2}-r$



直角三角形AOIに三平方の定理を用いて

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-r\right)^2=r^2$$

$$\frac{9}{4}+\frac{75}{4}-5\sqrt{3}\,r+r^2=r^2$$

$5\sqrt{3}\,r=21$ より　　$r=\frac{21}{5\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{5}$

9 ［2014 立命館］

(解説)

$\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$，$\frac{1}{2}\times(-1)^2=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\times4^2=8$，$\frac{1}{2}\times a^2=\frac{1}{2}a^2$ より，4点A，B，C，Dの座標は，それぞれ次のようになる。

$$\mathrm{A}\,(-2,\ 2),\ \mathrm{B}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right),\ \mathrm{C}\,(4,\ 8),\ \mathrm{D}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$$

(1)　直線ACの傾きは $\frac{8-2}{4-(-2)}=1$ であるから，直線ACの式は $y=x+b$ とおける。

直線ACは点Aを通るから　$2=-2+b$

$b=4$

よって，直線ACの式は　　$y=x+4$

したがって，3点 A，F，Cが同一直線上にあるとき，点Fの y 座標は4になり，点Dの y 座標も4になるから

$$\frac{1}{2}a^2=4$$

$$a^2=8$$

$a>0$ であるから　$a=2\sqrt{2}$

(2)　直線ADの傾きは　$\left(\frac{1}{2}a^2-2\right)\div\{a-(-2)\}=\frac{1}{2}(a-2)$

直線BCの傾きは　$\left(8-\frac{1}{2}\right)\div\{4-(-1)\}=\frac{3}{2}$

よって　　$\frac{1}{2}(a-2)=\frac{3}{2}$

$a=5$

(3)　$0<a<4$ のとき

$$\triangle\mathrm{DCF}=\frac{1}{2}\times a\times\left(8-\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{1}{4}a(16-a^2)$$

$$\triangle\mathrm{DCE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a^2\times(4-a)=\frac{1}{4}a^2(4-a)$$

$\triangle\mathrm{DCF}=\frac{3}{2}\triangle\mathrm{DCE}$ より　$\frac{1}{4}a(16-a^2)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}a^2(4-a)$

$$(16-a^2)=\frac{3}{2}a(4-a)$$

$$2(16-a^2)=3a(4-a)$$

$$2(16-a^2)-3a(4-a)=0$$

$$2(4+a)(4-a)-3a(4-a)=0$$

$$(4-a)\{2(4+a)-3a\}=0$$

$$(4-a)(8-a)=0$$

$$a=4,\ 8$$

$0<a<4$ より，これらは問題に適さない。

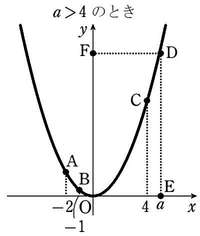
$a>4$ のとき

$$\triangle\mathrm{DCF}=\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{1}{2}a^2-8\right)$$

$$=-\frac{1}{4}a(16-a^2)$$

$$\triangle\mathrm{DCE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a^2(a-4)$$

$$=-\frac{1}{4}a^2(4-a)$$



よって　　$-\frac{1}{4}a(16-a^2)=-\frac{1}{4}a^2(4-a)\times\frac{3}{2}$

これを解くと　　　　$a=4,\ 8$

$a>4$ より　　　　　$a=8$

以上から　　$a=8$

(4)　直線ABの式は　$y=-\frac{3}{2}x-1$

(i)　AG＝GE のとき

三平方の定理より

$\mathrm{AG}^2=2^2+3^2=4+9=13$

$\mathrm{GE}^2=a^2+1^2=a^2+1$

AG＝GE のとき，$\mathrm{AG}^2=\mathrm{GE}^2$ であるから

$13=a^2+1$

$a^2=12$

$a=\pm2\sqrt{3}$

$a>0$ であるから　$a=2\sqrt{3}$

(ii)　AG＝AE のとき

$\mathrm{AG}^2=13$

$\mathrm{AE}^2=(a+2)^2+2^2=a^2+4a+4+4$

$=a^2+4a+8$

よって　$13=a^2+4a+8$

$a^2+4a-5=0$

$(a-1)(a+5)=0$

$a>0$ であるから　$a=1$

(iii)　AE＝GE のとき

$\mathrm{AE}^2=a^2+4a+8$

$\mathrm{GE}^2=a^2+1$

よって　$a^2+4a+8=a^2+1$

$4a=-7$

$a=-\frac{7}{4}$

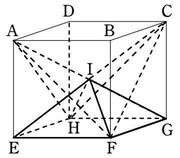
$a>0$ であるから，これは問題に適さない。

(i)，(ii)，(iii) から　$a=1,\ 2\sqrt{3}$

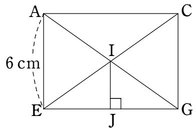
10［2014 筑波大学附属駒場］

(解説)

