1

解答　C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{3}{5}x^5+C$　(2) $-\dfrac{1}{x}+C$　(3) $\dfrac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$　(4) $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$

(5) $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+\log|x|+\dfrac{1}{x}+C$　(6) $\dfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\dfrac{12}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int 3x^4dx=\frac{3}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{3}{5}x^5+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$

(3) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x^3}\,dx=\int x^{\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{\frac{3}{4}+1}x^{\frac{3}{4}+1}+C=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C=\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}+C=-2x^{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

(5) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3+x-1}{x^2}dx=\int\left(x^2-x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int x^2dx-\int xdx+\int\frac{dx}{x}-\int x^{-2}dx$

$\displaystyle=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\log|x|+\frac{1}{x}+C$

(6) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int\left(x^{\frac{1}{6}}-2x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$\displaystyle=\int x^{\frac{1}{6}}dx-2\int x^{-\frac{1}{6}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-2\cdot\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

$\displaystyle=\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}+C$

2

解答　C は積分定数とする。

(1) $-3\cos x-4\sin x+C$　(2) $\sin x+2\cos x+C$　(3) $\tan x-\dfrac{1}{\tan x}+C$

(4) $2e^x-\dfrac{5^x}{\log 5}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(3\sin x-4\cos x)dx=-3\cos x-4\sin x+C$

(2) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\tan x}-2\right)\sin x\,dx=\int(\cos x-2\sin x)dx=\sin x+2\cos x+C$

(3) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)dx=\tan x-\frac{1}{\tan x}+C$

(4) $\displaystyle\int(2e^x-5^x)dx=2e^x-\frac{5^x}{\log 5}+C$

3

解答　C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{1}{10}(2x-1)^5+C$　(2) $\dfrac{1}{3}\log|3x-1|+C$　(3) $\dfrac{1}{2(1-x)^2}+C$

(4) $\dfrac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$　(5) $-\dfrac{1}{3}\cos(3x+a)+C$　(6) $\dfrac{1}{4}e^{4x+1}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(2x-1)^4dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(2x-1)^5+C=\frac{1}{10}(2x-1)^5+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{3x-1}dx=\frac{1}{3}\log|3x-1|+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{(1-x)^3}dx=\int(1-x)^{-3}dx=\frac{1}{-1}\left\{-\frac{1}{2}(1-x)^{-2}\right\}+C=\frac{1}{2(1-x)^2}+C$

(4) $\displaystyle\int\sqrt{2x+3}\,dx=\int(2x+3)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$

(5) $\displaystyle\int\sin(3x+a)\,dx=\frac{1}{3}\{-\cos(3x+a)\}+C=-\frac{1}{3}\cos(3x+a)+C$

(6) $\displaystyle\int e^{4x+1}dx=\frac{1}{4}e^{4x+1}+C$

4

解答　C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{4}{15}(x+3)(6x-7)\sqrt{x+3}+C$　(2) $(x+1)\sqrt{2x-1}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\sqrt{x+3}=t$ とおくと　$x+3=t^2$

よって　$x=t^2-3,\quad dx=2t\,dt$

したがって　$\displaystyle\int(4x+2)\sqrt{x+3}\,dx=\int\{4(t^2-3)+2\}t\cdot 2t\,dt=\int(8t^4-20t^2)dt$

$\displaystyle=\frac{8}{5}t^5-\frac{20}{3}t^3+C=\frac{4}{15}t^3(6t^2-25)+C$

$\displaystyle=\frac{4}{15}(x+3)(6x-7)\sqrt{x+3}+C$

(2) $\sqrt{2x-1}=t$ とおくと　$2x-1=t^2$

よって　$x=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2},\quad dx=t\,dt$

したがって　$\displaystyle\int\frac{3x}{\sqrt{2x-1}}dx=\int\frac{3\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)}{t}\cdot t\,dt=\int\left(\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}\right)dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t+C=\frac{t}{2}(t^2+3)+C$

$=(x+1)\sqrt{2x-1}+C$

5

解答　C は積分定数とする。

(1) $\log(e^x+2)+\dfrac{2}{e^x+2}+C$　(2) $\log|\log x-1|-\dfrac{1}{\log x-1}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $e^x+2=t$ とおくと　$e^xdx=dt$

$\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{(e^x+2)^2}dx=\int\frac{t-2}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\log|t|+\frac{2}{t}+C$

$\displaystyle=\log(e^x+2)+\frac{2}{e^x+2}+C$

(2) $\log x-1=t$ とおくと　$\dfrac{1}{x}dx=dt$

$\displaystyle\int\frac{\log x}{x(\log x-1)^2}dx=\int\frac{t+1}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\log|t|-\frac{1}{t}+C$

$\displaystyle=\log|\log x-1|-\frac{1}{\log x-1}+C$

6

解答　C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{1}{4}\sin^4x+C$　(2) $\dfrac{(x^3+1)^7}{21}+C$　(3) $-\dfrac{1}{4(x^4+1)}+C$

(4) $\dfrac{1}{3}(x^2-3)\sqrt{x^2-3}+C$　(5) $-e^{-\frac{x^2}{2}}+C$

解説

(1) $(\sin x)'=\cos x$ であるから

$\displaystyle\int\sin^3x\cos x\,dx=\int\sin^3x\cdot(\sin x)'dx=\frac{1}{4}\sin^4x+C$

(2) $x^3+1=u$ とおくと　$3x^2dx=du$

$\displaystyle\int x^2(x^3+1)^6dx=\frac{1}{3}\int(x^3+1)^6\cdot 3x^2dx=\frac{1}{3}\int u^6du=\frac{u^7}{21}+C=\frac{(x^3+1)^7}{21}+C$

(3) $x^4+1=u$ とおくと　$4x^3dx=du$

$\displaystyle\int\frac{x^3}{(x^4+1)^2}dx=\frac{1}{4}\int(x^4+1)^{-2}\cdot 4x^3dx=\frac{1}{4}\int u^{-2}du$

$\displaystyle=-\frac{1}{4}u^{-1}+C=-\frac{1}{4(x^4+1)}+C$

(4) $x^2-3=t$ とおくと　$2xdx=dt$

よって　$\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,dx=\int\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=\frac{1}{3}(x^2-3)\sqrt{x^2-3}+C$

(5) $-\dfrac{x^2}{2}=u$ とおくと　$-xdx=du$

$\displaystyle\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int e^udu$

$=-e^u+C=-e^{-\frac{x^2}{2}}+C$　（C は積分定数）

別解　$e^{-\frac{x^2}{2}}=u$ とおくと　$-xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=du$

$\displaystyle\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx=-\int du$

$=-u+C=-e^{-\frac{x^2}{2}}+C$　（C は積分定数）

7

解答　C は積分定数とする。

(1) $\log|x^3+1|+C$　(2) $\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+C$　(3) $-\log|\cos x|+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{3x^2}{x^3+1}dx=\int\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx=\log|x^3+1|+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C\quad(x^2+1>0)$

(3) $\displaystyle\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{-\sin x}{\cos x}\cdot(-1)dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\log|\cos x|+C$

$\boxed{1}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle -\frac{1}{6x^6}+C$　(2) $\displaystyle\frac{5}{7}t^{\frac{7}{5}}+C$　(3) $\displaystyle\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$　(4) $\displaystyle\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+C$

(5) $\displaystyle\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$　(6) $\displaystyle\frac{16}{7}t^7-\frac{8}{3}t^3-\frac{1}{t}+C$　(7) $\displaystyle\frac{x^2}{2}-2\log|x|-\frac{1}{x}+C$

(8) $\displaystyle\log|x|+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+C$　(9) $\displaystyle x-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}-\log|x|+C$

(10) $t+4\sqrt{t}+\log|t|+C$　(11) $\displaystyle\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}+4t\sqrt{t}+18\sqrt{t}+C$

(12) $\displaystyle\frac{1}{2}y^2+\frac{4}{3}(y+3)\sqrt{y}+3y+\log|y|+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^7}=\int x^{-7}dx=\frac{1}{-7+1}x^{-7+1}+C=-\frac{1}{6}x^{-6}+C=-\frac{1}{6x^6}+C$

(2) $\displaystyle\int t^{\frac{2}{5}}dt=\frac{1}{\frac{2}{5}+1}t^{\frac{2}{5}+1}+C=\frac{5}{7}t^{\frac{7}{5}}+C$

(3) $\displaystyle\int\sqrt[4]{x^3}\,dx=\int x^{\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{\frac{3}{4}+1}x^{\frac{3}{4}+1}+C=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C=\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[6]{x}}=\int x^{-\frac{1}{6}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{6}+1}x^{-\frac{1}{6}+1}+C=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+C=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+C$

(5) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1}+C=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$

(6) $\displaystyle\int\left(4t^3-\frac{1}{t}\right)^2dt=\int\left(16t^6-8t^2+\frac{1}{t^2}\right)dt=16\cdot\frac{t^7}{7}-8\cdot\frac{t^3}{3}-\frac{1}{t}+C$

$\displaystyle=\frac{16}{7}t^7-\frac{8}{3}t^3-\frac{1}{t}+C$

(7) $\displaystyle\int\frac{x^3-2x+1}{x^2}dx=\int\left(x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2\log|x|-\frac{1}{x}+C$

(8) $\displaystyle\int\frac{(x-2)(x-3)}{x^3}dx=\int\frac{x^2-5x+6}{x^3}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)dx=\log|x|+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+C$

(9) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{x}dx=\int\frac{x-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-1}{x}dx=\int\left(1-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x}\right)dx$

$\displaystyle=x-3\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+3\cdot3x^{\frac{1}{3}}-\log|x|+C=x-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}-\log|x|+C$

(10) $\displaystyle\int\left(\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}}\right)^2dt=\int\frac{t+2\sqrt{t}+1}{t}dt=\int\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t}\right)dt=\int dt+2\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+\int\frac{dt}{t}$

$=t+4\sqrt{t}+\log|t|+C=x-8\sqrt{x}+4\log|x|+C$

(11) $\displaystyle\int\frac{(t+3)^2}{\sqrt{t}}dt=\int\frac{t^2+6t+9}{t^{\frac{1}{2}}}dt=\int\left(t^{\frac{3}{2}}+6t^{\frac{1}{2}}+9t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$

$\displaystyle=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+6\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+9\cdot2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}+4t\sqrt{t}+18\sqrt{t}+C$

(12) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{y}+y+1)^2}{y}dy=\int\frac{y^2+2y\sqrt{y}+3y+2\sqrt{y}+1}{y}dy$

$\displaystyle=\int\left(y+2y^{\frac{1}{2}}+3+2y^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{y}\right)dy$

$\displaystyle=\frac{1}{2}y^2+2\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+3y+2\cdot2y^{\frac{1}{2}}+\log|y|+C$

$\displaystyle=\frac{1}{2}y^2+\frac{4}{3}y\sqrt{y}+3y+4\sqrt{y}+\log|y|+C$

$\displaystyle=\frac{1}{2}y^2+\frac{4}{3}(y+3)\sqrt{y}+3y+\log|y|+C$

$\boxed{2}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $-6\cos x+5\sin x+C$　(2) $-2\cos x-\sin x+C$

(3) $\tan x+3\cos x+C$　(4) $\displaystyle 2\tan\theta-\frac{3}{\tan\theta}+C$　(5) $3e^x+C$

(6) $\displaystyle\frac{7^x}{\log 7}+C$　(7) $\displaystyle\frac{2^x}{\log 2}-5e^x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(6\sin x+5\cos x)dx=6\int\sin x\,dx+5\int\cos x\,dx=-6\cos x+5\sin x+C$

(2) $\displaystyle\int(2\tan x-1)\cos x\,dx=\int\left(2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)\cos x\,dx=\int(2\sin x-\cos x)dx$

$=-2\cos x-\sin x+C$

(3) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-3\sin x\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-3\int\sin x\,dx=\tan x+3\cos x+C$

(4) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\cos^2\theta}+\frac{3}{\sin^2\theta}\right)d\theta=2\tan\theta-\frac{3}{\tan\theta}+C$

(5) $\displaystyle\int 3e^x dx=3\int e^x dx=3e^x+C$

(6) $\displaystyle\int 7^x dx=\frac{7^x}{\log 7}+C$

(7) $\displaystyle\int(2^x-5e^x)dx=\int 2^x dx-5\int e^x dx=\frac{2^x}{\log 2}-5e^x+C$

$\boxed{3}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\frac{1}{5}(x-7)^5+C$　(2) $\displaystyle\frac{1}{8}(2x+5)^4+C$　(3) $\displaystyle\frac{3}{16}(4x-5)\sqrt[3]{4x-5}+C$

(4) $\displaystyle-\frac{1}{4(2x+1)^2}+C$　(5) $\displaystyle-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$　(6) $\displaystyle\frac{1}{2}\tan 2x+C$

(7) $\log|3x+1|+C$　(8) $\displaystyle-\frac{1}{4}e^{3-4x}+C$　(9) $\displaystyle\frac{3^{2x+1}}{2\log 3}+C$

(10) $\displaystyle-\frac{1}{2(2x-3)}+C$　(11) $-\sqrt[3]{1-3x}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(x-7)^4dx=\frac{1}{4+1}(x-7)^{4+1}+C=\frac{1}{5}(x-7)^5+C$

(2) $\displaystyle\int(2x+5)^3dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+1}(2x+5)^{3+1}+C=\frac{1}{8}(2x+5)^4+C$

(3) $\displaystyle\int\sqrt[3]{4x-5}\,dx=\int(4x-5)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}(4x-5)^{\frac{1}{3}+1}+C$

$\displaystyle=\frac{3}{16}(4x-5)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{16}(4x-5)\sqrt[3]{4x-5}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{(2x+1)^3}=\int(2x+1)^{-3}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3+1}(2x+1)^{-3+1}+C$

$\displaystyle=-\frac{1}{4}(2x+1)^{-2}+C=-\frac{1}{4(2x+1)^2}+C$

(5) $\displaystyle\int\sin(2x-3)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\{-\cos(2x-3)\}+C=-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$

(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 2x}=\frac{1}{2}\tan 2x+C$

(7) $\displaystyle\int\frac{3}{3x+1}dx=3\int\frac{1}{3x+1}dx=3\cdot\frac{1}{3}\log|3x+1|+C=\log|3x+1|+C$

(8) $\displaystyle\int e^{3-4x}dx=-\frac{1}{4}e^{3-4x}+C$

(9) $\displaystyle\int 3^{2x+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{2x+1}}{\log 3}+C=\frac{3^{2x+1}}{2\log 3}+C$

(10) $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^2-12x+9}=\int\frac{dx}{(2x-3)^2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x-3}\right)+C=-\frac{1}{2(2x-3)}+C$

(11) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{1-6x+9x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}dx=\int(1-3x)^{-\frac{2}{3}}dx=-\frac{1}{3}\cdot 3(1-3x)^{\frac{1}{3}}+C$

4

解答　C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\frac{2}{5}(x+2)(x-3)\sqrt{3-x}+C$　　(2) $\displaystyle\frac{2}{5}(2x-1)(x+2)\sqrt{x+2}+C$

(3) $\displaystyle\frac{2}{15}(3x^2+4x+8)\sqrt{x-1}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\sqrt{3-x}=t$ とおくと　$3-x=t^2$，$x=3-t^2$，$dx=-2tdt$

$\displaystyle\int x\sqrt{3-x}\,dx=\int(3-t^2)t(-2t)dt=2\int(t^4-3t^2)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-t^3\right)+C$

$\displaystyle=\frac{2}{5}t^3(t^2-5)+C=\frac{2}{5}(x+2)(x-3)\sqrt{3-x}+C$

(2) $\sqrt{x+2}=t$ とおくと　$x+2=t^2$，$x=t^2-2$，$dx=2tdt$

$\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx=\int(2t^2-3)t\cdot 2tdt=2\int(2t^4-3t^2)dt=2\left(\frac{2}{5}t^5-t^3\right)+C$

$\displaystyle=\frac{2}{5}t^3(2t^2-5)+C=\frac{2}{5}(2x-1)(x+2)\sqrt{x+2}+C$

(3) $\sqrt{x-1}=t$ とおくと　$x-1=t^2$，$x=t^2+1$，$dx=2tdt$

$\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{(t^2+1)^2}{t}\cdot 2tdt=2\int(t^4+2t^2+1)dt=2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{2}{3}t^3+t\right)+C$

$\displaystyle=\frac{2}{15}t(3t^4+10t^2+15)+C=\frac{2}{15}(3x^2+4x+8)\sqrt{x-1}+C$

5

解答　C は積分定数とする。

(1) $e^x-2\log(e^x+2)+C$　　(2) $\displaystyle\frac{2}{15}(3e^{2x}-4e^x+8)\sqrt{e^x+1}+C$

(3) $\displaystyle-\frac{1}{\log x-2}-\frac{1}{(\log x-2)^2}+C$　　(4) $e^x-2\log(e^x+1)+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $e^x+2=t$ とおくと　$e^x=t-2$，$e^xdx=dt$

よって　$\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^x+2}dx=\int\frac{e^x}{e^x+2}\cdot e^xdx=\int\frac{t-2}{t}dt=\int\left(1-\frac{2}{t}\right)dt$

$=t-2\log t+C'=e^x+2-2\log(e^x+2)+C'$（$C'$ は積分定数）

$2+C'$ を C とおいて　$\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^x+2}dx=e^x-2\log(e^x+2)+C$

(2) $\sqrt{e^x+1}=t$ とおくと，$e^x+1=t^2$ であるから

$e^x=t^2-1$，$e^xdx=2tdt$

よって　$\displaystyle\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2tdt=2\int(t^4-2t^2+1)dt$

$\displaystyle=2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right)+C$

(3) $\log x-2=u$ とおくと　$\displaystyle\frac{1}{x}dx=du$

$\displaystyle\int\frac{\log x}{x(\log x-2)^3}dx=\int\frac{\log x-2+2}{(\log x-2)^3}\cdot\frac{1}{x}dx=\int\frac{u+2}{u^3}du$

$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u^3}\right)du=-\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}+C$

$\displaystyle=-\frac{1}{\log x-2}-\frac{1}{(\log x-2)^2}+C$

(4) $e^x+1=u$ とおくと　$e^xdx=du$

$\displaystyle\int\frac{(e^x-1)e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x+1-2}{e^x+1}\cdot e^xdx=\int\frac{u-2}{u}du=\int\left(1-\frac{2}{u}\right)du$

$=u-2\log|u|+C_1$　（C_1 は微分定数）

$=e^x-2\log(e^x+1)+C$　（$C=C_1+1$）

6

解答　C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\frac{1}{3}\sin^3x+C$　　(2) $\displaystyle-\frac{\cos^5x}{5}+C$　　(3) $\displaystyle-\frac{2}{\sin x}+C$

(4) $\displaystyle\frac{1}{9}(x^3+1)^3+C$　　(5) $\displaystyle\frac{(2x^2+4x-1)^3}{12}+C$　　(6) $\displaystyle\frac{2}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3}+C$

(7) $2\sqrt{x^2+x}+C$　　(8) $\displaystyle-\frac{e^{-2x^2+1}}{4}+C$　　(9) $\displaystyle\frac{(\log x)^6}{6}+C$

解説

(1) $\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

$\displaystyle\int\sin^2x\cos x\,dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\sin^3x+C$

(2) $\cos x=u$ とおくと　$-\sin x\,dx=du$

$\displaystyle\int\cos^4x\sin x\,dx=-\int\cos^4x(-\sin x)dx=-\int u^4du=-\frac{u^5}{5}+C=-\frac{\cos^5x}{5}+C$

(3) $\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

よって　$\displaystyle\int\frac{2\cos x}{\sin^2x}dx=\int\frac{2}{t^2}dt=-\frac{2}{t}+C=-\frac{2}{\sin x}+C$

(4) $x^3+1=t$ とおくと　$3x^2dx=dt$

よって　$\displaystyle\int x^2(x^3+1)^2dx=\frac{1}{3}\int t^2dt=\frac{t^3}{9}+C=\frac{1}{9}(x^3+1)^3+C$

(5) $2x^2+4x-1=u$ とおくと　$4(x+1)dx=du$

$\displaystyle\int(x+1)(2x^2+4x-1)^2dx=\frac{1}{4}\int(2x^2+4x-1)^2\cdot 4(x+1)dx=\frac{1}{4}\int u^2du=\frac{u^3}{12}+C$

$\displaystyle=\frac{(2x^2+4x-1)^3}{12}+C$

(6) $x^2+3=u$ とおくと　$2xdx=du$

$\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx=\int\sqrt{x^2+3}\cdot 2xdx=\int\sqrt{u}\,du$

$\displaystyle=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3}+C$

(7) $x^2+x=u$ とおくと　$(x^2+x)'=2x+1$

よって　$\displaystyle\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx=\int(x^2+x)^{-\frac{1}{2}}(x^2+x)'dx$

$\displaystyle=\int u^{-\frac{1}{2}}du=2u^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x^2+x}+C$

(8) $-2x^2+1=t$ とおくと　$-4xdx=dt$

$\displaystyle\int xe^{-2x^2+1}dx=-\frac{1}{4}\int e^{-2x^2+1}\cdot(-4x)dx=-\frac{1}{4}\int e^tdt=-\frac{1}{4}e^t+C=-\frac{e^{-2x^2+1}}{4}+C$

(9) $\log x=u$ とおくと　$\displaystyle\frac{1}{x}dx=du$

$\displaystyle\int\frac{(\log x)^5}{x}dx=\int(\log x)^5\cdot\frac{1}{x}dx=\int u^5du=\frac{u^6}{6}+C=\frac{(\log x)^6}{6}+C$

7

解答　C は積分定数とする。

(1) $\log|x^2+3x+1|+C$　　(2) $\displaystyle-\frac{1}{2}\log|4-x^2|+C$

(3) $\displaystyle\frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+1|+C$　　(4) $\log(e^x+e^{-x})+C$

(5) $\log|\sin x-\cos x|+C$　　(6) $\log|\sin x|+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx=\int\frac{(x^2+3x+1)'}{x^2+3x+1}dx=\log|x^2+3x+1|+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{x}{4-x^2}dx=\int\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(4-x^2)'}{4-x^2}dx=-\frac{1}{2}\log|4-x^2|+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx=\int\frac{\frac{1}{3}(x^3+3x^2+1)'}{x^3+3x^2+1}dx=\frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+1|+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx=\log(e^x+e^{-x})+C$

(5) $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx=\int \frac{(\sin x-\cos x)'}{\sin x-\cos x}dx=\log|\sin x-\cos x|+C$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx=\log|\sin x|+C$

$\boxed{1}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{5}x\sqrt[4]{x}+2\sqrt{x}+C$　(2) $\tan x-\frac{9}{\tan x}-4x+C$

(3) $x+\sin x+C$　(4) $\frac{4^x}{\log 4}-\frac{2^x}{\log 2}+x+C$

(5) $\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}+\sqrt{2}x+C$

解説

(1) $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2=(\sqrt{x})^2-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2=x-2x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{2}}$　から

$$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2dx=\int\left(x-2x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{5}x\sqrt[4]{x}+2\sqrt{x}+C\ (C\text{ は積分定数})$$

(2) $\left(\tan x+\frac{3}{\tan x}\right)^2=\tan^2 x+\frac{9}{\tan^2 x}+6=\frac{1}{\cos^2 x}-1+9\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)+6$
$$=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{9}{\sin^2 x}-4\quad\text{から}$$

$$\int\left(\tan x+\frac{3}{\tan x}\right)^2dx=\tan x-\frac{9}{\tan x}-4x+C\ (C\text{ は積分定数})$$

(3) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=1+\cos x$　から

$$\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int(1+\cos x)dx=x+\sin x+C\ (C\text{ は積分定数})$$

(4) $\frac{2^{3x}+1}{2^x+1}=\frac{(2^x+1)(2^{2x}-2^x+1)}{2^x+1}=2^{2x}-2^x+1=4^x-2^x+1$　から

$$\int\frac{2^{3x}+1}{2^x+1}dx=\frac{4^x}{\log 4}-\frac{2^x}{\log 2}+x+C\ (C\text{ は積分定数})$$

(5) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}dx=\int\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(x+2)-2}dx=\int(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})dx$
$$=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}+\sqrt{2}x+C\ (C\text{ は積分定数})$$

$\boxed{2}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{1}{18}(3x+1)^6+C$　(2) $\frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$

(3) $\frac{2}{5}(x-2)^2\sqrt{x-2}-8\sqrt{x-2}+C$　(4) $\frac{1}{9}(x^3+1)^3+C$

(5) $-\frac{2}{\sin x}+C$　(6) $\log(e^x+e^{-x})+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(3x+1)^5dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}(3x+1)^6+C=\frac{1}{18}(3x+1)^6+C$

(2) $\displaystyle\int\cos(3x+1)dx=\frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$

(3) $\sqrt{x-2}=t$ とおくと　$x=t^2+2$，$dx=2tdt$

よって　$\displaystyle\int\frac{x^2-4x}{\sqrt{x-2}}dx=\int\frac{(t^2+2)^2-4(t^2+2)}{t}\cdot 2tdt=2\int(t^4-4)dt$
$$=2\left(\frac{1}{5}t^5-4t\right)+C=\frac{2}{5}(x-2)^2\sqrt{x-2}-8\sqrt{x-2}+C$$

(4) $x^3+1=t$ とおくと　$3x^2dx=dt$

よって　$\displaystyle\int x^2(x^3+1)^2dx=\frac{1}{3}\int t^2dt=\frac{t^3}{9}+C=\frac{1}{9}(x^3+1)^3+C$

(5) $\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

よって　$\displaystyle\int\frac{2\cos x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{2}{t^2}dt=-\frac{2}{t}+C=-\frac{2}{\sin x}+C$

(6) $\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx=\log(e^x+e^{-x})+C$

$\boxed{3}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\tan x+\frac{1}{2}\tan^2 x+C$　(2) $2\sqrt{\sin x+2}+C$　(3) $\frac{1}{3}(1+\sin x)^3+C$

(4) $-\cos(\log x)+C$　(5) $-\sin(\cos x)+C$　(6) $e^{\sin x}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{1+\tan x}{\cos^2 x}dx=\int(1+\tan x)(\tan x)'dx=\tan x+\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+2}}dx=\int\frac{(\sin x+2)'}{\sqrt{\sin x+2}}dx=2\sqrt{\sin x+2}+C$

(3) $\displaystyle\int(1+\sin x)^2\cos x\,dx=\int(1+\sin x)^2(1+\sin x)'dx=\frac{1}{3}(1+\sin x)^3+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{\sin(\log x)}{x}dx=\int\{\sin(\log x)\}(\log x)'dx=-\cos(\log x)+C$

(5) $\displaystyle\int\sin x\cos(\cos x)dx=-\int\{\cos(\cos x)\}(\cos x)'dx=-\sin(\cos x)+C$

(6) $\displaystyle\int\cos x e^{\sin x}dx=\int e^{\sin x}(\sin x)'dx=e^{\sin x}+C$

$\boxed{4}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{2}{135}(9x+22)(3x+4)\sqrt{3x+4}+C$　(2) $e^x-\log(e^x+1)+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) [1]　$3x+4=t^2$ となるから

$$x=\frac{t^2-4}{3},\quad dx=\frac{2}{3}tdt,\quad x+2=\frac{t^2-4}{3}+2=\frac{1}{3}(t^2+2)$$

よって　$\displaystyle\int(x+2)\sqrt{3x+4}\,dx=\int\frac{1}{3}(t^2+2)t\cdot\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{9}\int(t^4+2t^2)dt$
$$=\frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{2}{3}t^3\right)+C=\frac{2}{9\cdot5\cdot3}t^3(3t^2+10)+C$$
$$=\frac{2}{135}(9x+22)(3x+4)\sqrt{3x+4}+C$$

[2]　$3x+4=t$ から

$$x=\frac{t-4}{3},\quad dx=\frac{1}{3}dt,\quad x+2=\frac{t-4}{3}+2=\frac{t+2}{3}$$

よって　$\int(x+2)\sqrt{3x+4}\,dx=\int\frac{t+2}{3}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{9}\int\left(t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}\right)dt$

$=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C=\frac{2}{9\cdot5\cdot3}t^{\frac{3}{2}}(3t+10)+C$

$=\frac{2}{135}(9x+22)(3x+4)\sqrt{3x+4}+C$

(2)　[1]　$e^x=t$ から　$e^x dx=dt$

よって　$\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx=\int\frac{t}{t+1}dt=\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=t-\log|t+1|+C=e^x-\log(e^x+1)+C$

[2]　$e^x+1=t$ から　$e^x=t-1$，$e^x dx=dt$

よって　$\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx=\int\frac{t-1}{t}dt=\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=t-\log|t|+C'$

$=e^x+1-\log(e^x+1)+C'$　(C' は積分定数)

$=e^x-\log(e^x+1)+C$

5

解答　C は積分定数とする。

(1)　$\frac{3}{28}(4x-3)(1+x)\sqrt[3]{1+x}+C$　　(2)　$\frac{2}{9}(x+3)(2x-3)\sqrt[4]{2x-3}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$\sqrt[3]{1+x}=t$ とおくと　$1+x=t^3$

よって　$x=t^3-1$，$dx=3t^2dt$

ゆえに　$\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx=\int(t^3-1)t\cdot3t^2dt=3\int(t^6-t^3)dt=3\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{4}t^4\right)+C$

$=\frac{3}{28}t^4(4t^3-7)+C=\frac{3}{28}(1+x)\sqrt[3]{1+x}\{4(1+x)-7\}+C$

$=\frac{3}{28}(4x-3)(1+x)\sqrt[3]{1+x}+C$

(2)　$\sqrt[4]{2x-3}=t$ とおくと，$2x-3=t^4$ から　$dx=2t^3dt$

よって　(与式)$=\int\left(\frac{t^4}{2}+\frac{5}{2}\right)t\cdot2t^3dt=\int(t^8+5t^4)dt$

$=\frac{t^9}{9}+t^5+C=\frac{t^5}{9}(t^4+9)+C$

$=\frac{1}{9}(2x-3)\sqrt[4]{2x-3}(2x-3+9)+C$

$=\frac{2}{9}(x+3)(2x-3)\sqrt[4]{2x-3}+C$

6

解答　C は積分定数とする。

(1)　$\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}}+C$　　(2)$-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$

解説

(1)　$x=3\sin\theta$　$\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと　$dx=3\cos\theta\,d\theta$

$(9-x^2)^{\frac{3}{2}}=(9\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}=(3\cos\theta)^3$

よって　$3\cos\theta=(9-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9-x^2}$

ゆえに　$\int\frac{1}{\sqrt{(9-x^2)^3}}dx=\int\frac{3\cos\theta}{(3\cos\theta)^3}d\theta=\int\frac{1}{9\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{9}\tan\theta+C$

$=\frac{1}{9}\cdot\frac{3\sin\theta}{3\cos\theta}+C=\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}}+C$　(C は積分定数)

(2)　$x=2\sin\theta$　$\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \theta\neq0\right)$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$　$(\cos\theta>0)$

よって　$\int\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\cdot2\cos\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta$

$=-\frac{1}{4\tan\theta}+C=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cos\theta}{2\sin\theta}+C$

$=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$　(C は積分定数)

1

解答　$\frac{1}{4}\{\log(1+x^2)\}^2+C$　(C は積分定数)

解説

C は積分定数とする。

$1+x^2=t$ とおくと　$2xdx=dt$

$\int\frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\cdot\log t\,dt$

$\log t=u$ とおくと　$\frac{1}{t}dt=du$

よって　$\int\frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int u\,du=\frac{1}{4}u^2+C=\frac{1}{4}(\log t)^2+C$

$=\frac{1}{4}\{\log(1+x^2)\}^2+C$

別解　$\log(1+x^2)=t$ とおくと　$\frac{2x}{1+x^2}dx=dt$

よって　(与式)$=\frac{1}{2}\int t\,dt=\frac{1}{4}t^2+C=\frac{1}{4}\{\log(1+x^2)\}^2+C$

2

解答　C は積分定数とする。

(1)　$\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$　　(2)　$\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$x+\sqrt{x^2+1}=t$ から　$\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=dt$

ゆえに　$\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}dx=dt$　　よって　$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{t}dt$

したがって　$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C$

$=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$

(2)　$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int(x)'\sqrt{x^2+1}\,dx=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$=x\sqrt{x^2+1}-\int\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$

$=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

ゆえに　$2\int\sqrt{x^2+1}\,dx=x\sqrt{x^2+1}+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

よって　$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx\right)$

(1) の結果から　$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}+C$

3

解答 (1) 略　(2) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$　(3) $-\dfrac{1}{3\tan^3 x}-\dfrac{1}{\tan x}+C$ （C は積分定数）

解説

(1) $\dfrac{t^2}{1+t^2}=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}\cdot\tan^2 x=\cos^2 x\cdot\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sin^2 x$

よって　$\dfrac{t^2}{1+t^2}=\sin^2 x$

(2) $t=\tan x$ から　$dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$

よって　$\dfrac{dx}{dt}=\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1}{1+t^2}$

(3) (1) より，$\sin^4 x=\dfrac{t^4}{(1+t^2)^2}$ であるから　$\dfrac{1}{\sin^4 x}=\dfrac{(1+t^2)^2}{t^4}$

また，(2) より，$dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ であるから

$$\int\frac{1}{\sin^4 x}dx=\int\frac{(1+t^2)^2}{t^4}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{1+t^2}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\left(t^{-4}+\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{3}t^{-3}-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}+C$$
$$=-\frac{1}{3\tan^3 x}-\frac{1}{\tan x}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

4

解答 (1) $\dfrac{4\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}$　(2) $-\log|\sin x+\cos x|+C$ （C は積分定数）　(3) $\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ から

$$f'(x)=\frac{(\cos x+\sin x)^2+(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$$

よって
$$2f(x)+f'(x)=\frac{2(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}+\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$$
$$=\frac{2(\sin^2 x-\cos^2 x+1)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{4\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

(2) $$\int f(x)dx=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{-(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=-\log|\sin x+\cos x|+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(3) (1) の結果と (2) から

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\{2f(x)+f'(x)\}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[-\log|\sin x+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\left[\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=0+\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}$$

1

解答 C は積分定数とする。

(1) $x\sin x+\cos x+C$　(2) $\dfrac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C$

(3) $-(x-1)\cos x+\sin x+C$　(4) $\dfrac{x^3}{3}\log x-\dfrac{x^3}{9}+C$　(5) $x\log x-x+C$

(6) $(x+1)\log(x+1)-x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $$\int x\cos x\,dx=\int x(\sin x)'dx=x\sin x-\int(x)'\sin x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

(2) $$\int xe^{2x}dx=\int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\left(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right)+C$$
$$=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C$$

(3) $$\int(x-1)\sin x\,dx=\int(x-1)(-\cos x)'dx=(x-1)\cdot(-\cos x)+\int\cos x\,dx$$
$$=-(x-1)\cos x+\sin x+C$$

(4) $$\int x^2\log x\,dx=\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x\,dx=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^3}{3}(\log x)'dx$$
$$=\frac{x^3}{3}\log x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}+C$$

(5) $$\int\log x\,dx=\int(x)'(\log x)dx=x\log x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=x\log x-x+C$$

(6) $$\int\log(x+1)dx=\int1\cdot\log(x+1)dx=\int(x+1)'\cdot\log(x+1)dx$$
$$=(x+1)\log(x+1)-\int(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx$$
$$=(x+1)\log(x+1)-x+C$$

2

解答 $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$ （C は積分定数）

解説

$u=\sqrt{x}$ とおくと　$x=u^2$

よって　$dx=2u\,du$

ゆえに　$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^u\cdot2u\,du=2ue^u-\int2e^u du=2ue^u-2e^u+C=2(u-1)e^u+C$$
$$=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

3

解答 C は積分定数とする。

(1) $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$　(2) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$

(3) $x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6x\log x-6x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $$\int x^2\sin x\,dx=\int x^2(-\cos x)'dx=-x^2\cos x+\int2x\cos x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2\int x(\sin x)'dx$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int\sin x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$$
$$=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$$

(2) $$\int x^2e^{-x}dx=\int x^2(-e^{-x})'dx=-x^2e^{-x}+\int2xe^{-x}dx$$
$$=-x^2e^{-x}+2\int x(-e^{-x})'dx$$
$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx$$
$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$$
$$=-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$$

(3) $$\int(\log x)^3dx=\int(x)'(\log x)^3dx=x(\log x)^3-\int x\cdot3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=x(\log x)^3-3\int(\log x)^2dx=x(\log x)^3-3\int(x)'(\log x)^2dx$$
$$=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6\int\log x\,dx$$
$$=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6\int(x)'\log x\,dx$$
$$=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6x\log x-6\int dx$$
$$=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6x\log x-6x+C$$

4

解答 $\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$　（C は積分定数）

解説

$$\int e^x\sin x\,dx=\int(e^x)'\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$
$$=e^x\sin x-\int(e^x)'\cos x\,dx=e^x\sin x-\left\{e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)dx\right\}$$
$$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$$

よって　$\displaystyle\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$　（C は積分定数）

5

解答 $\dfrac{1}{2}x^2+x+2\log|x+2|+C$　（C は積分定数）

解説

C は積分定数とする。

$$\int\frac{x^2+3x+4}{x+2}dx=\int\left(x+1+\frac{2}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+x+2\log|x+2|+C$$

6

解答 C は積分定数とする。

(1) $\log\dfrac{(x-3)^2}{|x+1|}+C$　(2) $2\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|-\dfrac{1}{x+1}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{x+5}{x^2-2x-3}=\dfrac{x+5}{(x+1)(x-3)}$ であるから，$\dfrac{x+5}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}$ とおく。

分母を払って整理すると　$x+5=(a+b)x-3a+b$

ゆえに　$a+b=1,\ -3a+b=5$

よって　$a=-1,\ b=2$

したがって　$\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2-2x-3}dx=\int\frac{x+5}{(x+1)(x-3)}dx=\int\left(\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=2\log|x-3|-\log|x+1|+C$$

$$=\log\frac{(x-3)^2}{|x+1|}+C$$

(2)　$\dfrac{3x+2}{x(x+1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$ とおく。

両辺に $x(x+1)^2$ を掛けて　$3x+2=a(x+1)^2+bx(x+1)+cx$

右辺を整理すると　$3x+2=(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a$

これが x についての恒等式であるから　$a+b=0,\ 2a+b+c=3,\ a=2$

これを解いて　$a=2,\ b=-2,\ c=1$

よって　$\displaystyle\int\frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx=\int\left\{\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$

$$=2\log|x|-2\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$$

$$=2\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

$\boxed{7}$

解答　C は積分定数とする。

(1)　$\log\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$　(2)　$2\log\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+C$　(3)　$\log\dfrac{e^x}{|1-e^x|}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1,\ dx=2tdt$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int\frac{2t}{(t^2-1)t}dt=\int\frac{2}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\log|t-1|-\log|t+1|+C=\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$$

(2)　$\sqrt{x}=t$ とおくと　$x=t^2,\ dx=2tdt$

よって　$\displaystyle\int\frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}=\int\frac{1}{t^2(1+t)}\cdot 2tdt=\int\frac{2}{t(1+t)}dt=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$

$$=2(\log|t|-\log|1+t|)+C=2\log\left|\frac{t}{1+t}\right|+C$$

$$=2\log\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+C$$

(3)　$1-e^x=t$ とおくと　$-e^xdx=dt$

$$\int\frac{1}{1-e^x}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{-e^x}=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\log|1-t|-\log|t|+C=\log\left|\frac{1-t}{t}\right|+C$$

$$=\log\frac{e^x}{|1-e^x|}+C$$

別解　$e^x=t$ とおくと　$x=\log t,\ dx=\dfrac{1}{t}dt$

$$\int\frac{1}{1-e^x}dx=\int\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=-\log|1-t|+\log|t|+C=\log\left|\frac{t}{1-t}\right|+C$$

$$=\log\frac{e^x}{|1-e^x|}+C$$

$\boxed{1}$

解答　C は積分定数とする。

(1)　xe^x-e^x+C　(2)　$-\dfrac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}+C$　(3)　$-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

(4)　$\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$　(5)　$(x-1)\sin x+\cos x+C$

(6)　$-\dfrac{1}{9}(3x+7)e^{-3x}+C$　(7)　$x\tan x+\log|\cos x|+C$

(8)　$\dfrac{1}{5}x^5\log x-\dfrac{1}{25}x^5+C$　(9)　$(x-5)\log(x-5)-x+C$

(10)　$\dfrac{1}{4}(4x-1)\log(1-4x)-x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$\displaystyle\int xe^xdx=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int 1\cdot e^xdx=xe^x-e^x+C$

(2)　$\displaystyle\int xe^{-2x}dx=\int x\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)'dx=x\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)-\int(x)'\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)dx$

$$=-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}+C$$

(3)　$\displaystyle\int x\sin 2x\,dx=\int x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$

$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

(4)　$\displaystyle\int x\cos 2x\,dx=\int x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx=x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int 1\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

(5)　$\displaystyle\int(x-1)\cos x\,dx=\int(x-1)(\sin x)'dx=(x-1)\sin x-\int(x-1)'\sin x\,dx$

$$=(x-1)\sin x-\int\sin x\,dx=(x-1)\sin x+\cos x+C$$

(6)　$\displaystyle\int(x+2)e^{-3x}dx=\int(x+2)\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'dx=(x+2)\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)+\int\frac{1}{3}e^{-3x}dx$

$$=-\frac{1}{3}(x+2)e^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C=-\frac{1}{9}(3x+7)e^{-3x}+C$$

(7)　$\displaystyle\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int x(\tan x)'dx=x\tan x-\int\tan x\,dx=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$=x\tan x+\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=x\tan x+\log|\cos x|+C$$

(8)　$\displaystyle\int x^4\log x\,dx=\int(\log x)\cdot\left(\frac{x^5}{5}\right)'dx=(\log x)\cdot\frac{x^5}{5}-\int(\log x)'\cdot\frac{x^5}{5}dx$

$$=\frac{1}{5}x^5\log x-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^5}{5}dx=\frac{1}{5}x^5\log x-\frac{1}{5}\int x^4dx$$

$$=\frac{1}{5}x^5\log x-\frac{1}{25}x^5+C$$

(9)　$\displaystyle\int\log(x-5)dx=\int\{\log(x-5)\}(x-5)'dx$

$$=\{\log(x-5)\}(x-5)-\int\{\log(x-5)\}'(x-5)dx$$

$$=(x-5)\log(x-5)-\int\frac{1}{x-5}\cdot(x-5)dx$$

$$=(x-5)\log(x-5)-\int dx=(x-5)\log(x-5)-x+C$$

(10) $\int\log(1-4x)dx=\int\{\log(1-4x)\}\left(\frac{1-4x}{-4}\right)'dx$

$$=\{\log(1-4x)\}\cdot\frac{1-4x}{-4}-\int\{\log(1-4x)\}'\cdot\frac{1-4x}{-4}dx$$

$$=\frac{1}{4}(4x-1)\log(1-4x)-\int\frac{-4}{1-4x}\cdot\frac{1-4x}{-4}dx$$

$$=\frac{1}{4}(4x-1)\log(1-4x)-\int dx=\frac{1}{4}(4x-1)\log(1-4x)-x+C$$

$\boxed{2}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$　　(2) $(x-1)\log(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}x+\sqrt{x}+C$

解説

(1) $\sqrt{x}=t$ とおくと $x=t^2$，$\frac{dx}{dt}=2t$

$$\int\sin\sqrt{x}\,dx=\int\sin t\cdot2t\cdot dt=\int2t\sin t\,dt=2t(-\cos t)-\int2(-\cos t)dt$$

$$=-2t\cos t+2\int\cos t\,dt=-2t\cos t+2\sin t+C$$

$$=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C\ (C:\text{積分定数})$$

(2) $1+\sqrt{x}=t$ とおくと　$x=(t-1)^2$

よって　$dx=2(t-1)dt$

ゆえに　$\int\log(1+\sqrt{x})dx=\int(\log t)\cdot2(t-1)dt=\int(\log t)(t^2-2t)'dt$

$$=(t^2-2t)\log t-\int(t^2-2t)\cdot\frac{1}{t}dt=t(t-2)\log t-\frac{1}{2}t^2+2t+C_0$$

$$=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)\log(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^2+2(1+\sqrt{x})+C_0$$

$$=(x-1)\log(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}x+\sqrt{x}+C\ (C_0,\ C\text{は積分定数})$$

$\boxed{3}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$　　(2) $\frac{2x^2-1}{4}\sin2x+\frac{x}{2}\cos2x+C$

(3) $\frac{e^{2x}}{4}(2x^2-2x+1)+C$　　(4) $x(\log3x)^2-2x\log3x+2x+C$

(5) $\frac{x^3}{3}(\log x)^2-\frac{2}{9}x^3\log x+\frac{2}{27}x^3+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\int x^2\cos x\,dx=\int x^2(\sin x)'dx=x^2\sin x-\int2x\sin x\,dx$

$$=x^2\sin x+2\int x(\cos x)'dx$$

$$=x^2\sin x+2\left(x\cos x-\int\cos x\,dx\right)$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

(2) $\int x^2\cos2x\,dx=\int x^2\left(\frac{\sin2x}{2}\right)'dx=\frac{x^2}{2}\sin2x-\int x\sin2x\,dx$

$$=\frac{x^2}{2}\sin2x-\int x\left(-\frac{\cos2x}{2}\right)'dx=\frac{x^2}{2}\sin2x+\frac{x}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\int\cos2x\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\sin2x+\frac{x}{2}\cos2x-\frac{1}{4}\sin2x+C$$

$$=\frac{2x^2-1}{4}\sin2x+\frac{x}{2}\cos2x+C$$

(3) $\int x^2e^{2x}dx=\int x^2\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=x^2\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int xe^{2x}dx$

$$=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\int x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\left(\frac{xe^{2x}}{2}-\int\frac{e^{2x}}{2}dx\right)$$

$$=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\left(\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}\right)+C=\frac{e^{2x}}{4}(2x^2-2x+1)+C$$

