1

解答　(1)　$(2,\ 5)$　　(2)　$(-1,\ 17)$　　(3)　$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$　　(4)　$(2,\ 2)$

解説

(1)　$\left(\dfrac{1\cdot(-2)+4\cdot3}{4+1},\ \dfrac{1\cdot(-3)+4\cdot7}{4+1}\right)$　　よって　$(2,\ 5)$

(2)　$\left(\dfrac{-3\cdot3+2\cdot5}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot7+2\cdot2}{2-3}\right)$　　よって　$(-1,\ 17)$

(3)　$\left(\dfrac{5-2}{2},\ \dfrac{2-3}{2}\right)$　　よって　$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(4)　$\left(\dfrac{-2+3+5}{3},\ \dfrac{-3+7+2}{3}\right)$　　よって　$(2,\ 2)$

2

解答　(1)　$5\sqrt{5}$　　(2)　$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{15}{4}\right)$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{\{6-(-4)\}^2+(7-2)^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

(2)　$\mathrm{P}(0,\ y)$ とおくと，$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ すなわち $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ から

$$(0-3)^2+\{y-(-4)\}^2=(0-8)^2+(y-6)^2$$

ゆえに　$9+(y+4)^2=64+(y-6)^2$　　整理して　$4y=15$

これを解いて　$y=\dfrac{15}{4}$

よって　$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{15}{4}\right)$

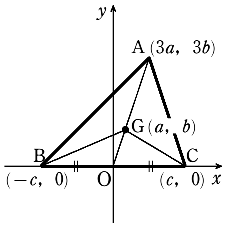
3

解答　略

解説

直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとると，線分 BC の中点は原点 O になる。

$\mathrm{A}(3a,\ 3b)$，$\mathrm{B}(-c,\ 0)$，$\mathrm{C}(c,\ 0)$ とすると，G は重心であるから，$\mathrm{G}(a,\ b)$ と表すことができる。



このとき

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$

$=\{(-c-3a)^2+(-3b)^2\}+\{c-(-c)\}^2+\{(3a-c)^2+(3b)^2\}$

$=3(6a^2+6b^2+2c^2)$　……①

$\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2$

$=\{(3a-a)^2+(3b-b)^2\}+\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+\{(c-a)^2+(-b)^2\}$

$=6a^2+6b^2+2c^2$　……②

①，② から　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=3(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)$

4

解答　(1)　$y=-2x-2$　　(2)　$y=3x-7$

(3)　平行 $3x+2y+5=0$，垂直 $2x-3y-14=0$

解説

(1)　$y-(-4)=-2(x-1)$　　よって　$y=-2x-2$

(2)　$y-(-4)=\dfrac{2-(-4)}{3-1}(x-1)$　　よって　$y=3x-7$

(3)　直線 $3x+2y+1=0$ の傾きは　$-\dfrac{3}{2}$

[1]　平行な直線の方程式は

$y-(-4)=-\dfrac{3}{2}(x-1)$　　すなわち　$3x+2y+5=0$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると

$-\dfrac{3}{2}\times m=-1$　　ゆえに　$m=\dfrac{2}{3}$

よって，垂直な直線の方程式は

$y-(-4)=\dfrac{2}{3}(x-1)$　　すなわち　$2x-3y-14=0$

別解　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に平行な直線，垂直な直線が，それぞれ

平行　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$　　垂直　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

と表されることを利用する。

[1]　平行な直線の方程式は

$3(x-1)+2(y+4)=0$　　すなわち　$3x+2y+5=0$

[2]　垂直な直線の方程式は

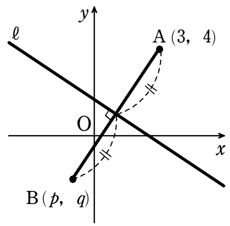
$2(x-1)-3(y+4)=0$　　すなわち　$2x-3y-14=0$

5

解答　$(-1,\ -2)$

解説

点 B の座標を $(p,\ q)$ とする。



ℓ の傾きは $-\dfrac{2}{3}$ であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから　$\left(-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\dfrac{q-4}{p-3}=-1$