(1)　線分 AG と線分 CE の交点を I，点 I から面 EFGH に下ろした垂線と面 EFGH の交点を J とする。
2 つの四角錐 A−EFGH，C−EFGH の共通部分でできる立体は，四角錐 I−EFGH である。



AE∥GC であるから　　AI : IG＝AE : CG
＝6 : 6
＝1 : 1

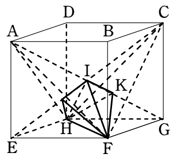


AE∥IJ であるから　　AE : IJ＝AG : IG
6 : IJ＝(1＋1) : 1
IJ＝3 (cm)

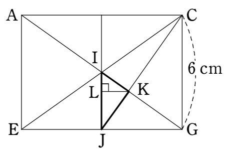
四角錐 I−EFGH の高さは IJ であるから，求める立体の体積は

$$\frac{1}{3}\times6\times6\times3=36\,(\mathrm{cm}^3)$$

(2)　線分 AG と面 CHF の交点を K，点 K から面 DHFB に下ろした垂線と面 DHFB の交点を L とする。
2 つの三角錐 A−FGH，C−HEF の共通部分でできる立体の体積は，三角錐 K−IHF の 2 倍である。
△IHF を三角錐 K−IHF の底面とすると，三角錐の高さは KL である。
面 AEGC について考える。



IJ∥CG であるから　　IK : KG＝IJ : CG
＝3 : 6
＝1 : 2



ここで，△GEF において，三平方の定理により

$$GE=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

よって，AE∥IJ であるから

AE : IJ＝GE : GJ

$6:3=6\sqrt{2}:GJ$

$GJ=3\sqrt{2}$ (cm)

KL∥GJ であるから　　KL : GJ＝IK : IG

$KL:3\sqrt{2}=1:(1+2)$

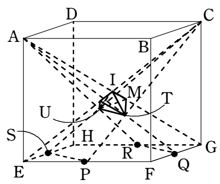
$KL=\sqrt{2}$ (cm)

△HEF において，三平方の定理により　　$HF=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$

よって，求める立体の体積は

$$2\times\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\right)\times\sqrt{2}\right\}=12\,(\mathrm{cm}^3)$$

(3)　線分 AG と面 CSP の交点を M，点 M から面 DHFB に下ろした垂線と面 DHFB の交点を N とする。また，線分 AQ と線分 CP の交点を T，線分 AR と線分 CS の交点を U とする。
2 つの三角錐 A−GRQ，C−EPS の共通部分でできる立体の体積は，三角錐 M−IUT の 2 倍である。
△IUT を三角錐 M−IUT の底面とすると，三角錐の高さは MN である。



線分 TU，線分 SP と面 AEGC の交点をそれぞれ V，W とする。
△SEP において，ES＝EP＝3 であるから，三平方の定理により

$$SP=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

SP⊥EW であるから，△SEP の面積について

$$\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times EW$$

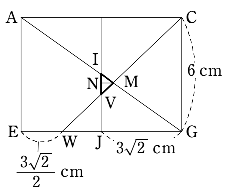
$$EW=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ (\mathrm{cm})$$

面 AEGC について考える。
VJ∥CG であるから

VJ : CG＝WJ : WG

$$VJ:6=\left(3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right):\left(6-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

VJ＝2 (cm)



IV∥CG であるから　　IM : MG＝IV : CG
＝(3−2) : 6
＝1 : 6

NM∥JG であるから　　NM : JG＝IM : IG

$NM:3\sqrt{2}=1:(1+6)$

$$NM=\frac{3\sqrt{2}}{7}\ (\mathrm{cm})$$

また，$AC=GE=6\sqrt{2}$，$PQ=SP=3\sqrt{2}$ であるから

CT : TP＝AC : PQ

$=6\sqrt{2}:3\sqrt{2}$

＝2 : 1

同様に，$CU:US=6\sqrt{2}:3\sqrt{2}=2:1$

面 CSP について，TU∥PS であるから　　TU : PS＝CT : CP

$TU:3\sqrt{2}=2:(2+1)$

$TU=2\sqrt{2}$ (cm)