(4) $\int(\log3x)^2dx=\int(x)'(\log3x)^2dx=x(\log3x)^2-\int x(2\log3x)\cdot\frac{3}{3x}dx$

$$=x(\log3x)^2-2\int\log3x\,dx=x(\log3x)^2-2\int(x)'(\log3x)dx$$

$$=x(\log3x)^2-2\left(x\log3x-\int x\cdot\frac{3}{3x}dx\right)$$

$$=x(\log3x)^2-2x\log3x+2x+C$$

(5) $\int x^2(\log x)^2dx=\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'(\log x)^2dx=\frac{x^3}{3}(\log x)^2-\frac{1}{3}\int x^3\cdot(2\log x)\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=\frac{x^3}{3}(\log x)^2-\frac{2}{3}\int x^2\log x\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}(\log x)^2-\frac{2}{3}\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}(\log x)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\log x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=\frac{x^3}{3}(\log x)^2-\frac{2}{9}x^3\log x+\frac{2}{9}\int x^2dx$$

$$=\frac{x^3}{3}(\log x)^2-\frac{2}{9}x^3\log x+\frac{2}{27}x^3+C$$

$\boxed{4}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$　　(2) $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\int e^x\cos x\,dx=\int(e^x)'\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx=e^x\cos x+\int(e^x)'\sin x\,dx$

$$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

よって　$\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$

(2) $\int e^{-x}\sin x\,dx=\int(-e^{-x})'\sin x\,dx=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx$

$$=-e^{-x}\sin x+\int(-e^{-x})'\cos x\,dx$$

$$=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$$

よって　$\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$

$\boxed{5}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $2x+\log|x+1|+C$　　(2) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2\log|x-1|+C$

(3) $\frac{x^2}{2}+3x+4\log|x-1|+C$　　(4) $\frac{x^2}{2}+x-\log|3x+1|+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\int\frac{2x+3}{x+1}dx=\int\left(2+\frac{1}{x+1}\right)dx=2x+\log|x+1|+C$

(2) $\int\frac{x^3-x+2}{x-1}dx=\int\left(x^2+x+\frac{2}{x-1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2\log|x-1|+C$

(3) $\int\frac{(x+1)^2}{x-1}dx=\int\left(x+3+\frac{4}{x-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+3x+4\log|x-1|+C$

(4) $\int\frac{3x^2+4x-2}{3x+1}dx=\int\left(x+1-\frac{3}{3x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x-\log|3x+1|+C$

$\boxed{6}$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C$　　(2) $\frac{1}{5}\log|x+3|^3(x-2)^2+C$　　(3) $\log\frac{(x-1)^2}{|x+2|}+C$

(4) $\log\frac{(x+1)^2}{|x+2|}+C$　　(5) $2\log|x+1|+\frac{3}{x+1}+C$

(6) $\log\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C$　　(7) $\log\frac{(x-2)^4}{|x-1|^3}+\frac{1}{x-1}+C$

(8) $\frac{1}{20}\log\left|\frac{(x+2)(x-3)^4}{(x-2)^5}\right|+C$

(9) $x^2+x+4\log|x+2|+2\log|x-1|-\frac{5}{x-1}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\frac{1}{x^2-5x+4}=\frac{1}{(x-1)(x-4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-1}\right)$

よって　$\int\frac{dx}{x^2-5x+4}=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{3}(\log|x-4|-\log|x-1|)+C$

$$=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C$$

(2) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ から $\frac{x}{x^2+x-6}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-2}$ とおいて，両辺に $(x+3)(x-2)$ を掛けると

$$x=a(x-2)+b(x+3)$$

整理して　$(a+b-1)x-2a+3b=0$

これが x についての恒等式である条件は

$$a+b-1=0,\ -2a+3b=0$$

これを解いて　$a=\frac{3}{5}$，$b=\frac{2}{5}$

よって　$\int\frac{x}{x^2+x-6}dx=\frac{1}{5}\int\left(\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-2}\right)dx$

$=\frac{1}{5}(3\log|x+3|+2\log|x-2|)+C$

$=\frac{1}{5}\log|x+3|^3(x-2)^2+C$

(3) $\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx=\int\frac{x+5}{(x-1)(x+2)}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=2\log|x-1|-\log|x+2|+C=\log\frac{(x-1)^2}{|x+2|}+C$

(4) $\int\frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=2\log|x+1|-\log|x+2|+C$

$=\log\frac{(x+1)^2}{|x+2|}+C$

(5) $\frac{2x-1}{(x+1)^2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$ ……① とおく。

①の両辺に $(x+1)^2$ を掛けて　$2x-1=a(x+1)+b$ ……②

両辺に $x=0,\ -1$ を代入すると　$-1=a+b,\ -3=b$

よって　$a=2,\ b=-3$

このとき，①は確かに恒等式となる。

したがって　$\int\frac{2x-1}{(x+1)^2}dx=\int\left\{\frac{2}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}\right\}dx$

$=2\log|x+1|+\frac{3}{x+1}+C$

別解　［$a,\ b$ の求め方］

②の右辺を整理すると　$2x-1=ax+a+b$

これが x についての恒等式であるから　$a=2,\ a+b=-1$

よって　$a=2,\ b=-3$

(6) $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$ ……①　とおく。

①の両辺に $x(x-1)^2$ を掛けて　$1=a(x-1)^2+bx(x-1)+cx$ ……②

両辺に $x=0,\ 1,\ 2$ を代入すると　$1=a,\ 1=c,\ 1=a+2b+2c$

よって　$a=1,\ b=-1,\ c=1$

このとき，①は確かに恒等式となる。

したがって　$\int\frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx$

$=\log|x|-\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$

$=\log\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C$

別解　［$a,\ b,\ c$ の求め方］

②の右辺を整理すると　$1=(a+b)x^2-(2a+b-c)x+a$

これが x についての恒等式であるから　$a+b=0,\ 2a+b-c=0,\ a=1$

よって　$a=1,\ b=-1,\ c=1$

参考　$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$ であるから

$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{(x-1)^2}-\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

(7) $\frac{x^2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$ ……①　とおく。

①の両辺に $(x-2)(x-1)^2$ を掛けて

$x^2=a(x-1)^2+b(x-2)(x-1)+c(x-2)$ ……②

両辺に $x=0,\ 1,\ 2$ を代入すると　$0=a+2b-2c,\ 1=-c,\ 4=a$

よって　$a=4,\ b=-3,\ c=-1$

このとき，①は確かに恒等式となる。

したがって　$\int\frac{x^2}{(x-2)(x-1)^2}dx=\int\left\{\frac{4}{x-2}-\frac{3}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx$

$=4\log|x-2|-3\log|x-1|+\frac{1}{x-1}+C$

$=\log\frac{(x-2)^4}{|x-1|^3}+\frac{1}{x-1}+C$

別解　［$a,\ b,\ c$ の求め方］

②の右辺を整理すると　$x^2=(a+b)x^2-(2a+3b-c)x+a+2b-2c$

これが x についての恒等式であるから

$a+b=1,\ 2a+3b-c=0,\ a+2b-2c=0$

よって　$a=4,\ b=-3,\ c=-1$

(8) $\frac{1}{(x-2)(x+2)(x-3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x-3}$ とおいて，分母を払うと

$1=a(x+2)(x-3)+b(x-2)(x-3)+c(x-2)(x+2)$

x について整理すると

$(a+b+c)x^2-(a+5b)x-6a+6b-4c=1$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$a+b+c=0,\ a+5b=0,\ -6a+6b-4c=1$

これを解いて　$a=-\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{20},\ c=\frac{1}{5}$

したがって　(与式)$=\frac{1}{20}\int\left(-\frac{5}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x-3}\right)dx$

$=\frac{1}{20}(-5\log|x-2|+\log|x+2|+4\log|x-3|)+C$

$=\frac{1}{20}\log\left|\frac{(x+2)(x-3)^4}{(x-2)^5}\right|+C$

(9) $2x^4+x^3+12=(2x+1)(x^3-3x+2)+6x^2-x+10$ から

$\frac{2x^4+x^3+12}{x^3-3x+2}=2x+1+\frac{6x^2-x+10}{(x+2)(x-1)^2}$

$\frac{6x^2-x+10}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$ とおく。

両辺に $(x+2)(x-1)^2$ を掛けて

$6x^2-x+10=a(x-1)^2+b(x+2)(x-1)+c(x+2)$

右辺を整理すると

$6x^2-x+10=(a+b)x^2+(-2a+b+c)x+a-2b+2c$

これが x についての恒等式であるから

$a+b=6,\ -2a+b+c=-1,\ a-2b+2c=10$

これを解いて　$a=4,\ b=2,\ c=5$

よって　$\int\frac{2x^4+x^3+12}{x^3-3x+2}dx=\int\left\{2x+1+\frac{4}{x+2}+\frac{2}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}\right\}dx$

$=x^2+x+4\log|x+2|+2\log|x-1|-\frac{5}{x-1}+C$

7

解答　C は積分定数とする。

(1) $\log\left|\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+2}\right|+C$　(2) $\sqrt{2x+1}+\log\frac{|\sqrt{2x+1}-1|}{\sqrt{2x+1}+1}+C$

(3) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log(e^x+2)+C$　(4) $2\sqrt{1+e^x}+\log\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$

(5) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\sqrt{x-1}=t$ とおくと　$x=t^2+1,\ dx=2tdt$　　また　$x-5=t^2-4$

よって　$\int\frac{2}{(x-5)\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{2}{(t^2-4)t}\cdot 2tdt=\int\frac{4}{(t-2)(t+2)}dt$

$=\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\log|t-2|-\log|t+2|+C$

$=\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\log\left|\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+2}\right|+C$

(2) $\sqrt{2x+1}=t$ とおくと　$x=\frac{t^2-1}{2},\ dx=tdt$

よって　(与式)$=\int\frac{2x+2}{2x\sqrt{2x+1}}dx=\int\frac{t^2+1}{(t^2-1)t}\cdot tdt$

$=\int\frac{t^2+1}{t^2-1}dt=\int\left(1+\frac{2}{t^2-1}\right)dt=\int\left(1+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=t+\log|t-1|-\log(t+1)+C=t+\log\frac{|t-1|}{t+1}+C$

$=\sqrt{2x+1}+\log\frac{|\sqrt{2x+1}-1|}{\sqrt{2x+1}+1}+C$

(3) $e^x+2=t$ とおくと，$x=\log(t-2)$，$dx=\frac{1}{t-2}dt$ であるから

$\int\frac{1}{e^x+2}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t-2}dt=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t}\right)dt$

$=\frac{1}{2}(\log|t-2|-\log|t|)+C$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log(e^x+2)+C$

別解　$e^x=t$ とおくと，$x=\log t$，$dx=\frac{1}{t}dt$ であるから

$\int\frac{1}{e^x+2}dx=\int\frac{1}{t+2}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt$

$=\frac{1}{2}(\log|t|-\log|t+2|)+C$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log(e^x+2)+C$

(4) $\sqrt{1+e^x}=t$ とおくと　$e^x=t^2-1$

ゆえに　$e^xdx=2tdt$　　すなわち　$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$

よって　$\displaystyle\int\sqrt{1+e^x}\,dx=\int\frac{2t^2}{t^2-1}dt=\int\left(2+\frac{2}{t^2-1}\right)dt$

$$=\int\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=2t+\log|t-1|-\log|t+1|+C=2t+\log\frac{|t-1|}{|t+1|}+C$$

$$=2\sqrt{1+e^x}+\log\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$$

(5)　$e^{2x}-1=t$ とおくと　$2e^{2x}dx=dt$，$e^x>0$ より $e^x=\sqrt{t+1}$

$$\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx=\int\frac{e^x}{t}\cdot\frac{dt}{2e^{2x}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$$

$\sqrt{t+1}=u$ とおくと　$t+1=u^2$，$dt=2udu$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t\sqrt{t+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{2udu}{(u^2-1)u}=\int\frac{du}{u^2-1}=\int\frac{du}{(u-1)(u+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{1}{2}(\log|u-1|-\log|u+1|)+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{e^{2x}-1+1}-1}{\sqrt{e^{2x}-1+1}+1}\right|+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{e^{2x}}-1}{\sqrt{e^{2x}}+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C\quad(e^x>0)$$

別解　$e^x=u$ とおくと　$e^xdx=du$

$$\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx=\int\frac{1}{e^{2x}-1}\cdot e^xdx=\int\frac{1}{u^2-1}du=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}(\log|u-1|-\log|u+1|)+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$$

1

解答　C は積分定数とする。

(1)　$-\dfrac{1}{2}x\cos2x+\dfrac{1}{4}\sin2x+C$　　(2)　$\dfrac{x\cdot2^x}{\log2}-\dfrac{2^x}{(\log2)^2}+C$

(3)　$(x+3)\log(x+3)-x+C$　　(4)　$\sqrt{x}(\log x-2)+C$

(5)　$-\dfrac{x}{\tan x}+\log|\sin x|+C$

解説

(1)　$\displaystyle\int x\sin2x\,dx=\int x\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)'dx=x\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)-\int1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)dx$

$$=-\frac{1}{2}x\cos2x+\frac{1}{2}\int\cos2x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}x\cos2x+\frac{1}{4}\sin2x+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(2)　$\displaystyle\int x\cdot2^xdx=\int x\left(\frac{2^x}{\log2}\right)'dx=x\cdot\frac{2^x}{\log2}-\int1\cdot\frac{2^x}{\log2}dx$

$$=\frac{x\cdot2^x}{\log2}-\frac{2^x}{(\log2)^2}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(3)　$\displaystyle\int\log(x+3)\,dx=\int(x+3)'\log(x+3)\,dx$

$$=(x+3)\log(x+3)-\int(x+3)\cdot\frac{1}{x+3}dx$$

$$=(x+3)\log(x+3)-x+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(4)　$\displaystyle\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\log x\,dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\log x\,dx=x^{\frac{1}{2}}\log x-\int x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx=x^{\frac{1}{2}}\log x-\int x^{-\frac{1}{2}}dx$

$$=x^{\frac{1}{2}}\log x-2x^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x}(\log x-2)+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(5)　$\displaystyle\int\frac{x}{\sin^2x}dx=\int x\left(-\frac{1}{\tan x}\right)'dx=-\frac{x}{\tan x}+\int1\cdot\frac{1}{\tan x}dx$

$$=-\frac{x}{\tan x}+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$=-\frac{x}{\tan x}+\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$$

$$=-\frac{x}{\tan x}+\log|\sin x|+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

2

解答　C は積分定数とする。

(1)　$\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$　　(2)　$\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)，(2)　$\displaystyle I=\int e^{ax}\sin bx\,dx$，$\displaystyle J=\int e^{ax}\cos bx\,dx$ とする。

$$(e^{ax}\sin bx)'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$$

$$(e^{ax}\cos bx)'=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx$$

両辺を積分して　$e^{ax}\sin bx=aI+bJ$ ……①，$e^{ax}\cos bx=aJ-bI$ ……②

①×a－②×b から　$ae^{ax}\sin bx-be^{ax}\cos bx=(a^2+b^2)I$

$a^2+b^2\fallingdotseq0$ であるから，積分定数を考えて

$$I=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$$

また，①×b＋②×a から，同様にして

$$J=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C$$

3

解答　(ア)　x　　(イ)　$\dfrac{1}{4}$

解説

$\displaystyle I=\int\frac{1}{2+x^2}dx=\int(x)'\cdot\frac{1}{2+x^2}dx=x\cdot\frac{1}{2+x^2}-\int x\cdot\left(\frac{1}{2+x^2}\right)'dx$

$$=\frac{x}{2+x^2}+\int x\cdot\frac{2x}{(2+x^2)^2}dx=\frac{x}{2+x^2}+\int\frac{2(2+x^2)-4}{(2+x^2)^2}dx$$

$$=\frac{x}{2+x^2}+2I-4\int\frac{1}{(2+x^2)^2}dx$$

ゆえに　$\displaystyle\int\frac{1}{(2+x^2)^2}dx=\frac{{}^{ア}x}{4(2+x^2)}+{}^{イ}\frac{1}{4}I$

答　(ア)　x　　(イ)　$\dfrac{1}{4}$

4

解答　(ア)　$\dfrac{2}{3}$　　(イ)　$-\dfrac{1}{3}$　　(ウ)　$-\dfrac{2}{3}$　　(エ)　$\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)^2}$

解説

$\dfrac{x-1}{x^3+1}=\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2-x+1}+\dfrac{\gamma}{x+1}$　……① とする。

① の両辺に x^3+1 を掛けると　$x-1=(\alpha x+\beta)(x+1)+\gamma(x^2-x+1)$

右辺を展開して整理すると　$x-1=(\alpha+\gamma)x^2+(\alpha+\beta-\gamma)x+\beta+\gamma$

これが x についての恒等式であるから

$$\alpha+\gamma=0,\quad\alpha+\beta-\gamma=1,\quad\beta+\gamma=-1$$

これを解いて　$\alpha={}^{ア}\dfrac{2}{3}$，$\beta={}^{イ}-\dfrac{1}{3}$，$\gamma={}^{ウ}-\dfrac{2}{3}$

したがって　$\displaystyle\int\frac{x-1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{2}{x+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{3}\int\left\{\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}-\frac{2}{x+1}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{3}(\log|x^2-x+1|-2\log|x+1|)+C$$

$$=\frac{1}{3}\log{}^{エ}\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}+C$$

5

解答　C は積分定数とする。順に $x\sin x+C$，$x(\sin x)\log x+\cos x+C$

解説

C は積分定数とする。

$$\int(\sin x+x\cos x)dx=\int\sin x\,dx+\int x\cos x\,dx=-\cos x+x\sin x-\int\sin x\,dx$$

$$=-\cos x+x\sin x+\cos x+C=x\sin x+C$$

この結果を用いると

$$\int(\sin x+x\cos x)\log x\,dx=\int(x\sin x)'\log x\,dx$$
$$=(x\sin x)\log x-\int(x\sin x)\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=(x\sin x)\log x-\int\sin x\,dx=x(\sin x)\log x+\cos x+C$$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$A=1$，$B=-2$，$C=1$　　(2)　$\log\dfrac{4e(e+2)}{3(e+1)^2}$

解説

(1)　等式の両辺に $t(t+1)(t+2)$ を掛けて　　$2=A(t+1)(t+2)+Bt(t+2)+Ct(t+1)$

右辺を整理すると　　$2=(A+B+C)t^2+(3A+2B+C)t+2A$

この等式が t についての恒等式であるから

$A+B+C=0$，$3A+2B+C=0$，$2A=2$

よって　　$A=1$，$B=-2$，$C=1$

(2)　$e^x=t$ とおくと　　$x=\log t$　　ゆえに　　$dx=\dfrac{1}{t}dt$

x	$0\to1$
t	$1\to e$

よって　$$\int_0^1\frac{2}{2+3e^x+e^{2x}}dx=\int_1^e\frac{2}{2+3t+t^2}\cdot\frac{1}{t}dt$$
$$=\int_1^e\frac{2}{t(t+1)(t+2)}dt=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}+\frac{1}{t+2}\right)dt$$
$$=\Big[\log t-2\log(t+1)+\log(t+2)\Big]_1^e$$
$$=1-2\log(e+1)+\log(e+2)+2\log2-\log3$$
$$=\log\frac{4e(e+2)}{3(e+1)^2}$$

$\boxed{1}$

解答　C は積分定数とする。

(1)　$\dfrac{4}{15}(3\sqrt{x}-2)(1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$　　(2)　$(\log|\sin x|)^2+C$

(3)　$\dfrac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$\sqrt{1+\sqrt{x}}=t$ とおくと，$1+\sqrt{x}=t^2$ から　　$x=(t^2-1)^2$，$dx=2(t^2-1)\cdot2tdt$

よって　$$\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx=\int t\cdot2(t^2-1)\cdot2tdt=4\int(t^4-t^2)dt$$
$$=4\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{4}{15}t^3(3t^2-5)+C$$
$$=\frac{4}{15}(3\sqrt{x}-2)(1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$$

(2)　$\log(\sin^2x)=t$ とおくと　　$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin^2x}=\dfrac{2}{\tan x}$，$dx=\dfrac{\tan x}{2}dt$

よって　$$\int\frac{\log(\sin^2x)}{\tan x}dx=\int\frac{t}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{2}dt=\int\frac{t}{2}dt$$
$$=\frac{t^2}{4}+C=\frac{1}{4}\{\log(\sin^2x)\}^2+C$$
$$=(\log|\sin x|)^2+C$$

(3)　$x^2=t$ とおくと　　$\dfrac{dt}{dx}=2x$，$xdx=\dfrac{1}{2}dt$

よって　$$\int x^3e^{x^2}dx=\int x^2e^{x^2}\cdot xdx=\int te^t\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int t(e^t)'dt=\frac{1}{2}\left(te^t-\int e^tdt\right)$$
$$=\frac{1}{2}(te^t-e^t)+C=\frac{1}{2}(t-1)e^t+C$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C$$

$\boxed{2}$

解答　証明略；$I=\dfrac{1}{2}\{e^x(\sin x-\cos x)-e^{-x}(\sin x+\cos x)\}+C$，

$J=\dfrac{1}{2}\{e^x(\sin x+\cos x)-e^{-x}(\sin x-\cos x)\}+C$（$C$ は積分定数）

解説

C を積分定数とする。

$$I=\int(e^x-e^{-x})'\sin x\,dx=(e^x-e^{-x})\sin x-\int(e^x-e^{-x})\cos x\,dx$$
$$=(e^x-e^{-x})\sin x-J\quad\cdots\cdots①$$
$$J=\int(e^x+e^{-x})'\cos x\,dx=(e^x+e^{-x})\cos x+\int(e^x+e^{-x})\sin x\,dx$$
$$=(e^x+e^{-x})\cos x+I\quad\cdots\cdots②$$

が成り立つ。

② を ① に代入して

$$I=(e^x-e^{-x})\sin x-(e^x+e^{-x})\cos x-I$$

よって，積分定数も考えて

$$I=\frac{1}{2}\{e^x(\sin x-\cos x)-e^{-x}(\sin x+\cos x)\}+C$$

また，① を ② に代入して

$$J=(e^x+e^{-x})\cos x+(e^x-e^{-x})\sin x-J$$

ゆえに，積分定数も考えて

$$J=\frac{1}{2}\{e^x(\sin x+\cos x)-e^{-x}(\sin x-\cos x)\}+C$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$\sqrt{\dfrac{x}{a+x}}$　　(2)　略

(3)　$\dfrac{4x+1}{8}\sqrt{x(2x+1)}-\dfrac{\sqrt{2}}{16}\log(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+1})+C$　（C は積分定数）

解説

(1)　$$\{\sqrt{x(a+x)}\}'=\frac{\{x(a+x)\}'}{2\sqrt{x(a+x)}}=\frac{a+2x}{2\sqrt{x(a+x)}}$$

$$\{\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})\}'=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})'}{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+a}}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})}$$
$$=\frac{\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+a}}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})}=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+a}}=\frac{1}{2\sqrt{x(a+x)}}$$

よって　　$\{\sqrt{x(a+x)}-a\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})\}'$

$$=\frac{a+2x}{2\sqrt{x(a+x)}}-a\cdot\frac{1}{2\sqrt{x(a+x)}}=\frac{x}{\sqrt{x(a+x)}}=\sqrt{\frac{x}{a+x}}$$

(2)　$A=\displaystyle\int\sqrt{x(bx+c)}\,dx$ とすると

$$A=\int(x)'\sqrt{x(bx+c)}\,dx=x\sqrt{x(bx+c)}-\int x\cdot\frac{2bx+c}{2\sqrt{x(bx+c)}}dx$$
$$=x\sqrt{x(bx+c)}-\int\frac{2x(bx+c)-cx}{2\sqrt{x(bx+c)}}dx$$
$$=x\sqrt{x(bx+c)}-\int\sqrt{x(bx+c)}\,dx+\frac{c}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x(bx+c)}}dx$$
$$=x\sqrt{x(bx+c)}-A+\frac{c}{2}\int\sqrt{\frac{x}{bx+c}}\,dx$$

よって　　$2A=x\sqrt{x(bx+c)}+\dfrac{c}{2}\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{bx+c}}\,dx$

ゆえに　　$\displaystyle\int\sqrt{x(bx+c)}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x(bx+c)}+\frac{c}{4}\int\sqrt{\frac{x}{bx+c}}\,dx$

(3)　(2) において，$b=2$，$c=1$ とすると

$$\int\sqrt{x(2x+1)}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x(2x+1)}+\frac{1}{4}\int\sqrt{\frac{x}{2x+1}}\,dx\quad\cdots\cdots①$$

$\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{2x+1}}\,dx$ において，$2x=t$ とおくと　　$2dx=dt$

よって　　$\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{2x+1}}\,dx=\int\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t+1}}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\sqrt{\frac{t}{1+t}}\,dt\quad\cdots\cdots②$

(1) より，$\sqrt{\dfrac{t}{1+t}}=\{\sqrt{t(1+t)}-\log(\sqrt{t}+\sqrt{t+1})\}'$ であるから

$$\int\sqrt{\frac{t}{1+t}}\,dt=\sqrt{t(1+t)}-\log(\sqrt{t}+\sqrt{t+1})+C_1$$

$=\sqrt{2x(1+2x)}-\log(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+1})+C_1$　(C_1 は積分定数)

したがって，①，②から

$$\int\sqrt{x(2x+1)}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x(2x+1)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\{\sqrt{2x(1+2x)}-\log(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+1})+C'\}$$

$$=\frac{4x+1}{8}\sqrt{x(2x+1)}-\frac{\sqrt{2}}{16}\log(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+1})+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

1

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$　(2) $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

(3) $-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

(2) $\int\sin^2 2x\,dx=\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

(3) $\int\sin^3 x\,dx=\int\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}dx=\frac{1}{4}\int(3\sin x-\sin 3x)dx$

$$=\frac{1}{4}\left(-3\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x+C$$

別解　$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

よって　$\int\sin^3 x\,dx=\int\sin^2 x\sin x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$$=\int(1-t^2)\cdot(-1)dt=\int(t^2-1)dt$$

$$=\frac{1}{3}t^3-t+C=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

$$=\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x+C$$

2

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x+C$　(2) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

(3) $\frac{5}{16}x-\frac{15}{64}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{192}\sin 6x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\int\sin^4 x\,dx=\int(\sin^2 x)^2dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\int(\cos 4x-4\cos 2x+3)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x-2\sin 2x+3x\right)+C=\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x+C$$

(2) $\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$ であるから

$$\int\cos^5 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx=\int(1-t^2)^2dt$$

$$=\int(1-2t^2+t^4)dt=t-\frac{2}{3}t^3+\frac{t^5}{5}+C$$

$$=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

(3) $\sin^6 x=(\sin^3 x)^2=\left\{\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\right\}^2$

$$=\frac{1}{16}(9\sin^2 x-6\sin x\sin 3x+\sin^2 3x)$$

$$=\frac{9}{32}(1-\cos 2x)+\frac{3}{16}(\cos 4x-\cos 2x)+\frac{1}{32}(1-\cos 6x)$$

よって　$\int\sin^6 x\,dx=\frac{1}{32}\int(10-15\cos 2x+6\cos 4x-\cos 6x)dx$

$$=\frac{5}{16}x-\frac{15}{64}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{192}\sin 6x+C$$

3

解答　C は積分定数とする。

(1) $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$　(2) $-\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\int\sin 5x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$

$$=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

(2) $\int\sin 4x\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\int(\cos 6x-\cos 2x)dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

$$=-\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

4

解答　C は積分定数とする。

(1) $\log\frac{|\sin x|}{\sin x+1}+C$　(2) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

(3) $-\log|\cos x|+\frac{\cos^2 x}{2}+C$

解説

C，C' は積分定数とする。

(1) $\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

$$\int\frac{\cos x}{\sin x(\sin x+1)}dx=\int\frac{1}{t(t+1)}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\log\left|\frac{t}{t+1}\right|+C$$

$$=\log\left|\frac{\sin x}{\sin x+1}\right|+C=\log\frac{|\sin x|}{\sin x+1}+C$$

(2) $\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

よって

$$\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx=\int t^2(1-t^2)dt=\int(t^2-t^4)dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

(3) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{(\cos^2 x-1)(\cos x)'}{\cos x}dx$

$$=\int\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)(\cos x)'dx=\frac{\cos^2 x}{2}-\log|\cos x|+C$$

5

解答　C は積分定数とする。

(1) $\tan x+\dfrac{1}{\cos x}+C$　　(2) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$

(3) $\log|\cos x|+\dfrac{1}{2\cos^2 x}+C$

解説

C，C' は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{1-\sin x}dx=\int\frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

$$=\int\left\{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}\right\}dx=\tan x+\frac{1}{\cos x}+C$$

別解　$\dfrac{1}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$\cos x=u$ とおくと　$-\sin x\,dx=du$

$$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)dx=-\int\frac{1}{u^2}du$$

$$=\frac{1}{u}+C_1\quad(C_1\text{ は積分定数})$$

$$=\frac{1}{\cos x}+C_1$$

よって　$\displaystyle\int\frac{dx}{1-\sin x}=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx=\tan x+\frac{1}{\cos x}+C$

(2) $\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=-\int\frac{dt}{1-t^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=-\frac{1}{2}(\log|1+t|-\log|1-t|)+C$$

$$=-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$$

(3) $\displaystyle\int\tan^3 x\,dx=\int\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$$=\int\tan x(\tan x)'dx+\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x+\log|\cos x|+C$$

6

解答　$-\dfrac{\sin^3 x\cos x}{4}-\dfrac{3\sin x\cos x}{8}+\dfrac{3}{8}x+C$ (C は積分定数)，証明は略

解説

$n\geqq 2$ のとき

$$I_n=\int\sin^n x\,dx=\int\sin^{n-1}x\sin x\,dx=\int\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int(\sin^{n-2}x-\sin^n x)dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\sin^n x\,dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

よって　$I_n+(n-1)I_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}$

すなわち　$nI_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}$

両辺を $n\,(\neq 0)$ で割って　$I_n=-\dfrac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$　$(n\geqq 2)$

$$I_4=\int\sin^4 x\,dx=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\int\sin^2 x\,dx=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}I_2$$

$$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{1}{2}\int dx\right)$$

$$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3\sin x\cos x}{8}+\frac{3}{8}x+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

1

解答　C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$　　(2) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{12}\sin 6x+C$　　(3) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}\sin 8x+C$

(4) $\dfrac{1}{12}\sin 3x+\dfrac{3}{4}\sin x+C$ $\left(=\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C\right)$

解説

C，C_1 を積分定数とする。

(1) $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ であるから

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

(2) $\displaystyle\int\cos^2 3x\,dx=\int\frac{1+\cos 6x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 6x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+C$$

(3) $\displaystyle\int\sin^2 4x\,dx=\int\frac{1-\cos 8x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 8x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$$

(4) $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ であるから

$$\int\cos^3 x\,dx=\frac{1}{4}\int(\cos 3x+3\cos x)dx=\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x+C$$

別解　$\sin x=u$ とおくと

$$\int\cos^3 x\,dx=\int\cos^2 x\cdot\cos x\,dx=\int(1-\sin^2 x)(\sin x)'dx=\int(1-u^2)du$$

$$=u-\frac{u^3}{3}+C=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

2

解答　C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{32}\sin 4x+C$　　(2) $\dfrac{3}{2}x+2\sin x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

(3) $-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

(4) $\dfrac{5}{16}x+\dfrac{15}{64}\sin 2x+\dfrac{3}{64}\sin 4x+\dfrac{1}{192}\sin 6x+C$

解説

C，C_1 を積分定数とする。

(1) $\cos^4 x=(\cos^2 x)^2=\left\{\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\right\}^2=\dfrac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$

$$=\frac{1}{4}\left\{1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right\}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

よって　$\displaystyle\int\cos^4 x\,dx=\int\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

(2) $4\cos^4\dfrac{x}{2}=\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}\right)^2=(1+\cos x)^2=1+2\cos x+\cos^2 x$

$$=1+2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{3}{2}+2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

よって　$\int 4\cos^4\frac{x}{2}\,dx=\int\left(\frac{3}{2}+2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$

$$=\frac{3}{2}x+2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

(3)　$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\,dx=dt$ であるから

$$\int\sin^5 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx=\int(1-t^2)^2(-1)dt$$

$$=-\int(t^4-2t^2+1)dt=-\frac{t^5}{5}+\frac{2}{3}t^3-t+C$$

$$=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

(4)　$\cos^6 x=(\cos^3 x)^2=\left\{\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\right\}^2$

$$=\frac{1}{16}(9\cos^2 x+6\cos x\cos 3x+\cos^2 3x)$$

$=\frac{9}{32}(1+\cos 2x)+\frac{3}{16}(\cos 4x+\cos 2x)+\frac{1}{32}(1+\cos 6x)$　であるから

$$\int\cos^6 x\,dx=\frac{1}{32}\int(10+15\cos 2x+6\cos 4x+\cos 6x)dx$$

$$=\frac{5}{16}x+\frac{15}{64}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{192}\sin 6x+C$$

3

解答　C は積分定数とする。

(1)　$-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$　　(2)　$-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

(3)　$\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$　　(4)　$-\frac{\sin 6x}{12}+\frac{\sin 2x}{4}+C$

(5)　$-\frac{1}{20}\cos 10x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$\sin x\cos 4x=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin 3x)$ であるから

$$\int\sin x\cos 4x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin 3x)dx=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$$

$$=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

(2)　$\int\cos 3x\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

(3)　$\cos 4x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)$ であるから

$$\int\cos 4x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 6x+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

$$=\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

(4)　$\int\sin 2x\sin 4x\,dx=-\frac{1}{2}\int(\cos 6x-\cos 2x)dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6}-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$

$$=-\frac{\sin 6x}{12}+\frac{\sin 2x}{4}+C$$

(5)　$\int\sin 5x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int\sin 10x\,dx=-\frac{1}{20}\cos 10x+C$

4

解答　C は積分定数とする。

(1)　$\log\frac{\cos x+1}{|\cos x|}+C$　　(2)　$2\log(2+\cos x)-\cos x+C$

(3)　$\frac{1}{2}\cos^2 x-\log|\cos x|+C$　　(4)　$\log\frac{1-\cos x}{|\cos x|}+C$

(5)　$2\sin x-2\log(1+\sin x)+C$

解説

(1)　$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

$$\int\frac{\sin x}{\cos x(\cos x+1)}dx=-\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t}\right)dt=\log|t+1|-\log|t|+C$$

$$=\log\left|\frac{t+1}{t}\right|+C=\log\frac{\cos x+1}{|\cos x|}+C$$

注意　$-1\leqq\cos x\leqq 1$ であるから　$\cos x+1\geqq 0$

また，(分母)$\neq 0$ であるから　$\cos x+1\neq 0$

よって　$\cos x+1>0$

(2)　$\cos x=u$ とおくと　$-\sin x\,dx=du$

$$\int\frac{\cos x\sin x}{2+\cos x}dx=\int\frac{-\cos x\cdot(-\sin x)}{2+\cos x}dx=\int\frac{-u}{2+u}du$$

$$=\int\left(\frac{2}{2+u}-1\right)du=2\log|2+u|-u+C$$

$$=2\log(2+\cos x)-\cos x+C$$

(3)　$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

$$\int\sin^2 x\tan x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int(1-t^2)\cdot\frac{-1}{t}dt$$

$$=\int\left(t-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\log|t|+C$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\log|\cos x|+C$$

別解　$\tan x=t$ とおくと　$dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$$\int\sin^2 x\tan x\,dx=\int\frac{t^2}{1+t^2}\cdot t\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t^3}{(t^2+1)^2}dt$$

$$=\int\frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{2t}{2}dt=\frac{1}{2}\int\left\{\frac{2t}{t^2+1}-\frac{2t}{(t^2+1)^2}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\log(t^2+1)+\frac{1}{t^2+1}\right\}+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{\cos^2 x}+\cos^2 x\right)+C$$

$$=-\log|\cos x|+\frac{1}{2}\cos^2 x+C$$

(4)　$\cos x=u$ とおくと　$-\sin x\,dx=du$

よって　$\int\frac{\tan x}{1-\cos x}dx=\int\frac{\sin x}{(1-\cos x)\cos x}dx$

$$=-\int\frac{du}{(1-u)u}=-\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{u}\right)du$$

$$=\log|1-u|-\log|u|+C=\log\frac{|1-u|}{|u|}+C$$

$$=\log\frac{1-\cos x}{|\cos x|}+C$$

(5)　$\int\frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin x}dx$

$1+\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

よって　$\int\frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx=2\int\frac{t-1}{t}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2(t-\log|t|)+C'$

$$=2\sin x-2\log(1+\sin x)+C$$

5

解答　C は積分定数とする。

(1)　$-\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\sin x}+C$　　(2)　$\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$

(3)　$\frac{1}{4}\left(\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right)+C$　　(4)　$\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$

(5)　$\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$

解説

(1)　$\int\frac{dx}{1-\cos x}=\int\frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}dx=\int\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}dx$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\sin x}+C$$

$$\left(=-\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}+C=-\frac{1+\cos x}{\sin x}+C\right.$$

$$\left.=-\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}+C=-\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+C=-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}+C\right)$$

別解　$\int\frac{dx}{1-\cos x}=\int\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

$t=\frac{x}{2}$ とおくと　$\frac{1}{2}dx=dt$

よって　$\int\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\int\frac{2}{2\sin^2 t}dt=\int\frac{1}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{\tan t}+C=-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}+C$

(2)　$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

よって　(与式)$=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{1}{2}(\log|t+1|-\log|t-1|)+C$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$$

(3)　$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{(1-\sin^2 x)^2}dx$

$\sin x=t$ とおくと

$$\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{4}\int\left\{\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\log|1+t|-\frac{1}{1+t}-\log|1-t|+\frac{1}{1-t}\right\}+C$$
$$=\frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{2t}{1-t^2}\right)+C$$
$$=\frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right)+C$$
$$=\frac{1}{4}\left(\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right)+C$$

(4) $\dfrac{1}{\cos^4 x}=(\tan^2 x+1)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから

$$\int\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int(\tan^2 x+1)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$
$$=\int\{\tan^2 x(\tan x)'+(\tan x)'\}dx=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$$

(5) $\displaystyle\int\tan^4 x\,dx=\int\tan^2 x\cdot\tan^2 x\,dx=\int\tan^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$$=\int\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx-\int\tan^2 x\,dx=\int\tan^2 x(\tan x)'dx-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$$

6

解答　C は積分定数とする。

証明略，$I_6=\dfrac{1}{6}\sin x\cos^5 x+\dfrac{5}{24}\sin x\cos^3 x+\dfrac{5}{16}\sin x\cos x+\dfrac{5}{16}x+C$

解説

C は積分定数とする。

$$\int\cos^n x\,dx=\int\cos^{n-1}x\cos x\,dx=\int\cos^{n-1}x\,(\sin x)'dx$$
$$=\sin x\cos^{n-1}x-(n-1)\int(-\sin^2 x)\cos^{n-2}x\,dx$$
$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx$$
$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\left(\int\cos^{n-2}x\,dx-\int\cos^n x\,dx\right)$$

よって　$I_n=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)(I_{n-2}-I_n)$

したがって　$I_n=\dfrac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

また　$I_0=\displaystyle\int dx=x+C$

$$I_2=\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{1}{2}I_0=\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}x+C$$
$$I_4=\frac{\sin x\cos^3 x}{4}+\frac{3}{4}I_2=\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x+C$$
$$I_6=\int\cos^6 x\,dx=\frac{\sin x\cos^5 x}{6}+\frac{5}{6}I_4$$
$$=\frac{1}{6}\sin x\cos^5 x+\frac{5}{24}\sin x\cos^3 x+\frac{5}{16}\sin x\cos x+\frac{5}{16}x+C$$

1

解答　C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{3}{2}x-\cos 2x-\dfrac{1}{8}\sin 4x+C$　(2) $\dfrac{1}{16}\sin 8x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $(\sin x+\cos x)^4=(1+2\sin x\cos x)^2=(1+\sin 2x)^2=1+2\sin 2x+\sin^2 2x$

$$=1+2\sin 2x+\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{2}+2\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 4x$$

よって　$\displaystyle\int(\sin x+\cos x)^4dx=\int\left(\frac{3}{2}+2\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$

$$=\frac{3}{2}x-\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$$

(2) $\cos 3x\cos 5x=\dfrac{1}{2}(\cos 8x+\cos 2x)$ であるから

$$\int\cos 3x\cos 5x\,dx=\int\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 2x)dx=\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

2

解答　C は積分定数とする。

(1) $-\dfrac{1}{\sin x}+2\log|\sin x|+C$　(2) $\dfrac{1}{2}\cos^2 x-\log|\cos x|+C$

(3) $\dfrac{1}{4}\log\dfrac{2-\cos x}{2+\cos x}+C$

解説

(1) $\dfrac{\cos x+\sin 2x}{\sin^2 x}=\dfrac{\cos x+2\sin x\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{1+2\sin x}{\sin^2 x}\cdot\cos x$

$\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

$$\int\frac{\cos x+\sin 2x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1+2\sin x}{\sin^2 x}\cdot\cos x\,dx$$
$$=\int\frac{1+2t}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}\right)dt=-\frac{1}{t}+2\log|t|+C$$
$$=-\frac{1}{\sin x}+2\log|\sin x|+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(2) $\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

$$\int\sin^2 x\tan x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$=\int(1-t^2)\cdot\frac{-1}{t}dt=\int\left(t-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\log|t|+C$$
$$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\log|\cos x|+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

別解　$\tan x=t$ とおくと　$dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$

$$\int\sin^2 x\tan x\,dx=\int\frac{t^2}{1+t^2}\cdot t\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t^3}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{2t}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\log(t^2+1)+\frac{1}{t^2+1}\right\}+C\quad\text{から。}$$

(3) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{\sin x}{2-\cos x}+\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left\{\frac{(2-\cos x)'}{2-\cos x}-\frac{(2+\cos x)'}{2+\cos x}\right\}dx=\frac{1}{4}\log\left|\frac{2-\cos x}{2+\cos x}\right|+C$$

$$=\frac{1}{4}\log\frac{2-\cos x}{2+\cos x}+C$$

$\boxed{3}$

解答　$\dfrac{1}{\sin x-1}+C$　(C は積分定数)

解説

$$\int\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin x-2}dx=\int\frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)+2\sin x-2}dx$$

$$=\int\frac{\cos x}{-\sin^2 x+2\sin x-1}dx=-\int\frac{\cos x}{(\sin x-1)^2}dx$$

$\sin x-1=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

したがって　$\displaystyle\int\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin x-2}dx=-\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{t}+C$

$$=\frac{1}{\sin x-1}+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

$\boxed{4}$

解答　$\dfrac{1}{10}e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x-5)+C$　(C は積分定数)

解説

$$e^{-x}\sin^2 x=e^{-x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x$$

ここで　$\displaystyle\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C_1$　(C_1 は積分定数)　……①

また　$\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x\,dx=-e^{-x}\cos 2x-\int 2e^{-x}\sin 2x\,dx$

$$=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-\int 4e^{-x}\cos 2x\,dx$$

$$=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4\int e^{-x}\cos 2x\,dx$$

よって　$\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x\,dx=\frac{1}{5}(-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x)+C_2$　(C_2 は積分定数)　……②

①，②より　$\displaystyle\int e^{-x}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\cdot(-e^{-x})-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x)+C$

$$=\frac{1}{10}e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x-5)+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

$\boxed{5}$

解答　C は積分定数とする。

(1)　$\dfrac{1}{6}\log\left|\dfrac{1-\cos 3x}{1+\cos 3x}\right|+C$　　(2)　$-\dfrac{1}{\tan x}-\dfrac{1}{\sin x}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin 3x}=\int\frac{\sin 3x}{\sin^2 3x}dx=\int\frac{\sin 3x}{1-\cos^2 3x}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{(\cos 3x)'}{1-\cos^2 3x}dx$

$$=-\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{1+\cos 3x}+\frac{1}{1-\cos 3x}\right)(\cos 3x)'dx$$

$$=-\frac{1}{6}(\log|1+\cos 3x|-\log|1-\cos 3x|)+C$$

$$=\frac{1}{6}\log\left|\frac{1-\cos 3x}{1+\cos 3x}\right|+C$$

(2)　[1]　$\displaystyle\int\frac{dx}{1-\cos x}=\int\frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}dx=\int\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}dx$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\sin x}+C$$

$$\left(=-\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}+C=-\frac{1+\cos x}{\sin x}+C\right.$$

$$\left.=-\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}+C=-\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+C=-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}+C\right)$$

[2]　$\displaystyle\int\frac{dx}{1-\cos x}=\int\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

$t=\dfrac{x}{2}$ とおくと　$\dfrac{1}{2}dx=dt$

よって　$\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\int\frac{2}{2\sin^2 t}dt=\int\frac{1}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{\tan t}+C=-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}+C$

$\boxed{6}$

解答　(ア)　2　　(イ)　2　　(ウ)　4　　(エ)　2

解説

$t=\cos x$ とすると $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$ から $I=\displaystyle\int\cos x\sin(2\cos x)\sin x\,dx$ とおくと

$I=-\displaystyle\int t\sin 2t\,dt$ となる.