よって　$3p-2q=1$　……①

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+3}{2},\ \dfrac{q+4}{2}\right)$ は ℓ 上にあるから　$2\cdot\dfrac{p+3}{2}+3\cdot\dfrac{q+4}{2}-5=0$

よって　$2p+3q=-8$　……②

①，② を連立して解くと　$p=-1$，$q=-2$

したがって，点 B の座標は　$(-1,\ -2)$

6

解答　$(1,\ 2)$

解説

直線の方程式を k について整理すると

$(x+2y-5)k+(2x-3y+4)=0$

この等式が k の値に関係なく成り立つための必要十分条件は

$x+2y-5=0$　かつ　$2x-3y+4=0$

連立方程式 $x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$ を解くと　$x=1$，$y=2$

よって，求める定点の座標は　$(1,\ 2)$

7

解答　$4x-27y+43=0$

解説

k を定数として，方程式

$k(8x+7y-19)+(3x-5y+6)=0$　……①

を考えると，① は 2 直線 $8x+7y-19=0$，$3x-5y+6=0$ の交点を通る直線を表す。

直線 ① が点 $(-4,\ 1)$ を通るとき

$k\{8\cdot(-4)+7\cdot1-19\}+3\cdot(-4)-5\cdot1+6=0$　　よって　$k=-\dfrac{1}{4}$

この k の値を ① に代入して整理すると　$4x-27y+43=0$

8

解答　(1)　$\sqrt{5}$　　(2)　$\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

解説

(1)　$\dfrac{|1-2\cdot2+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(2)　$y=3x+1$ から　$3x-y+1=0$

よって，求める距離は　$\dfrac{|3\cdot(-2)-3+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

1

解答　(1)　(3, 3)　(2)　(−8, −11)　(3)　(2, −1)　(4)　(−1, −3)

解説

(1)　点Pの座標は，$\left(\dfrac{2\cdot6+3\cdot1}{3+2},\ \dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot7}{3+2}\right)$ から　(3, 3)

(2)　点Qの座標は，$\left(\dfrac{-2\cdot1+3\cdot(-2)}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot7+3\cdot1}{3-2}\right)$ から　(−8, −11)

(3)　点Rの座標は，$\left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{1-3}{2}\right)$ から　(2, −1)

(4)　(1)〜(3)の結果により，△PQRの重心Gの座標は

$$\left(\frac{3-8+2}{3},\ \frac{3-11-1}{3}\right) \text{ から}\quad (-1,\ -3)$$

2

解答　(1)　$AB=4\sqrt{5}$　(2)　$P\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$

解説

(1)　$AB=\sqrt{(-1-3)^2+\{3-(-5)\}^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

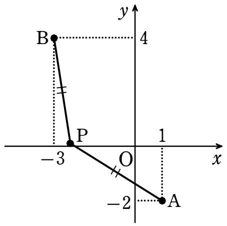
(2)　P(x, 0)とすると，AP=BP　すなわち　$AP^2=BP^2$

から　$(x-1)^2+\{0-(-2)\}^2=\{x-(-3)\}^2+(0-4)^2$

ゆえに　$x^2-2x+1+4=x^2+6x+9+16$

これを解いて　$x=-\dfrac{5}{2}$

よって　$P\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$



3

解答　略

解説

直線BCをx軸に，辺BCの垂直二等分線をy軸にとると，3頂点は

A(a, b), B(−c, 0), C(c, 0)

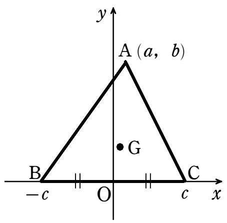
と表すことができる。

このとき

$$AB^2+AC^2=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

また，△ABCの重心Gの座標は

$$\left(\frac{a+(-c)+c}{3},\ \frac{b+0+0}{3}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$$



よって

$$BG^2+CG^2+4AG^2=\left\{\left(\frac{a}{3}+c\right)^2+\left(\frac{b}{3}-0\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{a}{3}-c\right)^2+\left(\frac{b}{3}-0\right)^2\right\}$$
$$+4\left\{\left(\frac{a}{3}-a\right)^2+\left(\frac{b}{3}-b\right)^2\right\}$$
$$=\left(\frac{a^2}{9}+\frac{2}{3}ca+c^2+\frac{b^2}{9}\right)+\left(\frac{a^2}{9}-\frac{2}{3}ca+c^2+\frac{b^2}{9}\right)$$
$$+4\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{9}b^2\right)$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