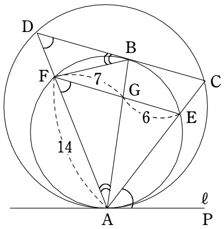
よって，求める立体の体積は

$$2\times\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times1\right)\times\frac{3\sqrt{2}}{7}\right\}=\frac{4}{7}\,(\mathrm{cm}^3)$$

$\boxed{11}$［2014 東大寺学園］

(解説)

(1)　図のように，直線 ℓ 上に点 P をとる。



△AFG と △BDF において

小さい方の円は直線 ℓ に点 A で接しているから

$\angle CAP = \angle AFG$　……①

大きい方の円は直線 ℓ に点 A で接しているから

$\angle CAP = \angle BDF$　……②

①，② より　$\angle AFG = \angle BDF$　……③

小さい方の円は直線 CD に点 B で接しているから

$\angle FAG = \angle DBF$　……④

③，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△AFG∽△BDF

よって　　DF : DB = FG : FA = 7 : 14 = 1 : 2

③ より，DB∥FG であるから，△AFG∽△ADB も成り立つ。

ここで，DF $= x$，DB $= 2x$ とおくと，AF : AD = FG : DB であるから

$14 : (14 + x) = 7 : 2x$

よって，$7(14 + x) = 14 \times 2x$ である。

これを解いて　　$x = \dfrac{14}{3}$

したがって，DF の長さは　$\dfrac{14}{3}$

(2)　(1) の ③ より，DB∥FG で，DF $= \dfrac{14}{3}$ であるから

$$AG : GB = AF : DF = 14 : \frac{14}{3} = 3 : 1$$

AG $= 3k$，GB $= k$（$k > 0$）とおく。

△BGF と △EGA において，

対頂角は等しいから　　$\angle BGF = \angle EGA$　……⑤

円周角の定理により　　$\angle BFG = \angle EAG$　……⑥

⑤，⑥ より，2 組の角がそれぞれ等しいから　　△BGF∽△EGA

よって　　BG : EG = GF : GA

$k : 6 = 7 : 3k$

$3k^2 = 42$

$k^2 = 14$ であり，$k > 0$ より　$k = \sqrt{14}$

したがって　　AG $= 3k = 3\sqrt{14}$

(3)　(1) より　$\angle FAG = \angle DBF$　……④

(1) の ③ より，DB∥FG であるから　$\angle DBF = \angle BFE$　……⑦

円周角の定理により　$\angle BFE = \angle BAE$　……⑧

⑦，⑧ より　$\angle DBF = \angle BAE$　……⑨

④，⑨ より　$\angle FAG = \angle BAE$

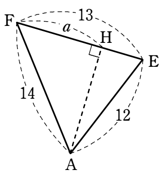
よって，AB は $\angle DAC$ の二等分線となっている。

よって　　AF : AE = FG : GE = 7 : 6

AF = 14 であるから　AE = 12

A から FE に引いた垂線と FE の交点を H とする。

また，線分 FH の長さを a とする。



直角三角形 AFH に三平方の定理を用いて

$AH^2 = 14^2 - a^2 = 196 - a^2$

直角三角形 AEH に三平方の定理を用いて

$AH^2 = 12^2 - (13 - a)^2 = -25 + 26a - a^2$

$196 - a^2 = -25 + 26a - a^2$ より　$a = \dfrac{17}{2}$

よって　AH $= \sqrt{196 - \left(\dfrac{17}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{55}}{2}$

したがって，△AEF の面積は　　$\dfrac{1}{2} \times 13 \times \dfrac{3\sqrt{55}}{2} = \dfrac{39\sqrt{55}}{4}$

AG : GB = 3 : 1 であるから，△BEF の面積は　　$\dfrac{1}{3} \times △AEF = \dfrac{13\sqrt{55}}{4}$

以上により，四角形 AEBF の面積は　　$\dfrac{39\sqrt{55}}{4} + \dfrac{13\sqrt{55}}{4} = 13\sqrt{55}$