ここで $\displaystyle\int t\sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt=-\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t+C$ から

ゆえに　$I=\dfrac{1}{2}\cos x\cos(2\cos x)-\dfrac{1}{4}\sin(2\cos x)+C$ (C は積分定数)

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　　(2)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$

(3)　$\log\left|\dfrac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-2}\right|+C$　(C は積分定数)

解説

(1)　$\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\tan\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}=2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}$

$$=2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

別解　$\sin x=\dfrac{\sin x}{1}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right)}=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$$=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right)}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\frac{dt}{dx}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=2\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2}{1+t^2}$

(3)　(1) から　　$3\sin x+4\cos x=3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+4\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=-2\cdot\dfrac{2t^2-3t-2}{1+t^2}$

よって，(2) より　$\displaystyle\int\frac{5}{3\sin x+4\cos x}dx$

$$=-\frac{5}{2}\int\frac{1+t^2}{2t^2-3t-2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=-5\int\frac{dt}{2t^2-3t-2}$$

$$=-5\int\frac{dt}{(t-2)(2t+1)}=-5\cdot\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{2}{2t+1}\right)dt$$

$$=-\left(\log|t-2|-2\cdot\frac{1}{2}\log|2t+1|\right)+C=\log\left|\frac{2t+1}{t-2}\right|+C$$

$$=\log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-2}\right|+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

$\boxed{2}$

解答　C は積分定数とする。

(1)　$-\log|\cos x|+C$　　(2)　$\dfrac{\tan^{n-1}x}{\sin x}\left(\dfrac{n}{\cos^2 x}-1\right)$

(3) $\dfrac{1}{n-1}\tan^{n-1}x+C$　　(4) 略　　(5) $\dfrac12-\dfrac12\log 2$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\tan x\,dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx=-\log|\cos x|+C$

(2) $\displaystyle\left(\frac{\tan^n x}{\sin x}\right)'=\frac{n\tan^{n-1}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin x-\tan^n x\cos x}{\sin^2 x}$

$\displaystyle=\frac{\tan^{n-1}x}{\sin^2 x}\left(\frac{n\sin x}{\cos^2 x}-\sin x\right)$

$\displaystyle=\frac{\tan^{n-1}x}{\sin x}\left(\frac{n}{\cos^2 x}-1\right)$

(3) $\displaystyle\int\frac{\tan^{n-2}x}{\cos^2 x}\,dx=\int\tan^{n-2}x(\tan x)'\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x+C$

(4) $\displaystyle\int\tan^n x\,dx=\int\tan^{n-2}x\tan^2 x\,dx$

$\displaystyle=\int\tan^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$\displaystyle=\int\frac{\tan^{n-2}x}{\cos^2 x}\,dx-\int\tan^{n-2}x\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-\int\tan^{n-2}x\,dx$

(5) (1)，(4) から　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx=\left[\frac12\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$\displaystyle=\frac12+\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle=\frac12-\frac12\log 2$

解説

$\boxed{1}$

解答　(1) $\dfrac56$　　(2) $\dfrac12\log\dfrac32$　　(3) $\dfrac{\pi}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\int_1^2\frac{(1-x^2)^2}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{1-2x^2+x^4}{x^2}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-2+x^2\right)dx=\left[-\frac1x-2x+\frac{x^3}{3}\right]_1^2$

$\displaystyle=\left(-\frac12-4+\frac83\right)-\left(-1-2+\frac13\right)=\frac56$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int_{-1}^0\frac{dx}{(x-1)(x-3)}=\int_{-1}^0\frac12\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx$

$\displaystyle=\frac12\Big[\log|x-3|-\log|x-1|\Big]_{-1}^0=\frac12\left[\log\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right]_{-1}^0$

$\displaystyle=\frac12(\log 3-\log 2)=\frac12\log\frac32$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi\cos^2 3x\,dx=\int_0^\pi\frac{1+\cos 6x}{2}dx=\frac12\left[x+\frac{\sin 6x}{6}\right]_0^\pi$

$\displaystyle=\frac12\left\{\left(\pi+\frac{\sin 6\pi}{6}\right)-0\right\}=\frac{\pi}{2}$

$\boxed{2}$

解答　$m\neq n$ のとき 0，$m=n$ のとき $\dfrac{\pi}{2}$

解説

$\displaystyle\cos mx\cos nx=\frac12\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}$

$m\neq n$ のとき　$\displaystyle\int_0^\pi\cos mx\cos nx\,dx=\frac12\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^\pi=0$

$m=n$ のとき　$\displaystyle\int_0^\pi\cos^2 mx\,dx=\frac12\int_0^\pi(1+\cos 2mx)dx=\frac12\left[x+\frac{\sin 2mx}{2m}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$

$\boxed{3}$

解答　(1) $\dfrac{2(2-\sqrt2)}{3}$　　(2) $1+\log\dfrac{2}{e+1}$

解説

(1) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int_1^{\sqrt2}\frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt=2\int_1^{\sqrt2}(t^2-1)dt$

$\displaystyle=2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^{\sqrt2}=\frac{2(2-\sqrt2)}{3}$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow\sqrt2$

(2) $e^x=t$ とおくと　$x=\log t$，$dx=\dfrac1t dt$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}=\int_1^e\frac{1}{t+1}\cdot\frac1t dt=\int_1^e\left(\frac1t-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$\displaystyle=\Big[\log|t|-\log|t+1|\Big]_1^e=\left[\log\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_1^e$

$\displaystyle=\log\frac{e}{e+1}-\log\frac12=1+\log\frac{2}{e+1}$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow e$

$\boxed{4}$

解答　(1) -2　　(2) $2-\dfrac5e$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx=\int_0^\pi x(\sin x)'dx=\Big[x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi(x)'\sin x\,dx$

$\displaystyle=0-\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=\Big[\cos x\Big]_0^\pi=-2$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\int_0^1 x^2(-e^{-x})'dx=\Big[-x^2e^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 2xe^{-x}dx$

$\displaystyle=-\frac1e+2\int_0^1 x(-e^{-x})'dx=-\frac1e+2\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1+2\int_0^1 e^{-x}dx$

$\displaystyle=-\frac1e-\frac2e+2\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=-\frac3e+2\left(-\frac1e+1\right)=2-\frac5e$

$\boxed{5}$

解答　$\dfrac12\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

解説

$\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx$ とおく。

$\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-e^{-x})'\sin x\,dx=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x\,dx$

$\displaystyle=-e^{-\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-e^{-x})'\cos x\,dx$

$\displaystyle=-e^{-\frac{\pi}{2}}+\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx$

$\displaystyle=-e^{-\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx$

$=-e^{-\frac{\pi}{2}}+1-I$

よって　　$2I=1-e^{-\frac{\pi}{2}}$

したがって　　$\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx=\frac12\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

$\boxed{6}$

解答　(1) $\dfrac{4(\sqrt2-1)}{3}$　　(2) 4

解説

(1) $0\leqq x\leqq 1$ のとき　$|1-\sqrt x|=1-\sqrt x$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$|1-\sqrt x|=-(1-\sqrt x)$

よって　$\displaystyle\int_0^2|1-\sqrt x|dx=\int_0^1(1-\sqrt x)dx+\int_1^2\{-(1-\sqrt x)\}dx$

$\displaystyle=\left[x-\frac23x\sqrt x\right]_0^1-\left[x-\frac23x\sqrt x\right]_1^2$

$\displaystyle=\left(1-\frac23\right)-\left\{\left(2-\frac{4\sqrt2}{3}\right)-\left(1-\frac23\right)\right\}=\frac{4(\sqrt2-1)}{3}$

(2) $\displaystyle|\sin x+\sqrt3\cos x|=2\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$ であり

$0\leqq x\leqq\dfrac23\pi$ のとき　$\displaystyle\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$\frac{2}{3}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき　$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right| = -\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

したがって

$$\int_0^\pi |\sin x+\sqrt{3}\cos x|dx = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left\{-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx$$

$$=2\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + 2\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}\right)+2\left(-\frac{1}{2}+1\right)=4$$

7

解答　$2\sqrt{2}$

解説

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\cdot\frac{1-\cos x}{2}}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

$0\leqq x\leqq\pi$ において　$\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\sin\frac{x}{2}$

よって　$\int_0^\pi\sqrt{1-\cos x}\,dx=\int_0^\pi\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}dx$

$$=\left[-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right]_0^\pi$$

$$=-2\sqrt{2}(0-1)=2\sqrt{2}$$

別解　$\int_0^\pi\sqrt{1-\cos x}\,dx=\int_0^\pi\frac{\sqrt{1-\cos^2x}}{\sqrt{1+\cos x}}dx$

$$=\int_0^\pi\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos x}}$$

ここで $\cos x=t$ とおくと

$-\sin x\,dx=dt$

x	0 ⟶	π
t	1 ⟶	-1

よって　与式$=\int_1^{-1}\frac{-dt}{\sqrt{1+t}}=\int_{-1}^1\frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

$$=\left[2\sqrt{1+t}\right]_{-1}^1=2\sqrt{2}$$

8

解答　(1)　0　　(2)　13π

解説

(1)　xe^{x^2} は奇関数であるから　$\int_{-e}^{e} xe^{x^2}dx=0$

(2)　(与式)$=\int_{-\pi}^{\pi}(4\sin^2x+12\sin x\cos x+9\cos^2x)dx$

$\sin^2x$，$\cos^2x$ は偶関数，$\sin x\cos x$ は奇関数であるから

(与式)$=2\int_0^\pi(4\sin^2x+9\cos^2x)dx=2\int_0^\pi\left\{4+\frac{5}{2}(1+\cos2x)\right\}dx$

$$=\int_0^\pi(13+5\cos2x)dx=\left[13x+\frac{5}{2}\sin2x\right]_0^\pi=13\pi$$

1

解答　(1)　$\frac{80}{81}$　　(2)　$\frac{7}{10}$　　(3)　$2\log3-3\log2$　　(4)　$\frac{5}{2}\pi$　　(5)　$\frac{\pi}{4}-1$

(6)　0

解説

(1)　(与式)$=\int_1^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\left[x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}\right]_1^3=3+\frac{2}{3}-\frac{1}{81}-1-2+\frac{1}{3}=\frac{80}{81}$

(2)　(与式)$=\int_0^1(x^2+1+x+2x-2\sqrt{x}-2x\sqrt{x})dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x+\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}+1+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}-\frac{4}{5}=\frac{7}{10}$$

(3)　$\frac{4x-1}{2x^2+5x+2}=\frac{4x-1}{(x+2)(2x+1)}=\frac{3}{x+2}-\frac{2}{2x+1}$ であるから

$$\int_0^1\frac{4x-1}{2x^2+5x+2}dx=\int_0^1\left(\frac{3}{x+2}-\frac{2}{2x+1}\right)dx=\left[3\log(x+2)-2\cdot\frac{1}{2}\log(2x+1)\right]_0^1$$

$$=\left[\log\frac{(x+2)^3}{2x+1}\right]_0^1=\log3^2-\log2^3=2\log3-3\log2$$

(4)　(与式)$=\int_0^\pi(3\sin^2x+4\sin x\cos x+1)dx=\int_0^\pi\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cos2x+2\sin2x\right)dx$

$$=\left[\frac{5}{2}x-\frac{3}{4}\sin2x-\cos2x\right]_0^\pi=\frac{5}{2}\pi$$

(5)　(与式)$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(3-4\sin^2x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos2x)dx=\Big[x+\sin2x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-1$

(6)　$\sin2x\sin3x=-\frac{1}{2}(\cos5x-\cos x)$ であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin2x\sin3x\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos5x-\cos x)dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin5x}{5}-\sin x\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

2

解答　(1)　$m\neq n$ のとき 0，$m=n$ のとき $\frac{\pi}{2}$

(2)　$m+n$ が偶数のとき 0，$m+n$ が奇数のとき $\frac{2m}{m^2-n^2}$

解説

(1)　$\sin mx\sin nx=-\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}$

よって

$m\neq n$ のとき　与式$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}-\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^\pi=0$

$m=n$ のとき　与式$=\int_0^\pi\sin^2mx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi(1-\cos2mx)dx$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2m}\sin2mx\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

(2)　$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\}$

よって

$m\neq n$ のとき　与式$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n}+\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_0^\pi$

更に，$m+n$ が偶数のとき，$m-n$ も偶数であるから

与式$=-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}\right)-\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}\right)\right\}=0$

また，$m+n$ が奇数のとき，$m-n$ も奇数であるから

与式$=-\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m-n}\right)-\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}\right)\right\}$

$$=\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}=\frac{2m}{m^2-n^2}$$

$m=n$ のとき　与式$=\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin2mx\,dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2m}\cos2mx\right]_0^\pi=0$

これは，$m+n$ が偶数のときに含まれる。

3

解答　(1)　$\frac{326}{135}$　　(2)　$\frac{16}{15}(5\sqrt{5}-1)$　　(3)　$\frac{2-\sqrt{2}}{3}$　　(4)　$\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$

(5)　$\log\frac{e+1}{e}$　　(6)　$\log\frac{3(e+1)}{2(e+2)}$

解説

(1)　$3x+4=t$ とおくと　$x=\frac{1}{3}t-\frac{4}{3}$，$dx=\frac{1}{3}dt$

x	-1 ⟶	0
t	1 ⟶	4

$$\int_{-1}^0(x+2)\sqrt{3x+4}\,dx=\int_1^4\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}dt$$

$$=\frac{1}{9}\int_1^4(t\sqrt{t}+2\sqrt{t})dt=\frac{1}{9}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\left(\frac{64}{5}+\frac{32}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{3}\right)\right\}=\frac{326}{135}$$

(2)　$\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

x	0 ⟶	4
t	1 ⟶	$\sqrt{5}$

$$\int_0^4\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx=\int_1^{\sqrt{5}}\frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot2tdt=2\int_1^{\sqrt{5}}(t^4-2t^2+1)dt$$

$$=2\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right]_1^{\sqrt{5}}=2\left\{\left(5\sqrt{5}-\frac{10\sqrt{5}}{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)\right\}$$

$$=\frac{16}{15}(5\sqrt{5}-1)$$

(3)　$\sqrt{1+x^2}=t$ とおくと　$x^2=t^2-1$，$xdx=tdt$

x	0 ⟶	1
t	1 ⟶	$\sqrt{2}$

$$\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}\cdot tdt=\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^{\sqrt{2}}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

(4)　$\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

x	1 ⟶	3
t	$\sqrt{2}$ ⟶	2

$$\int_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{1}{(t^2-1)t}\cdot2tdt=\int_{\sqrt{2}}^2\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\left[\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^2=\log\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$=\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$$

(5)　$e^x=t$ とおくと　　$x=\log t$，$dx=\frac{1}{t}dt$

x	$1\longrightarrow 2$
t	$e\longrightarrow e^2$

$$\int_1^2\frac{dx}{e^x-1}=\int_e^{e^2}\frac{1}{t-1}\cdot\frac{1}{t}dt=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\left[\log\frac{t-1}{t}\right]_e^{e^2}=\log\left(\frac{e^2-1}{e^2}\cdot\frac{e}{e-1}\right)$$

$$=\log\frac{e+1}{e}$$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow e$

(6)　$e^x=t$ とおくと　　$x=\log t$，$dx=\frac{1}{t}dt$

x と t の対応は右のようになるから

$$\int_0^1\frac{1}{e^x+2e^{-x}+3}dx=\int_1^e\frac{1}{t+\frac{2}{t}+3}\cdot\frac{1}{t}dt=\int_1^e\frac{1}{t^2+3t+2}dt$$

$$=\int_1^e\frac{1}{(t+1)(t+2)}dt=\int_1^e\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\Big[\log(t+1)-\log(t+2)\Big]_1^e$$

$$=\log(e+1)-\log(e+2)-(\log 2-\log 3)=\log\frac{3(e+1)}{2(e+2)}$$

$\boxed{4}$

解答　(1) $\frac{\pi}{4}$　　(2) $4\log 2-\frac{15}{16}$　　(3) $\frac{\pi^2}{4}-2$　　(4) $\frac{\pi^3-6\pi}{48}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$

$$=-\frac{1}{2}\left(\Big[x\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}$$

(2) $\displaystyle\int_1^2x^3\log x\,dx=\int_1^2\left(\frac{x^4}{4}\right)'\log x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^4}{4}(\log x)'dx$

$$=4\log 2-\frac{1}{4}\int_1^2x^3dx=4\log 2-\frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2=4\log 2-\frac{15}{16}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(\sin x)'dx=\Big[x^2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\,dx$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(-\cos x)'dx=\frac{\pi^2}{4}-2\left(\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-2$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2x\,dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^3}{24}+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}x^2\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx\right)$$

$$=\frac{\pi^3}{48}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$$

$$=\frac{\pi^3}{48}+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx\right)$$

$$=\frac{\pi^3}{48}+\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi^3-6\pi}{48}$$

$\boxed{5}$

解答　(1) $\frac{e^{\pi}-2}{5}$　　(2) $\frac{1}{10}\left(1-3e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)$

解説

(1) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx$ とおく。

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\cos x\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}e^{2x}(-\sin x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\sin x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}e^{2x}\cos x\,dx\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{\pi}-\frac{1}{4}I$$

よって　$\frac{5}{4}I=\frac{e^{\pi}-2}{4}$　　　ゆえに　$I=\frac{e^{\pi}-2}{5}$

(2) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-3x}\sin x\,dx$ とおく。

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-3x}\sin x\,dx=\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-3x}\cos x\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\pi}-\left[\frac{1}{9}e^{-3x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-3x}\sin x\,dx=\frac{1}{9}\left(1-3e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)-\frac{1}{9}I$$

よって　$\frac{10}{9}I=\frac{1}{9}\left(1-3e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)$　　　ゆえに　$I=\frac{1}{10}\left(1-3e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)$

$\boxed{6}$

解答　(1) 2　　(2) 2　　(3) $\frac{16}{3}$　　(4) $\frac{2(2\sqrt{2}+1)}{3}$　　(5) $e^3+\frac{1}{e^2}-3$

(6) $2\sqrt{2}$

解説

(1) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき　$|\cos x|=\cos x$

$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ のとき　$|\cos x|=-\cos x$

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2$

(2) $\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\pi$　のとき　$|\sin x|=\sin x$

$\pi\leqq x\leqq\frac{5}{4}\pi$ のとき　$|\sin x|=-\sin x$

よって　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin x|dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(-\sin x)dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}+\Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=2$$

(3) $0\leqq x\leqq 4$ のとき　$|\sqrt{x}-2|=-(\sqrt{x}-2)$

$4\leqq x\leqq 9$ のとき　$|\sqrt{x}-2|=\sqrt{x}-2$

よって　$\displaystyle\int_0^9|\sqrt{x}-2|dx=\int_0^4\{-(\sqrt{x}-2)\}dx+\int_4^9(\sqrt{x}-2)dx$

$$=-\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x\right]_0^4+\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x\right]_4^9$$

$$=-\left(\frac{16}{3}-8\right)+\left(\frac{54}{3}-18\right)-\left(\frac{16}{3}-8\right)=\frac{16}{3}$$

(4) $-1\leqq x\leqq 1$ のとき　$|x-1|=-(x-1)$

$1\leqq x\leqq 2$　のとき　$|x-1|=x-1$

よって　$\displaystyle\int_{-1}^2\sqrt{|x-1|}\,dx=\int_{-1}^1\sqrt{-(x-1)}\,dx+\int_1^2\sqrt{x-1}\,dx$

$$=\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^1+\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2(2\sqrt{2}+1)}{3}$$

(5) $-2\leqq x\leqq 0$ のとき　$|1-e^x|=1-e^x$

$0\leqq x\leqq 3$　のとき　$|1-e^x|=-(1-e^x)$

よって　$\displaystyle\int_{-2}^3|1-e^x|dx=\int_{-2}^0(1-e^x)dx+\int_0^3\{-(1-e^x)\}dx$

$$=\Big[x-e^x\Big]_{-2}^0-\Big[x-e^x\Big]_0^3$$

$$=\left\{-1-\left(-2-\frac{1}{e^2}\right)\right\}-\{(3-e^3)-(-1)\}=e^3+\frac{1}{e^2}-3$$

(6) $|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ であり，

$0\leqq x\leqq\frac{3}{4}\pi$ のとき　$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき　$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx+\sqrt{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\left\{-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx$

$$=\sqrt{2}\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}+\sqrt{2}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}$$

$$=\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=2\sqrt{2}$$

$\boxed{7}$

解答　$2\sqrt{2}$

解説

$$\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cdot\frac{1+\cos x}{2}}=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$=\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

$0\leqq x\leqq\pi$ において　$\left|\cos\frac{x}{2}\right|=\cos\frac{x}{2}$

よって　$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx$
$$=\left[2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$=2\sqrt{2}(1-0)=2\sqrt{2}$$

別解　$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{1-\cos x}}dx$
$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-\cos x}}$$

ここで $\cos x=t$ とおくと
$-\sin x\,dx=dt$

x	0 $\longrightarrow$	π
t	1 $\longrightarrow$	-1

よって　与式$=\int_1^{-1}\frac{-dt}{\sqrt{1-t}}=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t}}$
$$=\left[-2\sqrt{1-t}\right]_{-1}^{1}=2\sqrt{2}$$

8

解答　(1)　0　　(2)　0　　(3)　$\frac{28}{3}$　　(4)　$\frac{4}{3}$

解説

(1)　$x^3e^{x^2}$ は奇関数であるから　$\int_{-e}^{e}x^3e^{x^2}dx=0$

(2)　$f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}$ とすると

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{\sqrt{a^2+(-x)^2}}=-\frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}=-f(x)$$

よって，$f(x)$ は奇関数であるから　$\int_{-a}^{a}\frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=0$

(3)　$(2\sin x+\cos x)^3=8\sin^3x+12\sin^2x\cos x+6\sin x\cos^2x+\cos^3x$

$\sin x$ は奇関数，$\cos x$ は偶関数であるから，$\sin^3x$ は奇関数，$\sin^2x\cos x$ は偶関数，$\sin x\cos^2x$ は奇関数，$\cos^3x$ は偶関数である。

したがって　(与式)$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(12\sin^2x\cos x+\cos^3x)dx$

ここで　$12\sin^2x\cos x+\cos^3x=(12\sin^2x+\cos^2x)\cos x$
$$=(12\sin^2x+1-\sin^2x)\cos x$$
$$=(11\sin^2x+1)\cos x$$

よって　(与式)$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(11\sin^2x+1)(\sin x)'dx=2\left[\frac{11}{3}\sin^3x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{28}{3}$

(4)　$f(x)=\cos^3x$ とすると
$$f(-x)=\cos^3(-x)=\cos^3x=f(x)$$
よって，$f(x)$ は偶関数である。

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3x\,dx$ とすると

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2x)\cos x\,dx$$

$\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$0\longrightarrow1$

ゆえに　$I=2\int_0^1(1-t^2)dt=2\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$

1

解答　$-\frac{8192}{5}$

解説

(1)　$(x-3)(x+5)^3=\{(x+5)-8\}(x+5)^3=(x+5)^4-8(x+5)^3$ であるから

$$\int_{-5}^{3}(x-3)(x+5)^3dx=\int_{-5}^{3}\{(x+5)^4-8(x+5)^3\}dx$$
$$=\left[\frac{(x+5)^5}{5}-2(x+5)^4\right]_{-5}^{3}$$
$$=\left(\frac{8}{5}-2\right)\cdot8^4=-\frac{2\cdot8^4}{5}=-\frac{8192}{5}$$

(2)　$x+5=t$ とおくと　$x=t-5$，$dx=dt$

x	$-5\longrightarrow3$
t	$0\longrightarrow8$

よって　$\int_{-5}^{3}(x-3)(x+5)^3dx=\int_0^8(t-8)t^3dt=\int_0^8(t^4-8t^3)dt$
$$=\left[\frac{t^5}{5}-2t^4\right]_0^8=\left(\frac{8}{5}-2\right)\cdot8^4=-\frac{8192}{5}$$

(3)　$\int_{-5}^{3}(x-3)(x+5)^3dx=\int_{-5}^{3}(x-3)\left\{\frac{(x+5)^4}{4}\right\}'dx$
$$=\left[(x-3)\cdot\frac{(x+5)^4}{4}\right]_{-5}^{3}-\int_{-5}^{3}\frac{(x+5)^4}{4}dx$$
$$=0-\frac{1}{4}\left[\frac{(x+5)^5}{5}\right]_{-5}^{3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{8^5}{5}=-\frac{2\cdot8^4}{5}=-\frac{8192}{5}$$

2

解答　(1)　$\frac{1}{20}(\sqrt{2x+1})^5-\frac{1}{4}\sqrt{2x+1}+C$　　(2)　$2\sqrt{x^2+x}+C$

解説

(1)　$\sqrt{2x+1}=t$ とおくと　$2x+1=t^2$　　よって　$x=\frac{t^2-1}{2}$

ゆえに　$dx=tdt$

よって　$\int\frac{x^2+x}{\sqrt{2x+1}}dx=\int\left\{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2+\frac{t^2-1}{2}\right\}\cdot\frac{1}{t}\cdot tdt$
$$=\int\frac{t^4-1}{4}dt=\frac{1}{4}\left(\frac{t^5}{5}-t\right)+C$$
$$=\frac{1}{20}(\sqrt{2x+1})^5-\frac{1}{4}\sqrt{2x+1}+C$$

(2)　$\sqrt{x^2+x}=t$ とおくと　$x^2+x=t^2$

両辺を x で微分すると　$2x+1=2t\frac{dt}{dx}$

よって　$(2x+1)dx=2tdt$

ゆえに　$\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx=\int\frac{1}{t}\cdot2tdt=\int2dt=2t+C=2\sqrt{x^2+x}+C$

3

解答　(1)　$\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}$　　(2)　4π　　(3)　$\frac{\pi}{8}$　　(4)　$\frac{1}{4}(e^2-7)$　　(5)　$2\log(\sqrt{2}+1)$

解説

(1)　$\int_0^1x\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx=\int_0^1x\left(x-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)'dx$

$$=\left[x\left(x-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(x-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$=1-\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right]_0^1$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき $x\geqq\sin x$ であるから，$(x-\sin x)\cos x$ の正・負は $\cos x$ の正・負と一致する。

よって　$\displaystyle\int_0^{2\pi}|(x-\sin x)\cos x|dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\left(x\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left(x\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$=\left[x\sin x+\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[x\sin x+\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$+\left[x\sin x+\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$=2\left\{\frac{\pi}{2}\cdot 1+0+\frac{1}{4}\cdot(-1)\right\}-2\left\{\frac{3}{2}\pi\cdot(-1)+0+\frac{1}{4}\cdot(-1)\right\}=4\pi$$

(3)　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin^2 x-\frac{1}{2}=0$ を解くと　$x=\frac{\pi}{4}$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき　　$\sin^2 x-\frac{1}{2}\leqq 0$,

$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき　$\sin^2 x-\frac{1}{2}\geqq 0$

よって　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left|\sin^2 x-\frac{1}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\left(\frac{1}{2}-\sin^2 x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}x\left(\sin^2 x-\frac{1}{2}\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2}\cos 2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}\cos 2x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\pi}{8}$$

(4)　$\displaystyle\int_0^1 x^2(x-1)^2e^{2x}dx=\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)e^{2x}dx=\int_0^1 x^4e^{2x}dx-2\int_0^1 x^3e^{2x}dx+\int_0^1 x^2e^{2x}dx$

ここで　　$\displaystyle\int_0^1 x^2e^{2x}dx=\left[x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2-\int_0^1 xe^{2x}dx$

$$=\frac{1}{2}e^2-\left(\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{4}(e^2-1)$$

$$2\int_0^1 x^3e^{2x}dx=2\left[x^3\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-2\int_0^1 3x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx=e^2-3\int_0^1 x^2e^{2x}dx$$

$$=e^2-3\cdot\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{1}{4}(e^2+3)$$

$$\int_0^1 x^4e^{2x}dx=\left[x^4\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 4x^3\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2-2\int_0^1 x^3e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2+3)=\frac{1}{4}(e^2-3)$$

よって　　$\displaystyle\int_0^1 x^2(x-1)^2e^{2x}dx=\frac{1}{4}(e^2-3)-\frac{1}{4}(e^2+3)+\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{1}{4}(e^2-7)$

(5)　$\displaystyle I_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{dx}{\sin x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x}$

x	$\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{3}{4}\pi$
t	$\frac{1}{\sqrt{2}}\longrightarrow-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

$$I_1=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{-dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\log|1-t|+\log|1+t|\Big]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|-\log\left|\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2=\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\log(\sqrt{2}+1)^2=2\log(\sqrt{2}+1)$$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$e^2+4\log 2-7$　　(2)　$\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{3}{16}\right)$　　(3)　$\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

(4)　$2\log 3-\frac{1}{2}\log 5$

解説

(1)　$e^x-2=0$ となる x の値は，$e^x=2$ から　　$x=\log 2$

よって　　$\displaystyle\int_0^2|e^x-2|dx=\int_0^{\log 2}\{-(e^x-2)\}dx+\int_{\log 2}^2(e^x-2)dx$

$$=-\Big[e^x-2x\Big]_0^{\log 2}+\Big[e^x-2x\Big]_{\log 2}^2$$

$$=-\{(2-2\log 2)-1\}+\{(e^2-4)-(2-2\log 2)\}$$

$$=e^2+4\log 2-7$$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin^2(2x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\cos 4x\,dx\right)$

ここで　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{18}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\cos 4x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right)'dx=\left[\frac{1}{4}x\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 4x\,dx$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{1}{16}\Big[\cos 4x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi-\frac{3}{32}$$

よって　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin^2(2x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{18}+\frac{\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{3}{32}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{3}{16}\right)$

(3)　$\sqrt{1+\log x}=t$ とおくと　　$1+\log x=t^2$

x	$1\longrightarrow e$
t	$1\longrightarrow\sqrt{2}$

よって　　$\frac{1}{x}dx=2tdt$

ゆえに　　$\displaystyle\int_1^e\frac{\sqrt{1+\log x}}{x}dx=\int_1^{\sqrt{2}}t\cdot 2tdt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

(4)　$\displaystyle\frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2}=\frac{(2x^3-2x)+(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2-1)}=\frac{2x(x^2-1)+(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2-1)}$

$$=\frac{2x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2-1}$$

よって　　$\displaystyle(与式)=\int_2^4\frac{2x}{x^2+2}dx+\int_2^4\frac{1}{x^2-1}dx$

ここで　　$\displaystyle\int_2^4\frac{2x}{x^2+2}=\int_2^4\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}dx=\Big[\log(x^2+2)\Big]_2^4$

$$=\log 18-\log 6=\log\frac{18}{6}=\log 3$$

$$\int_2^4\frac{1}{x^2-1}dx=\int_2^4\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\Big[\log(x-1)-\log(x+1)\Big]_2^4$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{x-1}{x+1}\right]_2^4=\frac{1}{2}\left(\log\frac{3}{5}-\log\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\log 3-\log 5+\log 3)=\log 3-\frac{1}{2}\log 5$$

したがって　　$\displaystyle(与式)=\log 3+\left(\log 3-\frac{1}{2}\log 5\right)=2\log 3-\frac{1}{2}\log 5$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\frac{\pi}{4}-1$　　(2)　$\frac{4}{3}(1-\sqrt{2})$

解説

(1)　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(3-4\sin^2 x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2x)dx$

$$=\Big[x+\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-1$$

(2)　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos x\cos 2x\,dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2(\cos 3x+\cos x)dx=2\left[\frac{1}{3}\sin 3x+\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}(1-\sqrt{2})$$

$\boxed{6}$

解答　$a=-\frac{24}{\pi^2}$，$b=\frac{12}{\pi^2}$ のとき最小値 $-\frac{48}{\pi^4}+\frac{1}{2}$

解説

$$\{\cos\pi x-(ax+b)\}^2=\cos^2\pi x+(ax+b)^2-2(ax+b)\cos\pi x$$
$$=\frac{1}{2}\cos 2\pi x+a^2x^2+2abx+b^2+\frac{1}{2}-2(ax+b)\cos\pi x$$

ここで　$\int_0^1\cos 2\pi x\,dx=\left[\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1=0$,

$$\int_0^1\left(a^2x^2+2abx+b^2+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{a^2}{3}x^3+abx^2+\left(b^2+\frac{1}{2}\right)x\right]_0^1$$
$$=\frac{a^2}{3}+ab+b^2+\frac{1}{2},$$
$$\int_0^1(ax+b)\cos\pi x\,dx=\left[(ax+b)\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1-\int_0^1\frac{a}{\pi}\sin\pi x\,dx$$
$$=-\frac{a}{\pi}\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1=-\frac{2a}{\pi^2}$$

ゆえに　$\int_0^1\{\cos\pi x-(ax+b)\}^2dx=b^2+ab+\frac{a^2}{3}+\frac{4a}{\pi^2}+\frac{1}{2}$

$$=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\left(a^2+\frac{48}{\pi^2}a\right)+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{12}\left(a+\frac{24}{\pi^2}\right)^2+\left(b+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{48}{\pi^4}+\frac{1}{2}$$

よって，$a=-\frac{24}{\pi^2}$，$b=\frac{12}{\pi^2}$ のとき最小値 $-\frac{48}{\pi^4}+\frac{1}{2}$ をとる。

7

解答　n が奇数のとき $a_n=0$，n が偶数のとき $a_n=-\frac{4}{n^2-1}$

解説

$0\leqq t\leqq\pi$ のとき　$|\sin t|=\sin t$

$\pi\leqq t\leqq 2\pi$ のとき　$|\sin t|=-\sin t$

よって　$a_n=\int_0^\pi\sin t\cos nt\,dt-\int_\pi^{2\pi}\sin t\cos nt\,dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi\{\sin(n+1)t+\sin(1-n)t\}dt-\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}\{\sin(n+1)t+\sin(1-n)t\}dt$$

[1]　$n=1$ のとき

$$a_1=\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin 2t\,dt-\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}\sin 2t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^\pi-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_\pi^{2\pi}=0$$

[2]　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+1)t}{n+1}+\frac{\cos(1-n)t}{1-n}\right]_0^\pi+\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+1)t}{n+1}+\frac{\cos(1-n)t}{1-n}\right]_\pi^{2\pi}$$
$$=-\left\{\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(1-n)\pi}{1-n}\right\}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1-n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1-n}\right)$$
$$=\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}$$

n が偶数のとき　$\cos(n+1)\pi=\cos(1-n)\pi=-1$

よって　$a_n=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{1-n}=-\frac{4}{n^2-1}$

n が奇数のとき　$\cos(n+1)\pi=\cos(1-n)\pi=1$

よって　$a_n=0$

したがって，n が奇数のとき　$a_n=0$

n が偶数のとき　$a_n=-\frac{4}{n^2-1}$

1

解答　(1)　$-\frac{\sqrt{b}}{2}$　(2)　0　(3)　$\frac{(a+b)nT}{8}$

解説

(1)　$f\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{\sqrt{a}}{2}\sin\pi+\frac{\sqrt{b}}{2}\cos\pi=-\frac{\sqrt{b}}{2}$

(2)　$\int_0^T f(x)dx=\int_0^T\left\{\frac{\sqrt{a}}{2}\sin\left(2\pi\frac{x}{T}\right)+\frac{\sqrt{b}}{2}\cos\left(2\pi\frac{x}{T}\right)\right\}dx$

$$=\left[-\frac{\sqrt{a}\,T}{4\pi}\cos\left(2\pi\frac{x}{T}\right)+\frac{\sqrt{b}\,T}{4\pi}\sin\left(2\pi\frac{x}{T}\right)\right]_0^T=-\frac{\sqrt{a}\,T}{4\pi}+\frac{\sqrt{a}\,T}{4\pi}=0$$

(3)　$\{f(x)\}^2=\frac{a}{4}\sin^2\left(2\pi\frac{x}{T}\right)+\frac{b}{4}\cos^2\left(2\pi\frac{x}{T}\right)+\frac{\sqrt{ab}}{2}\sin\left(2\pi\frac{x}{T}\right)\cos\left(2\pi\frac{x}{T}\right)$

$$=\frac{a}{4}\cdot\frac{1-\cos\left(4\pi\frac{x}{T}\right)}{2}+\frac{b}{4}\cdot\frac{1+\cos\left(4\pi\frac{x}{T}\right)}{2}+\frac{\sqrt{ab}}{4}\sin\left(4\pi\frac{x}{T}\right)$$
$$=\frac{a+b}{8}-\frac{a-b}{8}\cos\left(4\pi\frac{x}{T}\right)+\frac{\sqrt{ab}}{4}\sin\left(4\pi\frac{x}{T}\right)$$

ここで　$\int_0^{nT}\cos\left(4\pi\frac{x}{T}\right)dx=\left[\frac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\frac{x}{T}\right)\right]_0^{nT}=0$

$$\int_0^{nT}\sin\left(4\pi\frac{x}{T}\right)dx=\left[-\frac{T}{4\pi}\cos\left(4\pi\frac{x}{T}\right)\right]_0^{nT}=0$$

よって　$\int_0^{nT}\{f(x)\}^2dx=\frac{(a+b)nT}{8}$

2

解答　(1)　$\frac{\pi}{2}$　(2)　$m=n$ のとき $\frac{\pi}{2}$，$m\neq n$ のとき 0　(3)　$\frac{n}{2}\pi$

解説

(1)　$\int_0^\pi\cos^2x\,dx=\int_0^\pi\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$

(2)　$I=\int_0^\pi\cos mx\cos nx\,dx$ とおくと

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\pi\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}dx$$

$m>0$，$n>0$ であるから

$m=n$ のとき　$I=\frac{1}{2}\int_0^\pi(\cos 2mx+1)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2m}\sin 2mx+x\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$

$m\neq n$ のとき　$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^\pi=0$

(3)　k，l を自然数とする。

(2) から　$\int_0^\pi\cos^2kx\,dx=\int_0^\pi\cos kx\cos kx\,dx=\frac{\pi}{2}$

また，$k\neq l$ のとき，　$\int_0^\pi\cos kx\cos lx\,dx=0$　であるから

$$\int_0^\pi\left(\sum_{k=1}^n\cos kx\right)^2dx=\sum_{k=1}^n\int_0^\pi\cos^2kx\,dx$$
$$=\sum_{k=1}^n\frac{\pi}{2}=\frac{n}{2}\pi$$

3

解答　（ア）0　（イ）$2-\dfrac{\pi^2}{4}$

解説

$I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(p\cos x+q\sin x)(x^2+\alpha x+\beta)dx$ とおく。

$$(p\cos x+q\sin x)(x^2+\alpha x+\beta)$$
$$=px^2\cos x+p\alpha x\cos x+p\beta\cos x+qx^2\sin x+q\alpha x\sin x+q\beta\sin x$$

において，$x^2\cos x$，$x\sin x$，$\cos x$ は偶関数であり，$x^2\sin x$，$x\cos x$，$\sin x$ は奇関数

であるから　$I=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}p\cos x\cdot(x^2+\beta)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}q\alpha x\sin x\,dx$

$$=2p\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+\beta)\cos x\,dx+2q\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(-\cos x)'dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+\beta)\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+\beta)(\sin x)'dx=\Big[(x^2+\beta)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\beta-2$$

よって　$I=2p\left(\dfrac{\pi^2}{4}+\beta-2\right)+2q\alpha$

したがって，どのような実数 p，q に対しても $I=0$ となるのは，$\dfrac{\pi^2}{4}+\beta-2=0$ かつ

$2\alpha=0$ すなわち，$\alpha={}^{ア}0$，$\beta={}^{イ}2-\dfrac{\pi^2}{4}$ のときである。

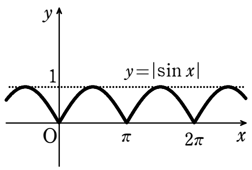
4

解答　$\dfrac{1+e^{\pi}}{2e^{n\pi}}$

解説

n を自然数とすると，$(n-1)\pi\leqq x\leqq n\pi$ のとき

$$|\sin x|=(-1)^{n+1}\sin x$$



よって　$\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}|\sin x|dx$

$$=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}(-1)^{n+1}\sin x\,dx$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}\sin x\,dx$$

ここで　$(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$，

$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

よって　$e^{-x}\sin x=-\dfrac{1}{2}\{(e^{-x}\sin x)'+(e^{-x}\cos x)'\}$

この両辺を積分すると　$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$　（C は積分定数）

よって　$\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}\sin x\,dx=\left[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$

$$=-\frac{e^{-n\pi}}{2}\cdot\cos n\pi+\frac{e^{-(n-1)\pi}}{2}\cdot\cos(n-1)\pi$$

$$=-\frac{e^{-n\pi}}{2}\cdot(-1)^n+\frac{e^{-(n-1)\pi}}{2}\cdot(-1)^{n-1}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{2}e^{-n\pi}(1+e^{\pi})$$

したがって　$\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}|\sin x|dx=(-1)^{n+1}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2}e^{-n\pi}(1+e^{\pi})=\frac{1+e^{\pi}}{2e^{n\pi}}$

1

解答　$\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$

解説

$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\to\sqrt{3}$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{4}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

2

解答　$\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

$$\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}=\int_1^4\frac{dx}{(x-1)^2+3}$$

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$1\to4$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}=\int_1^4\frac{dx}{(x-1)^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

3

解答　$\dfrac{1}{24}\log3+\dfrac{\sqrt{3}}{72}\pi$

解説

$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$ から

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{a}{x+2}+\frac{bx+c}{x^2-2x+4}$$

とおいて，両辺に $(x+2)(x^2-2x+4)$ を掛けると

$$1=a(x^2-2x+4)+(bx+c)(x+2)$$

これを整理して

$$(a+b)x^2+(2b+c-2a)x+4a+2c-1=0$$

これが x の恒等式であるから

$$a+b=0,\ 2b+c-2a=0,\ 4a+2c-1=0$$

これを解いて　$a=\dfrac{1}{12}$，$b=-\dfrac{1}{12}$，$c=\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\displaystyle\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{x-4}{x^2-2x+4}$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+4}+\frac{3}{x^2-2x+4}\right)$$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^3+8}dx=\frac{1}{12}\int_0^1\frac{1}{x+2}dx-\frac{1}{24}\int_0^1\frac{(x^2-2x+4)'}{x^2-2x+4}dx$

$$+\frac{1}{12}\int_0^1\frac{3}{x^2-2x+4}dx\ \cdots\cdots①$$

また　$\displaystyle\int_0^1\frac{3}{x^2-2x+4}dx=\int_0^1\frac{3}{(x-1)^2+3}dx$

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$ であるから

x	$0\to1$
θ	$-\dfrac{\pi}{6}\to0$

$$\int_0^1\frac{3}{x^2-2x+4}dx=\int_0^1\frac{3}{(x-1)^2+3}dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^0d\theta=\sqrt{3}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^0=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

ゆえに，① から

$$\int_0^1\frac{1}{x^3+8}dx=\frac{1}{12}\Big[\log(x+2)\Big]_0^1-\frac{1}{24}\Big[\log(x^2-2x+4)\Big]_0^1+\frac{1}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

$$=\frac{1}{12}(\log3-\log2)-\frac{1}{24}(\log3-2\log2)+\frac{\sqrt{3}}{72}\pi$$

$$=\frac{1}{24}\log3+\frac{\sqrt{3}}{72}\pi$$

4

解答　$\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解説

$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\to1$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos\theta)\cdot2\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=2\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5

解答　(1)　$I_0=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{1}{2}$　　(2)　$I_n=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$　　(3)　$I_4=\dfrac{1}{4}e^2-\dfrac{3}{4}$

解説

(1)　$\displaystyle I_0=\int_0^1e^{2x}dx=\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}$

(2)　$\displaystyle I_n=\int_0^1x^ne^{2x}dx=\Big[\frac{1}{2}x^ne^{2x}\Big]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1nx^{n-1}e^{2x}dx$

よって　$I_n=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$

(3)　(2) を繰り返し使って，また，(1) の I_0 も使って

$$I_4=\frac{1}{2}e^2-\frac{4}{2}I_3=\frac{1}{2}e^2-2\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{2}I_2\right)=-\frac{1}{2}e^2+3\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{2}{2}I_1\right)$$

$$=e^2-3\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}I_0\right)=-\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}$$

6

解答　(1)　$I_0=\dfrac{\pi}{2}$，$I_1=1$，$I_2=\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$　　(3)　$I_{12}=\dfrac{231}{2048}\pi$

解説

(1)　$\displaystyle I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$，$\displaystyle I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}\Big[x+\frac{1}{2}\sin2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(2)　$n\geqq2$ のとき

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^nx\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot(\sin x)'dx$$

$$=\Big[\cos^{n-1}x\cdot\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\sin x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\cdot\sin^2x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\cdot(1-\cos^2x)dx$$

$$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^nx\,dx\right)=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

したがって　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

(3)　(2) の結果を用いると

$$I_5=\frac{4}{5}I_3=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1=\frac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{8}{15}\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{15}$$

$$I_{12}=\frac{11}{12}I_{10}=\frac{11}{12}\cdot\frac{9}{10}I_8=\cdots\cdots=\frac{11}{12}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0=\frac{231}{1024}I_0$$

(1) より $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$I_{12}=\dfrac{231}{1024}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{231}{2048}\pi$

7

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{\pi}{4}$

解説

(1)　$t=a+b-x$ とおくと　$dx=(-1)dt$

x	$a\to b$
t	$b\to a$

よって　$\displaystyle\int_a^bf(a+b-x)\,dx=\int_b^af(t)\cdot(-1)dt=\int_a^bf(t)\,dt=\int_a^bf(x)\,dx$

(2)　(1) から　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ とおくと，

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

よって　$I=\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{6}$　　(2)　$\dfrac{\pi}{18}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{2}}{72}\pi$

解説

(1)　$x=2\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 2\sqrt{3}$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+4}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{4(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$$

(2)　$x=3\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{3}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$\sqrt{3}\longrightarrow 3\sqrt{3}$
θ	$\dfrac{\pi}{6}\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+9}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{1}{3}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{18}$$

(3)　$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{3x^2+6}=\frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{x^2+2}$$