したがって　$AB^2+AC^2=BG^2+CG^2+4AG^2$

4

解答　(1)　$y=-2x+2$　(2)　$y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3}{5}$

(3)　$\ell: 3x-4y+17=0$,　$\ell': 4x+3y+6=0$

解説

(1)　$y-(-4)=-2(x-3)$　すなわち　$y=-2x+2$

(2)　$y-3=\dfrac{-3-3}{6-(-4)}\{x-(-4)\}$　すなわち　$y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3}{5}$

(3)　直線 $3x-4y-6=0$ の傾きは $\dfrac{3}{4}$ である。

よって，直線ℓの傾きは $\dfrac{3}{4}$ であり，その方程式は

$y-2=\dfrac{3}{4}\{x-(-3)\}$　すなわち　$3x-4y+17=0$

次に，直線ℓ'の傾きを m とすると，$\dfrac{3}{4}m=-1$ から　$m=-\dfrac{4}{3}$

よって，直線ℓ'の方程式は

$y-2=-\dfrac{4}{3}\{x-(-3)\}$　すなわち　$4x+3y+6=0$

5

解答　(1)　(5, −3)　(2)　$\left(\dfrac{3}{13},\ \dfrac{37}{13}\right)$

解説

求める点の座標をB(p, q)とする。

(1)　直線 $y=x$ を ℓ とする。

直線ℓの傾きは1であり，直線ABはℓに垂直であるから

$1\cdot\dfrac{q-5}{p+3}=-1$　ゆえに　$p+q-2=0$　……①

また，線分ABの中点 $\left(\dfrac{p-3}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ は直線ℓ上にあるから

$\dfrac{q+5}{2}=\dfrac{p-3}{2}$　ゆえに　$p-q-8=0$　……②

方程式①，②を連立させて解くと　$p=5$, $q=-3$

したがって，求める点の座標は　(5, −3)

(2)　直線 $3x-2y+12=0$ を ℓ とする。

直線ℓの傾きは $\dfrac{3}{2}$ であり，直線ABはℓに垂直であるから

$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{q-5}{p+3}=-1$　ゆえに　$2p+3q-9=0$　……③

また，線分ABの中点 $\left(\dfrac{p-3}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ は直線ℓ上にあるから

$3\cdot\dfrac{p-3}{2}-2\cdot\dfrac{q+5}{2}+12=0$　ゆえに　$3p-2q+5=0$　……④

方程式③，④を連立させて解くと　$p=\dfrac{3}{13}$, $q=\dfrac{37}{13}$

したがって，求める点の座標は　$\left(\dfrac{3}{13},\ \dfrac{37}{13}\right)$

6

解答　(2, −3)

解説

$(k+3)x-(2k-1)y-8k-3=0$　……①　とする。

①をkについて整理すると

$k(x-2y-8)+3x+y-3=0$

この等式がkの値に関係なく成り立つための条件は

$x-2y-8=0$,　$3x+y-3=0$

この連立方程式を解いて　$x=2$, $y=-3$

よって，求める定点Aの座標は　(2, −3)

別解　kの値に関係なく①が成り立つから，$k=-3$, $\dfrac{1}{2}$ のときも成り立つ。

$k=-3$ のとき　$0\cdot x-\{2\cdot(-3)-1\}y-8\cdot(-3)-3=0$

整理して　$7y+21=0$　よって　$y=-3$

$k=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\left(\dfrac{1}{2}+3\right)x-0\cdot y-8\cdot\dfrac{1}{2}-3=0$

整理して　$\dfrac{7}{2}x-7=0$　よって　$x=2$

逆に，$x=2$, $y=-3$ を①の左辺に代入すると

$(k+3)\cdot2-(2k-1)\cdot(-3)-8k-3=0$

となり，①はkの値に関係なく成り立つ。

したがって　$x=2$, $y=-3$

よって，求める定点Aの座標は　(2, −3)