$x=\sqrt{2}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$\sqrt{2}\longrightarrow\sqrt{6}$
θ	$\dfrac{\pi}{4}\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{3x^2+6}=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{72}\pi$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　$\dfrac{\pi}{3}$　　(3)　$\dfrac{\pi}{8}$　　(4)　$\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

(1)　$x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

$x-1=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$1\longrightarrow 2$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}$

よって　$$\int_1^2\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(2)　$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

$x-2=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$2\longrightarrow\sqrt{3}+2$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_2^{\sqrt{3}+2}\frac{dx}{x^2-4x+5}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

(3)　$x^2+2x+5=(x+1)^2+4$

$x+1=2\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$-1\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}$

よって　$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int_{-1}^1\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$$

(4)　$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ であるから，

$x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$\dfrac{\pi}{6}\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}$

よって　$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sqrt{3}}{3}d\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

$\boxed{3}$

解答　$\dfrac{1}{3}\log 2+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であるから，$\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ とおいて，分母を払うと　　$1=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$

整理して　　$(a+b)x^2+(b+c-a)x+a+c=1$

これが x の恒等式であるから　　$a+b=0$，$b+c-a=0$，$a+c=1$

これを解いて　　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{2}{3}$

よって　$$\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

ここで　$$\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\Big[\log(x+1)\Big]_0^1=\log 2$$

次に，$I=\displaystyle\int_0^1\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$ とすると　　$I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-\frac{3}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}$

I の第１項の積分について

$$\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx=\Big[\log(x^2-x+1)\Big]_0^1=0$$

I の第２項について，$J=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}$ とする。

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ であるから，$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$

とおくと　$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6}\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

x と θ の対応は右のようになる。

ゆえに　$J=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

よって　$\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\log 2-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi\right)=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\frac{3}{4}\pi$　(2)　$\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$　(3)　$\frac{\pi}{3}$

解説

(1)　$x=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと　$dx=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$

x	$0\longrightarrow\sqrt{3}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

また，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{3-x^2}=\sqrt{3-3\sin^2\theta}=\sqrt{3}\cos\theta$

よって　$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}\cos\theta)\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$

$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$

$=\frac{3}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}\pi$

(2)　$x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　$dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6}\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

また，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2-2\sin^2\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

よって　$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}\cos\theta)\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

$=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$=\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

(3)　$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$-1\longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6}\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

また，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\cos\theta$

よって　$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}$　(2)　$\frac{1}{3}e^3-\frac{n}{3}I_{n-1}$　(3)　$\frac{4}{27}e^3+\frac{2}{27}$

解説

(1)　$I_0=\int_0^1 e^{3x}dx=\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}$

(2)　$I_n=\int_0^1 x^n e^{3x}dx=\left[\frac{1}{3}x^n e^{3x}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}e^{3x}\cdot nx^{n-1}dx$

$=\frac{1}{3}e^3-\frac{n}{3}\int_0^1 x^{n-1}e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^3-\frac{n}{3}I_{n-1}$

(3)　(1)，(2) の結果から

$I_1=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}I_0=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$

$I_2=\frac{1}{3}e^3-\frac{2}{3}I_1=\frac{1}{3}e^3-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}\right)=\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}$

$I_3=\frac{1}{3}e^3-I_2=\frac{1}{3}e^3-\left(\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}\right)=\frac{4}{27}e^3+\frac{2}{27}$

$\boxed{6}$

解答　(ア)　$\frac{\pi}{4}$　(イ)　$\frac{n+1}{n+2}$　(ウ)　$\frac{35}{256}\pi$

解説

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}={}^{ア}\frac{\pi}{4}$

$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin^{n+1}x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)'\sin^{n+1}x\,dx=\Big[-\cos x\sin^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^n x\,dx$

$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^n x\,dx$

$=(n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx\right)=(n+1)(I_n-I_{n+2})$

すなわち　$I_{n+2}=(n+1)(I_n-I_{n+2})$

よって　$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$

$n+2\neq 0$ であるから　$I_{n+2}={}^{イ}\frac{n+1}{n+2}I_n$

したがって　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 x\,dx=I_8=\frac{7}{8}I_6=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}I_4=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_2$

$=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}={}^{ウ}\frac{35}{256}\pi$

$\boxed{7}$

解答　(1)　略　(2)　$\frac{a}{2}$

解説

(1)　$a-x=t$ とおくと　$x=a-t$

ゆえに　$dx=-dt$　　x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow a$
t	$a\longrightarrow 0$

よって　(右辺)$=\int_0^a f(a-x)dx=\int_a^0 f(t)(-dt)=\int_0^a f(t)dt$

$=\int_0^a f(x)dx=$(左辺)

(2)　$I=\int_0^a\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}dx$ とし，$f(x)=\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}$ とする。

(1) の等式 $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ から　$I=\int_0^a f(a-x)dx$

また　$f(x)+f(a-x)=\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}+\frac{e^{a-x}}{e^{a-x}+e^x}$

ゆえに　$f(x)+f(a-x)=1$

よって　$\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a dx$

ゆえに　$I+I=a$　　したがって　$I=\frac{a}{2}$

$\boxed{1}$

解答　(1) $\log 2+\dfrac{\pi}{12}$　(2) $\dfrac{\pi+2}{8a^3}$　(3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{8}$　(4) $\dfrac{\pi}{48}-\dfrac{\sqrt{3}}{64}$　(5) $\dfrac{\pi}{4}$

(6) $-\dfrac{\pi}{6}$

解説

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{x^2+1}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x}{x^2+1}dx+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\Big[\log(x^2+1)\Big]_1^{\sqrt{3}}=\log 2$$

また，$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1\ \longrightarrow\ \sqrt{3}$
θ	$\dfrac{\pi}{4}\ \longrightarrow\ \dfrac{\pi}{3}$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$$

したがって　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{x^2+1}dx=\log 2+\frac{\pi}{12}$

(2) $x=a\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\ \longrightarrow\ a$
θ	$0\ \longrightarrow\ \dfrac{\pi}{4}$

$$\int_0^a\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^4(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}d\theta=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2a^3}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi+2}{8a^3}$$

(3) $x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_0^1\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\theta+1}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta+1)\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2\theta+1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$$

(4) $x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	$0\longrightarrow\dfrac{1}{2}$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin\theta\cos\theta)^2d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\Big[\theta-\frac{\sin 4\theta}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{8}\Big(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\sin\frac{2}{3}\pi\Big)$$

$$=\frac{1}{8}\Big(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\Big)=\frac{\pi}{48}-\frac{\sqrt{3}}{64}$$

(5) $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(1-x)^2}$

$1-x=\sin\theta$ とおくと　$dx=-\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\ \longrightarrow\ 1$
θ	$\dfrac{\pi}{2}\ \longrightarrow\ 0$

この範囲において $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{1-(1-x)^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

よって　$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos\theta\cdot(-\cos\theta)d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(6) $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(1-x)^2}$

$1-x=\sin\theta$ とおくと　$dx=-\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$1\ \longrightarrow\ \dfrac{1}{2}$
θ	$0\ \longrightarrow\ \dfrac{\pi}{6}$

この範囲において $\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{1-(1-x)^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

よって

$$\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{-\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-1)d\theta=\Big[-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{\pi}{6}$$

$\boxed{2}$

解答　(ア) 1　(イ) 4　(ウ) $\dfrac{\sqrt{3}}{18}\pi$　(エ) $\log 3+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

$\dfrac{28}{(4-x^2)(x^2+3)}=\dfrac{a}{x+2}-\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x^2+3}$　……① とする。

① の両辺に $(4-x^2)(x^2+3)$ を掛けると

$$28=a(2-x)(x^2+3)+a(x+2)(x^2+3)+b(4-x^2)$$

右辺を展開して整理すると　$28=(4a-b)x^2+12a+4b$

これが x についての恒等式であるから　$4a-b=0$，$12a+4b=28$

これを解くと　$a={}^{ア}1$，$b={}^{イ}4$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+3}dx$ において，$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{6}$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}={}^{ウ}\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

したがって　$\displaystyle\int_0^1\frac{28}{(4-x^2)(x^2+3)}dx=\int_0^1\Big(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x^2+3}\Big)dx$

$$=\Big[\log|x+2|-\log|x-2|\Big]_0^1+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

$$={}^{エ}\log 3+\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

$\boxed{3}$

解答　(1) ① 1　② $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$　③ $9e-24$

(2) ① $I_1=\dfrac{1}{2}\log 2$，$I_2=1-\dfrac{\pi}{4}$　② $I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$　③ $\dfrac{13}{15}-\dfrac{\pi}{4}$

解説

(1) ① $\displaystyle I_1=\int_1^e\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^e=1$

② $\displaystyle I_{n+1}=\int_1^e(\log x)^{n+1}dx=\int_1^e(x)'(\log x)^{n+1}dx$

$$=\Big[x(\log x)^{n+1}\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=e-(n+1)\int_1^e(\log x)^n dx$$

よって　$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

③ (2)から　$I_2=e-2I_1=e-2$

$I_3=e-3I_2=e-3(e-2)=-2e+6$

よって　$I_4=e-4I_3=e-4(-2e+6)=9e-24$

(2) ① $\displaystyle I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\Big[-\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log 2$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\frac{1}{\cos^2 x}-1\Big)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$$

② $\displaystyle I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\Big(\frac{1}{\cos^2 x}-1\Big)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot(\tan x)'dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n=\frac{1}{n+1}-I_n$$

③ ①，② から　$I_6=\dfrac{1}{5}-I_4=\dfrac{1}{5}-\Big(\dfrac{1}{3}-I_2\Big)=-\dfrac{2}{15}+1-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{13}{15}-\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{4}$

解答　(1) 略　(2) $I_5=\dfrac{5}{32}\pi$

解説

(1) $\displaystyle I_{n+2}=\int_0^1\big(\sqrt{1-x^2}\big)^{n+2}dx$

$x=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta\,d\theta$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$I_{n+2}=\int_0^1(\sqrt{1-x^2})^{n+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+3}\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\cos^{n+2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^{n+1}\theta\,d\theta$$

$$=(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}\theta(1-\cos^2\theta)d\theta$$

$$=(n+2)(I_n-I_{n+2})$$

よって　　$(n+3)I_{n+2}=(n+2)I_n$　　　　ゆえに　　$I_{n+2}=\frac{n+2}{n+3}I_n$

(2)　(1) より　　$I_5=\frac{5}{6}I_3=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_1$

$I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は半径 1 の四分円の面積を表すから　　$I_1=\frac{\pi}{4}$

したがって　　$I_5=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{5}{32}\pi$

$\boxed{5}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　右辺$=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(-x)dx$

$-x=t$ とおくと　　$-dx=dt$

x	$0\longrightarrow a$
t	$0\longrightarrow -a$

よって　　$\int_0^a f(-x)dx=\int_0^{-a}f(t)\cdot(-1)dt$

$$=\int_{-a}^0 f(t)dt=\int_{-a}^0 f(x)dx$$

ゆえに　　右辺$=\int_0^a f(x)dx+\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_{-a}^a f(x)dx=$左辺

(2)　右辺$=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)dx$

$a-x=t$ とおくと　　$-dx=dt$

x	$0\longrightarrow \frac{a}{2}$
t	$a\longrightarrow \frac{a}{2}$

よって　　$\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)dx=\int_a^{\frac{a}{2}}f(t)\cdot(-1)dt$

$$=\int_{\frac{a}{2}}^a f(t)dt=\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$$

ゆえに　　右辺$=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx=$左辺

(3)　左辺$=\int_{a-b}^a f(x)dx+\int_a^{a+b}f(x)dx$

$x=a+t$ とおくと　　$dx=dt$

x	$a-b\longrightarrow a$
t	$-b\longrightarrow 0$

よって　　$\int_{a-b}^a f(x)dx=\int_{-b}^0 f(a+t)dt=\int_{-b}^0 f(a-t)dt$

$a-t=x$ とおくと　　$-dt=dx$

t	$-b\longrightarrow 0$
x	$a+b\longrightarrow a$

よって　　$\int_{-b}^0 f(a-t)dt=\int_{a+b}^a f(x)\cdot(-1)dx=\int_a^{a+b}f(x)dx$

ゆえに　　左辺$=2\int_a^{a+b}f(x)dx=$右辺

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\frac{1}{2}$　　(2)　略　　(3)　$\frac{\pi-1}{4}$

解説

(1)　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}(-1-1)=\frac{1}{2}$

(2)　$x=\frac{\pi}{2}-t$ から　　$\frac{dx}{dt}=-1$

ゆえに　$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-1)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\cos t+\sin t}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt$$

(3)　(2) は $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ とも書ける．

よって　$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

ゆえに　$I=\frac{\pi-1}{4}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$　　(2)　$\log(\sqrt{2}+1)$　　(3)　$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\frac{\pi}{12}$

解説

(1)　$\frac{1}{\cos^2 x}=(\tan x)'$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\tan x)'dx=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\Big[\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

(2)　$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}-\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin x)-\log(1-\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\Big[\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2$$

$$=\log(\sqrt{2}+1)$$

(3)　$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)'\log(1+x^2)dx$

$$=\frac{1}{2}\left\{\Big[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\Big]_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1\longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4}\longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　　$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$

したがって　　$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\frac{\pi}{12}$

$\boxed{2}$

解答　$\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}(\log 3-\log 2)$

解説

$I=\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$ とおく。$t=e^x$ とおくと，$x=\log t$ であるから

$$dx=\frac{1}{t}dt$$

x	$0\longrightarrow \frac{\log 3}{2}$
t	$1\longrightarrow \sqrt{3}$

よって　$I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}dt$

ここで $\frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}=\frac{at+b}{t^2+1}+\frac{c}{t}$ とおく。

両辺に $(t^2+1)t$ を掛けると　$t+1=(at+b)t+c(t^2+1)$

右辺を整理すると　$t+1=(a+c)t^2+bt+c$

この式が t の恒等式であるから　$a+c=0$，$b=1$，$c=1$

よって　$a=-1$

したがって　$I=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{-t+1}{t^2+1}+\frac{1}{t}\right)dt=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2+1}+\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt$$

t	$1 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

第１項で $t=\tan\theta$ とおくと　$dt=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

よって　$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta+\left[\log t-\frac{1}{2}\log(t^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}}$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta+\log\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log 4+\frac{1}{2}\log 2=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}(\log 3-\log 2)$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(x+1)(x+2)(x^2-x+1)$　　(2)　(ア)　$\log\frac{2(a+1)}{2a+1}$　　(イ)　$\frac{2\sqrt{3}}{9a}\pi$

(3)　$\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi-\log\frac{4}{3}$

解説

(1)　$x^4+2x^3+x+2=x^3(x+2)+x+2=(x^3+1)(x+2)=(x+1)(x+2)(x^2-x+1)$

(2)　(ア)　$\int_0^a\frac{dx}{(x+a)(x+a+1)}=\int_0^a\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+a+1}\right)dx$

$$=\Big[\log|x+a|-\log|x+a+1|\Big]_0^a$$

$$=\log 2a-\log(2a+1)-\log a+\log(a+1)$$

$$=\log\frac{2a(a+1)}{a(2a+1)}=\log\frac{2(a+1)}{2a+1}$$

(イ)　$\int_0^a\frac{dx}{x^2-ax+a^2}=\int_0^a\frac{dx}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2}$

$x-\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{\sqrt{3}\,a}{2\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \longrightarrow a$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

よって　$\int_0^a\frac{dx}{x^2-ax+a^2}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}a^2(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{\sqrt{3}\,a}{2\cos^2\theta}d\theta$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3a}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3a}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9a}\pi$$

(3)　(1) から　$\frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2}=\frac{4x+1}{(x+1)(x+2)(x^2-x+1)}=\frac{x^2+3x+2-(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)(x^2-x+1)}$

$$=\frac{(x+1)(x+2)-(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

ここで，(2) の結果に $a=1$ を代入して

$$\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\log\frac{4}{3}$$

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

したがって　$\int_0^1\frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2}dx=\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}-\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi-\log\frac{4}{3}$$

$\boxed{4}$

解答　$\frac{a}{2}-b$

解説

$I=\int_{\frac{a}{2}}^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$ とおく。

$a-x=t$ とおくと　$-dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$\frac{a}{2} \longrightarrow a$
t	$\frac{a}{2} \longrightarrow 0$

よって　$I=\int_{\frac{a}{2}}^0\frac{f(a-t)}{f(a-t)+f(t)}\cdot(-1)dt$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(a-t)}{f(t)+f(a-t)}dt=\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{1-\frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}\right\}dt$$

$$=\Big[t\Big]_0^{\frac{a}{2}}-\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}dt=\frac{a}{2}-b$$

$\boxed{1}$

解答　$f'(x)=\sin 2x$

解説

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\sin 2t\,dt=\sin 2x$

$\boxed{2}$

解答　$\frac{x^2-x}{\log x}$

解説

$\frac{1}{\log t}$ の原始関数を $F(t)$ とすると

$$\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\log t}dt=F(x^3)-F(x^2)，\quad F'(t)=\frac{1}{\log t}$$

よって　$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\log t}dt=F'(x^3)(x^3)'-F'(x^2)(x^2)'$

$$=\frac{3x^2}{\log x^3}-\frac{2x}{\log x^2}=\frac{x^2}{\log x}-\frac{x}{\log x}=\frac{x^2-x}{\log x}$$

別解　$f'(x)=\frac{1}{\log x^3}\cdot(x^3)'-\frac{1}{\log x^2}\cdot(x^2)'=\frac{3x^2}{3\log x}-\frac{2x}{2\log x}=\frac{x^2-x}{\log x}$

$\boxed{3}$

解答　$\cos x-1$

解説

$f(x)=\int_0^x(t-x)\sin t\,dt=\int_0^x t\sin t\,dt-x\int_0^x\sin t\,dt$

よって　$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x t\sin t\,dt-\left\{(x)'\int_0^x\sin t\,dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x\sin t\,dt\right)\right\}$

$$=x\sin x-\left(\int_0^x\sin t\,dt+x\sin x\right)=\Big[\cos t\Big]_0^x=\cos x-1$$

$\boxed{4}$

解答　$f(x)=\sin x-\frac{3}{4}$

解説

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt=a$ とおくと　$f(x)=\sin x+3a$　……①

よって　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+3a)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t+3a\cos t)dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+3a\cos t\right)dt=\left[-\frac{1}{4}\cos 2t+3a\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+3a$$

ゆえに　$\frac{1}{2}+3a=a$　　これを解くと　$a=-\frac{1}{4}$

これを ① に代入して　$f(x)=\sin x-\frac{3}{4}$

5

解答　$f(x)=\dfrac{2\pi}{\pi^2+4}\sin x+\dfrac{4}{\pi^2+4}\cos x$

解説

$f(x)=\cos x+\displaystyle\int_0^{\pi}(\sin x\cos t-\cos x\sin t)f(t)\,dt$

$\quad=\cos x+\sin x\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt$

$\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\cos t\,dt=a$，$\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt=b$（$a$，$b$ は定数）とおくと

$f(x)=\cos x+a\sin x-b\cos x$

$\quad=a\sin x+(1-b)\cos x$　……①

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\cos t\,dt=\int_0^{\pi}\{a\sin t\cos t+(1-b)\cos^2 t\}dt$

$\displaystyle=\int_0^{\pi}\left\{\frac{a}{2}\sin 2t+(1-b)\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\right\}dt$

$\displaystyle=\left[-\frac{a}{4}\cos 2t+\frac{1-b}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_0^{\pi}$

$\displaystyle=-\frac{a}{4}(1-1)+\frac{1-b}{2}\pi=\frac{\pi}{2}(1-b)$

ゆえに　$a=\dfrac{\pi}{2}(1-b)$　……②

また　$\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt=\int_0^{\pi}\{a\sin^2 t+(1-b)\sin t\cos t\}dt$

$\displaystyle=\int_0^{\pi}\left(a\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+\frac{1-b}{2}\sin 2t\right)dt$

$\displaystyle=\left[\frac{a}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)-\frac{1-b}{4}\cos 2t\right]_0^{\pi}$

$\displaystyle=\frac{a}{2}\pi-\frac{1-b}{4}(1-1)=\frac{\pi}{2}a$

ゆえに　$b=\dfrac{\pi}{2}a$　……③

③を②に代入して　$a=\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{2}a\right)$

よって　$a=\dfrac{2\pi}{\pi^2+4}$　　これを③に代入して　$b=\dfrac{\pi^2}{\pi^2+4}$

求めた a，b の値を①に代入して　$f(x)=\dfrac{2\pi}{\pi^2+4}\sin x+\left(1-\dfrac{\pi^2}{\pi^2+4}\right)\cos x$

すなわち　$f(x)=\dfrac{2\pi}{\pi^2+4}\sin x+\dfrac{4}{\pi^2+4}\cos x$

6

解答　$t=e$ のとき最大値 1，$t=\sqrt{e}$ のとき最小値 $e-2\sqrt{e}+1$

解説

$e^x-t=0$ とすると　$x=\log t$

$1\leqq t\leqq e$ であるから　$0\leqq\log t\leqq 1$

ゆえに　$0\leqq x\leqq\log t$ のとき　$|e^x-t|=-(e^x-t)$，

$\log t\leqq x\leqq 1$ のとき　$|e^x-t|=e^x-t$

よって　$\displaystyle S(t)=\int_0^{\log t}\{-(e^x-t)\}dx+\int_{\log t}^{1}(e^x-t)dx=-\Big[e^x-tx\Big]_0^{\log t}+\Big[e^x-tx\Big]_{\log t}^{1}$

$=-2(e^{\log t}-t\log t)+1+e-t$

$=-2t+2t\log t+1+e-t$

$=2t\log t-3t+e+1$

ゆえに　$S'(t)=2\log t+2t\cdot\dfrac{1}{t}-3=2\log t-1$

$S'(t)=0$ とすると　$\log t=\dfrac{1}{2}$

よって　$t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$1\leqq t\leqq e$ における $S(t)$ の増減表は右のようになる。

t	1	…	$\sqrt{e}$	…	e
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$e-2$	↘	極小	↗	1

ここで　$e-2<1$，

$S(\sqrt{e})=2\sqrt{e}\log\sqrt{e}-3\sqrt{e}+e+1=e-2\sqrt{e}+1$

したがって，$S(t)$ は $t=e$ のとき最大値 1，

$t=\sqrt{e}$ のとき最小値 $e-2\sqrt{e}+1$ をとる。

7

解答　$\dfrac{1}{2}$

解説

$f(t)=\dfrac{\cos t}{1+\cos t}$ とおき，$f(t)$ の不定積分の１つを $F(t)$ とすると

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\cos t}{1+\cos t}dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=f(0)=\frac{1}{2}$$

1

解答　(1)　$\dfrac{1}{x+1}$　　(2)　e^{3x}　　(3)　$-\sin 2x$

解説

(1)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t+1}dt=\frac{1}{x+1}$

(2)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^x e^{3t}dt=e^{3x}$

(3)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^a\sin 2t\,dt=-\frac{d}{dx}\int_a^x\sin 2t\,dt=-\sin 2x$

2

解答　(1)　$f'(x)=2(xe^{x^2}\cos x^2-e^{2x}\cos 2x)$

(2)　$f'(x)=(1+x)\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)$

解説

(1)　$e^t\cos t$ の不定積分の１つを $F(t)$ とすると　$F'(t)=e^t\cos t$

また　$f(x)=\displaystyle\int_{2x}^{x^2}e^t\cos t\,dt=F(x^2)-F(2x)$

よって　$f'(x)=F'(x^2)\cdot 2x-F'(2x)\cdot 2$

$=(e^{x^2}\cos x^2)\cdot 2x-(e^{2x}\cos 2x)\cdot 2$

$=2(xe^{x^2}\cos x^2-e^{2x}\cos 2x)$

(2)　$t\log t$ の不定積分の１つを $F(t)$ とすると　$F'(t)=t\log t$

また　$f(x)=\displaystyle\int_{1-x}^{1+x}t\log t\,dt=F(1+x)-F(1-x)$

よって　$f'(x)=F'(1+x)\cdot 1-F'(1-x)\cdot(-1)$

$=(1+x)\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)$

3

解答　(1)　$f'(x)=(2x+1)e^x-e$　　(2)　$f'(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$

解説

(1)　$f(x)=x\displaystyle\int_1^x e^t dt+\int_1^x te^t dt$

よって　$f'(x)=(x)'\displaystyle\int_1^x e^t dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_1^x e^t dt\right)+\frac{d}{dx}\int_1^x te^t dt$

$=\displaystyle\int_1^x e^t dt+xe^x+xe^x=\Big[e^t\Big]_1^x+2xe^x=(2x+1)e^x-e$

(2)　$f(x)=x\displaystyle\int_0^x\cos^2 t\,dt-\int_0^x t\cos^2 t\,dt$

よって　$f'(x)=(x)'\displaystyle\int_0^x\cos^2 t\,dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x\cos^2 t\,dt\right)-\frac{d}{dx}\int_0^x t\cos^2 t\,dt$

$=\displaystyle\int_0^x\cos^2 t\,dt+x\cos^2 x-x\cos^2 x=\int_0^x\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$=\dfrac{1}{2}\left[t+\dfrac{\sin 2t}{2}\right]_0^x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$

4

解答　(1)　$f(x)=e^x-\dfrac{e-1}{2}$　　(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}$　　(3)　$f(x)=2x+4$

解説

(1) $\int_0^1 f(t)dt=a$（a は定数）とおくと　$f(x)=e^x-a$ ……①

よって　$\int_0^1 (e^t-a)dt=\left[e^t-at\right]_0^1=e-a-1$

ゆえに，$a=e-a-1$ から　$a=\frac{e-1}{2}$

これを①に代入して　$f(x)=e^x-\frac{e-1}{2}$

(2) $\int_1^3 tf(t)dt=a$（a は定数）とおくと　$f(x)=\frac{1}{x}+a$ ……①

よって　$\int_1^3 t\left(\frac{1}{t}+a\right)dt=\left[t+\frac{at^2}{2}\right]_1^3=2+4a$

ゆえに，$a=2+4a$ から　$a=-\frac{2}{3}$

これを①に代入して　$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{3}$

(3) $\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=a$（$a$ は定数）とおくと　$f(x)=2x-a$ ……①

よって
$$\int_0^\pi (2t-a)\cos t\,dt=2\int_0^\pi t\cos t\,dt-a\int_0^\pi \cos t\,dt$$
$$=2\int_0^\pi t(\sin t)'dt-a\left[\sin t\right]_0^\pi$$
$$=2\left[t\sin t\right]_0^\pi-2\int_0^\pi \sin t\,dt$$
$$=2\left[\cos t\right]_0^\pi=-4$$

ゆえに　$a=-4$

これを①に代入して　$f(x)=2x+4$

5

解答　$f(x)=x-\frac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1}\sin x+\frac{2\pi}{\pi^2+1}\cos x$

解説

$$f(x)=x+2\int_0^\pi f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt$$
$$=x+2\sin x\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt-2\cos x\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$$

$2\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=A$，$-2\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=B$（$A$，$B$ は定数）とおくと，$f(x)$ は次のように表される。

$$f(x)=x+A\sin x+B\cos x$$

よって　$A=2\int_0^\pi (t+A\sin t+B\cos t)\cos t\,dt=2\int_0^\pi (t\cos t+A\sin t\cos t+B\cos^2 t)dt$

ここで
$$\int_0^\pi t\cos t\,dt=\left[t\sin t\right]_0^\pi-\int_0^\pi \sin t\,dt=0+\left[\cos t\right]_0^\pi=-2$$
$$\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2t\,dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^\pi=0$$
$$\int_0^\pi \cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

から　$A=2\left(-2+\frac{\pi}{2}B\right)$

ゆえに　$A-\pi B=-4$ ……①

また　$B=-2\int_0^\pi (t+A\sin t+B\cos t)\sin t\,dt=-2\int_0^\pi (t\sin t+A\sin^2 t+B\sin t\cos t)dt$

ここで
$$\int_0^\pi t\sin t\,dt=\left[-t\cos t\right]_0^\pi+\int_0^\pi \cos t\,dt=\pi+\left[\sin t\right]_0^\pi=\pi$$
$$\int_0^\pi \sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

から　$B=-2\left(\pi+\frac{\pi}{2}A\right)$

ゆえに　$\pi A+B=-2\pi$ ……②

①，②を解くと　$A=-\frac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1}$，$B=\frac{2\pi}{\pi^2+1}$

よって　$f(x)=x-\frac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1}\sin x+\frac{2\pi}{\pi^2+1}\cos x$

6

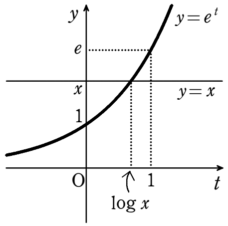
解答　$e-2\sqrt{e}+1$

解説

$e^t-x=0$ とすると　$t=\log x$

$0\leqq t\leqq \log x$ のとき　$|e^t-x|=-(e^t-x)=-e^t+x$

$\log x\leqq t\leqq 1$ のとき　$|e^t-x|=e^t-x$



よって
$$g(x)=\int_0^{\log x}(-e^t+x)dt+\int_{\log x}^1 (e^t-x)dt$$
$$=\left[-e^t+xt\right]_0^{\log x}+\left[e^t-xt\right]_{\log x}^1$$
$$=(-x+x\log x+1)+(e-x-x+x\log x)$$
$$=2x\log x-3x+e+1,$$
$$g'(x)=2\log x+2-3=2\log x-1$$

$g'(x)=0$ とすると，$\log x=\frac{1}{2}$ から　$x=\sqrt{e}$

ゆえに，$1\leqq x\leqq e$ における $g(x)$ の増減表は右のようになる。

したがって，$x=\sqrt{e}$ で最小値 $e-2\sqrt{e}+1$ をとる。

x	1	…	$\sqrt{e}$	…	e
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$e-2\sqrt{e}+1$	↗	

7

解答　$\frac{1}{3}$

解説

$f(t)=\frac{1}{3+\sin t}$ とおき，$f(t)$ の不定積分の１つを $F(t)$ とすると
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{3+\sin t}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=f(0)$$
$$=\frac{1}{3+0}=\frac{1}{3}$$

1

解答　$f(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$，$a=0$

解説

$f(t)$ の不定積分の１つを $F(t)$ とする。

与えられた等式から　$F(2x)-F(a)=1-e^x$

両辺を x について微分すると　$F'(2x)\cdot 2=-e^x$

よって　$f(2x)=-\frac{1}{2}e^x$

$2x=t$ とおくと　$f(t)=-\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}$　　したがって　$f(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

また，与えられた等式の両辺で $x=\frac{a}{2}$ とおくと　$0=1-e^{\frac{a}{2}}$

すなわち　$e^{\frac{a}{2}}=1$　　ゆえに　$a=0$

2

解答　$\alpha=\frac{4}{\pi+2}$，$\frac{4}{\pi-2}$

解説

$$f(x)=\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos(t-x)dt=\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)(\cos t\cos x+\sin t\sin x)dt$$
$$=\alpha\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt+\alpha\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt=A$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt=B$（$A$，$B$ は定数）とおくと

$$f(x)=\alpha A\cos x+\alpha B\sin x$$

よって
$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha(A\cos t+B\sin t)\cos t\,dt$$
$$=\alpha A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt+\alpha B\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt \quad\text{……①}$$
$$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha(A\cos t+B\sin t)\sin t\,dt$$
$$=\alpha A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt+\alpha B\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt \quad\text{……②}$$

ここで
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

①，②に代入すると
$$\begin{cases} A=\frac{\pi}{4}\alpha A+\frac{1}{2}\alpha B & \text{……③}\\ B=\frac{1}{2}\alpha A+\frac{\pi}{4}\alpha B & \text{……④}\end{cases}$$

③−④から　$A-B=\frac{\pi}{4}\alpha(A-B)-\frac{1}{2}\alpha(A-B)$

よって　$(A-B)\left(1-\dfrac{\pi}{4}\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha\right)=0$

ゆえに　$A=B$ または $1-\dfrac{\pi}{4}\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha=0$

ただし，関数 $f(x)$ は定数 0 でないから，連立方程式③，④は $(A,\ B)=(0,\ 0)$ 以外の解をもち，$A=B$ ならば $A\fallingdotseq 0$ である。

[1]　$A=B$ のとき　③から　$A=\dfrac{\pi}{4}\alpha A+\dfrac{1}{2}\alpha A$

$A\fallingdotseq 0$ であるから　$1=\dfrac{\pi}{4}\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha$　ゆえに　$\alpha=\dfrac{4}{\pi+2}$

[2]　$1-\dfrac{\pi}{4}\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha=0$ のとき　$\alpha=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{4}{\pi-2}$

以上から　$\alpha=\dfrac{4}{\pi+2},\ \dfrac{4}{\pi-2}$

3

解答　$f(x)=(\pi-3)\sin x-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\cos x,\ g(x)=x+\dfrac{\pi}{2}-2$

解説

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt=\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\sin t\,dt$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\cos t\,dt=a,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\sin t\,dt=b$ とおくと　$f(x)=a\sin x-b\cos x$

また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=c$ とおくと　$g(x)=x+c$

ゆえに　$\displaystyle a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+c)\cos t\,dt=\Big[(t+c)\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}+c-\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{\pi}{2}+c-1$

よって　$a=c+\dfrac{\pi}{2}-1$ ……①

また　$\displaystyle b=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+c)\sin t\,dt=\Big[-(t+c)\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=c+\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=c+1$

よって　$b=c+1$ ……②

更に　$\displaystyle c=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin t-b\cos t)dt=\Big[-a\cos t-b\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-b+a$

よって　$c=a-b$ ……③

①，②，③から　$a=\pi-3,\ b=\dfrac{\pi}{2}-1,\ c=\dfrac{\pi}{2}-2$

したがって　$f(x)=(\pi-3)\sin x-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\cos x,\ g(x)=x+\dfrac{\pi}{2}-2$

4

解答　$x=e$ で最大値 e^2+1，$x=\sqrt{e}$ で最小値 $(e-1)^2$

解説

$0\leqq t\leqq 2$ において　$1\leqq e^t\leqq e^2$

$x^2\leqq 1$ すなわち $0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=\int_0^2(e^t-x^2)\,dt=\Big[e^t-x^2t\Big]_0^2=-2x^2+e^2-1$$

$1<x^2\leqq e^2$ すなわち $1<x\leqq e$ のとき

$e^t-x^2=0$ とすると　$t=2\log x$

よって　$\displaystyle f(x)=\int_0^{2\log x}(-e^t+x^2)\,dt+\int_{2\log x}^2(e^t-x^2)dt$

$=\Big[-e^t+x^2t\Big]_0^{2\log x}+\Big[e^t-x^2t\Big]_{2\log x}^2$

$=(-x^2+2x^2\log x+1)+(e^2-3x^2+2x^2\log x)$

$=4x^2\log x-4x^2+e^2+1$

したがって　$f(x)=\begin{cases}-2x^2+e^2-1 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 4x^2\log x-4x^2+e^2+1 & (1<x\leqq e)\end{cases}$

$0<x<1$ のとき　$f'(x)=-4x$

$1<x<e$ のとき　$f'(x)=4(2x\log x+x)-8x=8x\log x-4x=4x(2\log x-1)$

$1<x<e$ のとき，$f'(x)=0$ とすると　$x=\sqrt{e}$

$0\leqq x\leqq e$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e^2-1	↘	e^2-3	↘	$(e-1)^2$	↗	e^2+1

よって，$f(x)$ は $x=e$ で最大値 e^2+1，$x=\sqrt{e}$ で最小値 $(e-1)^2$ をとる。

1

解答　$f(x)=2(2x-k-1)e^x+k+2$

解説

$\displaystyle f(x)=(2x-k)e^x+e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$ ……①　とする。

①の両辺を x で微分すると

$\displaystyle f'(x)=2e^x+(2x-k)e^x-e^{-x}\int_0^x f(t)e^tdt+e^{-x}\cdot f(x)e^x$

$\displaystyle =(2x-k+2)e^x+f(x)-e^{-x}\int_0^x f(t)e^tdt$ ……②

①から　$\displaystyle f(x)-e^{-x}\int_0^x f(t)e^tdt=(2x-k)e^x$

これを②に代入して

$f'(x)=(2x-k+2)e^x+(2x-k)e^x$

$=(4x-2k+2)e^x$

ゆえに　$\displaystyle f(x)=\int(4x-2k+2)e^xdx=\int(4x-2k+2)(e^x)'dx$

$\displaystyle =(4x-2k+2)e^x-\int 4e^xdx$

$=(4x-2k-2)e^x+C$（C は積分定数）……③

①から　$f(0)=-k$

また，③から　$f(0)=-2k-2+C$

よって　$-k=-2k-2+C$　ゆえに　$C=k+2$

これを③に代入して

$f(x)=(4x-2k-2)e^x+k+2$

$=2(2x-k-1)e^x+k+2$

2

解答　(1)　$I(t)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\dfrac{1}{3} & (0<t<1)\\ t-\dfrac{1}{3} & (t\geqq 1)\end{cases}$　(2)　$t=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$

解説

(1)　$s=\sin\theta$ とおくと　$ds=\cos\theta\,d\theta$

θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$
s	$0\longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle I(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin^2\theta-t|\cos\theta\,d\theta=\int_0^1|s^2-t|ds$

ゆえに，$0<t<1$ のとき

$\displaystyle I(t)=\int_0^{\sqrt{t}}(t-s^2)ds+\int_{\sqrt{t}}^1(s^2-t)ds=\Big[ts-\frac{1}{3}s^3\Big]_0^{\sqrt{t}}+\Big[\frac{1}{3}s^3-ts\Big]_{\sqrt{t}}^1$

$=t\sqrt{t}-\dfrac{1}{3}t\sqrt{t}+\dfrac{1}{3}-t-\dfrac{1}{3}t\sqrt{t}+t\sqrt{t}=\dfrac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\dfrac{1}{3}$

$t\geqq 1$ のとき　$\displaystyle I(t)=\int_0^1(t-s^2)ds=\Big[ts-\frac{1}{3}s^3\Big]_0^1=t-\frac{1}{3}$

したがって　$I(t)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\dfrac{1}{3} & (0<t<1)\\ t-\dfrac{1}{3} & (t\geqq 1)\end{cases}$

(2)　$I(1)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$，$\displaystyle\lim_{t\to 1-0}\left(\frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}-1+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ であるから，$I(t)$ はす

べての正の実数 t で連続である。

(1) より，$t \geqq 1$ で $I(t)$ は単調に増加するから，$I(t)$ が最小となる t の値は $0<t \leqq 1$ に存在する。

$0<t<1$ で $f(t)=\dfrac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\dfrac{1}{3}$ とおくと　　$f'(t)=2\sqrt{t}-1$

$0<t<1$ で $f'(t)=0$ とすると　　$t=\dfrac{1}{4}$

よって，$0<t<1$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

ゆえに，$0<t<1$ において，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{4}$ で極小かつ最小で，最小値は　　$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

したがって，$I(t)$ は $t=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

1

解答　(1) $\dfrac{2}{3}$　　(2) $\dfrac{1}{2}\log 2$

解説

(1)　(与式)$=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

(2)　(与式)$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

2

解答　$\log\dfrac{5}{3}$

解説

(与式)$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{3+\frac{k}{n}}=\int_0^2\frac{1}{3+x}dx=\Big[\log(3+x)\Big]_0^2=\log 5-\log 3=\log\frac{5}{3}$

3

解答　$\dfrac{256}{27e}$

解説

$P=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(4n)!}{(3n)!}}$ とおくと

$$P=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)(3n+3)\cdots\cdots(3n+n)}$$

$$=\sqrt[n]{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)\cdots\cdots\left(3+\frac{n}{n}\right)}$$

よって

$$\log P=\frac{1}{n}\left\{\log\left(3+\frac{1}{n}\right)+\log\left(3+\frac{2}{n}\right)+\log\left(3+\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(3+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(3+\frac{k}{n}\right)$$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log P=\int_0^1\log(3+x)dx=\int_0^1(3+x)'\log(3+x)dx$

$$=\Big[(3+x)\log(3+x)\Big]_0^1-\int_0^1 dx$$

$$=4\log 4-3\log 3-1=\log\frac{4^4}{3^3e}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P=\frac{256}{27e}$

4

解答　略

解説

自然数 k に対して，$k \leqq x \leqq k+1$ のとき　　$\dfrac{1}{k+1} \leqq \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{k}$

常に $\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{x}$ または $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{k}$ ではないから　　$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{k}$

よって　　$\displaystyle\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{k}$

$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{k}$ から　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)$ であるから

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\quad\cdots\cdots①$$

$\displaystyle\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$ から　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^{n}=\log n$ であるから　　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}<\log n$

この不等式の両辺に 1 を加えて　　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}<\log n+1$　……②

よって，①，② から，$n \geqq 2$ のとき　$\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}<\log n+1$

5

解答　略

解説

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x^4 \leqq x^2 \leqq 1$ であるから　　$1 \leqq 1+x^4 \leqq 1+x^2 \leqq 2$

よって，$\dfrac{1}{1+x^2} \leqq \dfrac{1}{1+x^4} \leqq 1$ である。

等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx<\int_0^1 dx\quad\cdots\cdots①$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ において，$x=\tan\theta$ とおくと

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

ゆえに　　$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

また　　$\displaystyle\int_0^1 dx=\Big[x\Big]_0^1=1$

よって，① から　　$\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^4}<1$

6

解答　略

解説

$0<x<\dfrac{1}{2}$ であるから　　$0<x^3<x$　　　よって　　$-\dfrac{1}{2}<-x<-x^3<0$

ゆえに　　$\dfrac{1}{2}<1-x<1-x^3<1$　　　したがって　　$\sqrt{1-x}<\sqrt{1-x^3}<1$

よって，$0<x<\dfrac{1}{2}$ において　　$1<\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}<\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

よって　　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

また　$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\left[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{2}$

ゆえに　$\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<2-\sqrt{2}$

$\boxed{1}$

解答　(1) $\frac{1}{4}$　(2) 2　(3) $\frac{1}{3}$　(4) $2\log 2-1$　(5) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　(6) $e-2$

(7) $\log\frac{3}{2}$　(8) $\frac{3}{8}$　(9) $2\log 2-\frac{3}{4}$

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(2-\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x(1-x)(2-x)dx=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\pi\sin\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\pi\sin\pi x\,dx$

$=\left[\pi\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)\right]_0^1=2$

(3) (与式)$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(3\pi\cdot\frac{k}{n}\right)$

$=\pi\int_0^1 x\sin 3\pi x\,dx=\pi\int_0^1 x\left(-\frac{1}{3\pi}\cos 3\pi x\right)'dx$

$=\pi\left(\left[-\frac{1}{3\pi}x\cos 3\pi x\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{3\pi}\cos 3\pi x\,dx\right)$

$=\pi\left(\frac{1}{3\pi}+\frac{1}{3\pi}\left[\frac{1}{3\pi}\sin 3\pi x\right]_0^1\right)=\frac{1}{3}$

(4) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)\,dx$

$=\int_0^1(1+x)'\log(1+x)\,dx=\left[(1+x)\log(1+x)\right]_0^1-\int_0^1 dx$

$=2\log 2-\left[x\right]_0^1=2\log 2-1$

(5) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

$=\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[x\sqrt{x}\right]_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(6) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n}}+\frac{2^2}{n^2}e^{\frac{2}{n}}+\frac{3^2}{n^2}e^{\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{n^2}e^{\frac{n}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 x^2e^x dx$

$=\left[x^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=e-2\int_0^1 xe^x dx$

$=e-2\left(\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)=e-2\left(e-\left[e^x\right]_0^1\right)$

$=e-2$

(7) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}$

$=\int_0^1\frac{1}{2+x}dx=\left[\log(2+x)\right]_0^1=\log 3-\log 2=\log\frac{3}{2}$

(8) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^3}{(n+k)^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^3}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^3}dx=\left[-\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^1=\frac{3}{8}$

(9) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2}\log\frac{n+k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$=\int_0^1(1+x)\log(1+x)\,dx=\left[\frac{(1+x)^2}{2}\log(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1+x}{2}dx$

$=2\log 2-\left[\frac{(x+1)^2}{4}\right]_0^1=2\log 2-\left(1-\frac{1}{4}\right)=2\log 2-\frac{3}{4}$

$\boxed{2}$

解答　(1) 9　(2) $\log\frac{3}{2}$

解説

(1) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^3 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=9$

(2) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_1^2\frac{1}{1+x}dx=\left[\log(1+x)\right]_1^2=\log\frac{3}{2}$

$\boxed{3}$

解答　$\frac{4}{e}$

解説

$\log\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{(2n)!}{n!n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n}{n^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots\cdots+\log\frac{n+n}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n+k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$=\int_0^1\log(1+x)\,dx=\left[(1+x)\log(1+x)-x\right]_0^1=\log\frac{4}{e}$

したがって　$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき

[1]　$\sqrt{k}\leqq\sqrt{x}$ であるから　$\frac{1}{\sqrt{x}}\leqq\frac{1}{\sqrt{k}}$

常には $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{k}}$ でないから　$\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}dx$

すなわち　$\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\frac{1}{\sqrt{k}}$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ として，辺々を加えると

$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_3^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\cdots\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

ここで　左辺$=\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1}=2(\sqrt{n+1}-1)$

したがって　$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

[2]　$\sqrt{x}\leqq\sqrt{k+1}$ であるから　$\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leqq\frac{1}{\sqrt{x}}$

常には $\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ でないから　$\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

すなわち　$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$ として辺々を加え，さらに両辺に１を加えると

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\cdots\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

ここで　右辺$=1+\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\left[2\sqrt{x}\right]_1^n=2\sqrt{n}-1$

したがって　$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

[1]，[2] より　$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

5

解答 略

解説

$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$0\leqq x^3\leqq x^2\leqq1$ であるから　$1\geqq1-x^3\geqq1-x^2\geqq0$

ゆえに　$1\geqq\sqrt{1-x^3}\geqq\sqrt{1-x^2}\geqq0$　よって　$1\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

等号は常には成り立たないから

$$\int_0^{\frac{1}{2}}dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad\cdots\cdots①$$

$x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	$0\longrightarrow\frac{1}{2}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

また　$\int_0^{\frac{1}{2}}dx=\left[x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

よって，①から　$\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\frac{\pi}{6}$

6

解答　略

解説

$0\leqq x\leqq1$ であるから　$0\leqq x^2\leqq x$

よって　$-\frac{x}{2}\leqq-\frac{x^2}{2}\leqq0$

ゆえに　$e^{-\frac{x}{2}}\leqq e^{-\frac{x^2}{2}}\leqq e^0=1$

等号は常には成り立たないから　$\int_0^1e^{-\frac{x}{2}}dx<\int_0^1e^{-\frac{x^2}{2}}dx<\int_0^1dx$

ここで　$\int_0^1e^{-\frac{x}{2}}dx=\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

よって　$2\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)<\int_0^1e^{-\frac{x^2}{2}}dx<1$

1

解答　(1) $2\log2-\frac{3}{4}$　(2) $\frac{\pi}{4}$　(3) $2(\sqrt{2}-1)$　(4) π　(5) $\log3-\log2$

解説

求める極限値を S とする。

(1) $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{n+k}{n^2}\log\frac{n+k}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\cdot\frac{n+k}{n}\log\frac{n+k}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}=\int_0^1(1+x)\log(1+x)\,dx$

$=\left[\frac{(1+x)^2}{2}\log(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1+x}{2}dx=2\log2-\left[\frac{(x+1)^2}{4}\right]_0^1$

$=2\log2-\left(1-\frac{1}{4}\right)=2\log2-\frac{3}{4}$

(2) $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって　$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

(3) $S=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=1\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$

$=\left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1=2(\sqrt{2}-1)$

(4) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{(2n)^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{\frac{4n^2-k^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ は，半径２の四分円の面積を表すから　$S=\frac{\pi\cdot2^2}{4}=\pi$

別解　$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{(2n)^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\sqrt{(2n)^2-k^2}}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{2n}\right)^2}=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{2n}\right)^2}$

$=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=4\cdot\frac{\pi\cdot1^2}{4}=\pi$

(5) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n^2}{2n^2+3nk+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2+3\cdot\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\int_0^2\frac{1}{2+3x+x^2}dx=\int_0^2\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\left[\log(x+1)-\log(x+2)\right]_0^2=\log3-\log4-(-\log2)=\log3-\log2$

2

解答　$\frac{4}{e}$

解説

$a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}{n^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(\frac{n+n}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)dx$$
$$=\int_0^1(1+x)'\log(1+x)dx=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1dx$$
$$=2\log 2-1=\log\frac{2^2}{e}=\log\frac{4}{e}$$

よって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{e}$

3

解答　略

解説

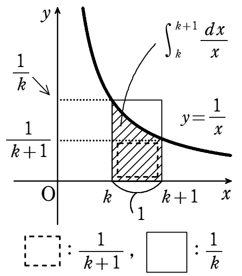
自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき

$$\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{k}$$

常に $\frac{1}{k+1}=\frac{1}{x}$ または $\frac{1}{x}=\frac{1}{k}$ ではないから

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$$

よって　$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$



この不等式で k を 1 から $n-1$ まで加えると，
$n\geqq2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

ここで　$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^n\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^n=\log n$$

したがって　$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n$

この不等式の両辺に 1 を加えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

すなわち　$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$　……①

また　$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}$

したがって　$\log n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}$

この不等式の両辺に $\frac{1}{n}$ を加えると

$$\frac{1}{n}+\log n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

すなわち　$\frac{1}{n}+\log n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$　……②

①，② から　$\frac{1}{n}+\log n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

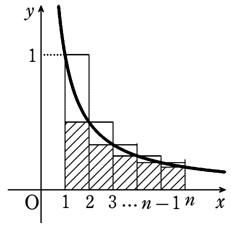
$n=1$ のとき　$\frac{1}{1}+\log 1=1$，$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}=1$，$1+\log 1=1$

したがって，すべての自然数に対して

$$\frac{1}{n}+\log n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq1+\log n$$

別解　$n\geqq2$ のとき

$y=\frac{1}{x}$ のグラフを考えると，右図のようになる。
図の階段状の小さい方の長方形の面積の和を S_1，
大きい方の長方形の面積の和を S_2 とすると



$$S_1=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k},\quad S_2=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

また，$S=\int_1^n\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^n=\log n$ とすると，

図から　$S_1<S<S_2$

ゆえに　$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\log n<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

よって　$\frac{1}{n}+\log n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$　……①

$n=1$ のとき，① の各辺はすべて 1 となり，等号が成り立つ。

したがって，自然数 n について　$\frac{1}{n}+\log n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq1+\log n$

4

解答　略

解説

$y=\frac{1}{2x+1}$ とおくと　$y'=-\frac{2}{(2x+1)^2}<0$

よって，関数 y は $x\geqq0$ において単調に減少する。

ゆえに，$0\leqq a<x<a+1$ のとき　$\frac{1}{2(a+1)+1}<\frac{1}{2x+1}<\frac{1}{2a+1}$

よって　$\int_a^{a+1}\frac{dx}{2a+3}<\int_a^{a+1}\frac{dx}{2x+1}<\int_a^{a+1}\frac{dx}{2a+1}$

したがって　$\frac{1}{2a+3}<\int_a^{a+1}\frac{dx}{2x+1}<\frac{1}{2a+1}$

これより　$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+3}<\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{2x+1}$　……①

$\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{2x+1}<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$　……②

ここで　$\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{2x+1}=\int_0^1\frac{dx}{2x+1}+\int_1^2\frac{dx}{2x+1}+\cdots\cdots+\int_{n-1}^n\frac{dx}{2x+1}$

$$=\int_0^n\frac{dx}{2x+1}=\left[\frac{1}{2}\log(2x+1)\right]_0^n=\frac{1}{2}\log(2n+1)$$

同様に　$\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{2x+1}=\frac{1}{2}\log(2n+3)$

① から　$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\log(2n+1)$

② から　$\frac{1}{2}\log(2n+3)<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}$

したがって　$\frac{1}{2}\log(2n+3)<1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}<1+\frac{1}{2}\log(2n+1)$

5

解答　(1)　$\frac{\pi}{4}$　(2)　略

解説

(1)　$x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	$0\to\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ で，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$$

よって　$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

(2)　$0\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$0\leqq x^n\leqq x^2$

よって　$(1-x^n)-(1-x^2)=x^2-x^n\geqq0$

ゆえに　$1-x^n\geqq1-x^2$　すなわち　$\sqrt{1-x^n}\geqq\sqrt{1-x^2}>0$

よって　$1\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ゆえに　$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\leqq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx\leqq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(1) の結果から　$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx\leqq\frac{\pi}{4}$

6

解答　(1)　$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$ (C は積分定数)　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$　(C は積分定数)

(2)　$0\leqq x\leqq\frac{1}{3}$ のとき，$1-x^2>0$ であるから

$(1+x^2)(1-x^2)\leqq1\leqq\left(1+\frac{9}{8}x^2\right)(1-x^2)$ を示せばよい。

$x\geqq0$ であるから　$(1+x^2)(1-x^2)=1-x^4\leqq1$

また　$\left(1+\frac{9}{8}x^2\right)(1-x^2)-1=\frac{x^2}{8}(1-3x)(1+3x)\geqq0$

よって　$1+x^2\leqq\frac{1}{1-x^2}\leqq1+\frac{9}{8}x^2$　……①

(3)　$0\leqq x\leqq\frac{1}{3}$ において，① の等号は常には成り立たないから

$$\int_0^{\frac{1}{3}}(1+x^2)dx<\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{1-x^2}<\int_0^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{9}{8}x^2\right)dx$$

すなわち　$\left[x+\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{3}}<\left[\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{1}{3}}<\left[x+\dfrac{3}{8}x^3\right]_0^{\frac{1}{3}}$

ゆえに　$\dfrac{28}{81}<\dfrac{1}{2}\log 2<\dfrac{25}{72}$　　よって　$\dfrac{56}{81}<\log 2<\dfrac{25}{36}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\log\dfrac{27}{16}$　　(2)　$\dfrac{27}{16}$

解説

(1)　$\displaystyle\int_0^1\log\frac{x+2}{x+1}dx=\int_0^1\{\log(x+2)-\log(x+1)\}dx$

$$=\int_0^1(x+2)'\log(x+2)dx-\int_0^1(x+1)'\log(x+1)dx$$

$$=\Big[(x+2)\log(x+2)\Big]_0^1-\int_0^1(x+2)\cdot\frac{1}{x+2}dx$$

$$-\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^1+\int_0^1(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx$$

$$=3\log 3-2\log 2-2\log 2=3\log 3-4\log 2$$

$$=\log\frac{3^3}{2^4}=\log\frac{27}{16}$$

(2)　$a_n=\left\{\dfrac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\log\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\log\frac{2+\frac{n}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}$$

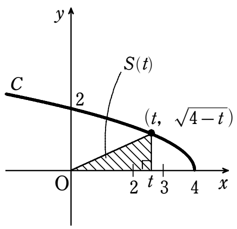
$$=\int_0^1\log\frac{2+x}{1+x}dx=\log\frac{27}{16}\quad\text{（(1) から）}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{27}{16}$

$\boxed{2}$

解答　$\dfrac{28\sqrt{2}-17}{15}$

解説



$S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot\sqrt{4-t}=\dfrac{1}{2}t\sqrt{4-t}$

$\dfrac{t_n-t_0}{n}=\dfrac{1}{n}$ より，$t_k=2+\dfrac{k}{n}$　$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

と表すことができるから

$$S(t_k)=\frac{1}{2}t_k\sqrt{4-t_k}=\frac{1}{2}\left(2+\frac{k}{n}\right)\sqrt{4-\left(2+\frac{k}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{k}{n}\right)\sqrt{2-\frac{k}{n}}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(2+\frac{k}{n}\right)\sqrt{2-\frac{k}{n}}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(2+x)\sqrt{2-x}\,dx$$

ここで，$\sqrt{2-x}=u$ とおくと

$x=2-u^2$，$dx=-2udu$

x と u の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
u	$\sqrt{2}\longrightarrow 1$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{1}(4-u^2)u\cdot(-2u)du=\int_1^{\sqrt{2}}(4u^2-u^4)du$

$$=\left[\frac{4}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{28\sqrt{2}-17}{15}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　$2-\sqrt{2}$　　(3)　略

解説

(1)　$f(t)=e^t-(1+t)$ とすると　　$f'(t)=e^t-1$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=0$

$f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，すべての実数 t に対して　　$f(t)\geqq 0$

すなわち　　$1+t\leqq e^t$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

$$=\left[\tan x-\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=(1-\sqrt{2})-(-1)=2-\sqrt{2}$$

(3)　(1) の不等式の t を $\sin x$ とすると　　$1+\sin x\leqq e^{\sin x}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において，$1+\sin x>0$，$e^{\sin x}>0$ であるから　　$e^{-\sin x}\leqq\dfrac{1}{1+\sin x}$

また，(1) の不等式の t を $-\sin x$ とすると　　$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}$

よって，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において　　$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}\leqq\dfrac{1}{1+\sin x}$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx=\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1=\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) の結果と合わせて　　$\displaystyle\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$

1

解答　(1)　$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　(2)　$2\sqrt{5}-3$

解説

(1)　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に $\sin\alpha=2\cos\alpha$ を代入すると　$5\cos^2\alpha=1$

$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から　$\cos\alpha\geqq0$　　よって　$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

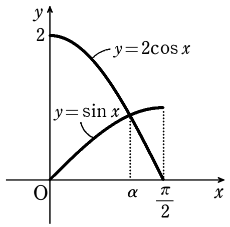
また　$\sin\alpha=2\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(2)　$0\leqq x\leqq\alpha$ のとき

$|\sin x-2\cos x|=-(\sin x-2\cos x)$

$\alpha\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$|\sin x-2\cos x|=\sin x-2\cos x$



よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-2\cos x|dx$$

$$=-\int_0^{\alpha}(\sin x-2\cos x)dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-2\cos x)dx$$

$$=-\Big[-\cos x-2\sin x\Big]_0^{\alpha}+\Big[-\cos x-2\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-(-\cos\alpha-2\sin\alpha)\times2+(-1)+(-2)=2\cos\alpha+4\sin\alpha-3$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-3=2\sqrt{5}-3$$

2

解答　(1)　$-\dfrac{e^{-x}}{5}(\sin2x+2\cos2x)+C$（$C$は積分定数）　　(2)　$\dfrac{2}{5}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)^2$

解説

(1)　$\displaystyle\int e^{-x}\sin2x\,dx=\int\sin2x(-e^{-x})'dx=-e^{-x}\sin2x+2\int\cos2x(-e^{-x})'dx$

$$=-e^{-x}\sin2x-2e^{-x}\cos2x-4\int e^{-x}\sin2x\,dx$$

よって　$\displaystyle5\int e^{-x}\sin2x\,dx=-e^{-x}\sin2x-2e^{-x}\cos2x$

積分定数を考えて

$\displaystyle\int e^{-x}\sin2x\,dx=-\frac{e^{-x}}{5}(\sin2x+2\cos2x)+C$　（Cは積分定数）

別解　$(e^{-x}\sin2x)'=-e^{-x}\sin2x+2e^{-x}\cos2x$　……①

$(e^{-x}\cos2x)'=-e^{-x}\cos2x-2e^{-x}\sin2x$　……②

①＋②×2 から　$(e^{-x}\sin2x)'+2(e^{-x}\cos2x)'=-5e^{-x}\sin2x$

よって　$e^{-x}\sin2x=-\dfrac{1}{5}\{(e^{-x}\sin2x)'+2(e^{-x}\cos2x)'\}$

ゆえに　$\displaystyle\int e^{-x}\sin2x\,dx=-\frac{1}{5}(e^{-x}\sin2x+2e^{-x}\cos2x)+C$

$$=-\frac{e^{-x}}{5}(\sin2x+2\cos2x)+C\ \text{（Cは積分定数）}$$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-x}|\sin2x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-x}\sin2x\,dx$

$$=\left[-\frac{e^{-x}}{5}(\sin2x+2\cos2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-\frac{e^{-x}}{5}(\sin2x+2\cos2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\left\{-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}\times(-2)\right\}\times2-\left(-\frac{1}{5}\times2\right)-\left(-\frac{e^{-\pi}}{5}\times2\right)$$

$$=\frac{2}{5}\left(e^{-\pi}+2e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)=\frac{2}{5}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)^2$$

3

解答　(1)　2π　　(2)　0　　(3)　$m=n$ のとき π，$m\neq n$ のとき 0　　(4)　2013π

解説

(1)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}x(-\cos x)'dx=\Big[-x\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx$

$$=2\pi+\Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi}=2\pi$$

(2)　$\sin2x\sin3x=-\dfrac{1}{2}(\cos5x-\cos x)$ であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin2x\sin3x\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos5x-\cos x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin5x}{5}-\sin x\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

(3)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}dx$

[1]　$m=n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos2mx-1)dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin2mx}{2m}-x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot(-2\pi)=\pi$$

[2]　$m\neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}-\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

(4)　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+\sin2x+\cdots\cdots+\sin2013x)^2dx$

(3)より，自然数 m，n について，$m\neq n$ のとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0$ であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+\sin2x+\cdots\cdots+\sin2013x)^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2x+\sin^22x+\cdots\cdots+\sin^22013x)dx$$

また，$m=n$ のとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\pi$ であるから　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2mx\,dx=\pi$

したがって　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2x+\sin^22x+\cdots\cdots+\sin^22013x)dx$

$=\pi+\pi+\cdots\cdots+\pi$　（2013個の π の和）

$=2013\pi$

以上から　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2dx=2013\pi$

4

解答　（ア）　0　　（イ）　$\dfrac{\pi}{4}$

解説

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx=\Big[\log|\sin x+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\overset{ア}{=}0\quad\cdots\cdots①$$

また　$\displaystyle I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots②$$

①，②から　$2I=\dfrac{\pi}{2}$　　したがって　$I\overset{イ}{=}\dfrac{\pi}{4}$

参考　$I-J=0$ は，次のようにおき換えて導くこともできる。

$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ において，$x=\dfrac{\pi}{2}-y$ とおくと

$dx=-dy$

x	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
y	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	0

よって　$\displaystyle J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}\cdot(-dy)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos y}{\cos y+\sin y}dy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sin y+\cos y}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=I$$

ゆえに　$I-J=0$

5

解答　証明略，$\dfrac{\pi^2}{4}$

解説

(前半)　$\displaystyle I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx$ とする。

x	0	$\to$	π
t	π	$\to$	0

$x=\pi-t$ とおくと　　$dx=-dt$

$$I=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\cdot(-1)dt=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-I$$

よって　$\displaystyle2I=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

すなわち　$\displaystyle\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

(後半)

$\dfrac{\sin x}{1+\cos^2x}=\dfrac{\sin x}{2-\sin^2x}$ と変形できるから

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx$$

x	0	$\to$	π
t	1	$\to$	-1

$\cos x=t$ とおくと　　$-\sin x\,dx=dt$

よって　与式$=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_1^{-1}\dfrac{-1}{1+t^2}dt=\dfrac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\dfrac{dt}{1+t^2}$

$=\pi\displaystyle\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^2}$

$t=\tan\theta$ とおくと　$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

t	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

ゆえに　与式$=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\pi\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2}{4}$

6

解答　(1)　$\log\sqrt{2}$　　(2)　$\dfrac{1}{n}\left(\cos n\pi-\cos\dfrac{n}{2}\pi\right)$　　(3)　$\log\sqrt{2}-\dfrac{8}{15}$

解説

(1)　$I_0=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sin x}dx=\Big[\log|\sin x|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\log\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\log\sqrt{2}$

(2)　$I_n-I_{n-1}=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(2n+1)x-\cos(2n-1)x}{\sin x}dx$

ここで　$\cos(2n+1)x-\cos(2n-1)x$

$=-2\sin\dfrac{(2n+1)x+(2n-1)x}{2}\sin\dfrac{(2n+1)x-(2n-1)x}{2}=-2\sin 2nx\sin x$

であるから　$I_n-I_{n-1}=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-2\sin 2nx)dx=\left[\dfrac{\cos 2nx}{n}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{n}\left(\cos n\pi-\cos\dfrac{n}{2}\pi\right)$

(3)　$I_5=(I_5-I_4)+(I_4-I_3)+(I_3-I_2)+(I_2-I_1)+(I_1-I_0)+I_0$

(2)から　$I_5-I_4=\dfrac{1}{5}\left(\cos 5\pi-\cos\dfrac{5}{2}\pi\right)=-\dfrac{1}{5}$

同様にして　$I_4-I_3=0$，$I_3-I_2=-\dfrac{1}{3}$，$I_2-I_1=1$，$I_1-I_0=-1$

よって　$I_5=-\dfrac{1}{5}+0-\dfrac{1}{3}+1-1+\log\sqrt{2}=\log\sqrt{2}-\dfrac{8}{15}$

7

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと　$dx=(-1)\cdot dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$
t	$\dfrac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

よって　$I_{m,n}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$

$=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^m\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\cos^n\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\cdot(-1)dt$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx=I_{n,m}$

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$\displaystyle\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int(\sin^m x\cos x)\cos^{n-1}x\,dx=\int\left(\dfrac{\sin^{m+1}x}{m+1}\right)'\cos^{n-1}x\,dx$

$=\dfrac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}-\displaystyle\int\dfrac{\sin^{m+1}x}{m+1}\cdot(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)dx$

$=\dfrac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\dfrac{n-1}{m+1}\displaystyle\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx$　……①

また　$\displaystyle\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx=\int\sin^m x\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx$

$=\displaystyle\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx-\int\sin^m x\cos^n x\,dx$　……②

①，②から　$\displaystyle\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\dfrac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\dfrac{n-1}{m+n}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx=\left[\dfrac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{n-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$

したがって　$I_{m,n}=\dfrac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$

8

解答　$x=0$，1 で最大値 $2\log 2-1$；$x=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $3\log\dfrac{3}{2}-1$

解説

$0\leqq t\leqq x$ で $|t-x|=x-t$，$x\leqq t\leqq 1$ で $|t-x|=t-x$ であるから

$f(x)=\displaystyle\int_0^x\log(-t+x+1)dt+\int_x^1\log(t-x+1)dt$

ここで，$s=-t+x+1$ とおくと　$ds=-dt$

t	$0 \longrightarrow x$
s	$x+1 \longrightarrow 1$

このとき　$\displaystyle\int_0^x\log(-t+x+1)dt=\int_{x+1}^1\log s\cdot(-ds)$

$=\displaystyle\int_1^{x+1}\log s\,ds$

$=\Big[s\log s-s\Big]_1^{x+1}=(x+1)\log(x+1)-(x+1)+1$

$=(x+1)\log(x+1)-x$

また，$u=t-x+1$ とおくと　$du=dt$

t	$x \longrightarrow 1$
u	$1 \longrightarrow 2-x$

このとき　$\displaystyle\int_x^1\log(t-x+1)dt=\int_1^{2-x}\log u\,du$

$=\Big[u\log u-u\Big]_1^{2-x}$

$=(2-x)\log(2-x)-(2-x)+1$

$=(2-x)\log(2-x)+x-1$

よって　$f(x)=(x+1)\log(x+1)+(2-x)\log(2-x)-1$

ゆえに　$f'(x)=\log(x+1)+(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}-\log(2-x)+(2-x)\left(-\dfrac{1}{2-x}\right)$

$=\log(x+1)-\log(2-x)=\log\dfrac{x+1}{2-x}$

$0<x<1$ で $f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{2}$

$f(0)=f(1)=2\log 2-1$ であるから，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\dfrac{1}{2}$	…	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2\log 2-1$	↘	極小	↗	$2\log 2-1$

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で極小かつ最小となる。

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3\log\dfrac{3}{2}-1$ であるから，求める最大値，最小値は

$x=0$，1 で最大値　$2\log 2-1$，　$x=\dfrac{1}{2}$ で最小値　$3\log\dfrac{3}{2}-1$

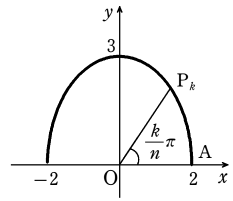
9

解答　$\dfrac{13}{72}$

解説

点 P_k の座標は次のように表すことができる。

$\left(OP_k\cos\dfrac{k}{n}\pi,\ OP_k\sin\dfrac{k}{n}\pi\right)$



点 P_k は楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上にあるから

$OP_k^2\left(\dfrac{1}{4}\cos^2\dfrac{k}{n}\pi+\dfrac{1}{9}\sin^2\dfrac{k}{n}\pi\right)=1$

よって　$\dfrac{1}{OP_k^2}=\dfrac{1}{4}\cos^2\dfrac{k}{n}\pi+\dfrac{1}{9}\sin^2\dfrac{k}{n}\pi$

したがって　(与式)$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{OP_k^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\dfrac{k}{n}\pi+\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\dfrac{k}{n}\pi\right)$

$=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1\cos^2\pi x\,dx+\dfrac{1}{9}\int_0^1\sin^2\pi x\,dx$

$=\dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^1(1+\cos 2\pi x)dx+\dfrac{1}{18}\int_0^1(1-\cos 2\pi x)dx$

$=\dfrac{1}{8}\left[x+\dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1+\dfrac{1}{18}\left[x-\dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1=\dfrac{13}{72}$

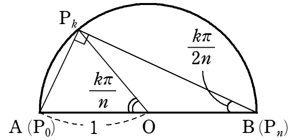
10

解答　(1)　$l_n(k)=2\left(\sin\dfrac{k\pi}{2n}+\cos\dfrac{k\pi}{2n}+1\right)$　　(2)　$\alpha=2\left(\dfrac{4}{\pi}+1\right)$

解説

(1)　線分 AB の中点を O とすると

$\angle AOP_k=\dfrac{k}{n}\pi$



よって　$\angle ABP_k=\dfrac{1}{2}\angle AOP_k=\dfrac{k\pi}{2n}$

ゆえに　$AP_k=AB\sin\angle ABP_k=2\sin\dfrac{k\pi}{2n}$，

$P_kB=AB\cos\angle ABP_k=2\cos\dfrac{k\pi}{2n}$

したがって　$l_n(k)=2\left(\sin\dfrac{k\pi}{2n}+\cos\dfrac{k\pi}{2n}+1\right)$

(2)　$\alpha=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}l_n(k)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\left(\sin\dfrac{k\pi}{2n}+\cos\dfrac{k\pi}{2n}+1\right)$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)+1\right\}$$

$$=2\int_0^1\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}+1\right)dx=2\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}+x\right]_0^1$$

$$=2\left\{\left(\frac{2}{\pi}+1\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\right)\right\}=2\left(\frac{4}{\pi}+1\right)$$

11

解答　(1)　略　　(2)　$\frac{1}{2}$

解説

(1)　$f(x)=x-\log(x+1)$，$g(x)=\log(x+1)-x+\frac{1}{2}x^2$ とおくと

$$f'(x)=\frac{x}{x+1},\quad g'(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

$x>0$ のとき $f'(x)>0$，$g'(x)>0$ であるから，$x\geqq 0$ において $f(x)$，$g(x)$ はともに単調に増加する。

また　　$f(0)=0$，$g(0)=0$

ゆえに，$x\geqq 0$ のとき　　$f(x)\geqq 0$，$g(x)\geqq 0$

よって　　$x-\frac{1}{2}x^2\leqq\log(x+1)\leqq x$

(2)　(1) において，$x=\frac{k}{n^2}$ とすると　　$\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\leqq\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqq\frac{k}{n^2}$

$k=1$，2，……，n として辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

ここで　　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$

また　　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$

$$=\int_0^1 x\,dx-0\cdot\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{2}$$

したがって　　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

12

解答　(1)　$\log 2-2+\frac{\pi}{2}$　　(2)　$2e^{-2+\frac{\pi}{2}}$

解説

(1)　$\int_0^1\log(1+x^2)dx=\int_0^1(x)'\log(1+x^2)dx=\Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1-2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$=\log 2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\log 2-2\int_0^1 dx+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\log 2-2+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\quad\cdots\cdots①$$

$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって　　$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに，① から　　$\int_0^1\log(1+x^2)dx=\log 2-2+\frac{\pi}{2}$

(2)　$\sqrt[n]{a_n}>0$ であるから，$\sqrt[n]{a_n}$ の自然対数をとると

$$\log\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{n}\log a_n=\frac{1}{n}\log(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdots\cdots(n^2+n^2)$$

$$=\frac{1}{n}\{\log(n^2+1^2)+\log(n^2+2^2)+\cdots\cdots+\log(n^2+n^2)\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n^2+k^2)$$

したがって　　$\log\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}=\log\sqrt[n]{a_n}-\log n^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n^2+k^2)-\log n^2$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\log(n^2+k^2)-n\log n^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\log(n^2+k^2)-\sum_{k=1}^{n}\log n^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log(n^2+k^2)-\log n^2\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n^2+k^2}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

よって　　$\lim_{n\to\infty}\log\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\int_0^1\log(1+x^2)dx$

(1) より，$\int_0^1\log(1+x^2)dx=\log 2-2+\frac{\pi}{2}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}=\log 2-2+\frac{\pi}{2}$$

すなわち　　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}=e^{\log 2-2+\frac{\pi}{2}}=2e^{-2+\frac{\pi}{2}}$

13

解答　(1)　(ア)　略　　(イ)　略　　(2)　略

解説

(1)　(ア)　$f(x)=e^x-(x+1)$ とおくと　　$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

よって，$f(x)$ は $x=0$ のとき最小値 0 をとる。

したがって，すべての実数 x に対して　$f(x)\geqq 0$

よって　　$1+x\leqq e^x$

(イ)　(ア) から，すべての実数 t に対して　　$1+t\leqq e^t$

$t=-x^2$ とおくと　　$1-x^2\leqq e^{-x^2}$　……①

また，$t=x^2$ とおくと　　$0<1+x^2\leqq e^{x^2}$

したがって　　$e^{-x^2}\leqq\frac{1}{1+x^2}$　……②

①，② から　　$1-x^2\leqq e^{-x^2}\leqq\frac{1}{1+x^2}$

(2)　(1) の (イ) の不等式において，等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1(1-x^2)dx<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\quad\cdots\cdots③$$

ここで　　$\int_0^1(1-x^2)dx=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$

また，$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ について，$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

したがって　　$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

よって，③ から　　$\frac{2}{3}<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\frac{\pi}{4}$

14

解答　18

解説

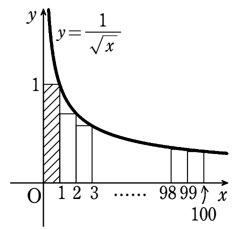
まず，下左図より

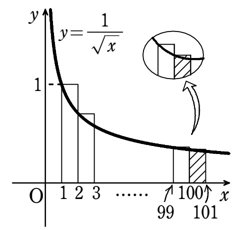
$$S<1+\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100}=1+20-2=19$$

下右図より

$$S>\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{\sqrt{100}}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100}+\frac{1}{10}=20-2+\frac{1}{10}=18+\frac{1}{10}>18$$

ゆえに　$18<S<18+1$ より　$n=18$





15

解答　(1)　$\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}$　　(2)　$\frac{\pi}{4}$　　(3)　略　　(4)　$\frac{\pi}{4}$

解説

(1)　和 $1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ は 初項 1，公比 $-x^2$，項数 n の等比数列の和であるから，$-x^2\neq 1$ より

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}\quad\cdots\cdots①$$

(2)　$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって　　$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$

$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ で $\dfrac{1}{1+x^2}\leqq 1$ であるから，$0\leqq x\leqq 1$ で　$\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}\leqq x^{2n}$

両辺を 0 から 1 まで x について積分すると　$\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\leqq\int_0^1 x^{2n}dx$

$$\int_0^1 x^{2n}dx=\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2n+1}$$

であるから，不等式 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\leqq\frac{1}{2n+1}$ が成り立つ。

(4)　$1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}$ であるから，① の両辺を

0 から 1 まで x について積分すると　$\displaystyle\int_0^1\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}\right\}dx=\int_0^1\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}dx$

ここで　$\displaystyle\int_0^1\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}\right\}dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1(-1)^{k-1}x^{2k-2}dx=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1}\right]_0^1$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

$$\int_0^1\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}dx\leqq\int_0^1\frac{1+x^{2n}}{1+x^2}dx$$

$$\int_0^1\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}dx\geqq\int_0^1\frac{1-x^{2n}}{1+x^2}dx$$

であるから　$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x^{2n}}{1+x^2}dx\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\leqq\int_0^1\frac{1+x^{2n}}{1+x^2}dx$

(2)，(3) から　$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x^{2n}}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}-\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\geqq\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n+1}$

$$\int_0^1\frac{1+x^{2n}}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\leqq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n+1}$$

ゆえに　$\displaystyle\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n+1}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\leqq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{4}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{4}$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$

$\boxed{1}$

解答　$\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$

解説

$3\cos 2x+7\cos x=3(2\cos^2 x-1)+7\cos x=6\cos^2 x+7\cos x-3$

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq\pi$ では $-1\leqq t\leqq 1$ であり，

$$f(x)=6t^2+7t-3=(2t+3)(3t-1)$$

$-1\leqq t\leqq 1$ では $2t+3>0$ であるから

$-1\leqq t\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$f(x)\leqq 0$，　$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq 1$ のとき　$f(x)\geqq 0$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とおくと，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ……① であり，

$0\leqq x\leqq\alpha$ のとき　$f(x)\geqq 0$，　$\alpha\leqq x\leqq\pi$ のとき　$f(x)\leqq 0$

したがって　$\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\alpha}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\pi}\{-f(x)\}dx$

ここで　$\displaystyle\int f(x)dx=\int(3\cos 2x+7\cos x)dx=\frac{3}{2}\sin 2x+7\sin x+C$

$=3\sin x\cos x+7\sin x+C$　(C は積分定数)

また，① から　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\Big[3\sin x\cos x+7\sin x\Big]_0^{\alpha}-\Big[3\sin x\cos x+7\sin x\Big]_{\alpha}^{\pi}$

$=2(3\sin\alpha\cos\alpha+7\sin\alpha)$

$=2\left(3\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+7\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$

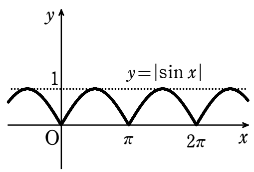
$\boxed{2}$

解答　$\dfrac{1+e^{\pi}}{2e^{n\pi}}$

解説

n を自然数とすると，$(n-1)\pi\leqq x\leqq n\pi$ のとき

$|\sin x|=(-1)^{n+1}\sin x$



よって　$\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}|\sin x|dx$

$\displaystyle=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}(-1)^{n+1}\sin x\,dx$

$\displaystyle=(-1)^{n+1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}\sin x\,dx$

ここで　$(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$，

$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

よって　$e^{-x}\sin x=-\dfrac{1}{2}\{(e^{-x}\sin x)'+(e^{-x}\cos x)'\}$

この両辺を積分すると　$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$　(C は積分定数)

よって　$\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}\sin x\,dx=\left[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$

$=-\dfrac{e^{-n\pi}}{2}\cdot\cos n\pi+\dfrac{e^{-(n-1)\pi}}{2}\cdot\cos(n-1)\pi$

$=-\dfrac{e^{-n\pi}}{2}\cdot(-1)^n+\dfrac{e^{-(n-1)\pi}}{2}\cdot(-1)^{n-1}$

$=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}e^{-n\pi}(1+e^{\pi})$

したがって　$\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}|\sin x|dx=(-1)^{n+1}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2}e^{-n\pi}(1+e^{\pi})=\frac{1+e^{\pi}}{2e^{n\pi}}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$m\neq\pm n$ のとき 0，$m=\pm n$ $(\neq 0)$ のとき π，$m=n=0$ のとき 2π

(2)　$\dfrac{n(n+1)}{2}\pi$

解説

(1)　与式の右辺を変形して

$$I_{m,\ n}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}dx$$

[1]　$m+n\neq 0$ かつ $m-n\neq 0$　すなわち　$m\neq\pm n$ のとき

$$I_{m,\ n}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi}=0$$

[2]　$m+n\neq 0$ かつ $m-n=0$　すなわち　$m=n\neq 0$ のとき

$$I_{m,\ n}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x+1\}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+x\right]_0^{2\pi}=\pi$$

[3]　$m+n=0$ かつ $m-n\neq 0$　すなわち　$m=-n\neq 0$ のとき

$$I_{m,\ n}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{1+\cos(m-n)x\}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi}=\pi$$

[4]　$m+n=0$ かつ $m-n=0$　すなわち　$m=n=0$ のとき

$$I_{m,\ n}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+1)dx=\int_0^{2\pi}dx=\Big[x\Big]_0^{2\pi}=2\pi$$

以上から　$m\neq\pm n$ のとき　$I_{m,\ n}=0$，　$m=\pm n$ $(\neq 0)$ のとき　$I_{m,\ n}=\pi$，

$m=n=0$ のとき　$I_{m,\ n}=2\pi$

(2)　(1) [1] から

$$J_n=\int_0^{2\pi}(\cos x+\sqrt{2}\cos 2x+\cdots\cdots+\sqrt{n}\cos nx)^2dx$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos^2 x+2\cos^2 2x+\cdots\cdots+n\cos^2 nx)dx$$

ここで，(1) [2] から，k が自然数のとき　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2 kx\,dx=\pi$

よって　$J_n=\pi+2\pi+\cdots\cdots+n\pi=(1+2+\cdots\cdots+n)\pi=\dfrac{n(n+1)}{2}\pi$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{2}$　　(2)　$\log|3\sin x+\cos x|+C$　(C は積分定数)

(3)　$I=\dfrac{3}{20}\pi-\dfrac{1}{10}\log 3$，$J=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{3}{10}\log 3$

解説

(1)　$\displaystyle 3I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x+\cos x}{3\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

(2)　$\displaystyle\int\frac{3\cos x-\sin x}{3\sin x+\cos x}dx=\int\frac{(3\sin x+\cos x)'}{3\sin x+\cos x}dx$

$=\log|3\sin x+\cos x|+C$　(C は積分定数)

(3)　(2) から　$\displaystyle 3J-I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x-\sin x}{3\sin x+\cos x}dx=\Big[\log|3\sin x+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\log 3$

$3I+J=\dfrac{\pi}{2}$，$3J-I=\log 3$ から　　$I=\dfrac{3}{20}\pi-\dfrac{1}{10}\log 3$，$J=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{3}{10}\log 3$

5

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{\pi}{4}\log 3$

解説

(1)　$x=\pi-t$ とおくと　　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\pi$
t	$\pi\longrightarrow 0$

証明する等式の左辺を I とすると

$$I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\cdot(-1)dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-I$$

よって　　$I=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

(2)　$J=\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$ とすると，(1) から

$$J=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$$

$\cos x=u$ とおくと　　$-\sin x\,dx=du$

x と u の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\pi$
u	$1\longrightarrow -1$

よって　　$J=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_1^{-1}\dfrac{-1}{4-u^2}du=\dfrac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{4-u^2}du$

$$=\pi\int_0^1\frac{1}{4-u^2}du=\frac{\pi}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)du$$

$$=\frac{\pi}{4}\Big[\log(2+u)-\log(2-u)\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}\log 3$$

6

解答　(1)　$I_n=\dfrac{2n}{n+5}I_{n-1}$　$(n\geqq 1)$　　(2)　$I_n=\dfrac{3\cdot n!\cdot 2^{n+8}}{(n+5)!}$

解説

(1)　$n\geqq 1$ のとき

$$I_n=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{(x-1)^5}{5}\right\}'(x+1)^n dx$$

$$=\left[\frac{(x-1)^5}{5}(x+1)^n\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)^5}{5}\cdot n(x+1)^{n-1}dx$$

$$=0-\frac{n}{5}\int_{-1}^{1}(x-1)^5(x+1)^{n-1}dx=-\frac{n}{5}\int_{-1}^{1}(x-1)^4\{(x+1)-2\}(x+1)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{5}\int_{-1}^{1}(x-1)^4(x+1)^n dx+\frac{2}{5}n\int_{-1}^{1}(x-1)^4(x+1)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{5}I_n+\frac{2}{5}nI_{n-1}$$

よって　　$\dfrac{n+5}{5}I_n=\dfrac{2}{5}nI_{n-1}$

$n+5>0$ であるから　　$I_n=\dfrac{2n}{n+5}I_{n-1}$ $(n\geqq 1)$

(2)　$I_n=\dfrac{2n}{n+5}I_{n-1}=\dfrac{2n}{n+5}\cdot\dfrac{2(n-1)}{(n-1)+5}I_{n-2}$

$$=\frac{2n}{n+5}\cdot\frac{2(n-1)}{n+4}\cdot\frac{2(n-2)}{n+3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2\cdot 1}{6}I_0$$

$$=\frac{2^n\{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdots\cdot 2\cdot 1\}}{(n+5)(n+4)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 6}I_0=\frac{2^n\cdot n!\,5!}{(n+5)!}I_0$$

ここで　　$I_0=\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-1)^4dx=\left[\dfrac{(x-1)^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\dfrac{2^5}{5}$

よって　　$I_n=\dfrac{2^n\cdot n!\,5!}{(n+5)!}\cdot\dfrac{2^5}{5}=\dfrac{3\cdot n!\cdot 2^{n+8}}{(n+5)!}$

7

解答　(1)　順に $\dfrac{(b-a)^{m+1}}{m+1}$，$-\dfrac{(b-a)^3}{6}$　　(2)　$I(m,\ n)=-\dfrac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$

(3)　$-\dfrac{(b-a)^{11}}{2772}$

解説

(1)　$I(m,\ 0)=\displaystyle\int_a^b(x-a)^m dx=\left[\dfrac{(x-a)^{m+1}}{m+1}\right]_a^b=\dfrac{(b-a)^{m+1}}{m+1}$

$I(1,\ 1)=\displaystyle\int_a^b(x-a)(x-b)dx=\int_a^b\left\{\dfrac{(x-a)^2}{2}\right\}'(x-b)dx$

$$=\left[\frac{(x-a)^2}{2}\cdot(x-b)\right]_a^b-\int_a^b\frac{(x-a)^2}{2}dx=-\left[\frac{(x-a)^3}{6}\right]_a^b=-\frac{(b-a)^3}{6}$$

(2)　$I(m,\ n)=\displaystyle\int_a^b(x-a)^m(x-b)^n dx=\int_a^b\left\{\dfrac{(x-a)^{m+1}}{m+1}\right\}'(x-b)^n dx$

$$=\left[\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1}\cdot(x-b)^n\right]_a^b-\frac{n}{m+1}\int_a^b(x-a)^{m+1}(x-b)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$$

(3)　$I(5,\ 5)=-\dfrac{5}{6}I(6,\ 4)=-\dfrac{5}{6}\cdot\left(-\dfrac{4}{7}\right)I(7,\ 3)=\dfrac{5\cdot 4}{6\cdot 7}\cdot\left(-\dfrac{3}{8}\right)I(8,\ 2)$

$$=-\frac{5\cdot 4\cdot 3}{6\cdot 7\cdot 8}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)I(9,\ 1)=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)I(10,\ 0)$$

$$=-\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\cdot\frac{(b-a)^{11}}{11}=-\frac{(b-a)^{11}}{2772}$$

8

解答　(1)　$1<a<e$　　(2)　$a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

解説

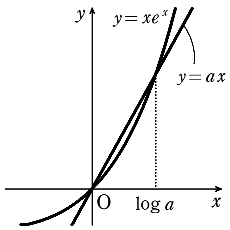
(1)　$y=xe^x$，$y=ax$ から y を消去すると　　$xe^x=ax$

すなわち　$x(e^x-a)=0$

よって　　$x=0$，$\log a$

ゆえに，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが $0<x<1$ の範囲で交点をもつための条件は　　$0<\log a<1$

すなわち　　$1<a<e$



(2)　$f(x)-g(x)=xe^x-ax=x(e^x-a)$

[1]　$0<a\leqq 1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において　　$f(x)-g(x)\geqq 0$

よって　　$h(a)=\displaystyle\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^1 xe^x dx-\int_0^1 ax\,dx$

$$=\int_0^1 x(e^x)'dx-\int_0^1 ax\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx-\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\Big[e^x\Big]_0^1-\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=\left[(x-1)e^x-\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{a}{2}+1$$

よって，$0<a\leqq 1$ のとき，$h(a)$ は $a=1$ で最小値をとる。

[2]　$1<a<e$ のとき

(1) から，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは $0<x<1$ の範囲で交点をもち，交点の x 座標は　　$\log a$

よって　　$h(a)=\displaystyle\int_0^{\log a}(ax-xe^x)dx+\int_{\log a}^{1}(xe^x-ax)dx$

$$=\left[-(x-1)e^x+\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\log a}+\left[(x-1)e^x-\frac{a}{2}x^2\right]_{\log a}^{1}$$

$$=\left\{-(\log a-1)a+\frac{a}{2}(\log a)^2-1\right\}+\left\{-\frac{a}{2}-(\log a-1)a+\frac{a}{2}(\log a)^2\right\}$$

$$=a(\log a)^2-2a\log a+\frac{3}{2}a-1$$

$$h'(a)=\left\{(\log a)^2+a\cdot(2\log a)\cdot\frac{1}{a}\right\}-2\left(\log a+a\cdot\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{2}=(\log a)^2-\frac{1}{2}$$

$h'(a)=0$ とすると　　$(\log a)^2=\dfrac{1}{2}$　　　すなわち　　$\log a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$1<a<e$ から　　$a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$1<a<e$ における $h(a)$ の増減表は右のようになる。

a	1	$\cdots$	$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\cdots$	e
$h'(a)$	／	$-$	0	$+$	／
$h(a)$	／	↘	極小	↗	／

よって，$1<a<e$ のとき，$h(a)$ は $a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ で最小値をとる。

[3]　$e\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において　　$f(x)-g(x)\leqq 0$

よって　　$h(a)=-\displaystyle\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=\dfrac{a}{2}-1$

ゆえに，$e\leqq a$ のとき，$h(a)$ は $a=e$ で最小値をとる。

[1]～[3] から，$h(a)$ は $a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ で最小値をとる。

よって，求める a の値は　　$a=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

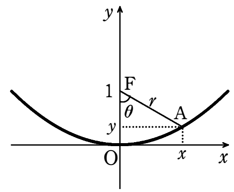
9

解答　(1)　$r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$　　(2)　$\dfrac{4}{\pi}$

解説

(1)　$x=r\sin\theta$，　$y=1-r\cos\theta$

これを $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると



$$1-r\cos\theta=\frac{1}{4}r^2\sin^2\theta$$

$$(\sin^2\theta)r^2+(4\cos\theta)r-4=0$$

$$(1-\cos^2\theta)r^2+(4\cos\theta)r-4=0$$

$$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)r^2+(4\cos\theta)r-4=0$$

$$\{(1+\cos\theta)r-2\}\{(1-\cos\theta)r+2\}=0$$

$r>0$ であるから　　$r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}=\int_0^1\frac{2}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx$

$$=\int_0^1\frac{2}{2\cos^2\frac{\pi}{4}x}dx=\int_0^1\frac{dx}{\cos^2\frac{\pi}{4}x}$$

$$=\left[\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi}{4}x\right]_0^1=\frac{4}{\pi}$$

$\boxed{10}$

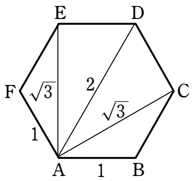
解答　(1)　$\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}\pi$　　(2)　8