7

解答　(1)　$x+3y-23=0$　(2)　$2x+5y-33=0$

解説

(解1)　kを定数として，方程式

$k(x+2y-10)+(2x+3y-7)=0$　……①

を考えると，①は直線を表し，その直線は2直線 $x+2y-10=0$, $2x+3y-7=0$ の交点を通る。

(1)　直線①が点(5, 6)を通るとき　$k(5+2\cdot6-10)+(2\cdot5+3\cdot6-7)=0$

よって　$k=-3$

この値を①に代入して整理すると　$x+3y-23=0$

(2)　①を変形すると　$(k+2)x+(2k+3)y-10k-7=0$　……②

よって，直線②が直線 $2x+5y=0$ に平行であるための必要十分条件は

$(k+2)\cdot5-(2k+3)\cdot2=0$　これを解いて　$k=-4$

この値を②に代入して整理すると　$2x+5y-33=0$

(解2)　連立方程式 $\begin{cases}x+2y-10=0\\2x+3y-7=0\end{cases}$ を解くと　$x=-16$, $y=13$

よって，2直線の交点の座標は　(−16, 13)

(1)　求める直線は，2点(−16, 13), (5, 6)を通るから，その方程式は

$y-13=\dfrac{6-13}{5-(-16)}\{x-(-16)\}$　すなわち　$x+3y-23=0$

(2)　直線 $2x+5y=0$ の傾きは　$-\dfrac{2}{5}$

よって，求める直線は，傾きが $-\dfrac{2}{5}$ で，点 $(-16,\ 13)$ を通るから，その方程式は

$$y-13=-\frac{2}{5}\{x-(-16)\} \qquad \text{すなわち} \qquad 2x+5y-33=0$$

8

解答　(1) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　(2) $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

解説

(1) $y=-3x+4$ から　$3x+y-4=0$　　よって　$\dfrac{|3\cdot2-3-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(2) $\dfrac{|2\cdot(-3)-3\cdot2+6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

1

解答　$(6,\ -1)$

解説

頂点 C の座標を $(x,\ y)$ とする。

$\triangle$ABC の重心が $G(3,\ 2)$ であるから

$$\frac{-1+4+x}{3}=3,\quad \frac{2+5+y}{3}=2 \qquad \text{よって} \qquad x=6,\ y=-1$$

ゆえに，頂点 C の座標は　$(6,\ -1)$

2

解答　$\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形

解説

$$AB=\sqrt{(-2-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$BC=\sqrt{(5+2)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$CA=\sqrt{(1-5)^2+(2+1)^2}=\sqrt{25}=5$$

よって　$AB=CA$

また，$AB^2+CA^2=BC^2$ であるから　$\angle A=90^\circ$

したがって，$\triangle$ABC は $\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

3

解答　(1) $(9,\ 0)$　　(2) $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$　　(3) $\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$, $\left(0,\ \dfrac{14}{3}\right)$, $(0,\ 2)$, $(0,\ 3)$

解説

(1) 点 P の座標を $(x,\ 0)$ とする。

$AP=BP$ であるから　$AP^2=BP^2$

よって　$(x-1)^2+(0-1)^2=(x-2)^2+(0-4)^2$

ゆえに　$x^2-2x+2=x^2-4x+20$　　これを解いて　$x=9$

よって，点 P の座標は　$(9,\ 0)$

(2) 点 P の座標を $(x,\ -3x-1)$ とする。

$AP=BP$ であるから　$AP^2=BP^2$

よって　$(x-1)^2+(-3x-2)^2=(x-2)^2+(-3x-5)^2$

ゆえに　$10x^2+10x+5=10x^2+26x+29$　　これを解いて　$x=-\dfrac{3}{2}$

このとき　$-3x-1=-3\left(-\dfrac{3}{2}\right)-1=\dfrac{7}{2}$

よって，点 P の座標は　$\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

(3) 点 P の座標を $(0,\ y)$ とする。

$$AP^2=(0-1)^2+(y-1)^2=y^2-2y+2$$

$$BP^2=(0-2)^2+(y-4)^2=y^2-8y+20$$

$$AB^2=(2-1)^2+(4-1)^2=10$$

[1] $\angle A=90^\circ$ のとき　三平方の定理より，$AP^2+AB^2=BP^2$ であるから

$$y^2-2y+2+10=y^2-8y+20$$

これを解いて　$y=\dfrac{4}{3}$

[2] $\angle B=90^\circ$ のとき　$BP^2+AB^2=AP^2$

よって　$y^2-8y+20+10=y^2-2y+2$　　これを解いて　$y=\dfrac{14}{3}$

[3] $\angle P=90^\circ$ のとき　$AP^2+BP^2=AB^2$

よって　$y^2-2y+2+y^2-8y+20=10$

ゆえに　$2(y^2-5y+6)=0$　　これを解いて　$y=2,\ 3$

したがって，点 P の座標は　$\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$, $\left(0,\ \dfrac{14}{3}\right)$, $(0,\ 2)$, $(0,\ 3)$

4

解答　(1) $y=-3x-2$　　(2) $x=5$　　(3) $y=-7$　　(4) $y=-\dfrac{7}{10}x-\dfrac{29}{10}$

(5) $y=3$　　(6) $3x-8y=-6$

解説

(1) $y-4=-3\{x-(-2)\}$　すなわち　$y=-3x-2$

(2) y 軸に平行な直線は，x 軸に垂直である。

通る点の x 座標が 5 であるから　$x=5$

(3) y 軸に垂直な直線の傾きは 0 であるから

$y-(-7)=0\cdot(x-8)$　すなわち　$y=-7$

(4) $y-(-5)=\dfrac{2-(-5)}{-7-3}(x-3)$　すなわち　$y=-\dfrac{7}{10}x-\dfrac{29}{10}$

(5) 通る 2 点の y 座標がともに 3 であるから　$y=3$

(6) x 切片が -2，y 切片が $\dfrac{3}{4}$ であるから　$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{\frac{3}{4}}=1$

よって　$-\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{3}y=1$　すなわち　$3x-8y=-6$