解説

(1)　右の図の正六角形について

$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=\sqrt{3},\ \mathrm{AD}=2,\ \mathrm{AE}=\sqrt{3},\ \mathrm{AF}=1$

また，正六角形の１つの外角の大きさは $\dfrac{\pi}{3}$ である。



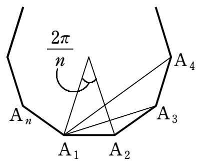
よって　　$L(6)=\dfrac{\pi}{3}(1+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+1)$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{3}\pi$$

(2)　右の図の正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\cdots\mathrm{A}_n$ について

$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k=2\sin\dfrac{k-1}{n}\pi$　$(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$

また，正 n 角形の１つの外角の大きさは $\dfrac{2\pi}{n}$ である。



$\sin\pi=0$ であるから

$$L(n)=\frac{2\pi}{n}\sum_{k=2}^{n}2\sin\frac{k-1}{n}\pi$$

$$=\frac{4\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k}{n}\pi=\frac{4\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi$$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi=4\pi\int_0^1\sin\pi x\,dx=4\Big[-\cos\pi x\Big]_0^1=8$

$\boxed{11}$

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{1}{a+1}$

解説

(1)　$f(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}$

$x\geqq0$ であるから　$f'(x)\geqq0$

よって，$f(x)$ は単調に増加する。

ゆえに，$x\geqq0$ のとき　$f(x)\geqq f(0)=0$

したがって　$\log(1+x)\geqq x-\dfrac{x^2}{2}$

また，$g(x)=x-\log(1+x)$ とおくと　$g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$

$x\geqq0$ であるから　$g'(x)\geqq0$

よって，$g(x)$ は単調に増加する。

ゆえに，$x\geqq0$ のとき　$g(x)\geqq g(0)=0$

したがって　$x\geqq\log(1+x)$

以上から　$x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)\leqq x$

(2)　$\displaystyle\left\{\sum_{k=1}^{n}\log(n^{a+1}+k^a)\right\}-(a+1)n\log n=\sum_{k=1}^{n}\log(n^{a+1}+k^a)-\sum_{k=1}^{n}\log n^{a+1}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n^{a+1}+k^a}{n^{a+1}}=\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a\right\}$$

(1) において，$x=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^a$　$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ として辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\left(\frac{k}{n}\right)^{2a}\right\}\leqq\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a\right\}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a$$

したがって　$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a-\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2a}\leqq\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a\right\}\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a=\int_0^1x^a dx=\frac{1}{a+1}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2a}=0\times\int_0^1x^{2a}dx=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^a\right\}=\frac{1}{a+1}$

したがって，求める極限は　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\sum_{k=1}^{n}\log(n^{a+1}+k^a)\right\}-(a+1)n\log n\right]=\frac{1}{a+1}$

$\boxed{12}$

解答　(1)　略　　(2)　e　　(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{1-k}$

解説

(1)　$n\geqq2$ のとき

$$a_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}\leqq1\cdot1\cdot1\cdot\cdots\cdots\cdot1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

よって，$0<a_n\leqq\dfrac{1}{n}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

(2)　$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{n!}{n^n}\times\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

(3)　$\log\left(\dfrac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}\log\dfrac{a_{kn}}{a_n}=\dfrac{1}{n}\log\left\{\dfrac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\times\dfrac{n^n}{n!}\right\}$

$$=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{kn\cdot(kn-1)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+1)\cdot n!}{k^{kn}\cdot n^{kn}}\times\frac{n^n}{n!}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot kn}{k^{kn}\cdot n^{(k-1)n}}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{k^{kn}}\times\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{kn}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\log\left[\frac{1}{k^{kn}}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left\{1+\frac{(k-1)n}{n}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log\frac{1}{k^{kn}}+\sum_{l=1}^{(k-1)n}\log\left(1+\frac{l}{n}\right)\right\}=-k\log k+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{(k-1)n}\log\left(1+\frac{l}{n}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{(k-1)n}\log\left(1+\frac{l}{n}\right)\right\}=\int_0^{k-1}\log(1+x)dx$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=-k\log k+\int_0^{k-1}\log(1+x)dx$$

$$=-k\log k+\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^{k-1}$$

$$=-k\log k+k\log k-k+1=1-k$$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{1-k}$

$\boxed{13}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$f(t)=e^t-(1+t)$ とおくと　　$f'(t)=e^t-1$

$t\geqq0$ のとき $f'(t)\geqq0$ であるから，$f(t)$ は単調に増加する。

また，$f(0)=0$ であるから　　$f(t)\geqq0$

よって，$t\geqq0$ のとき　　$e^t\geqq1+t$

すべての実数 x に対して，$x^2\geqq0$ であるから　　$e^{x^2}\geqq1+x^2>0$

したがって　　$e^{-x^2}\leqq\dfrac{1}{1+x^2}$

(2)　$0\leqq x\leqq1$ において，$x\geqq x^2$ であるから　　$e^{-x}\leqq e^{-x^2}$

ゆえに，$0\leqq x\leqq1$ のとき，(1) から

$$e^{-x}\leqq e^{-x^2}\leqq\frac{1}{1+x^2}\quad\cdots\cdots①$$

$0\leqq x\leqq1$ において，① の等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1e^{-x}dx<\int_0^1e^{-x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで　　$\displaystyle\int_0^1e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=-\frac{1}{e}+1=\frac{e-1}{e}$

$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}$

したがって

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

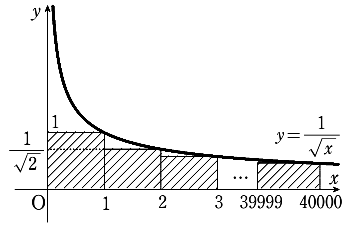
ゆえに　　$\displaystyle\frac{e-1}{e}<\int_0^1e^{-x^2}dx<\frac{\pi}{4}$

$\boxed{14}$

解答　398

解説

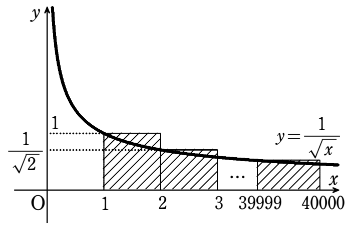
$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{40000}}$ は，次の図の斜線部分の面積の和に等しい。



図から　$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{40000}}<\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

よって　$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{40000}=399$　……①

また，次の図から　$\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{39999}}$



ゆえに　$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}>\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{\sqrt{40000}}=398+\frac{1}{200}$　……②

①，②から　$398+\frac{1}{200}<\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<399$

したがって，$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は　398

15

解答　(1)　$\frac{\pi}{4}$　(2)　略　(3)　$\frac{\pi}{4}$

解説

(1)　$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{4}$

よって　$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(2)　$\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}=\frac{1-(-x^2)^{k+1}}{1-(-x^2)}=\frac{1-(-x^2)^{k+1}}{1+x^2}$

よって　$\frac{1}{1+x^2}-\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}=\frac{1-\{1-(-x^2)^{k+1}\}}{1+x^2}=\frac{(-x^2)^{k+1}}{1+x^2}=\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{1+x^2}$

$x^2\geqq0$ であるから　$1+x^2\geqq1$　　よって　$0<\frac{1}{1+x^2}\leqq1$

$x^{2k+2}=(x^2)^{k+1}\geqq0$ であるから　$0<\frac{x^{2k+2}}{1+x^2}\leqq x^{2k+2}$

k が偶数のとき，$(-1)^{k+1}=-1$ であるから　$-x^{2k+2}\leqq\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{1+x^2}<0$

k が奇数のとき，$(-1)^{k+1}=1$ であるから　$0<\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{1+x^2}\leqq x^{2k+2}$

よって　$-x^{2k+2}\leqq\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{1+x^2}\leqq x^{2k+2}$

ゆえに　$-x^{2k+2}\leqq\frac{1}{1+x^2}-\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}\leqq x^{2k+2}$

(3)　(2)の不等式は $0\leqq x\leqq1$ においても成り立ち，等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1(-x^{2k+2})dx<\int_0^1\left\{\frac{1}{1+x^2}-\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}\right\}dx<\int_0^1x^{2k+2}dx$$

ここで　$\int_0^1x^{2k+2}dx=\left[\frac{x^{2k+3}}{2k+3}\right]_0^1=\frac{1}{2k+3}$

(1)より　$\int_0^1\left\{\frac{1}{1+x^2}-\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}\right\}dx=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

よって　$-\frac{1}{2k+3}<\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}<\frac{1}{2k+3}$

ゆえに　$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2k+3}<\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2k+3}$

$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2k+3}\right)=\frac{\pi}{4}$，$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2k+3}\right)=\frac{\pi}{4}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

注意　$(-x^2)^{n-1}$ は $n=1$ のとき 1 として考えた。

1

解答 (1) -1 (2) 略 (3) $8\log 2-1$

解説

(1) $x\geqq 0$ のとき $f(x)=\dfrac{4-x^2}{2+x}=2-x$

$x<0$ のとき $f(x)=\dfrac{4-(-x)x}{2+x}=\dfrac{4+x^2}{2+x}$

よって $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{2-h-2}{h}=-1$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\dfrac{4+h^2}{2+h}-2}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{4+h^2-2(2+h)}{h(2+h)}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{h-2}{2+h}=-1$$

よって，$f'(0)$ が存在し $f'(0)=-1$

(2) (1) から $x>0$ のとき $f'(x)=-1$

$x<0$ のとき $f'(x)=\dfrac{2x(2+x)-(4+x^2)\cdot 1}{(2+x)^2}=\dfrac{x^2+4x-4}{(2+x)^2}$

よって $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=-1,\quad \lim_{x\to-0}f'(x)=\lim_{x\to-0}\frac{x^2+4x-4}{(2+x)^2}=\frac{-4}{2^2}=-1$

また，(1) から $f'(0)=-1$

ゆえに $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to-0}f'(x)=f'(0)$

したがって，$f'(x)$ は $x=0$ で連続である。

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{4+x^2}{2+x}dx+\int_0^1(2-x)dx=\int_{-1}^{0}\left(x-2+\frac{8}{x+2}\right)dx+\int_0^1(-x+2)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-2x+8\log|x+2|\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1$$

$$=8\log 2-\left(\frac{1}{2}+2\right)+\left(-\frac{1}{2}+2\right)=8\log 2-1$$

2

解答 $\alpha=0,\ 4-\sqrt{2}\pi$

解説

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+\alpha\sin x)^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+\alpha\cos x)^2dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{(x+\alpha\sin x)^2-(x+\alpha\cos x)^2\}dx$$

$$=2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\sin x-\cos x)dx-\alpha^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$$

$$=2\alpha\left\{-\Big[x(\sin x+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx\right\}-\frac{\alpha^2}{2}\Big[\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+\Big[\sin x-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)-\frac{\alpha^2}{2}$$

$$=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2$$

$$=\frac{\alpha}{2}(4-\sqrt{2}\pi-\alpha)=0$$

よって $\alpha=0$ または $\alpha=4-\sqrt{2}\pi$

3

解答 (ア) $\dfrac{2x}{1+x^2}$ (イ) $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (ウ) $\log 2$

解説

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}-1$$

$$=\frac{2}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$x=\tan\dfrac{\theta}{2}$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{2}=\frac{1+x^2}{2}\ \text{から}\quad d\theta=\frac{2}{1+x^2}dx$$

$$1+\sin\theta+\cos\theta=1+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{2(1+x)}{1+x^2}$$

θ	$0\ \longrightarrow$	$\dfrac{\pi}{2}$
x	$0\ \longrightarrow$	1

与式 $\displaystyle=\int_0^1\frac{1+x^2}{2(1+x)}\cdot\frac{2}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$

$$=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2$$

4

解答 (1) $y'=\dfrac{2\sin x(x\cos x-\sin x)}{x^3}$ (2) $\dfrac{4}{\pi^4}+\dfrac{3}{4\pi^2}$

解説

(1) $y'=\dfrac{2\sin x\cdot\cos x\cdot x^2-\sin^2x\cdot 2x}{(x^2)^2}=\dfrac{2\sin x(x\cos x-\sin x)}{x^3}$

別解 $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ より $y'=2\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}=\dfrac{2\sin x(x\cos x-\sin x)}{x^3}$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{(\sin x-x\cos x)^2}{x^5}dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right)'(\sin x-x\cos x)^2dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^{-4}(\sin x-x\cos x)^2\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}x^{-4}\cdot 2(\sin x-x\cos x)\{\cos x-\cos x-x\cdot(-\sin x)\}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\pi^{-4}\{-\pi\cdot(-1)\}^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-4}\cdot 1-\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\sin x(x\cos x-\sin x)}{x^3}dx$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}+\frac{4}{\pi^4}-\frac{1}{4}\left[\frac{\sin^2x}{x^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{1}{4\pi^2}+\frac{4}{\pi^4}-\frac{1}{4}\cdot\left\{-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right\}=\frac{4}{\pi^4}+\frac{3}{4\pi^2}$$

5

解答 (ア) $\dfrac{1}{4}$ (イ) $\dfrac{1}{4}$ (ウ) $\dfrac{1}{4}$ (エ) $\dfrac{1}{4}$ (オ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (カ) $\sqrt{2}+1$

解説

$\dfrac{1}{(1-t^2)^2}=\dfrac{a}{(1-t)^2}+\dfrac{b}{1-t}+\dfrac{c}{(1+t)^2}+\dfrac{d}{1+t}$ とおくと

$1=a(1+t)^2+b(1+t)^2(1-t)+c(1-t)^2+d(1+t)(1-t)^2$ …… ①

ゆえに $1=(d-b)t^3+(a-b+c-d)t^2+(2a+b-2c-d)t+a+b+c+d$

この式が t の恒等式であるから

$d-b=0,\ a-b+c-d=0,\ 2a+b-2c-d=0,\ a+b+c+d=1$

よって $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$

次の積分において，$\sin x=t$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^3x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^4x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(1-\sin^2x)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-t}-\log(1-t)-\frac{1}{1+t}+\log(1+t)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}+\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}-1+0+1-0\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})+\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right\}={}^{\text{オ}}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log({}^{\text{カ}}\sqrt{2}+1)$$

答 (ア) $\dfrac{1}{4}$ (イ) $\dfrac{1}{4}$ (ウ) $\dfrac{1}{4}$ (エ) $\dfrac{1}{4}$ (オ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (カ) $\sqrt{2}+1$

別解 ① で $t=1,\ -1,\ 0,\ 2$ とおいて

$1=4a,\ 1=4c,\ 1=a+b+c+d,\ 1=9a-9b+c+3d$

これを解いて $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$

6

解答 $\dfrac{n!(\log x)^k}{k!x}$

解説

$I_n=\displaystyle\int\left\{-\frac{(\log x)^n}{x^2}\right\}dx$ とおくと $I_0=\displaystyle\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{x}$

また，$n\geqq 1$ のとき

$$I_n=\int\left(\frac{1}{x}\right)'(\log x)^n dx=\frac{(\log x)^n}{x}-n\int\frac{1}{x}\cdot(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{(\log x)^n}{x}+n\int\left\{-\frac{(\log x)^{n-1}}{x^2}\right\}dx$$

よって $I_n=\dfrac{(\log x)^n}{x}+nI_{n-1}$

両辺を $n!$ で割ると $\dfrac{I_n}{n!}=\dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{(\log x)^n}{n!x}$

ゆえに，$n \geqq 1$ のとき $\dfrac{I_n}{n!} = \dfrac{I_0}{0!} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\log x)^k}{k!x}$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\log x)^k}{k!x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\log x)^k}{k!x}$$

これは $n=0$ のときも成り立つ。

したがって　$I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!(\log x)^k}{k!x}$

7

解答　(1)　$-\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$　　(2)　$\log 2 + 1 - \dfrac{\pi}{2}$

解説

(1)　$f'(x) = \dfrac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} - 1$

$$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} - 1 = \frac{1}{1+\cos x} - 1 = -\frac{\cos x}{1+\cos x}$$

(2)　(1) の結果を用いると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos x}{1+\cos x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-(1+\cos x)'}{1+\cos x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx$$

$$= \Big[-\log(1+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin x}{1+\cos x} - x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \log 2 + 1 - \frac{\pi}{2}$$

8

解答　(1)　$\dfrac{1}{\cos^2 x}$　　(2)　$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$　（C は積分定数）　(3)　略

(4)　$\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$

解説

(1)　$(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(2)　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx = \int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$\sin x = t$ とおくと　$\cos x\,dx = dt$

よって　$\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx = \int\frac{1}{1-t^2}dt = \int\frac{1}{(1+t)(1-t)}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt$

$$= \frac{1}{2}(\log|1+t| - \log|1-t|) + C = \frac{1}{2}\log\frac{|1+t|}{|1-t|} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{|1+\sin x|}{|1-\sin x|} + C = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$$　（C は積分定数）

(3)　(1) から　$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^{2n+1}x}dx = \int\frac{1}{\cos^{2n-1}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int\frac{1}{\cos^{2n-1}x}\cdot(\tan x)'dx$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{2n-1}x} - \int\left(\frac{1}{\cos^{2n-1}x}\right)'\tan x\,dx$$

ここで　$\left(\dfrac{1}{\cos^{2n-1}x}\right)' = -\dfrac{(2n-1)\cos^{2n-2}x\cdot(-\sin x)}{\cos^{4n-2}x} = \dfrac{(2n-1)\sin x}{\cos^{2n}x}$

よって　$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^{2n+1}x}dx$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{2n-1}x} - \int\frac{(2n-1)\sin x}{\cos^{2n}x}\cdot\tan x\,dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{2n-1}x} - (2n-1)\int\frac{\sin^2 x}{\cos^{2n+1}x}dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{2n-1}x} - (2n-1)\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^{2n+1}x}dx$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{2n-1}x} - (2n-1)\int\frac{1}{\cos^{2n+1}x}dx + (2n-1)\int\frac{1}{\cos^{2n-1}x}dx$$

ゆえに　$2n\displaystyle\int\frac{1}{\cos^{2n+1}x}dx = \frac{\tan x}{\cos^{2n-1}x} + (2n-1)\int\frac{1}{\cos^{2n-1}x}dx$

(4)　(3) において $n=1$ とすると　$2\displaystyle\int\frac{1}{\cos^3 x}dx = \frac{\tan x}{\cos x} + \int\frac{1}{\cos x}dx$

すなわち　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3 x}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\tan x}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx$$

ここで，(2) より

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx = \left[\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2 = \log(\sqrt{2}+1)$$

したがって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3 x}dx = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$

9

解答　(1)　$x=\pi$ で最大値 $\pi+1$，$x=2\pi$ で最小値 $-2\pi+1$

(2)　$x - x\sin x - 2\cos x + C$　（C は積分定数）　　(3)　$4\pi+4$

解説

(1)　$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x$

$f'(x) = 0$ とすると　　$x = 0,\ \pi,\ 2\pi$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

したがって，$f(x)$ は $x=\pi$ で最大値 $\pi+1$ をとり，$x=2\pi$ で最小値 $-2\pi+1$ をとる。

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	↗	$\pi+1$	↘	$-2\pi+1$

(2)　$\displaystyle\int f(x)dx = \int(1+\sin x - x\cos x)dx$

$$= x - \cos x - \int x(\sin x)'dx$$

$$= x - \cos x - \left(x\sin x - \int\sin x\,dx\right)$$

$$= x - \cos x - (x\sin x + \cos x) + C$$

$$= x - x\sin x - 2\cos x + C$$　（C は積分定数）

(3)　(1) の増減表から，$f(x)=0$ を満たす実数 x は，$\pi<x<2\pi$ の範囲にただ 1 つ存在する。

ここで，$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = 0$ であるから，(2) より

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|dx = \int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}f(x)dx$$

$$= \Big[x - x\sin x - 2\cos x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi} - \Big[x - x\sin x - 2\cos x\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} = 4\pi + 4$$

10

解答　(1)　$a=3$，$p=12$　　(2)　$1-3\log 2$

解説

(1)　$f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^x-a) - e^{2x}\cdot e^x}{(e^x-a)^2} = \dfrac{e^{2x}(e^x-2a)}{(e^x-a)^2}$

$f'(x)=0$ とすると，$e^{2x}>0$ であるから　　$e^x - 2a = 0$

$a>0$ のとき　　$x = \log 2a$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$	$\log 2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は $x=\log 2a$ のとき極小値をとるから　　$\log 2a = \log 6$

したがって　　$a=3$

このとき，極小値は　$p = \dfrac{e^{2\log 6}}{e^{\log 6}-3} = \dfrac{6^2}{6-3} = 12$

(2)　(1) の結果により $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{e^{2x}}{e^x-3}dx$ の値を求めればよい。

$e^x - 3 = t$ とおくと　　$e^x dx = dt$，$dx = \dfrac{dt}{t+3}$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \log 2$
t	$-2 \longrightarrow -1$

よって　$\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{e^{2x}}{e^x-3}dx = \int_{-2}^{-1}\frac{(t+3)^2}{t}\cdot\frac{dt}{t+3}$

$$= \int_{-2}^{-1}\left(1+\frac{3}{t}\right)dt = \Big[t + 3\log|t|\Big]_{-2}^{-1}$$

$$= -1-(-2) + 3(\log|-1| - \log|-2|) = 1 - 3\log 2$$

11

解答　$\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\log 2\right)a$

解説

$x = a\tan y$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=f(x)$ …… ① とする。

$x = a\tan y$ の両辺を x で微分して　　$1 = \dfrac{a}{\cos^2 y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2 y}{a} = \dfrac{1}{a(1+\tan^2 y)} = \dfrac{a}{a^2+x^2}$

① で $x=a$ とおくと　　$a = a\tan y$，$y = f(a)$

$a = a\tan y$ から　　$\tan y = 1$　　$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$y = f(a) = \dfrac{\pi}{4}$

したがって　$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a (x)'f(x)\,dx=\Big[xf(x)\Big]_0^a-\int_0^a xf'(x)\,dx$

$$=af(a)-\int_0^a \frac{ax}{x^2+a^2}dx=a\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\int_0^a\frac{(x^2+a^2)'}{x^2+a^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}a-\frac{a}{2}\Big[\log(x^2+a^2)\Big]_0^a=\frac{\pi}{4}a-\frac{a}{2}(\log 2a^2-\log a^2)$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)a$$

12

解答　$A=\frac{2}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$，$B=\frac{a}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$

解説

$$A=\int_0^\pi\left(\frac{e^{-ax}}{-a}\right)'\sin 2x\,dx$$

$$=\left[\frac{e^{-ax}}{-a}\sin 2x\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{e^{-ax}}{-a}\cdot 2\cos 2x\,dx=\frac{2}{a}B \quad \cdots\cdots ①$$

$$B=\int_0^\pi\left(\frac{e^{-ax}}{-a}\right)'\cos 2x\,dx$$

$$=\left[\frac{e^{-ax}}{-a}\cos 2x\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{e^{-ax}}{-a}(-2\sin 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{a}(1-e^{-a\pi})-\frac{2}{a}A \quad \cdots\cdots ②$$

① から　$B=\frac{a}{2}A$　　これを ② に代入して　$\frac{a}{2}A=\frac{1}{a}(1-e^{-a\pi})-\frac{2}{a}A$

したがって　$A=\frac{2}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$，$B=\frac{a}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$

別解　$(e^{-ax}\sin 2x)'=-ae^{-ax}\sin 2x+2e^{-ax}\cos 2x$

$(e^{-ax}\cos 2x)'=-ae^{-ax}\cos 2x-2e^{-ax}\sin 2x$ であるから

$$\Big[e^{-ax}\sin 2x\Big]_0^\pi=-aA+2B,\quad \Big[e^{-ax}\cos 2x\Big]_0^\pi=-aB-2A$$

よって　$-aA+2B=0$，$-aB-2A=e^{-a\pi}-1$

この2式を連立して解くと　$A=\frac{2}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$，$B=\frac{a}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$

13

解答　(1)　(ア)　2　(イ)　5　(ウ)　2　(エ)　5　(オ)　2　(カ)　5　(キ)　5
(ク)　2　(ケ)　29　(コ)　2　(サ)　5　(シ)　5　(ス)　2
(2)　(セ)　2　(ソ)　1　(タ)　5　(チ)　1　(ツ)　2　(テ)　5

解説

(1)　$(e^{-2x}\cos 5x)'=-{}^{\text{ア}}2e^{-2x}\cos 5x-{}^{\text{イ}}5e^{-2x}\sin 5x$

$(e^{-2x}\sin 5x)'=-{}^{\text{ウ}}2e^{-2x}\sin 5x+{}^{\text{エ}}5e^{-2x}\cos 5x$

したがって

$$\int(e^{-2x}\cos 5x)'dx=-2\int e^{-2x}\cos 5x\,dx-5\int e^{-2x}\sin 5x\,dx$$

すなわち　$e^{-2x}\cos 5x+C_1=-{}^{\text{オ}}2I-{}^{\text{カ}}5J$　……①

$$\int(e^{-2x}\sin 5x)'dx=-2\int e^{-2x}\sin 5x\,dx+5\int e^{-2x}\cos 5x\,dx$$

すなわち　$e^{-2x}\sin 5x+C_2={}^{\text{キ}}5I-{}^{\text{ク}}2J$　……②

②×5−①×2 を計算して，整理すると

$$I=-\frac{e^{-2x}}{{}^{\text{ケ}}29}({}^{\text{コ}}2\cos 5x-{}^{\text{サ}}5\sin 5x)+C_3$$

①×5＋②×2 を計算して，整理すると

$$J=-\frac{e^{-2x}}{29}({}^{\text{シ}}5\cos 5x+{}^{\text{ス}}2\sin 5x)+C_4$$

(2)　(1) から　$\int_0^{n\pi}e^{-2x}\cos 5x\,dx=\left[-\frac{e^{-2x}}{29}(2\cos 5x-5\sin 5x)\right]_0^{n\pi}$

$$=-\frac{e^{-2n\pi}}{29}(2\cos 5n\pi-5\sin 5n\pi)+\frac{2}{29}$$

$\cos 5n\pi=(-1)^n$，$\sin 5n\pi=0$ であるから

$$\int_0^{n\pi}e^{-2x}\cos 5x\,dx=-\frac{e^{-2n\pi}}{29}\cdot 2(-1)^n+\frac{2}{29}=\frac{{}^{\text{セ}}2}{29}\{{}^{\text{ソ}}1-(-1)^n e^{-2n\pi}\}$$

同様に，(1) から

$$\int_0^{n\pi}e^{-2x}\sin 5x\,dx=\left[-\frac{e^{-2x}}{29}(5\cos 5x+2\sin 5x)\right]_0^{n\pi}$$

$$=-\frac{e^{-2n\pi}}{29}(5\cos 5n\pi+2\sin 5n\pi)+\frac{5}{29}$$

$$=-\frac{e^{-2n\pi}}{29}\cdot 5(-1)^n+\frac{5}{29}=\frac{{}^{\text{タ}}5}{29}\{{}^{\text{チ}}1-(-1)^n e^{-2n\pi}\}$$

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n e^{-2n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{e^{2n\pi}}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-2x}\cos 5x\,dx=\frac{{}^{\text{ツ}}2}{29},\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-2x}\sin 5x\,dx=\frac{{}^{\text{テ}}5}{29}$$

14

解答　証明略，$1-\frac{\pi}{4}$

解説

$\frac{\pi}{2}-x=t$ とおくと　$-dx=dt$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

よって　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x+\cos x}dx$ とおく。

前半の結果から　$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3x\right)}{\cos x+\sin x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos 3x}{\sin x+\cos x}dx$$

ゆえに　$2I=I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos 3x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x-\cos 3x}{\sin x+\cos x}dx \quad \cdots\cdots ①$$

ここで　$\sin 3x-\cos 3x$

$$=(3\sin x-4\sin^3 x)-(4\cos^3 x-3\cos x)=3(\sin x+\cos x)-4(\sin^3 x+\cos^3 x)$$

$$=3(\sin x+\cos x)-4(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)$$

$$=3(\sin x+\cos x)-4(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$$

$$=(\sin x+\cos x)(4\sin x\cos x-1)$$

よって，① から　$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\sin x\cos x-1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin 2x-1)dx$

$$=\Big[-\cos 2x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(1-\frac{\pi}{2}\right)-(-1)=2-\frac{\pi}{2}$$

ゆえに　$I=1-\frac{\pi}{4}$　　すなわち　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x+\cos x}dx=1-\frac{\pi}{4}$

15

解答　(1)　略　(2)　$\frac{\pi}{2}\log 2$

解説

(1)　$t=\frac{\pi}{2}-x$ とおくと

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\left(\frac{\cos t}{1+\sin t}+\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)\cdot(-1)\,dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}+\frac{\cos t}{1+\sin t}\right)dt-I$$

ゆえに　$I=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx$

(2)　(1) から　$I=\frac{\pi}{4}\Big[-\log(1+\cos x)+\log(1+\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}(\log 2+\log 2)$

$$=\frac{\pi}{2}\log 2$$

16

解答　(1)　$f(x)=e^x-\frac{2}{3}$　　(2)　$g(x)=e^x-\frac{6\pm\sqrt{34-2e^2}}{2}$

解説

(1)　$\int_0^1 tf(t)\,dt=A$ とおくと　$f(x)=e^x-A$

よって　$A=\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 t(e^t-A)\,dt=\int_0^1 t(e^t-At)'\,dt$

$$=\Big[t(e^t-At)\Big]_0^1-\int_0^1(e^t-At)\,dt=e-A-\left[e^t-\frac{1}{2}At^2\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}A+1$$

したがって，$A=-\frac{1}{2}A+1$ であるから　$A=\frac{2}{3}$

ゆえに　$f(x)=e^x-\frac{2}{3}$

(2)　$\int_0^1 t\{g(t)\}^2dt=B\ (\geqq 0)$ とおくと　$g(x)=e^x-B$

よって　$B=\int_0^1 t\{g(t)\}^2dt=\int_0^1 t(e^t-B)^2dt=\int_0^1(te^{2t}-2Bte^t+B^2t)\,dt$

$$=\int_0^1 te^{2t}dt-2B\int_0^1 te^t dt+B^2\int_0^1 tdt$$

ここで　$\int_0^1 te^{2t}dt=\int_0^1 t\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)'dt=\left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t}dt$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 te^t dt=\int_0^1 t(e^t)'dt=\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t dt=e-\left[e^t\right]_0^1=1$$

$$\int_0^1 tdt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

したがって　$B=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}-2B+\frac{1}{2}B^2$

整理すると　$2B^2-12B+e^2+1=0$

これを解くと　$B=\frac{6\pm\sqrt{34-2e^2}}{2}$

$e<3$ より，$34-2e^2>34-2\cdot3^2=16>0$ であるから，これらはともに実数である。

また，$\sqrt{34-2e^2}<\sqrt{36}=6$ より　$\frac{6-\sqrt{34-2e^2}}{2}>0$

ゆえに　$g(x)=e^x-\frac{6\pm\sqrt{34-2e^2}}{2}$

17

解答　(1)　0　(2)　$f'(x)=x^2-f(x)$　(3)　$\{e^xf(x)\}'=e^xx^2$

(4)　$f(x)=x^2-2x+2-\frac{2}{e^x}$

解説

(1)　$f(0)=\frac{1}{3}\cdot0^3-\int_0^0(0-t)f'(t)dt=0$

(2)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\int_0^x(x-t)f'(t)dt=\frac{1}{3}x^3-x\int_0^x f'(t)dt+\int_0^x tf'(t)dt$

よって　$f'(x)=x^2-\left\{\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)\right\}+xf'(x)$

$$=x^2-\left[f(t)\right]_0^x=x^2-\{f(x)-f(0)\}=x^2-\{f(x)-0\}=x^2-f(x)$$

(3)　(2) から　$\{e^xf(x)\}'=e^xf(x)+e^xf'(x)=e^xf(x)+e^x\{x^2-f(x)\}=e^xx^2$

(4)　(3) から　$e^xf(x)=\int e^xx^2dx=e^xx^2-2\int e^xxdx$

$$=e^xx^2-2\left(e^xx-\int e^xdx\right)=e^xx^2-2(e^xx-e^x)+C$$

$$=e^x(x^2-2x+2)+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

すなわち　$e^xf(x)=e^x(x^2-2x+2)+C$

任意の実数 x に対して，$e^x>0$ であるから　$f(x)=x^2-2x+2+\frac{C}{e^x}$

(1) より，$f(0)=0$ であるから　$0=2+C$　よって　$C=-2$

したがって　$f(x)=x^2-2x+2-\frac{2}{e^x}$

18

解答　(1)　$f(0)=0$，$f'(0)=0$　(2)　$f'(x)=2xe^{-x}$　(3)　$f(x)=-2(x+1)e^{-x}+2$

解説

(1)　$f(0)=0+\int_0^0 e^tf(t)dt=0$

$f(x)=x^2e^{-x}+e^{-x}\int_0^x e^tf(t)dt$ ……① から

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}-e^{-x}\int_0^x e^tf(t)dt+e^{-x}e^xf(x)$$

よって　$f'(0)=f(0)=0$

(2)　① より $e^{-x}\int_0^x e^tf(t)dt=f(x)-x^2e^{-x}$ であるから

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}-\{f(x)-x^2e^{-x}\}+f(x)=2xe^{-x}$$

(3)　(2) から　$f(x)=2\int xe^{-x}dx=2\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right)$

$$=-2(x+1)e^{-x}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(1) より $f(0)=0$ であるから　$C=2$　したがって　$f(x)=-2(x+1)e^{-x}+2$

19

解答　(1)　略　(2)　$e^{\frac{1}{6}}$

解説

(1)　$f(x)=\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{n}}=\frac{x}{n(n+x)}$$

$0\leqq x\leqq1$ のとき $f'(x)\geqq0$ より $f(x)$ は単調に増加し，$f(0)=0$ であるから　$f(x)\geqq0$

よって　$\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\leqq\frac{x}{n}$　……①

また，$g(x)=\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n+1}$ とおくと

$$g'(x)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{n}}-\frac{1}{n+1}=\frac{1-x}{(n+x)(n+1)}$$

$0\leqq x\leqq1$ のとき $g'(x)\geqq0$ より $g(x)$ は単調に増加し，$g(0)=0$ であるから　$g(x)\geqq0$

よって　$\frac{x}{n+1}\leqq\log\left(1+\frac{x}{n}\right)$　……②

①，② から　$\frac{x}{n+1}\leqq\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\leqq\frac{x}{n}$

(2)　与えられた a_n の式について，両辺の自然対数をとると

$$\log a_n=\log\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)+\log\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

ここで，$k=1$，2，……，n について

$$1+\frac{k^5}{n^6}=1+\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n},\quad 0<\left(\frac{k}{n}\right)^5\leqq1$$

であるから，(1) の不等式を利用して

$$\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n+1}\leqq\log\left\{1+\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n}\right\}\leqq\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n}$$

すなわち　$\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^5\leqq\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right)\leqq\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$

$k=1$，2，……，n について辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^5\leqq\log a_n\leqq\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

よって　$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^5\leqq\log a_n\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^5$

ここで　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5dx=\left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1=\frac{1}{6}$

また　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^5\right\}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^5=\frac{1}{6}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^5=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

よって，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{1}{6}$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\log a_n}=e^{\frac{1}{6}}$

20

解答　(1)　略　(2)　1

解説

(1)　自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき　$\log k\leqq\log x\leqq\log(k+1)$

常に $\log k=\log x$ または $\log x=\log(k+1)$ ではないから，

$$\int_k^{k+1}\log k\,dx<\int_k^{k+1}\log x\,dx<\int_k^{k+1}\log(k+1)dx\quad\text{より}$$

$$\log k<\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)\quad\text{……①}$$

① の左側の不等式で，$k=1$，2，3，……，n として辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^n\log k<\int_1^{n+1}\log x\,dx$$

ここで　$\sum_{k=1}^n\log k=\log(1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot n)=\log(n!)$

$$\int_1^{n+1}\log x\,dx=\left[x\log x-x\right]_1^{n+1}=(n+1)\log(n+1)-(n+1)+1$$

$$=(n+1)\log(n+1)-n$$

よって　$\log(n!)<(n+1)\log(n+1)-n$　……②

① の右側の不等式で，$k=1$，2，3，……，$n-1$ として辺々を加えると

$$\int_1^n\log x\,dx<\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)$$

ここで　$\int_1^n\log x\,dx=n\log n-n+1$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)=\log(2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdots\cdot n)=\log(n!)$$

よって　$n\log n-n+1<\log(n!)$　……③

②，③ から，$n\geqq2$ のとき

$$n\log n-n+1<\log(n!)<(n+1)\log(n+1)-n\quad\text{……④}$$

(2)　n が十分大きいとき，$n\log n-n=n(\log n-1)>0$ であるから，④ より

$$1+\frac{1}{n\log n-n}<\frac{\log(n!)}{n\log n-n}<\frac{(n+1)\log(n+1)-n}{n\log n-n}$$

ここで　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\log n-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{n(\log n-1)}\right\}=1+0=1$

また，$a_n=\frac{(n+1)\log(n+1)-n}{n\log n-n}$ とすると

$$a_n=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}-\frac{1}{\log n}}{1-\frac{1}{\log n}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{1}{\log n}\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}-\frac{1}{\log n}}{1-\frac{1}{\log n}}$$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{(1+0)(1+0)-0}{1-0}=1$　　よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n\,!)}{n\log n-n}=1$

$\boxed{21}$

解答　(1)　$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$　　(2)　略

解説

(1)　$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ において，$x=\sin\theta$ とおくと

$dx=\cos\theta d\theta$

x	0 →	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	0 →	$\frac{\pi}{3}$

よって　$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot\cos\theta\, d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(2)　$n\geqq 3$ のとき，$0\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\ (<1)$ において，$0\leqq x^n\leqq x^2$ であるから

$$0\leqq\frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}\leqq\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

よって　$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}dx\leqq\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}<\frac{\pi}{6}$

$\boxed{22}$

解答　略

解説

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq 1+\frac{\pi}{4}$　……①

ここで，$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\frac{\pi}{2}<1+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$

ゆえに，① の範囲で　$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって　$1\leqq\sin x+\cos x\leqq\sqrt{2}$

各辺を 2 乗すると　$1\leqq(\sin x+\cos x)^2\leqq 2$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$x^2\leqq x^{(\sin x+\cos x)^2}\leqq x$

等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1 x^2dx<\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\int_0^1 xdx$$

したがって　$\frac{1}{3}<\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\frac{1}{2}$

$\boxed{23}$

解答　(1)　$\log 2$　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}dx=\Big[-\log(1-x)\Big]_0^{\frac{1}{2}}=-\log\frac{1}{2}=\log 2$

(2)　$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$\frac{1}{1-x}\leqq 2$ であるから　$\frac{x^n}{1-x}\leqq 2x^n$

よって　$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx\leqq 2\int_0^{\frac{1}{2}}x^ndx$

ここで　$2\int_0^{\frac{1}{2}}x^ndx=2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{2^{-n}}{n+1}$

ゆえに，$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx\leqq\frac{2^{-n}}{n+1}$ が成り立つ。

(3)　$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n-1}x^k+\frac{x^n}{1-x}$ の両辺を積分して

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}x^kdx+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx$$

(1) から　$\log 2=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{2}}x^kdx+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx$

ここで　(右辺)$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}dx$

$n\to\infty$ とすると，(2) より右辺の第 2 項は 0 に収束する。

よって　$\log 2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{n}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a_1=a_2=a_3=b=1$

(2)　$\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\log|1-x|+C$（$C$ は積分定数）

(3)　$p=1$ のとき　$\log|x|-\log|1-x|+C$（C は積分定数），

$p\geqq 2$ のとき　$\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}-\cdots\cdots-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}$

$-\log|1-x|+C$（C は積分定数）

解説

(1)　$\frac{1}{x^3(1-x)}=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\frac{b}{1-x}$ において，分母を払うと

$$1=a_1x^2(1-x)+a_2x(1-x)+a_3(1-x)+bx^3$$
$$=a_1x^2-a_1x^3+a_2x-a_2x^2+a_3-a_3x+bx^3$$
$$=(b-a_1)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_2-a_3)x+a_3$$

よって　$b-a_1=a_1-a_2=a_2-a_3=0$，$a_3=1$

ゆえに　$a_1=a_2=a_3=b=1$

(2)　$\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{1-x}\right)dx$

$$=\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\log|1-x|+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(3)　(1) より，一般の $p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して

$$\frac{1}{x^p(1-x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^p}+\frac{1}{1-x}\quad\cdots\cdots①$$

と予想される。

ここで　$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^p}=\frac{\frac{1}{x}\left\{1-\left(\frac{1}{x}\right)^p\right\}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1-\frac{1}{x^p}}{x-1}=\frac{x^p-1}{x^p(x-1)}$

よって，① の右辺は　$\frac{x^p-1}{x^p(x-1)}+\frac{1}{1-x}=\frac{1-x^p+x^p}{x^p(1-x)}=\frac{1}{x^p(1-x)}=$(左辺)

となり，① は正しい。

そこで，(2) と同様にして ① を積分すると　（C は積分定数とする）

$p=1$ のとき　$\int\frac{dx}{x(1-x)}=\log|x|-\log|1-x|+C$

$p\geqq 2$ のとき　$\int\frac{dx}{x^p(1-x)}=\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}$

$$-\cdots\cdots-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}-\log|1-x|+C$$

参考　① は次のように数学的帰納法で証明してもよい。

[1]　$p=1$ のとき

$$\frac{1}{x(1-x)}=\frac{1-x+x}{x(1-x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$$

よって，① が成り立つ。

[2]　$p=k$（k は自然数）のとき

① が成り立つ，すなわち　$\frac{1}{x^k(1-x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{1-x}$ と仮定する。

$p=k+1$ のときを考えると

$$\frac{1}{x^{k+1}(1-x)}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{k+1}}+\frac{1}{x(1-x)}$$
$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{k+1}}+\frac{1}{1-x}$$

よって，$p=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1], [2] から，① はすべての自然数 p について成り立つ。

2

解答　C は積分定数とする。

(1)　$\left(-\frac{1}{\alpha}x-\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha x}+C$

(2)　$\left(-\frac{1}{\alpha}x^3-\frac{3}{\alpha^2}x^2-\frac{6}{\alpha^3}x-\frac{6}{\alpha^4}\right)e^{-\alpha x}+C$

(3)　$-\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k x^{n-k}\right)e^{-x}+C$

解説

(1)　$f'(x)=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}+\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha x}=xe^{-\alpha x}$

よって　$\int xe^{-\alpha x}dx=\left(-\frac{1}{\alpha}x-\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha x}+C$　(C は積分定数)

(2)　$g'(x)=(3ax^2+2bx+c)e^{-\alpha x}-\alpha(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-\alpha x}$

$=\{-\alpha ax^3+(3a-\alpha b)x^2+(2b-\alpha c)x+c-\alpha d\}e^{-\alpha x}$

$g'(x)=x^3e^{-\alpha x}$ とすると

$-\alpha a=1$，$3a-\alpha b=0$，$2b-\alpha c=0$，$c-\alpha d=0$

よって　$a=-\frac{1}{\alpha}$，$b=-\frac{3}{\alpha^2}$，$c=-\frac{6}{\alpha^3}$，$d=-\frac{6}{\alpha^4}$

ゆえに　$\int x^3e^{-\alpha x}dx=\left(-\frac{1}{\alpha}x^3-\frac{3}{\alpha^2}x^2-\frac{6}{\alpha^3}x-\frac{6}{\alpha^4}\right)e^{-\alpha x}+C$　(C は積分定数)

(3)　$h(x)=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+a_1x+a_0)e^{-x}$ とおくと

$h'(x)=\{a_nnx^{n-1}+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+a_{n-2}(n-2)x^{n-3}+\cdots\cdots+a_1\}e^{-x}$

$+(-a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-\cdots\cdots-a_1x-a_0)e^{-x}$

$=[-a_nx^n+(a_nn-a_{n-1})x^{n-1}+\{a_{n-1}(n-1)-a_{n-2}\}x^{n-2}+\cdots\cdots+(a_1-a_0)]e^{-x}$

$h'(x)=x^ne^{-x}$ とすると

$-a_n=1$，$a_nn-a_{n-1}=0$，$a_{n-1}(n-1)-a_{n-2}=0$，……，$a_1-a_0=0$

ゆえに　$a_n=-1$，$a_{n-1}=na_n$，$a_{n-2}=(n-1)a_{n-1}$，……，$a_0=a_1$

よって　$a_n=-1=-{}_n\mathrm{P}_0$，$a_{n-1}=-n{}_n\mathrm{P}_0=-{}_n\mathrm{P}_1$，

$a_{n-2}=-(n-1){}_n\mathrm{P}_1=-{}_n\mathrm{P}_2$，……，

$a_{n-k}=-(n-k+1){}_n\mathrm{P}_{k-1}=-{}_n\mathrm{P}_k$，……，

$a_0=-1\cdot{}_n\mathrm{P}_{n-1}=-{}_n\mathrm{P}_n$

ゆえに　$\int x^ne^{-x}dx=-\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_kx^{n-k}\right)e^{-x}+C$　(C は積分定数)

3

解答　(1)　$F(x)=\sqrt{1+e^{2x}}+\log\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{e^x}-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}-1)$

(2)　$-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}-1)$

解説

(1)　$\sqrt{1+e^{2t}}=u$ から　$e^{2t}=u^2-1$

よって　$t=\frac{1}{2}\log(u^2-1)$　　ゆえに　$dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2u}{u^2-1}du$

すなわち　$dt=\frac{u}{u^2-1}du$

t	0	$\to$	x
u	$\sqrt{2}$	$\to$	$\sqrt{1+e^{2x}}$

よって　$F(x)=\int_0^x\sqrt{1+e^{2t}}\,dt$

$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}}u\cdot\frac{u}{u^2-1}du$

$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du$

$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\right\}du$

$=\left[u+\frac{1}{2}\log\frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}}$

$=\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

$\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}=\frac{(\sqrt{1+e^{2x}}-1)^2}{e^{2x}}=\left(\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{e^x}\right)^2$，　$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2$

であるから

$$F(x)=\sqrt{1+e^{2x}}+\log\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{e^x}-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}-1)$$

(2)　$F(x)-e^x=\sqrt{1+e^{2x}}-e^x+\log\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{e^x}-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}-1)$

ここで　$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{1+e^{2x}}-e^x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}+e^x}=0$，

$\lim_{x\to\infty}\log\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\log\left(\sqrt{\frac{1}{e^{2x}}+1}-\frac{1}{e^x}\right)=\log1=0$

したがって　$\lim_{x\to\infty}\{F(x)-e^x\}=-\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}-1)$

4

解答　(1)　略　　(2)　$3\log2-2\log3$

解説

(1)　$f'(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}-1$，　$f''(x)=2\cdot\frac{e^x(1+e^x)-e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

よって　$\log f''(x)=\log\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}=\log2+\log e^x-2\log(1+e^x)$

$=-\{2\log(1+e^x)-x-\log2\}=-f(x)$

したがって，$\log f''(x)=-f(x)$ が成り立つ。

(2)　(1) の結果から　$e^{-f(x)}=f''(x)$

よって　$\int_0^{\log2}(x-\log2)e^{-f(x)}dx=\int_0^{\log2}(x-\log2)f''(x)dx$

$=\Big[(x-\log2)f'(x)\Big]_0^{\log2}-\int_0^{\log2}f'(x)dx$

$=(\log2)f'(0)-\Big[f(x)\Big]_0^{\log2}=(\log2)f'(0)-f(\log2)+f(0)$

ここで　$f(0)=2\log2-\log2=\log2$，

$f(\log2)=2\log(1+e^{\log2})-\log2-\log2=2\log3-2\log2$，

$f'(0)=\frac{2}{2}-1=0$

よって　$\int_0^{\log2}(x-\log2)e^{-f(x)}dx=-(2\log3-2\log2)+\log2=3\log2-2\log3$

5

解答　(1)　略　　(2)　$\log\frac{e+1}{2e}$　　(3)　証明略，$\log\frac{e+1}{2e}$

解説

(1)　$\sum_{k=0}^{n}(-1)^ke^{-kx}=\sum_{k=0}^{n}(-e^{-x})^k=\frac{1-(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}$

よって　$\sum_{k=0}^{n}(-1)^ke^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{-(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^ne^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$

(2)　$\sum_{k=0}^{n}(-1)^ke^{-kx}=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^ke^{-kx}$ であるから，(1) より

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^ke^{-kx}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^ne^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

ここで　$\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^ke^{-kx}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1e^{-kx}dx=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[-\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^1$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$

よって　$S=-\int_0^1\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\Big[\log(1+e^{-x})\Big]_0^1=\log(1+e^{-1})-\log2=\log\frac{e+1}{2e}$

(3)　$1+e^{-x}>1$ であるから　$\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}<e^{-(n+1)x}$

よって　$\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx<\int_0^1e^{-(n+1)x}dx=-\frac{1}{n+1}\Big[e^{-(n+1)x}\Big]_0^1$

$=\frac{1}{n+1}\{1-e^{-(n+1)}\}<\frac{1}{n+1}$

また，$\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}>0$ であるから　$0<\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$

ゆえに　$0<\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\frac{1}{n+1}$

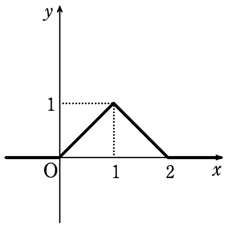
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=0$

よって，(2) から　$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=S=\log\frac{e+1}{2e}$

6

解答　(1)［図］　(2)　$(-1)^n\dfrac{2n}{\pi^2}$

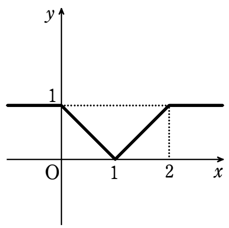


解説

(1)　$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

よって，常に $0\leqq f(x)\leqq 1$ であるから

$$g(x)=f(f(x))=|f(x)-1|$$
$$=1-f(x)$$
$$=\begin{cases}0 & (x<0,\ 2<x)\\ 1-|x-1| & (0\leqq x\leqq 2)\end{cases}$$



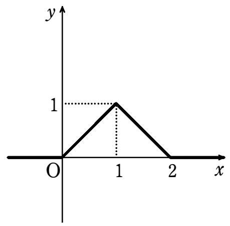
$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$1-|x-1|=1-(1-x)=x$$

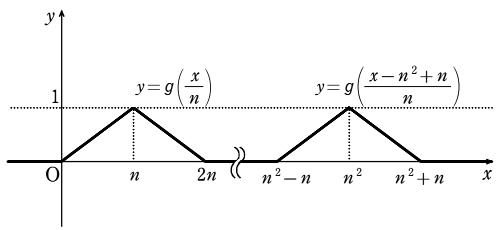
$1<x\leqq 2$ のとき

$$1-|x-1|=1-(x-1)=2-x$$

以上から，$y=g(x)$ のグラフは右の図のようになる。



(2)　$y=g\left(\dfrac{x}{n}\right)$ のグラフは，$y=g(x)$ のグラフを，y 軸をもとにして x 軸方向に n 倍に拡大したもので，$y=g\left(\dfrac{x-(n^2-n)}{n}\right)$ のグラフは $y=g\left(\dfrac{x}{n}\right)$ のグラフを x 軸方向に n^2-n だけ平行移動したものである。



よって，$0\leqq x\leqq n^2$ において

$$g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)=\begin{cases}0 & (0\leqq x\leqq n^2-n)\\ \dfrac{1}{n}(x-n^2+n) & (n^2-n\leqq x\leqq n^2)\end{cases}$$

したがって　$(\text{与式})=\displaystyle\int_{n^2-n}^{n^2}\frac{1}{n}(x-n^2+n)\cos\frac{\pi x}{n}\,dx$

$$=\frac{1}{n}\left\{\left[(x-n^2+n)\cdot\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi x}{n}\right]_{n^2-n}^{n^2}-\int_{n^2-n}^{n^2}\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi x}{n}\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{n^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{n}\right]_{n^2-n}^{n^2}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{n^2}{\pi^2}\cos n\pi-\frac{n^2}{\pi^2}\cos(n-1)\pi\right\}$$

$$=\frac{n}{\pi^2}\{\cos n\pi-\cos(n-1)\pi\}=(-1)^n\frac{2n}{\pi^2}$$

別解　$\left(\dfrac{x-n^2+n}{n}\text{ の場合分け}\right)$

[1]　$\dfrac{x-n^2+n}{n}\leqq 0$ $(x\leqq n^2-n)$ のとき

(1) から　$g\left(\dfrac{x-n^2+n}{n}\right)=0$

[2]　$0\leqq\dfrac{x-n^2+n}{n}\leqq 1$ $(n^2-n\leqq x\leqq n^2)$ のとき

(1) から　$g\left(\dfrac{x-n^2+n}{n}\right)=\dfrac{x-n^2+n}{n}$

よって　$\displaystyle\int_0^{n^2}g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)\cos\frac{\pi x}{n}\,dx=\int_{n^2-n}^{n^2}\frac{x-n^2+n}{n}\cos\frac{\pi x}{n}\,dx$

別解（置換積分の利用）

$\dfrac{x-n^2+n}{n}=t$ とおくと　$x=nt+n^2-n$，$\dfrac{dx}{dt}=n$

x	$0\longrightarrow n^2$
t	$1-n\longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle\int_0^{n^2}g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)\cos\frac{\pi x}{n}\,dx$

$$=n\int_{1-n}^{1}g(t)\cos\pi(t+n-1)\,dt$$

$$=n\int_0^1 t\cos\{\pi t+(n-1)\pi\}\,dt=(-1)^{n-1}n\int_0^1 t\cos\pi t\,dt$$

7

解答　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq I\leqq\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{2}$

解説

$$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\Big[3a\sin x-b\cos x\Big]_0^{\pi}=2b$$

条件から　$2b\geqq 0$　　ゆえに　$b\geqq 0$　……①

また　$\{f(x)\}^2=(3a\cos x+b\sin x)^2$

$$=9a^2\cos^2x+6ab\cos x\sin x+b^2\sin^2x$$
$$=9a^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+3ab\sin 2x+b^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$=\frac{9a^2+b^2}{2}+\frac{9a^2-b^2}{2}\cos 2x+3ab\sin 2x$$

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx=\left[\frac{9a^2+b^2}{2}x+\frac{9a^2-b^2}{4}\sin 2x-\frac{3ab\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi}$

$$=\frac{9a^2+b^2}{2}\pi$$

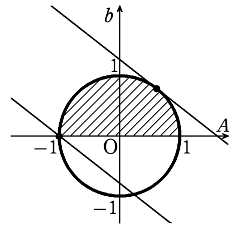
条件から　$\dfrac{9a^2+b^2}{2}\pi\leqq\dfrac{\pi}{2}$　　ゆえに　$9a^2+b^2\leqq 1$　……②

次に　$I=\displaystyle\int_0^{\pi}(1+\cos x)f(x)\,dx=\int_0^{\pi}f(x)\,dx+\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx$

$$=2b+\int_0^{\pi}(3a\cos^2x+b\sin x\cos x)\,dx$$
$$=2b+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{3a(1+\cos 2x)+b\sin 2x\}\,dx$$
$$=2b+\frac{1}{2}\left[3a\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)-\frac{b}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=2b+\frac{3}{2}a\pi\quad\cdots\cdots③$$

$3a=A$ とおくと，② は　$A^2+b^2\leqq 1$　……④

③ は　$\dfrac{\pi}{2}A+2b=I$　……⑤



①，④ の不等式が表す領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

求める条件は，直線 ⑤ がこの領域と共有点をもつような I の値の範囲である。

よって，図から，I の値は，直線 ⑤ が円 $A^2+b^2=1$ と第 1 象限で接するとき最大となり，点 $(-1,\ 0)$ を通るとき最小となる。

直線 ⑤ と円 $A^2+b^2=1$ が接するとき，直線 ⑤ と原点の距離が円の半径 1 に等しいから

$$\frac{|-I|}{\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2+2^2}}=1$$

第 1 象限で接するから　$I>0$

よって，最大値は　$I=\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{2}$

最小値は，直線 ⑤ の方程式に $A=-1$，$b=0$ を代入して

$$I=\frac{\pi}{2}\cdot(-1)+2\cdot 0=-\frac{\pi}{2}$$

したがって，I のとりうる値の範囲は　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq I\leqq\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{2}$

8

解答　(1)　略　　(2)　n が奇数のとき 0，n が偶数のとき $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n-1}$

解説

(1)　0 以上の任意の整数 n に対し $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ ……① が成り立つことを数学的帰納法で示す。

[1]　$n=0$ のとき

$$\cos(0\cdot\theta)=\cos 0=1,\ T_0(\cos\theta)=1$$

よって，$n=0$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=1$ のとき

$T_1(x)=x$ であるから　$T_1(\cos\theta)=\cos\theta$

よって，$n=1$ のとき ① は成り立つ。

[3]　$n=k$，$n=k+1$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$\cos k\theta=T_k(\cos\theta),\ \cos(k+1)\theta=T_{k+1}(\cos\theta)$$

$n=k+2$ のとき

$$T_{k+2}(\cos\theta)=2\cos\theta\,T_{k+1}(\cos\theta)-T_k(\cos\theta)$$
$$=2\cos\theta\cos(k+1)\theta-\cos k\theta\quad\cdots\cdots②$$

$\cos\theta\cos(k+1)\theta=\dfrac{1}{2}\{\cos(k+2)\theta+\cos k\theta\}$ であるから，② より

$$T_{k+2}(\cos\theta)=2\cdot\frac{1}{2}\{\cos(k+2)\theta+\cos k\theta\}-\cos k\theta$$

$$=\cos(k+2)\theta+\cos k\theta-\cos k\theta=\cos(k+2)\theta$$

よって，$n=k+2$ のときも ① は成り立つ。

[1]～[3] から，0 以上の任意の整数 n について $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ が成り立つ。

(2) $x=\cos\theta$ とおくと $dx=-\sin\theta\,d\theta$

x	$-1\longrightarrow1$
θ	$\pi\longrightarrow0$

よって，(1) の結果を利用すると

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)dx=-\int_{\pi}^{0}T_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\cos n\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\}d\theta \quad \cdots\cdots③$$

[1] $n-1=0$ すなわち $n=1$ のとき

③ から $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos2\theta}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=0$

[2] $n-1\neq0$ すなわち $n\neq1$ のとき

③ から $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_0^{\pi}$

$$=\frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right\}$$

n が奇数のとき，$n+1$，$n-1$ は偶数であるから

$\cos(n+1)\pi=1$，$\cos(n-1)\pi=1$

したがって $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)$

すなわち $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)dx=0$ ……④

n が偶数のとき，$n+1$，$n-1$ は奇数であるから

$\cos(n+1)\pi=-1$，$\cos(n-1)\pi=-1$

ゆえに $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}$

④ は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，[1]，[2] から

n が奇数のとき $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)dx=0$

n が偶数のとき $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)dx=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}$

9

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略

解説

(1) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)\right]_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2dx$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta}=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^n(x-\beta)dx=\left[\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}(x-\beta)\right]_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{n+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{n+1}dx$

$$=-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}\left[(x-\alpha)^{n+2}\right]_{\alpha}^{\beta}=-\frac{n!}{(n+2)!}(\beta-\alpha)^{n+2}$$

(3) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^n(x-\beta)^m dx=I(n,\ m)$ とおくと

$$I(n,\ m)=\left[\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}(x-\beta)^m\right]_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{n+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{n+1}\cdot m(x-\beta)^{m-1}dx$$

$$=-\frac{m}{n+1}I(n+1,\ m-1)$$

ゆえに $I(n,\ m)=-\dfrac{m}{n+1}I(n+1,\ m-1)$

$$=(-1)^2\frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}I(n+2,\ m-2)$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=(-1)^m\frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{n+m}I(n+m,\ 0)$$

$$=(-1)^m\frac{n!m!}{(n+m)!}I(n+m,\ 0)$$

$$=(-1)^m\frac{n!m!}{(n+m)!}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{n+m}dx$$

$$=(-1)^m\frac{n!m!}{(n+m+1)!}\left[(x-\alpha)^{n+m+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=(-1)^m\frac{n!m!}{(n+m+1)!}(\beta-\alpha)^{n+m+1}$$

参考 まず初めに (3) を証明し，その結果において

(1) $n=m=1$ (2) $m=1$ を代入してもよい。

10

解答 (1) $\dfrac{1}{60}$ (2) $B(m,\ n)=\dfrac{n}{m+1}B(m+1,\ n-1)$

(3) $B(m,\ n)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$ (4) $(-1)^n(b-a)^{m+n+1}\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$

解説

(1) $\displaystyle B(3,\ 2)=\int_0^1x^3(1-x)^2dx=\int_0^1(x^3-2x^4+x^5)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{5}x^5+\frac{x^6}{6}\right]_0^1$

$$=\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1}{60}$$

(2) $n\geqq1$ のとき

$$B(m,\ n)=\int_0^1x^m(1-x)^ndx=\int_0^1\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)'(1-x)^ndx$$

$$=\left[\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1}\right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{m+1}\int_0^1x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{n}{m+1}B(m+1,\ n-1)$$

(3) (2) から，$n\geqq1$ のとき

$$B(m,\ n)=\frac{n}{m+1}B(m+1,\ n-1)=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}B(m+2,\ n-2)$$

$$=\cdots\cdots=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{m+n}B(m+n,\ 0)$$

ここで $\displaystyle B(m+n,\ 0)=\int_0^1x^{m+n}dx=\left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_0^1=\frac{1}{m+n+1}$

したがって

$$B(m,\ n)=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{m+n}\cdot\frac{1}{m+n+1}$$

$$=\frac{n!}{(m+n+1)(m+n)\cdots\cdots(m+1)}$$

すなわち $B(m,\ n)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$

この式は $n=0$ のときも成り立つ。

よって $B(m,\ n)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$

(4) $x-a=t$ とおくと $dx=dt$

また $x-b=t+a-b$

x	$a\longrightarrow b$
t	$0\longrightarrow b-a$

よって $\displaystyle\int_a^b(x-a)^m(x-b)^ndx=\int_0^{b-a}t^m(t+a-b)^ndt$

$t=(b-a)u$ とおくと $dt=(b-a)du$

t	$0\longrightarrow b-a$
u	$0\longrightarrow1$

したがって

$$\int_a^b(x-a)^m(x-b)^ndx$$

$$=\int_0^1\{(b-a)u\}^m\{(b-a)u+a-b\}^n\cdot(b-a)du$$

$$=(b-a)^{m+1}\int_0^1u^m\{(b-a)(u-1)\}^ndu=(b-a)^{m+n+1}\int_0^1u^m(u-1)^ndu$$

$$=(-1)^n(b-a)^{m+n+1}\int_0^1u^m(1-u)^ndu=(-1)^n(b-a)^{m+n+1}B(m,\ n)$$

$$=(-1)^n(b-a)^{m+n+1}\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

11

解答 (1) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (2) $-\dfrac{1}{1+x^2}$ (3) $\dfrac{\pi}{2}$

解説

(1) $\displaystyle f(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$ であるから $\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(2) (1) から $\displaystyle\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}$

(3) (1)，(2) から $\displaystyle\frac{d}{dx}\left\{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$

よって $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=C$ （C は定数） ……①

この等式で $x=1$ とおくと $2f(1)=C$

ゆえに $\displaystyle 2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=C$ ……②

$t=\tan\theta$ とおくと $dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

t	$0\longrightarrow1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに，② から $C=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，① から $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

12

解答 (1) $m(a)=\left(e^{-\frac{a}{2}}-1\right)^2$ (2) $\frac{1}{4}$

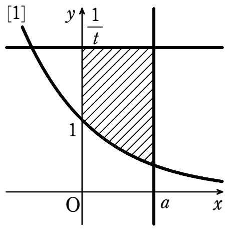
解説

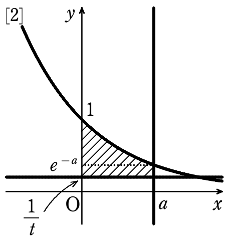
(1) [1] $\frac{1}{t}>1$ すなわち $0<t<1$ のとき

t が増加すると $\frac{1}{t}$ は減少し，$S(a,\ t)$ も減少する。

[2] $0<\frac{1}{t}<e^{-a}$ すなわち $t>e^a$ のとき

t が増加すると $\frac{1}{t}$ は減少し，$S(a,\ t)$ は増加する。





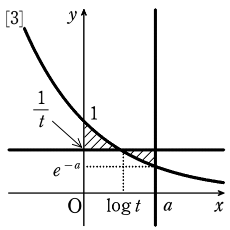
[3] $e^{-a}\leqq\frac{1}{t}\leqq 1$ すなわち $1\leqq t\leqq e^a$ のとき

$e^{-x}=\frac{1}{t}$ とおくと，$e^x=t$ から $x=\log t$

$$S(a,\ t)=\int_0^{\log t}\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx+\int_{\log t}^{a}\left(\frac{1}{t}-e^{-x}\right)dx$$

$$=\left[-e^{-x}-\frac{1}{t}x\right]_0^{\log t}+\left[\frac{1}{t}x+e^{-x}\right]_{\log t}^{a}$$

$$=-\frac{2}{t}-\frac{2}{t}\log t+\frac{1}{t}a+e^{-a}+1$$



$S(a,\ t)=f(t)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{2}{t^2}-2\left(-\frac{1}{t^2}\log t+\frac{1}{t^2}\right)-\frac{a}{t^2}=\frac{2\log t-a}{t^2}$$

$f'(t)=0$ とおくと $t=e^{\frac{a}{2}}$

また，$a>0$ より $0<\frac{a}{2}<a$ であるから

$$1<e^{\frac{a}{2}}<e^a$$

$f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	1	…	$e^{\frac{a}{2}}$	…	e^a
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

したがって，$t=e^{\frac{a}{2}}$ のとき $f(t)$ は最小値をとる。

よって，[1]～[3]から

$$m(a)=f\left(e^{\frac{a}{2}}\right)=-\frac{2}{e^{\frac{a}{2}}}-\frac{2}{e^{\frac{a}{2}}}\times\frac{a}{2}+\frac{a}{e^{\frac{a}{2}}}+e^{-a}+1$$

$$=e^{-a}-2e^{-\frac{a}{2}}+1=\left(e^{-\frac{a}{2}}-1\right)^2$$

(2) $-\frac{a}{2}=b$ とおくと，$a\longrightarrow 0$ のとき $b\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}=\lim_{b\to 0}\frac{(e^b-1)^2}{4b^2}=\lim_{b\to 0}\frac{1}{4}\left(\frac{e^b-1}{b}\right)^2=\frac{1}{4}\lim_{b\to 0}\left(\frac{e^b-e^0}{b-0}\right)^2=\frac{1}{4}(e^0)^2=\frac{1}{4}$$

13

解答 C は積分定数とする (1) $-(x+1)e^{-x}+C$ (2) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$

(3) $f(x)=-3(x^2+2x+2)e^{-x}+6$

解説

(1) $\int xe^{-x}dx=\int x(-e^{-x})'dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

$=-(x+1)e^{-x}+C$ （C は積分定数）

(2) $\int x^2e^{-x}dx=\int x^2(-e^{-x})'dx=-x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx$

よって，(1) から $\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}-2(x+1)e^{-x}+C'$

$=-(x^2+2x+2)e^{-x}+C'$ （C' は積分定数）

(3) $x-t=s$ とおくと $dt=-ds$

t	$0\longrightarrow x$
s	$x\longrightarrow 0$

よって $\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt=\int_x^0 f(s)e^{-x+s}\cdot(-ds)$

$=e^{-x}\int_0^x f(s)e^s ds$

ゆえに $f(x)=x^3e^{-x}+e^{-x}\int_0^x f(s)e^s ds$ ……①

両辺を x で微分すると $f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}-e^{-x}\int_0^x f(s)e^s ds+e^{-x}\cdot f(x)e^x$

① より，$e^{-x}\int_0^x f(s)e^s ds=f(x)-x^3e^{-x}$ であるから

$$f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}-\{f(x)-x^3e^{-x}\}+f(x)=3x^2e^{-x}$$

よって，(2) より $f(x)$ は定数 C'' を用いて $f(x)=-3(x^2+2x+2)e^{-x}+C''$ と表せる。

$f(0)=0+\int_0^0 f(-t)e^{-t}dt=0$ より $C''=6$

したがって $f(x)=-3(x^2+2x+2)e^{-x}+6$

14

解答 $\frac{\sqrt{2}}{48}\pi$

解説

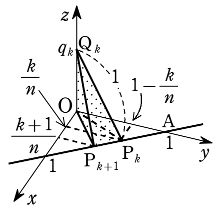
$\mathrm{Q}_k(0,\ 0,\ q_k)$ とする。

$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k=1$ から $\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2+q_k{}^2}=1$

$q_k\geqq 0$ であるから $q_k=\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(1-\frac{k}{n}\right)^2}$

また，$\mathrm{P}_{k+1}\left(\frac{k+1}{n},\ 1-\frac{k+1}{n},\ 0\right)$ であるから

$$\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2n}$$



ゆえに $V_k=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\cdot q_k=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(1-\frac{k}{n}\right)^2}$

$$=\frac{1}{6n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(1-\frac{k}{n}\right)^2}$$

よって $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(1-\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{1}{6}\int_0^1\sqrt{1-x^2-(1-x)^2}\,dx$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\sqrt{2x-2x^2}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

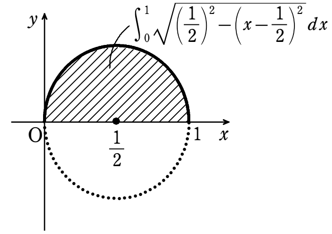
ここで，$y=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$ は

中心 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，半径 $\frac{1}{2}$ の半円を表すから，

その面積を考えて

$$\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{48}\pi$$



15

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$ とおくと $f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$

$0<\frac{2}{\pi}<1$ であるから，$f'(\alpha)=0$ となる α が

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つ存在し，$f(x)$ の

増減表は右のようになる。

x	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

よって，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $f(x)\geqq 0$

すなわち $\sin x\geqq\frac{2}{\pi}x$

(2) $y=e^{-x}$ は単調に減少するから，(1) より，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において

$$0<e^{-n\sin x}\leqq e^{-n\cdot\frac{2}{\pi}x}$$

よって $0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2n}{\pi}x}dx$

ここで $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2n}{\pi}x}dx=\left[-\frac{\pi}{2n}e^{-\frac{2n}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2n}{\pi}x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)=0$$

よって，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\sin x}dx=0$$

16

解答 (1) (ア) 略 (イ) 0 (2) 0

解説

(1) (ア) $f(x)=\frac{x}{e}-\log x$ とおくと $f'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{x}=\frac{x-e}{ex}$

$1<x<e$ において $f'(x)<0$

よって，$f(x)$ は $1\leqq x\leqq e$ において単調に減少する。

また $f(e)=0$

ゆえに，$1\leqq x\leqq e$ において　$f(x)\geqq 0$　すなわち　$\log x\leqq \frac{x}{e}$

(イ)　(ア)より，$1\leqq x\leqq e$ において　$0\leqq \log x\leqq\frac{x}{e}$

よって　$0\leqq(\log x)^n\leqq\left(\frac{x}{e}\right)^n$　ゆえに　$0\leqq x^2(\log x)^n\leqq x^2\left(\frac{x}{e}\right)^n$

よって　$0\leqq\int_1^e x^2(\log x)^n dx\leqq\int_1^e x^2\left(\frac{x}{e}\right)^n dx$

ここで　$\int_1^e x^2\left(\frac{x}{e}\right)^n dx=\frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2}dx=\frac{1}{e^n}\left[\frac{1}{n+3}x^{n+3}\right]_1^e$

$$=\frac{1}{e^n(n+3)}(e^{n+3}-1)=\frac{1}{n+3}\left(e^3-\frac{1}{e^n}\right)$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}\left(e^3-\frac{1}{e^n}\right)=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\int_1^e x^2(\log x)^n dx=0$

(2)　$\int te^{t^2}dt=F(t)+C$ (C は積分定数) とすると　$F'(t)=te^{t^2}$

よって　$\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\int_0^x te^{t^2}dt=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{2x}\cdot\left[F(t)\right]_0^x\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\frac12\cdot\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right\}$

$$=\frac12F'(0)=0$$

17

解答　(1)　$\frac12n^2\log n-\frac14n^2+\frac14$　(2)　略　(3)　$\frac12$

解説

(1)　$\int_1^n x\log x\,dx=\left[\frac12x^2\log x\right]_1^n-\int_1^n\frac12x^2\cdot\frac1x dx=\frac12n^2\log n-\left[\frac14x^2\right]_1^n$

$$=\frac12n^2\log n-\frac14n^2+\frac14$$

(2)　$f(x)=x\log x$ とすると

$$f'(x)=\log x+x\cdot\frac1x=\log x+1$$

よって，$x\geqq1$ で $f'(x)>0$ となり，$x\geqq1$ において $f(x)$ は単調に増加する。

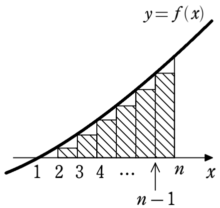
自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき

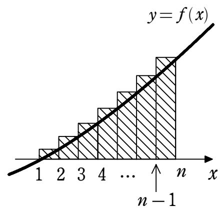
$$k\log k\leqq x\log x\leqq(k+1)\log(k+1)$$

常に $k\log k=x\log x$ または $x\log x=(k+1)\log(k+1)$ ではないから

$$\int_k^{k+1}k\log k\,dx<\int_k^{k+1}x\log x\,dx<\int_k^{k+1}(k+1)\log(k+1)dx$$

ゆえに　$k\log k<\int_k^{k+1}x\log x\,dx<(k+1)\log(k+1)$





よって

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\log k<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}x\log x\,dx<\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\log(k+1)$$

ここで，(1)の結果を利用すると

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}x\log x\,dx=\int_1^n x\log x\,dx$$

$$=\frac12n^2\log n-\frac14(n^2-1)$$

また　$\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\log(k+1)=\sum_{k=2}^n k\log k=\sum_{k=1}^n k\log k$

ゆえに　$\sum_{k=1}^{n-1}k\log k<\frac12n^2\log n-\frac14(n^2-1)<\sum_{k=1}^n k\log k$　……①

$\sum_{k=1}^{n-1}k\log k<\frac12 n^2\log n-\frac14(n^2-1)$ の両辺に $n\log n$ を加えて

$$\sum_{k=1}^n k\log k<\frac12n^2\log n-\frac14(n^2-1)+n\log n\quad\cdots\cdots②$$

①，②から，$n\geqq2$ のとき

$$\frac12n^2\log n-\frac14(n^2-1)<\sum_{k=1}^n k\log k<\frac12n^2\log n-\frac14(n^2-1)+n\log n$$

(3)　$a_n=\frac{\log(1^1\cdot2^2\cdot3^3\cdot\cdots\cdots\cdot n^n)}{n^2\log n}$ とすると

$$a_n=\frac{1}{n^2\log n}(\log1+2\log2+\cdots\cdots+n\log n)=\frac{1}{n^2\log n}\sum_{k=1}^n k\log k$$

$n\geqq2$ のとき　$n^2\log n>0$

よって，(2)で証明した不等式の各辺を $n^2\log n$ で割ると

$$\frac12-\frac{1}{4\log n}\left(1-\frac1{n^2}\right)<a_n<\frac12-\frac1{4\log n}\left(1-\frac1{n^2}\right)+\frac1n$$

ここで　$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac12-\frac1{4\log n}\left(1-\frac1{n^2}\right)\right\}=\frac12$，$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac12-\frac1{4\log n}\left(1-\frac1{n^2}\right)+\frac1n\right\}=\frac12$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac12$

18

解答　$\frac\pi4+\frac12$

解説

[ ]の定義から　$\sqrt{2n^2-k^2}-1<[\sqrt{2n^2-k^2}]\leqq\sqrt{2n^2-k^2}$

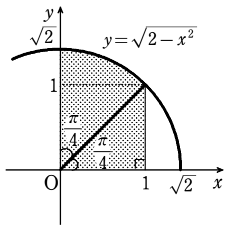
よって　$\sqrt{2-\left(\frac kn\right)^2}-\frac1n<\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n}\leqq\sqrt{2-\left(\frac kn\right)^2}$

ゆえに　$\sum_{k=1}^n\frac1n\sqrt{2-\left(\frac kn\right)^2}-\sum_{k=1}^n\frac1{n^2}<a_n\leqq\sum_{k=1}^n\frac1n\sqrt{2-\left(\frac kn\right)^2}$　……①

一方　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac1n\sqrt{2-\left(\frac kn\right)^2}=\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$

$\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$ は図の網の部分の面積に等しいから

$$\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx=\frac12\cdot(\sqrt2)^2\cdot\frac\pi4+\frac12\cdot1\cdot1=\frac\pi4+\frac12$$



また　$\sum_{k=1}^n\frac1{n^2}=\frac1{n^2}\cdot n=\frac1n$

よって，①において $n\to\infty$ とすると

$$\frac\pi4+\frac12\leqq\lim_{n\to\infty}a_n\leqq\frac\pi4+\frac12$$

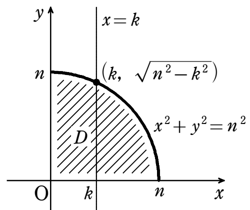
したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac\pi4+\frac12$

19

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　不等式 $x^2+y^2<n^2$，$x>0$，$y>0$ で表される領域 D は，右の図の斜線部分である(境界線は含まない)。



領域 D 内における直線 $x=k$ ($k=1$，2，……，$n-1$) 上の格子点の数を $T(k)$ とすると

[1]　$\sqrt{n^2-k^2}$ が整数であるとき

$$T(k)=\sqrt{n^2-k^2}-1$$

このとき，$\sqrt{n^2-k^2}-1\leqq T(k)<\sqrt{n^2-k^2}$ は満たされる。

[2]　$\sqrt{n^2-k^2}$ が整数でないとき　$T(k)=[\sqrt{n^2-k^2}]$

ここで，$[\sqrt{n^2-k^2}]$は $\sqrt{n^2-k^2}$ の整数部分を表す。

このとき　$[\sqrt{n^2-k^2}]<\sqrt{n^2-k^2}<[\sqrt{n^2-k^2}]+1$

よって　$\sqrt{n^2-k^2}-1<T(k)<\sqrt{n^2-k^2}$

$P(n)=\sum_{k=1}^{n-1}T(k)$ であるから，[1]，[2]より $\sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{n^2-k^2}-1)\leqq P(n)<\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2}$

が成り立つ。

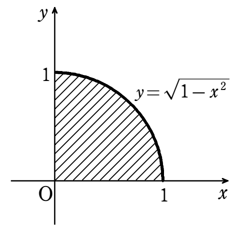
(2)　$\sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{n^2-k^2}-1)=\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2}-(n-1)$ であるから，(1)より

$$\frac1n\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac kn\right)^2}-\frac1n+\frac1{n^2}\leqq\frac{P(n)}{n^2}<\frac1n\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac kn\right)^2}\quad\cdots\cdots①$$

ここで　$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac1n+\frac1{n^2}\right)=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac kn\right)^2}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

ここで，$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は半径1の四分円の面積を表すから



$$\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac kn\right)^2}=\frac14\cdot\pi\cdot1^2=\frac\pi4$$

したがって，①から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}=\frac\pi4$$

20

解答　(1)　$I_1=1-\log2$，$I_n+I_{n+1}=\frac1{n+1}$　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac1{1+x}\right)dx=\left[x-\log(1+x)\right]_0^1=1-\log2$

$$I_n+I_{n+1}=\int_0^1\left(\frac{x^n}{1+x}+\frac{x^{n+1}}{1+x}\right)dx=\int_0^1x^ndx=\left[\frac1{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac1{n+1}$$

(2)　$0\leqq x\leqq1$ のとき　$1\leqq1+x\leqq2$

よって　$\frac12\leqq\frac1{1+x}\leqq1$　ゆえに　$\frac{x^n}2\leqq\frac{x^n}{1+x}\leqq x^n$

よって　$\int_0^1\frac{x^n}2dx\leqq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqq\int_0^1x^ndx$

ここで　$\int_0^1\frac{x^n}2dx=\frac1{2(n+1)}$，$\int_0^1x^ndx=\frac1{n+1}$

したがって　　$\dfrac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}$

(3)　(1) より，$1=\log 2+I_1$，$\dfrac{1}{n+1}=I_n+I_{n+1}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$
$$=(\log 2+I_1)-(I_1+I_2)+(I_2+I_3)-(I_3+I_4)+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}(I_{n-1}+I_n)$$
$$=\log 2+(-1)^{n-1}I_n$$

(2) において　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$n=2m-1$，$a_k=\begin{cases}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\cdot\dfrac{1}{k}\,{}_{m-1}\mathrm{C}_{\frac{k-1}{2}} & (k=1,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 2m-1)\\ 0 & (k=2,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 2m-2)\end{cases}$

(2)　略

解説

(1)　$\displaystyle\int\cos^{2m-1}x\,dx=\int(1-\sin^2 x)^{m-1}\cos x\,dx=\int\left\{\sum_{r=0}^{m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_r\cdot(-1)^r(\sin^2 x)^r\right\}\cos x\,dx$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r{}_{m-1}\mathrm{C}_r\int\sin^{2r}x\cos x\,dx$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r\cdot\frac{1}{2r+1}{}_{m-1}\mathrm{C}_r\sin^{2r+1}x+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

$2r+1=k$ とおくと，$r=0$，1，2，……，$m-1$ のとき $k=1$，3，5，……，$2m-1$ で，$r=\dfrac{k-1}{2}$ である。

よって，求める自然数 n および実数 a_k は

$$n=2m-1,\quad a_k=\begin{cases}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\cdot\dfrac{1}{k}\,{}_{m-1}\mathrm{C}_{\frac{k-1}{2}} & (k=1,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 2m-1)\\ 0 & (k=2,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 2m-2)\end{cases}$$

(2)　$\displaystyle I=\int f(\cos x)\,dx-\int f(-\cos x)\,dx$ とおく。

$f(t)$ を n 次の多項式とすると $\displaystyle f(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots\cdots+b_nt^n=\sum_{k=0}^{n}b_kt^k$ と表される。

このとき，$n=2l-1$ とおくと　　$\displaystyle f(t)-f(-t)=\sum_{k=0}^{n}b_k\{1-(-1)^k\}t^k=\sum_{m=1}^{l}2b_{2m-1}t^{2m-1}$

よって　　$\displaystyle I=\int\{f(\cos x)-f(-\cos x)\}dx=\sum_{m=1}^{l}2b_{2m-1}\int\cos^{2m-1}x\,dx$

(1) から，$m=1$，2，……，l に対し，ある多項式 $g_m(t)$ を用いて

$\displaystyle\int\cos^{2m-1}x\,dx=g_m(\sin x)+C$　(C は積分定数) と表される。

よって，$\displaystyle g(t)=\sum_{m=1}^{l}2b_{2m-1}g_m(t)$ とおくと，$g(t)$ は多項式で，$I=g(\sin x)+C$ と表される。

$\boxed{2}$

解答　$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{35}{12}$

解説

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$
$$=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)x\,dx+\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

ここで，$\displaystyle I_1=\int_0^1x^2dx$，$\displaystyle I_2=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)x\,dx$，$\displaystyle I_3=\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ とおく。

$$I_1=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

I_2 について，$\sqrt{1+x^2}=t$ とおくと　　$x^2=t^2-1$，$x\,dx=t\,dt$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow\sqrt{2}$

よって　　$\displaystyle I_2=\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t}+\frac{t^2-1}{t^3}\right)t\,dt=\int_1^{\sqrt{2}}\left(2-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$$=\left[2t+\frac{1}{t}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}-3$$

I_3 について，$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって　　$\displaystyle I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\tan^2\theta\cdot(\cos^2\theta)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right\}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\cdot\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

したがって，求める定積分は

$$I_1+I_2+I_3=\frac{1}{3}+\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}-3\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{35}{12}$$

$\boxed{3}$

解答　$\dfrac{2}{3\pi}$

解説

$n\pi x=t$ とおくと　　$x=\dfrac{1}{n\pi}t$，$dx=\dfrac{1}{n\pi}dt$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow n\pi$

よって　　$\displaystyle I_n=\int_0^{n\pi}\frac{1}{n^2\pi^2}t^2|\sin t|\cdot\frac{1}{n\pi}dt=\frac{1}{n^3\pi^3}\int_0^{n\pi}t^2|\sin t|dt$

$$=\frac{1}{n^3\pi^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}t^2(-1)^{k-1}\sin t\,dt=\frac{1}{n^3\pi^3}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}t^2\sin t\,dt$$

ここで　　$\displaystyle\int t^2\sin t\,dt=-t^2\cos t+\int 2t\cos t\,dt=-t^2\cos t+2t\sin t-\int 2\sin t\,dt$

$$=-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

よって　　$\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}t^2\sin t\,dt=\Big[-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$

$$=-(k\pi)^2\cdot(-1)^k+2\cdot(-1)^k$$
$$+\{(k-1)\pi\}^2\cdot(-1)^{k-1}-2\cdot(-1)^{k-1}$$
$$=(-1)^{k-1}\{k^2\pi^2-2+(k-1)^2\pi^2-2\}$$
$$=(-1)^{k-1}(2\pi^2k^2-2\pi^2k+\pi^2-4)$$

ゆえに　　$\displaystyle I_n=\frac{1}{n^3\pi^3}\sum_{k=1}^{n}(2\pi^2k^2-2\pi^2k+\pi^2-4)$

$$=\frac{1}{n^3\pi^3}\left\{2\pi^2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\pi^2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(\pi^2-4)n\right\}$$
$$=\frac{1}{3\pi}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n\pi}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2\pi^3}(\pi^2-4)$$

したがって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{2}{3\pi}$

4

解答 (1) $\dfrac{e^{\frac{a}{2}\pi}}{a^2+b^2}\left(b\sin\dfrac{b}{2}\pi+a\cos\dfrac{b}{2}\pi\right)-\dfrac{a}{a^2+b^2}$

(2) $J(a,\ b,\ c)=-\dfrac{1}{2}I(a,\ b+c)+\dfrac{1}{2}I(a,\ b-c)$ (3) $e^{\frac{\pi}{2}}-1$

解説

(1) $a\neq0$ であるから $I(a,\ b)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)'\cos bx\,dx$

$$=\frac{1}{a}\left\{\left[e^{ax}\cos bx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}(\cos bx)'dx\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left(e^{\frac{a}{2}\pi}\cos\frac{b}{2}\pi-1+b\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\sin bx\,dx\right)$$

ここで $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\sin bx\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)'\sin bx\,dx$

$$=\frac{1}{a}\left\{\left[e^{ax}\sin bx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}(\sin bx)'dx\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left(e^{\frac{a}{2}\pi}\sin\frac{b}{2}\pi-b\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos bx\,dx\right)=\frac{1}{a}\left\{e^{\frac{a}{2}\pi}\sin\frac{b}{2}\pi-bI(a,\ b)\right\}$$

よって $I(a,\ b)=\dfrac{1}{a}\left[e^{\frac{a}{2}\pi}\cos\dfrac{b}{2}\pi-1+\dfrac{b}{a}\left\{e^{\frac{a}{2}\pi}\sin\dfrac{b}{2}\pi-bI(a,\ b)\right\}\right]$

$$=\frac{1}{a}e^{\frac{a}{2}\pi}\cos\frac{b}{2}\pi-\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}e^{\frac{a}{2}\pi}\sin\frac{b}{2}\pi-\frac{b^2}{a^2}I(a,\ b)$$

したがって $(a^2+b^2)I(a,\ b)=e^{\frac{a}{2}\pi}\left(b\sin\dfrac{b}{2}\pi+a\cos\dfrac{b}{2}\pi\right)-a$

$a\neq0$ より，$a^2+b^2\neq0$ であるから

$$I(a,\ b)=\frac{e^{\frac{a}{2}\pi}}{a^2+b^2}\left(b\sin\frac{b}{2}\pi+a\cos\frac{b}{2}\pi\right)-\frac{a}{a^2+b^2}$$

(2) $J(a,\ b,\ c)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cdot\left\{-\frac{1}{2}\cos(b+c)x+\frac{1}{2}\cos(b-c)x\right\}dx$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos(b+c)x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos(b-c)x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}I(a,\ b+c)+\frac{1}{2}I(a,\ b-c)$$

(3) $8\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin tx\sin2tx\cos3tx\cos4tx\,dx$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\cos4tx\sin tx)(\cos3tx\sin2tx)dx$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cdot\frac{1}{2}(\sin5tx-\sin3tx)\cdot\frac{1}{2}(\sin5tx-\sin tx)dx$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin^25tx\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin5tx\sin tx\,dx\right.$$

$$\left.-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin5tx\sin3tx\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin3tx\sin tx\,dx\right)$$

ここで，(1)，(2) より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin^25tx\,dx=J(1,\ 5t,\ 5t)=-\frac{1}{2}I(1,\ 10t)+\frac{1}{2}I(1,\ 0)$$

$$=-\frac{1}{2}I(1,\ 10t)+\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin5tx\sin tx\,dx=J(1,\ 5t,\ t)=-\frac{1}{2}I(1,\ 6t)+\frac{1}{2}I(1,\ 4t)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin5tx\sin3tx\,dx=J(1,\ 5t,\ 3t)=-\frac{1}{2}I(1,\ 8t)+\frac{1}{2}I(1,\ 2t)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin3tx\sin tx\,dx=J(1,\ 3t,\ t)=-\frac{1}{2}I(1,\ 4t)+\frac{1}{2}I(1,\ 2t)$$

よって $8\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin tx\sin2tx\cos3tx\cos4tx\,dx$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-1-2I(1,\ 4t)+I(1,\ 6t)+I(1,\ 8t)-I(1,\ 10t)$$

また，正の実数 α に対して，(1) から

$$|I(1,\ \alpha t)|=\left|\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+\alpha^2t^2}\left(\alpha t\sin\frac{\alpha\pi}{2}t+\cos\frac{\alpha\pi}{2}t\right)-\frac{1}{1+\alpha^2t^2}\right|\leqq\left|\frac{e^{\frac{\pi}{2}}(\alpha t+1)+1}{1+\alpha^2t^2}\right|$$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left|\frac{e^{\frac{\pi}{2}}(\alpha t+1)+1}{1+\alpha^2t^2}\right|=0$ であるから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{t\to\infty}|I(1,\ \alpha t)|=0$

ゆえに $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\{-2I(1,\ 4t)+I(1,\ 6t)+I(1,\ 8t)-I(1,\ 10t)\}=0$

したがって $\displaystyle\lim_{t\to\infty}8\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin tx\sin2tx\cos3tx\cos4tx\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-1$

5

解答 $\dfrac{2}{\pi}$

解説

$\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin nx|dx=I_n$ とすると

$$I_n=\sum_{k=1}^{n^2}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}e^{-x}|\sin nx|dx=\sum_{k=1}^{n^2}\left|\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}e^{-x}\sin nx\,dx\right|$$