5

解答　(1) $a=-5$　　(2) $a=-1,\ 5$

解説

(1) （解１）直線 AB の方程式は

$$y-4=\frac{7-4}{3-1}(x-1) \qquad \text{すなわち} \qquad 3x-2y+5=0$$

点 $C(-5,\ a)$ がこの直線上にあるから　$3\cdot(-5)-2\cdot a+5=0$

これを解いて　$a=-5$

（解２）直線 AB と直線 AC の傾きが等しいから　$\dfrac{7-4}{3-1}=\dfrac{a-4}{-5-1}$

これを解いて　$a=-5$

(2) （解１）直線 AB の方程式は　$y-(-1)=\dfrac{-a-(-1)}{7-3}(x-3)$

すなわち　$(a-1)x+4y-3a+7=0$

点 $C(a,\ -3)$ がこの直線上にあるから　$(a-1)\cdot a+4\cdot(-3)-3a+7=0$

よって　$a^2-4a-5=0$　　ゆえに　$(a+1)(a-5)=0$

したがって　$a=-1,\ 5$

（解２）直線 AB と直線 AC の傾きが等しいから

$$\frac{-a-(-1)}{7-3}=\frac{-3-(-1)}{a-3} \qquad （ただし\ a\neq 3）$$

分母を払って　$(-a+1)(a-3)=-8$　　整理して　$a^2-4a-5=0$

これを解いて　$a=-1,\ 5$　（$a\neq3$ を満たす）

$a=3$ のとき，直線 AC の方程式は $x=3$ となり，点 B はこの直線上にないから不適。

したがって　$a=-1,\ 5$

6

解答　(1)　$a=-1,\ 2$　　(2)　$a=\dfrac{2}{3}$

解説

$ax+2y=1$ ……①，　$x+(a-1)y=3$ ……②　とする。

直線 ① の傾きは　$-\dfrac{a}{2}$

直線 ② の傾きは，$a\neq 1$ のとき　$-\dfrac{1}{a-1}$

(1)　[1]　$a\neq 1$ のとき

2 直線 ①，② が平行であるための必要十分条件は　　$-\dfrac{a}{2}=-\dfrac{1}{a-1}$

分母を払って　　$a(a-1)=2$　　　よって　　$a^2-a-2=0$

ゆえに　　$(a+1)(a-2)=0$

したがって　　$a=-1,\ 2$　　　これは $a\neq 1$ を満たす。

[2]　$a=1$ のとき

① は $x+2y=1$，② は $x=3$ となるが，この 2 直線は平行でない。

以上から　　$a=-1,\ 2$

(2)　[1]　$a\neq 1$ のとき

2 直線 ①，② が垂直であるための必要十分条件は　　$-\dfrac{a}{2}\times\left(-\dfrac{1}{a-1}\right)=-1$

分母を払って　　$a=-2(a-1)$

これを解いて　　$a=\dfrac{2}{3}$　　　これは $a\neq 1$ を満たす。

[2]　$a=1$ のとき　2 直線は垂直でない。

以上から　　$a=\dfrac{2}{3}$

別解　2 直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ について，

平行 $\Leftrightarrow$ $ab'-ba'=0$　　　垂直 $\Leftrightarrow$ $aa'+bb'=0$

であることを利用する。

(1)　2 直線 ①，② が平行であるための必要十分条件は　　$a(a-1)-2\cdot 1=0$

よって　　$a^2-a-2=0$　　　　これを解いて　　$a=-1,\ 2$

(2)　2 直線 ①，② が垂直であるための必要十分条件は　　$a\cdot 1+2\cdot(a-1)=0$

これを解いて　　$a=\dfrac{2}{3}$

7

解答　(1)　$3x+2y-19=0$　　(2)　$\sqrt{13}$　　(3)　$\dfrac{14}{\sqrt{13}}$　　(4)　7

解説

(1)　直線 BC の方程式は

$$y-5=\frac{2-5}{5-3}(x-3)\qquad \text{すなわち}\qquad 3x+2y-19=0$$

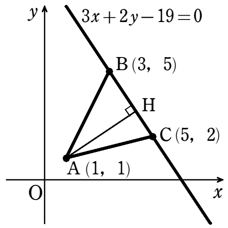
(2)　$\mathrm{BC}=\sqrt{(5-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

(3)　点 A と直線 BC の距離，すなわち，点 A から BC に下ろした垂線 AH の長さは

$$\mathrm{AH}=\frac{|3\cdot 1+2\cdot 1-19|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{14}{\sqrt{13}}$$

(4)　(2)，(3) から

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{14}{\sqrt{13}}=7$$

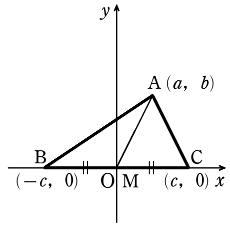


1

解答　略

解説

直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとると，中点 M は原点 O になり，A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ と表すことができる。



このとき　　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$

$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$

$=\{(c+a)^2+b^2\}+\{(c-a)^2+b^2\}$

$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$　……①

また　　$\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2=\{(-a)^2+(-b)^2\}+c^2$

$=a^2+b^2+c^2$　……②

①，② から　　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$

2

解答　$a=2$

解説

$x+y=6$ ……①，　$2x-y=a+1$ ……②，　$x-ay=1-2a$ ……③　とする。

①+② から　　$3x=a+7$　　　よって　　$x=\dfrac{a+7}{3}$

これを ① に代入して y の値を求めると　　$y=\dfrac{-a+11}{3}$

ゆえに，2 直線 ①，② の交点の座標は　　$\left(\dfrac{a+7}{3},\ \dfrac{-a+11}{3}\right)$

この点が直線 ③ 上にもあるとき　　$\dfrac{a+7}{3}-a\cdot\dfrac{-a+11}{3}=1-2a$

整理すると　　$a^2-4a+4=0$　　　よって　　$(a-2)^2=0$　　　ゆえに　$a=2$

3

解答　略

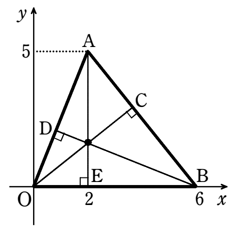
解説

直線 AB の傾きは　　$\dfrac{0-5}{6-2}=-\dfrac{5}{4}$

よって，頂点 O から対辺 AB に下ろした垂線 OC の方程式は　　$y=\dfrac{4}{5}x$　……①

また，直線 OA の傾きは　　$\dfrac{5}{2}$

よって，頂点 B から対辺 OA に下ろした 垂線 BD の方程式は



$$y-0=-\frac{2}{5}(x-6)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{2}{5}x+\frac{12}{5}\quad ……②$$