ここで $(e^{-x}\sin nx)'=-e^{-x}\sin nx+ne^{-x}\cos nx$ ……①

$(e^{-x}\cos nx)'=-e^{-x}\cos nx-ne^{-x}\sin nx$ ……②

①＋②$\times n$ から

$(e^{-x}\sin nx+ne^{-x}\cos nx)'=-(n^2+1)e^{-x}\sin nx$

よって $\displaystyle\int e^{-x}\sin nx\,dx=-\frac{1}{n^2+1}e^{-x}(\sin nx+n\cos nx)+C$ （C は積分定数）

したがって

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}e^{-x}\sin nx\,dx=\left[-\frac{1}{n^2+1}e^{-x}(\sin nx+n\cos nx)\right]_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}$$

$$=-\frac{n}{n^2+1}e^{-\frac{k}{n}\pi}(-1)^k+\frac{n}{n^2+1}e^{-\frac{k-1}{n}\pi}(-1)^{k-1}$$

$$=-\frac{n}{n^2+1}e^{-\frac{k}{n}\pi}(-1)^k\left(1+e^{\frac{\pi}{n}}\right)$$

よって $\displaystyle I_n=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+1}e^{-\frac{k}{n}\pi}\left(1+e^{\frac{\pi}{n}}\right)=\frac{n}{n^2+1}\left(1+e^{\frac{\pi}{n}}\right)\sum_{k=1}^{n^2}e^{-\frac{k}{n}\pi}$

$$=\frac{n}{n^2+1}\left(1+e^{\frac{\pi}{n}}\right)\times\frac{e^{-\frac{\pi}{n}}\left\{1-\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}\right\}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\left(1+e^{\frac{\pi}{n}}\right)e^{-\frac{\pi}{n}}(1-e^{-n\pi})\cdot\frac{1}{n\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)}$$

$-\dfrac{\pi}{n}=t$ とおくと，$n\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)=\lim_{t\to0}\frac{\pi(e^t-1)}{t}=\pi\lim_{t\to0}\frac{e^t-e^0}{t-0}=\pi$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{1+0}\times(1+1)(1-0)\times\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$

別解 $\dfrac{k-1}{n}\pi\leqq x\leqq\dfrac{k}{n}\pi$ において $e^{-\frac{k}{n}\pi}\leqq e^{-x}\leqq e^{-\frac{k-1}{n}\pi}$ であるから

$$e^{-\frac{k}{n}\pi}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx\leqq\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}e^{-x}|\sin nx|dx\leqq e^{-\frac{k-1}{n}\pi}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx \quad \text{……①}$$

$\dfrac{k-1}{n}\pi\leqq x\leqq\dfrac{k}{n}\pi$ において $\sin nx$ は符号が変わらないから

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx=\left|\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}\sin nx\,dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}\right|=\frac{2}{n}$$

よって，①は $\displaystyle\frac{2}{n}e^{-\frac{k}{n}\pi}\leqq\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}e^{-x}|\sin nx|dx\leqq\frac{2}{n}e^{-\frac{k-1}{n}\pi}$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\frac{2}{n}e^{-\frac{k}{n}\pi}\leqq\sum_{k=1}^{n^2}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}e^{-x}|\sin nx|dx\leqq\sum_{k=1}^{n^2}\frac{2}{n}e^{-\frac{k-1}{n}\pi}$

すなわち $\displaystyle\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n^2}e^{-\frac{k}{n}\pi}\leqq I_n\leqq\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n^2}e^{-\frac{k-1}{n}\pi}$

ここで $\displaystyle\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n^2}e^{-\frac{k}{n}\pi}=\frac{2}{n}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi}{n}}\left\{1-\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}\right\}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\frac{\pi}{n}}{e^{-\frac{\pi}{n}}-1}\cdot e^{-\frac{\pi}{n}}(1-e^{-n\pi})$

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n^2}e^{-\frac{k-1}{n}\pi}=\frac{2}{n}\cdot\frac{1\left\{1-\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}\right\}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\frac{\pi}{n}}{e^{-\frac{\pi}{n}}-1}\cdot(1-e^{-n\pi})$$

$n\longrightarrow\infty$ のとき，どちらも $\dfrac{2}{\pi}$ に収束するから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{2}{\pi}$

6

解答 (1) 証明略，$f(\log\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\log3-2\sqrt{3}+2+\dfrac{\pi}{6}$

解説

(1) $f(x)=\dfrac{2e^{3x}}{e^{2x}+1}$ であるから $f'(x)=\dfrac{6e^{3x}(e^{2x}+1)-2e^{3x}\cdot2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=\dfrac{2e^{5x}+6e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2}>0$

よって，$f(x)$ はすべての実数 x で単調に増加する。

ゆえに，$a<b$ ならば $f(a)<f(b)$ が成り立つ。

また，$e^{2\log\sqrt{3}}=e^{\log 3}=3$，$e^{3\log\sqrt{3}}=e^{\log 3\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$ であるから

$$f(\log\sqrt{3})=\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{3+1}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(2)　$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であるから，$t=g(x)$ とおくと　$x=f(t)$

よって　$dx=f'(t)dt$

また，$f(0)=1$ であるから，(1) より

x	$1 \longrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$
t	$0 \longrightarrow \log\sqrt{3}$

$$\int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} g(x)dx=\int_0^{\log\sqrt{3}} tf'(t)dt$$
$$=\Big[tf(t)\Big]_0^{\log\sqrt{3}}-\int_0^{\log\sqrt{3}}f(t)dt$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\log\sqrt{3}-\int_0^{\log\sqrt{3}}f(t)dt \quad\cdots\cdots①$$

ここで，$\int_0^{\log\sqrt{3}}f(t)dt$ について，$u=e^t$ とおくと

t	$0 \longrightarrow \log\sqrt{3}$
u	$1 \longrightarrow \sqrt{3}$

$du=e^t dt$

ゆえに　$\int_0^{\log\sqrt{3}}f(t)dt=\int_0^{\log\sqrt{3}}\frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1}\cdot e^t dt$

$$=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{u^2}{u^2+1}du=2\int_1^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du$$
$$=2\int_1^{\sqrt{3}}du-2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2+1}du=2\Big[u\Big]_1^{\sqrt{3}}-2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2+1}du$$
$$=2(\sqrt{3}-1)-2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2+1}du \quad\cdots\cdots②$$

ここで，$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2+1}du$ について，$u=\tan\theta$ とおくと

u	$1 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$du=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

よって　$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2+1}du=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

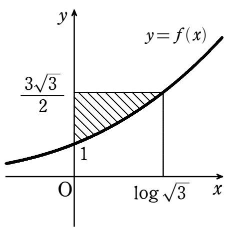
$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\quad\cdots\cdots③$$

①，②，③ から　$\int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}g(x)dx=\frac{3\sqrt{3}}{2}\log\sqrt{3}-\left\{2(\sqrt{3}-1)-2\cdot\frac{\pi}{12}\right\}$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\log 3-2\sqrt{3}+2+\frac{\pi}{6}$$

参考　$y=f(x)$ のグラフと，その逆関数 $y=g(x)$ のグラフが直線 $y=x$ に関して対称であることを考えると，$\int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}g(x)dx$ は，右の図の斜線部分の面積であることがわかる。

よって，右の図より，次の等式が成立する。



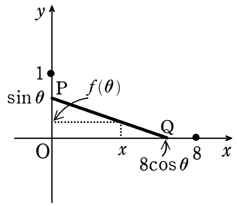
$$\int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}g(x)dx$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\log\sqrt{3}-\int_0^{\log\sqrt{3}}f(x)dx$$

7

解答　$\frac{128}{105}\pi$

解説

線分 PQ の方程式は



$\theta=0$ のとき　$y=0\ (0\leqq x\leqq 8)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき　$\frac{x}{8\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=1$

$(0\leqq x\leqq 8\cos\theta)$　……①

$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき　$x=0\ (0\leqq y\leqq 1)$

① から　$y=\sin\theta\left(1-\frac{x}{8\cos\theta}\right)$

$0<x<8$ である x を固定し，$x=8\cos\theta$ となるときの $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ を $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ とする。

$0\leqq\theta\leqq\alpha$ であるとき　$f(\theta)=\sin\theta\left(1-\frac{x}{8\cos\theta}\right)$

とし，$f(\theta)$ の変域を調べる。

$$f'(\theta)=\cos\theta\left(1-\frac{x}{8\cos\theta}\right)-\frac{x}{8}\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\cos\theta-\frac{x}{8}-\frac{x}{8}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$$
$$=\cos\theta-\frac{x}{8\cos^2\theta}=\frac{8\cos^3\theta-x}{8\cos^2\theta}$$

$f'(\theta)=0$ とすると　$\cos\theta=\sqrt[3]{\frac{x}{8}}$　……②

$0<x\leqq 8\cos\theta$ であるから　$0<\sqrt[3]{\frac{x}{8}}<1$

よって，② を満たす $\theta\ (0<\theta<\alpha)$ がただ 1 つ存在するから，その θ を $\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とすると，$0\leqq\theta\leqq\alpha$ における $f(\theta)$ の増減は次のようになる。

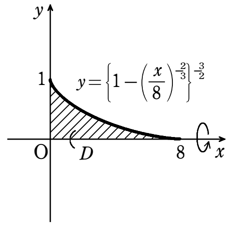
θ	0	…	β	…	α
$f'(\theta)$		+	0	−	
$f(\theta)$	0	↗	極大	↘	0

したがって　$0\leqq f(\theta)\leqq f(\beta)$

ここで　$\sin\beta=(1-\cos^2\beta)^{\frac{1}{2}}=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

ゆえに　$f(\beta)=\sin\beta\left(1-\frac{x}{8\cos\beta}\right)=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$

$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$ の場合も考えると，線分 PQ が通過する領域 D は，次の連立不等式で表される。



$0\leqq y\leqq\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$，$0\leqq x\leqq 8$

すなわち　$\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqq 1$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$

したがって　$V=\pi\int_0^8\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3dx$

$\frac{x}{8}=t$ とおくと　$dx=8dt$

x と t の対応は右のようになるから

x	$0 \longrightarrow 8$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$V=\pi\int_0^1\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^3\cdot 8dt=8\pi\int_0^1\left(1-3t^{\frac{2}{3}}+3t^{\frac{4}{3}}-t^2\right)dt$$
$$=8\pi\left[t-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=8\pi\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{128}{105}\pi$$

8

解答　(1)　略　(2)　$39\log 3-20\log 2-12$

解説

(1)　$f'(x)=\frac{12\{(3e^{3x}-3e^x)(e^{2x}-1)-(e^{3x}-3e^x)\cdot 2e^{2x}\}}{(e^{2x}-1)^2}$

$$=\frac{12(e^{5x}+3e^x)}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{12e^x(e^{4x}+3)}{(e^{2x}-1)^2}$$

ゆえに，$x>0$ のとき　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は，$x>0$ で単調に増加するから，逆関数が存在する。

ここで，$\lim_{x\to+0}(e^{2x}-1)=+0$，$\lim_{x\to+0}(e^{3x}-3e^x)=-2$ であるから　$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$

また　$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^x-3e^{-x})}{1-e^{-2x}}=\infty$

ゆえに，任意の実数 a に対して $f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在する。

(2)　$y=f(x)$ の逆関数が $y=g(x)$ であるから　$x=f(y)=\frac{12(e^{3y}-3e^y)}{e^{2y}-1}$

$f(y_1)=8$ を解くと，$\frac{12(e^{3y_1}-3e^{y_1})}{e^{2y_1}-1}=8$ から　$2(e^{2y_1}-1)=3(e^{3y_1}-3e^{y_1})$

整理して　$3e^{3y_1}-2e^{2y_1}-9e^{y_1}+2=0$

ゆえに　$(e^{y_1}-2)(3e^{2y_1}+4e^{y_1}-1)=0$

$y_1>0$ であるから　$e^{y_1}>1$

よって　$e^{y_1}=2$　すなわち　$y_1=\log 2$

$f(y_2)=27$ を解くと，$\frac{12(e^{3y_2}-3e^{y_2})}{e^{2y_2}-1}=27$ から　$9(e^{2y_2}-1)=4(e^{3y_2}-3e^{y_2})$

整理して　$4e^{3y_2}-9e^{2y_2}-12e^{y_2}+9=0$

ゆえに　$(e^{y_2}-3)(4e^{2y_2}+3e^{y_2}-3)=0$

$e^{y_2}>1$ であるから　$e^{y_2}=3$　　よって　$y_2=\log 3$

また，$x=f(y)$ より $dx=f'(y)dy$ であるから

$$\int_8^{27} g(x)dx=\int_{y_1}^{y_2} yf'(y)dy=\Big[yf(y)\Big]_{y_1}^{y_2}-\int_{y_1}^{y_2} f(y)dy$$

$$=y_2f(y_2)-y_1f(y_1)-\int_{y_1}^{y_2}\frac{12(e^{3y}-3e^y)}{e^{2y}-1}dy$$

$$=27\log 3-8\log 2-12\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{3y}-3e^y}{e^{2y}-1}dy$$

$e^y=t$ とおくと，$e^y dy=dt$ から　　$dy=\dfrac{1}{t}dt$

y	$\log 2 \longrightarrow \log 3$
t	$2 \longrightarrow 3$

ゆえに　$$\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{3y}-3e^y}{e^{2y}-1}dy=\int_2^3\frac{t^3-3t}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\int_2^3\frac{t^2-3}{t^2-1}dt=\int_2^3\left(1-\frac{2}{t^2-1}\right)dt$$

$$=\int_2^3\left(1-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\Big[t-\log(t-1)+\log(t+1)\Big]_2^3$$

$$=3-\log 2+\log 4-2-\log 3=1+\log 2-\log 3$$

よって　$$\int_8^{27} g(x)dx=27\log 3-8\log 2-12(1+\log 2-\log 3)$$

$$=39\log 3-20\log 2-12$$

9

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$\dfrac{nx^{n-1}}{2(\sqrt{1+x^n}+1)\sqrt{1+x^n}}$　　(4)　$2\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

解説

(1)　$$\frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)}=\frac{t(\sqrt{1+t}-1)}{2(\sqrt{1+t}+1)(\sqrt{1+t}-1)}=\frac{t(\sqrt{1+t}-1)}{2t}=\frac{\sqrt{1+t}-1}{2}$$

よって，$t\geqq 0$ のとき，$\log\dfrac{\sqrt{1+t}+1}{2}\leqq\dfrac{\sqrt{1+t}-1}{2}$ …… ① が成り立つことを示せばよい。

$s=\dfrac{\sqrt{1+t}-1}{2}$ とおくと，① は　　$\log(s+1)\leqq s$

また，$t\geqq 0$ のとき　　$s\geqq 0$

ゆえに，$s\geqq 0$ のとき，$\log(s+1)\leqq s$ が成り立つことを示せばよい。

$f(s)=s-\log(s+1)$ とおくと　　$f'(s)=1-\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{s}{s+1}$

したがって，$s\geqq 0$ のとき，$f'(s)\geqq 0$ であるから，$f(s)$ は単調に増加する。

このことと $f(0)=0$ から，$s\geqq 0$ のとき　　$f(s)\geqq 0$

よって，$s\geqq 0$ のとき　　$\log(s+1)\leqq s$

以上から，実数 $t\geqq 0$ に対し，$\log\dfrac{\sqrt{1+t}+1}{2}\leqq\dfrac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)}$ が成り立つ。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ とする。

$x^n\geqq 0$ であるから，(1) の不等式は $t=x^n$ としても成り立ち

$$\log\frac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}\leqq\frac{x^n}{2(\sqrt{1+x^n}+1)}$$

また，$x^n\geqq 0$ より $\dfrac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}\geqq 1$ であるから　　$\log\dfrac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}\geqq 0$

よって　　$$0\leqq\log\frac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}\leqq\frac{x^n}{2(\sqrt{1+x^n}+1)}$$

すなわち　　$0\leqq\log(\sqrt{1+x^n}+1)-\log 2\leqq\dfrac{x^n}{2(\sqrt{1+x^n}+1)}$　　…… ②

また，$\sqrt{1+x^n}+1\geqq 2$ であるから　　$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^n}+1}\leqq\dfrac{1}{2}$

両辺に x^n $(\geqq 0)$ を掛けると　　$\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^n}+1}\leqq\dfrac{x^n}{2}$

よって，$\dfrac{x^n}{2(\sqrt{1+x^n}+1)}\leqq\dfrac{x^n}{4}$ であるから，② より

$$0\leqq\log(\sqrt{1+x^n}+1)-\log 2\leqq\frac{x^n}{4}$$

ゆえに　$0\leqq\displaystyle\int_0^1\{\log(\sqrt{1+x^n}+1)-\log 2\}dx\leqq\int_0^1\frac{x^n}{4}dx$　…… ③

ここで　$$\int_0^1\{\log(\sqrt{1+x^n}+1)-\log 2\}dx=\int_0^1\log(\sqrt{1+x^n}+1)dx-\log 2\int_0^1 dx$$

$$=J_n-\log 2$$

$$\int_0^1\frac{x^n}{4}dx=\left[\frac{x^{n+1}}{4(n+1)}\right]_0^1=\frac{1}{4(n+1)}$$

したがって，③ から　　$0\leqq J_n-\log 2\leqq\dfrac{1}{4(n+1)}$

(3)　$$\frac{d}{dx}\log(\sqrt{1+x^n}+1)=\frac{1}{\sqrt{1+x^n}+1}\cdot\left(\frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{1+x^n}}\right)=\frac{nx^{n-1}}{2(\sqrt{1+x^n}+1)\sqrt{1+x^n}}$$

(4)　$$n(1-I_n)=n\left(1-\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}\right)=n\int_0^1\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\right)dx=n\int_0^1\frac{\sqrt{1+x^n}-1}{\sqrt{1+x^n}}dx$$

$$=n\int_0^1\frac{(1+x^n)-1}{(\sqrt{1+x^n}+1)\sqrt{1+x^n}}dx=\int_0^1\frac{nx^n}{(\sqrt{1+x^n}+1)\sqrt{1+x^n}}dx$$

$$=2\int_0^1 x\cdot\frac{nx^{n-1}}{2(\sqrt{1+x^n}+1)\sqrt{1+x^n}}dx$$

$$=2\int_0^1 x\{\log(\sqrt{1+x^n}+1)\}'dx\qquad((3)\text{ より})$$

$$=2\left\{\Big[x\log(\sqrt{1+x^n}+1)\Big]_0^1-\int_0^1\log(\sqrt{1+x^n}+1)dx\right\}$$

$$=2\{\log(\sqrt{2}+1)-J_n\}\quad\text{…… ④}$$

(2) の不等式において，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4(n+1)}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(J_n-\log 2)=0$　　すなわち　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n=\log 2$

よって，④ から　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(1-I_n)=2\{\log(\sqrt{2}+1)-\log 2\}=2\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

10

解答　(1)　順に $\dfrac{1}{2}\log 2$，$1-\dfrac{\pi}{4}$　　(2)　$x=\dfrac{2\log 2}{\pi}$ で最小値 $1-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{(\log 2)^2}{\pi}$

(3)　$x=\sqrt{2}-1$ で最小値 $\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

解説

(1)　$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{\cos t}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos t)'}{\cos t}dt=-\Big[\log|\cos t|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\log\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt=\Big[\tan t-t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$$

(2)　$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan t-x)^2dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 t-2x\tan t+x^2)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\,dt-2x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,dt+x^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt$$

よって，$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,dt$，$I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\,dt$ とおくと

$$f(x)=\frac{\pi}{4}x^2-2I_1x+I_2=\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{4I_1}{\pi}\right)^2-\frac{4I_1^2}{\pi}+I_2$$

ゆえに，$f(x)$ は $x=\dfrac{4I_1}{\pi}$ で最小値 $-\dfrac{4I_1^2}{\pi}+I_2$ をとる。

(1) から　　$\dfrac{4I_1}{\pi}=\dfrac{2\log 2}{\pi}$，　$-\dfrac{4I_1^2}{\pi}+I_2=1-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{(\log 2)^2}{\pi}$

したがって，$f(x)$ の最小値は　　$1-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{(\log 2)^2}{\pi}$

また，そのときの x の値は　　$\dfrac{2\log 2}{\pi}$

(3)　$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき　　$0\leqq\tan t\leqq 1$

[1]　$x\leqq 0$ のとき

$\tan t-x\geqq 0$ であるから

$$g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan t-x)dt=\Big[-\log|\cos t|-xt\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}x+\frac{1}{2}\log 2$$

よって，$g(x)$ は $x=0$ で最小値 $\dfrac{1}{2}\log 2$ をとる。

[2]　$x\geqq 1$ のとき

$\tan t-x\leqq 0$ であるから

$$g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-\tan t)dt=\Big[xt+\log|\cos t|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}x-\frac{1}{2}\log 2$$

よって，$g(x)$ は $x=1$ で最小値 $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$ をとる。

[3]　$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$x=\tan\theta$，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ となる θ がただ1つ存在し

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\tan t-x|dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\tan t-\tan\theta|dt$$

$$=\int_0^{\theta}(\tan\theta-\tan t)dt+\int_\theta^{\frac{\pi}{4}}(\tan t-\tan\theta)dt$$

$$=\Big[(\tan\theta)t+\log|\cos t|\Big]_0^{\theta}+\Big[-\log|\cos t|-(\tan\theta)t\Big]_\theta^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\theta\tan\theta+2\log\cos\theta+\frac{1}{2}\log 2-\frac{\pi}{4}\tan\theta$$

よって，$g(x)=h(\theta)$ とおくと

$$h(\theta)=2\theta\tan\theta+2\log\cos\theta+\frac{1}{2}\log 2-\frac{\pi}{4}\tan\theta \quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$

$$h'(\theta)=2\left(\tan\theta+\frac{\theta}{\cos^2\theta}\right)-\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\pi}{4\cos^2\theta}$$

$$=2\tan\theta+\frac{2\theta}{\cos^2\theta}-2\tan\theta-\frac{\pi}{4\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\pi}{4\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$h'(\theta)=0$ とすると　$\theta=\dfrac{\pi}{8}$

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{8}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$h'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$h(\theta)$		↘	極小	↗	

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ における $h(\theta)$ の増減表は右のようになる。

ゆえに，$h(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ で最小値をとる。

ここで，$a=\tan\dfrac{\pi}{8}$ とおくと　$\tan\dfrac{\pi}{4}=\tan\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{2a}{1-a^2}$

したがって　$1=\dfrac{2a}{1-a^2}$

分母を払って整理すると　$a^2+2a-1=0$

$0<a<1$ であるから　$a=\sqrt{2}-1$

また　$h\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=2\cdot\dfrac{\pi}{8}a+2\log\cos\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}\log 2-\dfrac{\pi}{4}a=\log\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}\log 2$

$$=\log\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\log\sqrt{2}=\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

よって，$h(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ で最小値 $\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。

すなわち，$g(x)$ は $x=\sqrt{2}-1$ で最小値 $\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。

ゆえに，[1]〜[3] から，$g(x)$ は $x=\sqrt{2}-1$ で最小値 $\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。

11

解答　$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\log\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$，$x=\pi$ のとき最小値 $-\log 2$

解説

[1]　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$0\leqq t\leqq x$ では $|t-x|=-(t-x)$，$x\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では $|t-x|=t-x$ であるから

$$f(x)=\int_0^x\frac{\cos(t-x)}{1-\sin(t-x)}dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t-x)}{1+\sin(t-x)}dt$$

$$=\int_0^x\left[-\frac{\{1-\sin(t-x)\}'}{1-\sin(t-x)}\right]dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\{1+\sin(t-x)\}'}{1+\sin(t-x)}dt$$

$$=\Big[-\log|1-\sin(t-x)|\Big]_0^x+\Big[\log|1+\sin(t-x)|\Big]_x^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\log(1+\sin x)+\log(1+\cos x)$$

$$f'(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{-\sin x}{1+\cos x}=\frac{(\cos x-\sin x)(1+\sin x+\cos x)}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)(1+\sin x+\cos x)}{(1+\sin x)(1+\cos x)}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{\pi}{4}$

[2]　$\dfrac{\pi}{2}<x\leqq\pi$ のとき

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}<x$ では $|t-x|=-(t-x)$ であるから

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t-x)}{1-\sin(t-x)}dt=\Big[-\log|1-\sin(t-x)|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\log(1-\cos x)+\log(1+\sin x)$$

$$f'(x)=-\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{-(\sin x-\cos x+1)}{(1-\cos x)(1+\sin x)}\quad\left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$$

よって，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき　$f'(x)<0$

[1]，[2] から，$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$\log 2$	↗	$\log\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$	↘		↘	$-\log 2$

よって，$f(x)$ は

$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\log\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$，$x=\pi$ のとき最小値 $-\log 2$

をとる。

12

解答　$a^2\neq(b-2)^2$，$f(x)=\dfrac{2}{2-a-b}(\sin x+\cos x)$

解説

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)dy+\sin x+\cos x$$

$$=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin x\cos y+\cos x\sin y)f(y)dy$$

$$+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos x\cos y+\sin x\sin y)f(y)dy+\sin x+\cos x$$

$$=\frac{a}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\cos y f(y)dy\right)\sin x+\frac{a}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin y f(y)dy\right)\cos x$$

$$+\frac{b}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\cos y f(y)dy\right)\cos x+\frac{b}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin y f(y)dy\right)\sin x+\sin x+\cos x$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos y f(y)dy=p$ ……①，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin y f(y)dy=q$ ……②　(p，q は定数) とおくと

$$f(x)=\left(\frac{a}{2\pi}p+\frac{b}{2\pi}q+1\right)\sin x+\left(\frac{b}{2\pi}p+\frac{a}{2\pi}q+1\right)\cos x\quad\cdots\cdots③$$

③を①，②に代入して

$$p=\int_0^{2\pi}\sin y\cos y\left(\frac{a}{2\pi}p+\frac{b}{2\pi}q+1\right)dy+\int_0^{2\pi}\cos^2 y\left(\frac{b}{2\pi}p+\frac{a}{2\pi}q+1\right)dy\quad\cdots\cdots④$$

$$q=\int_0^{2\pi}\sin^2 y\left(\frac{a}{2\pi}p+\frac{b}{2\pi}q+1\right)dy+\int_0^{2\pi}\sin y\cos y\left(\frac{b}{2\pi}p+\frac{a}{2\pi}q+1\right)dy\quad\cdots\cdots⑤$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2 y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2y)dy=\frac{1}{2}\Big[y-\frac{1}{2}\sin 2y\Big]_0^{2\pi}=\pi$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2y)dy=\frac{1}{2}\Big[y+\frac{1}{2}\sin 2y\Big]_0^{2\pi}=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\sin y\cos y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2y\,dy=\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos 2y\Big]_0^{2\pi}=0$$

これらを④，⑤に代入すると

$$p=\left(\frac{b}{2\pi}p+\frac{a}{2\pi}q+1\right)\pi,\quad q=\left(\frac{a}{2\pi}p+\frac{b}{2\pi}q+1\right)\pi$$

よって　$\begin{cases}(b-2)p+aq=-2\pi & \cdots\cdots⑥\\ ap+(b-2)q=-2\pi & \cdots\cdots⑦\end{cases}$

$f(x)$ がただ1つ定まるための条件は，⑥，⑦を満たす p，q がただ1組存在することである。これは⑥，⑦を pq 平面上の直線の方程式と考えると，2直線が平行でない条件と同値である。

したがって，求める条件は　$(b-2)^2-a^2\neq 0$　すなわち　$a^2\neq(b-2)^2$

このとき，⑥，⑦を解くと　$p=q=\dfrac{2\pi}{2-a-b}$

これを③に代入して　$f(x)=\dfrac{2}{2-a-b}(\sin x+\cos x)$

13

解答　(1)　$f_1(x)=2xe^x+(x+1)e^{-x}$　(2)　0　(3)　$f_{2n}(x)=3^{n-1}(3x+2n)e^x$

解説

(1)　$f_1(x)=\displaystyle\int_{-x}^x f_0(t)dt+f_0'(x)=\int_{-x}^x te^t dt+(e^x+xe^x)$

$$=\Big[te^t\Big]_{-x}^x-\int_{-x}^x e^t dt+(x+1)e^x$$

$$=xe^x+xe^{-x}-\Big[e^t\Big]_{-x}^x+(x+1)e^x=2xe^x+(x+1)e^{-x}$$

(2)　任意の実数 x に対して

$$g(-x)=\int_x^{-x}(at+b)e^t dt=-\int_{-x}^x(at+b)e^t dt=-g(x)$$

よって，$g(x)$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-c}^c g(x)dx=0$

(3)　$f_1(x)=2xe^x+(x+1)e^{-x}$，$f_1'(x)=2(x+1)e^x-xe^{-x}$　であるから

$$f_2(x)=\int_{-x}^x f_1(t)dt+f_1'(x)=\int_{-x}^x\{2te^t+(t+1)e^{-t}\}dt+2(x+1)e^x-xe^{-x}$$

$$=\Big[2te^t\Big]_{-x}^x-\int_{-x}^x 2e^t dt+\Big[-(t+1)e^{-t}\Big]_{-x}^x+\int_{-x}^x e^{-t}dt+2(x+1)e^x-xe^{-x}$$

$$=2xe^x+2xe^{-x}-\Big[2e^t\Big]_{-x}^x-(x+1)e^{-x}$$

$$+(-x+1)e^x+\Big[-e^{-t}\Big]_{-x}^x+2(x+1)e^x-xe^{-x}$$

$$=(3x+2)e^x$$

よって，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$ ……① のように表されると推測できる。

①が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$f_2(x)=(3x+2)e^x$ であるから，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき①が成り立つ，すなわち　$f_{2k}(x)=(a_kx+b_k)e^x$ のように表されると仮定する。

$$f_{2(k+1)}(x)=\int_{-x}^{x} f_{2k+1}(t)dt+f'_{2k+1}(x)$$
$$=\int_{-x}^{x}\left\{\int_{-t}^{t} f_{2k}(u)du+f'_{2k}(t)\right\}dt+f'_{2k+1}(x)$$

$f_{2k}(x)=(a_kx+b_k)e^x$ であるから，(2) の結果より　$\int_{-x}^{x}\left(\int_{-t}^{t} f_{2k}(u)du\right)dt=0$

したがって　$f_{2(k+1)}(x)=\int_{-x}^{x} f'_{2k}(t)dt+\left\{\int_{-x}^{x} f_{2k}(t)dt+f'_{2k}(x)\right\}'$
$$=f_{2k}(x)-f_{2k}(-x)+\{f_{2k}(x)+f_{2k}(-x)+f''_{2k}(x)\}$$
$$=2f_{2k}(x)+f''_{2k}(x)$$

$f'_{2k}(x)=(a_kx+a_k+b_k)e^x$，$f''_{2k}(x)=(a_kx+2a_k+b_k)e^x$ であるから

$f_{2(k+1)}(x)=2(a_kx+b_k)e^x+(a_kx+2a_k+b_k)e^x=(3a_kx+2a_k+3b_k)e^x$

$a_{k+1}=3a_k$ ……②，$b_{k+1}=2a_k+3b_k$ ……③ とおくと，

$f_{2(k+1)}(x)=(a_{k+1}x+b_{k+1})e^x$ と表される。

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$ のように表される。

② より，$\{a_n\}$ は初項 $a_1=3$，公比 3 の等比数列であるから　$a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

これを ③ に代入すると　$b_{n+1}=3b_n+2\cdot3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{b_n}{3^n}+\dfrac{2}{3}$

よって，数列 $\left\{\dfrac{b_n}{3^n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{b_1}{3}=\dfrac{2}{3}$，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列であるから

$$\frac{b_n}{3^n}=\frac{2}{3}+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}n$$

よって　$b_n=3^n\cdot\dfrac{2}{3}n=2\cdot3^{n-1}\cdot n$

ゆえに　$f_{2n}(x)=(3^nx+2\cdot3^{n-1}\cdot n)e^x=3^{n-1}(3x+2n)e^x$

14

解答　(1)　$a_1=c\log c-c+1$，$a_2=-c^2(\log c)^2+c^2\log c-\dfrac{1}{2}c^2+\dfrac{1}{2}$　(2)　略

(3)　略　(4)　略

解説

(1)　$a_n=\int_c^1 nx^{n-1}(-\log x)^n dx=(-1)^n\int_c^1 nx^{n-1}(\log x)^n dx$

よって　$a_1=-\int_c^1\log x\,dx=-\Big[x\log x-x\Big]_c^1=c\log c-c+1$

$$a_2=\int_c^1 2x(\log x)^2dx=\left[x^2(\log x)^2-x^2\log x+\frac{1}{2}x^2\right]_c^1$$
$$=-c^2(\log c)^2+c^2\log c-\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}$$

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{2}-x\log\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}+x\log x$　$(0<x\leqq1)$ とおくと

$f'(x)=\log x+1$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{e}$

$0<x\leqq1$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…	$\frac{1}{e}$	…	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{e}$ で最小値 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}$ をとる。

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}>0$ であるから　$f(x)>0$

また，$0<x\leqq1$ のとき $-\log x\geqq0$ であるから　$0\leqq x\log\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$

(3)　$a_n=\int_c^1 n\left(x\log\dfrac{1}{x}\right)^n\cdot\dfrac{1}{x}dx$

$0<c<1$ であるから，(2) より $c\leqq x\leqq1$ のとき

$$0\leqq\left(x\log\frac{1}{x}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad\cdots\cdots①$$

よって　$n\left(x\log\dfrac{1}{x}\right)^n\cdot\dfrac{1}{x}<n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\cdot\dfrac{1}{x}$　$(c\leqq x\leqq1)$

ゆえに　$a_n<\int_c^1 n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{n}{2^n}\Big[\log x\Big]_c^1=\dfrac{n}{2^n}(-\log c)=\dfrac{n}{2^n}\log\dfrac{1}{c}$

(4)　① において，等号は常には成り立たないから

$$a_n=\int_c^1 n\left(x\log\frac{1}{x}\right)^n\cdot\frac{1}{x}dx>0$$

ゆえに，(3) から　$0<a_n<\dfrac{n}{2^n}\log\dfrac{1}{c}$　……②

ここで，$n\geqq3$ に対して，二項定理により

$$2^n=(1+1)^n>1+n+\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n(n-1)}{2}$$

よって　$0<\dfrac{n}{2^n}<\dfrac{2}{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n-1}=0$ から，はさみうちの原理により　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$

ゆえに　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}\log\dfrac{1}{c}=0$

② から，はさみうちの原理により　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

15

解答　$\log2-1$

解説

1 個のボールに対し，箱に入れる方法は $2n$ 通りあるから，n 個のボールを $2n$ 個の箱に入れる方法は　$(2n)^n$ 通り

どの箱にも 1 個以下のボールしか入らない場合の数は，異なる $2n$ 個のものから n 個を取り出して並べる順列の総数に等しいから　${}_{2n}\mathrm{P}_n$ 通り

よって　$p_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{(2n)^n}=\dfrac{2n(2n-1)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+1)}{2^nn^n}=\dfrac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}{2^nn^n}$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)}{2^n}$$

ゆえに　$\log p_n=\log\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right\}-\log2^n$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)-n\log2$$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log p_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)-\log2\right\}=\int_0^1\log(1+x)dx-\log2$

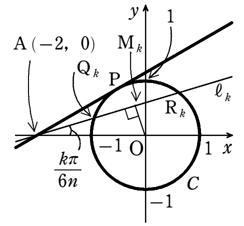
$$=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1dx-\log2$$
$$=2\log2-\log1-\Big[x\Big]_0^1-\log2=\log2-1$$

16

解答　(1)　$8\cos\dfrac{k\pi}{6n}\sqrt{1-4\sin^2\dfrac{k\pi}{6n}}$　(2)　6

解説

(1)　$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OP}=1$，$\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから



$$\angle\mathrm{OAP}=\frac{\pi}{6}$$

よって　$\angle\mathrm{OAR}_k=\dfrac{k\pi}{6n}$

線分 $\mathrm{Q}_k\mathrm{R}_k$ の中点を M_k とすると

$$\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2=(\mathrm{AR}_k+\mathrm{AQ}_k)(\mathrm{AR}_k-\mathrm{AQ}_k)$$
$$=2\mathrm{AM}_k\times2\mathrm{Q}_k\mathrm{M}_k$$
$$=4\mathrm{AM}_k\sqrt{\mathrm{OQ}_k{}^2-\mathrm{OM}_k{}^2}$$
$$=4\times2\cos\frac{k\pi}{6n}\sqrt{1-4\sin^2\frac{k\pi}{6n}}$$
$$=8\cos\frac{k\pi}{6n}\sqrt{1-4\sin^2\frac{k\pi}{6n}}$$

(2)　(1) から　$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}8\cos\dfrac{k\pi}{6n}\sqrt{1-4\sin^2\dfrac{k\pi}{6n}}$

$$=8\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot\frac{k}{n}\right)\sqrt{1-4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\cdot\frac{k}{n}\right)}$$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2)=I$ とすると

$$I=8\int_0^1\cos\frac{\pi}{6}x\sqrt{1-4\sin^2\frac{\pi}{6}x}\,dx$$

$2\sin\dfrac{\pi}{6}x=t$ とおくと　$\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}x\,dx=dt$

x	$0\longrightarrow1$
t	$0\longrightarrow1$

ゆえに　$I=8\int_0^1\sqrt{1-t^2}\cdot\dfrac{3}{\pi}dt=\dfrac{24}{\pi}\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$

ここで，$\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$ の値は半径 1 の四分円の面積であるから　$I=\dfrac{24}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{4}=6$

17

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　$k>0$ であるから，$0\leqq x\leqq1$ において　$\dfrac{1-x}{k+1}\leqq\dfrac{1-x}{k+x}\leqq\dfrac{1-x}{k}$

よって　$\int_0^1\dfrac{1-x}{k+1}dx<\int_0^1\dfrac{1-x}{k+x}dx<\int_0^1\dfrac{1-x}{k}dx$

ここで　$\int_0^1\dfrac{1-x}{k+1}dx=\dfrac{1}{k+1}\left[x-\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1=\dfrac{1}{2(k+1)}$，

$\int_0^1\dfrac{1-x}{k}dx=\dfrac{1}{k}\left[x-\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1=\dfrac{1}{2k}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\dfrac{1-x}{k+x}dx<\dfrac{1}{2k}$

(2) $\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx$

$$=\Big[-x+(k+1)\log(k+x)\Big]_0^1$$

$$=(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1$$

よって，(1) から　$\frac{1}{2(k+1)}<(k+1)\log\frac{k+1}{k}-1<\frac{1}{2k}$

さらに，各辺に $\frac{1}{k+1}$ を掛けると

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<\log\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

$\frac{1}{k+2}<\frac{1}{k+1}$ であるから

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<\log\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

各辺について，$k=n,\ n+1,\ \cdots\cdots,\ m-1$ における値の和を考える。

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\frac12\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac12\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$$

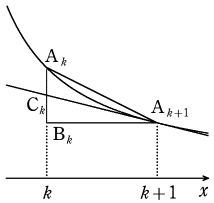
$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac12\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac1k-\frac{1}{k+1}\right)=\frac12\left(\frac1n-\frac1m\right)=\frac{m-n}{2mn}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\left(\log\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\log\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\cdots\cdots\times\frac{m}{m-1}\right)-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}$$

$$=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac1k$$

したがって　$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac1k<\frac{m-n}{2mn}$

別解　$y=\frac1x$ のグラフ上で，x座標が k，$k+1$ である点を考え，それぞれ A_k，A_{k+1} とおく。



このとき　$A_k\left(k,\ \frac1k\right)$，$A_{k+1}\left(k+1,\ \frac{1}{k+1}\right)$

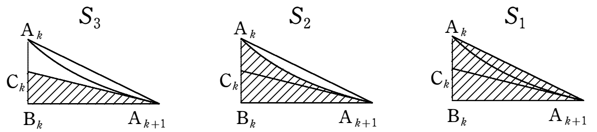
また，点 $\left(k,\ \frac{1}{k+1}\right)$ を B_k，$y=\frac1x$ の A_{k+1} における接線と直線 $x=k$ の交点を C_k とする。

このとき，$\triangle A_kA_{k+1}B_k$ の面積を S_1，

曲線 $y=\frac1x$ と直線 $x=k$，$y=\frac{1}{k+1}$ で囲まれる部分の面積を S_2，

$\triangle C_kA_{k+1}B_k$ の面積を S_3

とすると　$S_3<S_2<S_1$



この面積の大小関係から，不等式

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<\log\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac12\left(\frac1k-\frac{1}{k+1}\right)$$

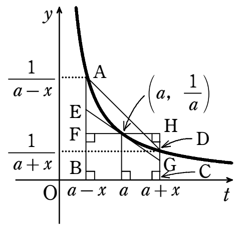
が導かれる。以降は，上の証明と同様に示せる。

$\boxed{18}$

解答　(1) 略　(2) 略

解説

(1) $0<x<a$ であるから　$0<a-x<a<a+x$



$y=\frac1t$ は下に凸であるから，右の図のように点 A，B，C，D，E，F，G，H をとることができる。

ここで，点 E，G は $y=\frac1t$ 上の点 $\left(a,\ \frac1a\right)$ における接線と AB，DC との交点である。

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac1t dt>(\text{台形 EBCG})=(\text{長方形 FBCH})$$

$$=\{(a+x)-(a-x)\}\times\frac1a=\frac{2x}{a}$$

同様にして　$\int_{a-x}^{a+x}\frac1t dt<(\text{台形 ABCD})=\frac12\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdot\{(a+x)-(a-x)\}$

$$=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

よって，与えられた不等式は成り立つ。

(2) $\int_1^2\frac1t dt=\Big[\log t\Big]_1^2=\log 2$，$\int_1^2\frac1t dt=\int_1^{\frac32}\frac1t dt+\int_{\frac32}^2\frac1t dt$ と分けて考える。

(1) において，$a-x=1$，$a+x=\frac32$　すなわち　$a=\frac54$，$x=\frac14$ とおくと

$$\frac25<\int_1^{\frac32}\frac1t dt<\frac{5}{12}\quad\cdots\cdots①$$

また，(1) において，$a-x=\frac32$，$a+x=2$　すなわち　$a=\frac74$，$x=\frac14$ とおくと

$$\frac27<\int_{\frac32}^2\frac1t dt<\frac{7}{24}\quad\cdots\cdots②$$

① と ② を辺々加えると　$\frac25+\frac27<\int_1^{\frac32}\frac1t dt+\int_{\frac32}^2\frac1t dt<\frac{5}{12}+\frac{7}{24}$

よって　$\frac{24}{35}<\int_1^2\frac1t dt<\frac{17}{24}$

$\frac{24}{35}=0.685\cdots\cdots>0.68$，$\frac{17}{24}=0.708\cdots\cdots<0.71$ であるから　$0.68<\log 2<0.71$

$\boxed{19}$

解答　(1) 0　(2) $\frac{\pi}{4}$

解説

(1) $R_n(x)$ の第 1 項の分母は 0 でないから　$x\neq-1$

$R_n(x)$ の第 2 項の｛　｝の中は，初項 1，公比 $-x$，項数 $n+1$ の等比数列の和であるから　$R_n(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}=\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

ゆえに　$\left|\int_0^1R_n(x^2)dx\right|\leqq\int_0^1|R_n(x^2)|dx=\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$

$\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\leqq x^{2n+2}$ であり，等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx<\int_0^1x^{2n+2}dx=\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1=\frac{1}{2n+3}$$

したがって　$\left|\int_0^1R_n(x^2)dx\right|<\frac{1}{2n+3}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\int_0^1R_n(x^2)dx=0$

(2) この無限級数の初項から第 $n+1$ 項までの部分和を S_{n+1} とすると

$$S_{n+1}=1-\frac13+\frac15-\frac17+\ \cdots\cdots\ +(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

$$\int_0^1R_n(x^2)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}-\int_0^1\{1-x^2+x^4-\ \cdots\cdots\ +(-1)^nx^{2n}\}dx$$

ここで，$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$，$J=\int_0^1\{1-x^2+x^4-\ \cdots\cdots\ +(-1)^nx^{2n}\}dx$ とする。

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

$$J=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ \cdots\cdots\ +(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

$=1-\frac13+\frac15-\ \cdots\cdots\ +(-1)^n\frac{1}{2n+1}$　であるから

$$\int_0^1R_n(x^2)dx=\frac{\pi}{4}-\left\{1-\frac13+\frac15-\ \cdots\cdots\ +(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right\}=\frac{\pi}{4}-S_{n+1}$$

(1) より，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1R_n(x^2)dx=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}-S_{n+1}\right)=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\frac{\pi}{4}$　　したがって，求める和は　$\frac{\pi}{4}$

$\boxed{20}$

解答　(1) 略　(2) $-1+\frac{(-1)^n}{n+1}$　(3) $2\log 2-1$

解説

(1) $\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{-(-x)^n}{1+x}dx\right|$

$$=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\right|=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$$

$0\leqq x\leqq1$ のとき，$x^n\geqq0$，$1+x\geqq1$ であるから　$\frac{x^n}{1+x}\leqq x^n$

よって　$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqq\int_0^1x^ndx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

ゆえに　$\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$

(2) $0\leqq x\leqq1$ のとき

$$\frac{1-(-x)^n}{1+x}=\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\ \cdots\cdots\ +(-x)^{n-1}$$

$$=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}$$

よって　$S_n=\int_0^1\{1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}\}dx$

$$=\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

また　$T_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

$$+\cdots\cdots+(-1)^{n-2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=-1+2\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}-(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}$$

ゆえに　$T_n=-1+2S_n+\frac{(-1)^n}{n+1}$　　よって　$T_n-2S_n=-1+\frac{(-1)^n}{n+1}$

(3)　(1) から　$0\leqq\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$

ここで　$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\log(1+x)\right]_0^1=\log 2$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}|S_n-\log 2|=0$　　ゆえに　$\lim_{n\to\infty}S_n=\log 2$

したがって，(2) から　$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2S_n-1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}=2\log 2-1$