頂点 A から対辺 OB に下ろした垂線 AE の方程式は　　$x=2$　……③

① に $x=2$ を代入すると　　$y=\dfrac{4}{5}\cdot 2=\dfrac{8}{5}$

② に $x=2$ を代入すると　　$y=-\dfrac{2}{5}\cdot 2+\dfrac{12}{5}=\dfrac{8}{5}$

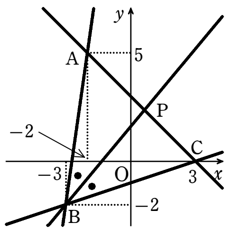
ゆえに，3 直線 ①，②，③ は 1 点 $\left(2,\ \dfrac{8}{5}\right)$ で交わる。

したがって，△OABの各頂点から対辺に下ろした３つの垂線は１点で交わる。

4

解答　$(23-10\sqrt{5},\ 10\sqrt{5}-20)$

解説



$\mathrm{AB}=\sqrt{\{-3-(-2)\}^2+(-2-5)^2}=5\sqrt{2}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{\{3-(-3)\}^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{10}$

直線 BP は ∠ABC の二等分線であるから

$\mathrm{AP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=5\sqrt{2}:2\sqrt{10}=5:2\sqrt{5}$

よって，点 P は線分 AC を $5:2\sqrt{5}$ に内分する点であるから，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{2\sqrt{5}\cdot(-2)+5\cdot3}{5+2\sqrt{5}}=\frac{15-4\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(15-4\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}=\frac{115-50\sqrt{5}}{5}$$

$$=23-10\sqrt{5}$$

$$y=\frac{2\sqrt{5}\cdot5+5\cdot0}{5+2\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}=\frac{50\sqrt{5}-100}{5}=10\sqrt{5}-20$$

よって，点 P の座標は　$(23-10\sqrt{5},\ 10\sqrt{5}-20)$

1

解答　(1)　$(x-3)^2+(y+4)^2=25$　(2)　$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

(3)　$(x-3)^2+(y-5)^2=5$　(4)　$x^2+y^2-2x-6y-15=0$

解説

(1)　中心と原点の距離は　$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

これが半径に等しいから，求める円の方程式は　$(x-3)^2+(y+4)^2=25$

(2)　中心と x 軸の距離 2 が半径に等しいから，求める円の方程式は

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

(3)　2 点 $(1,\ 4)$，$(5,\ 6)$ を結ぶ線分の中点が円の中心となる。

その座標は　$\left(\dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{4+6}{2}\right)$　すなわち　$(3,\ 5)$

半径は，中心 $(3,\ 5)$ と点 $(1,\ 4)$ の距離であるから　$\sqrt{(1-3)^2+(4-5)^2}=\sqrt{5}$

よって，求める円の方程式は　$(x-3)^2+(y-5)^2=5$

(4)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(4,\ -1)$ を通るから　$4^2+(-1)^2+4l-m+n=0$

整理すると　$4l-m+n+17=0$　……①

点 $(6,\ 3)$ を通るから　$6^2+3^2+6l+3m+n=0$

整理すると　$6l+3m+n+45=0$　……②

点 $(-3,\ 0)$ を通るから　$(-3)^2+0^2-3l+0\cdot m+n=0$

整理すると　$-3l+n+9=0$　……③

③から　$n=3l-9$　……④

④を①に代入して整理すると　$7l-m+8=0$

よって　$m=7l+8$　……⑤

④，⑤を②に代入して整理すると

$30l+60=0$　ゆえに　$l=-2$

このとき，⑤から　$m=-6$　④から　$n=-15$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x-6y-15=0$

2

解答　(1)　中心 $(-3,\ 4)$，半径 4 の円　(2)　$p<-2,\ 2<p$

解説

(1)　$(x^2+6x+9)+(y^2-8y+16)=9+16-9$

ゆえに　$(x+3)^2+(y-4)^2=16$

よって，中心 $(-3,\ 4)$，半径 4 の円を表す。

(2)　$(x^2+2px+p^2)+\left\{y^2+3py+\left(\dfrac{3}{2}p\right)^2\right\}=p^2+\left(\dfrac{3}{2}p\right)^2-13$

ゆえに　$(x+p)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}p\right)^2=\dfrac{13}{4}p^2-13$

この方程式が円を表すための条件は　$\dfrac{13}{4}p^2-13>0$

よって　$p^2-4>0$　したがって　$p<-2,\ 2<p$

3

解答　(1)　異なる 2 点で交わる；$(0,\ -1)$，$(1,\ 0)$　(2)　接する，$(-2,\ 0)$

解説

(1)　$\begin{cases}x^2+y^2=1 & \cdots\cdots① \\ x-y=1 & \cdots\cdots②\end{cases}$

②から　$y=x-1$　……③

これを①に代入して　$x^2+(x-1)^2=1$

整理すると　$x^2-x=0$　これを解いて　$x=0,\ 1$

③から　$x=0$ のとき $y=-1$，$x=1$ のとき $y=0$

よって，円①と直線②は異なる 2 点 $(0,\ -1)$，$(1,\ 0)$ で交わる。

(2)　$\begin{cases}x^2+y^2+2x-4y=0 & \cdots\cdots① \\ x+2y+2=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$

②から　$x=-2y-2$　……③

これを①に代入して　$(-2y-2)^2+y^2+2(-2y-2)-4y=0$

整理すると　$y^2=0$　したがって　$y=0$

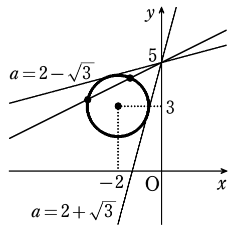
③から　$y=0$ のとき $x=-2$

よって，円①と直線②は点 $(-2,\ 0)$ で接する。

4

解答　$2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

解説



[解法 1]　$y=ax+5$ を円の方程式に代入して

$(x+2)^2+(ax+2)^2=2$

整理すると　$(a^2+1)x^2+4(a+1)x+6=0$

判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=\{2(a+1)\}^2-6(a^2+1)$

$=-2a^2+8a-2=-2(a^2-4a+1)$

円と直線が異なる 2 点で交わるための条件は　$D>0$

ゆえに　$a^2-4a+1<0$

よって　$2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

[解法 2]　円の半径は $\sqrt{2}$ である。円の中心 $(-2,\ 3)$ と直線 $y=ax+5$ の距離を d とすると，円と直線が異なる 2 点で交わるための条件は　$d<\sqrt{2}$

$d=\dfrac{|a\cdot(-2)-3+5|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}$ であるから　$\dfrac{|-2a+2|}{\sqrt{a^2+1}}<\sqrt{2}$

両辺に正の数 $\sqrt{a^2+1}$ を掛けて　$|-2a+2|<\sqrt{2(a^2+1)}$

両辺は負でないから平方して　$(-2a+2)^2<2(a^2+1)$

整理して　$a^2-4a+1<0$

よって　$2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

5

解答　(1)　$x-\sqrt{3}\,y=4$　(2)　$x+7y=10,\ \left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$；$x-y=2,\ (1,\ -1)$

解説

(1)　点 $(1,\ -\sqrt{3})$ は，円 $x^2+y^2=4$ 上の点であるから，その点における接線の方程式は

$1\cdot x+(-\sqrt{3})y=4$　すなわち　$x-\sqrt{3}\,y=4$

(2)　接点を $P(x_1,\ y_1)$ とすると

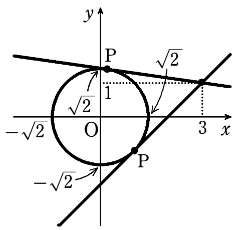
$$x_1^2+y_1^2=2 \quad \cdots\cdots ①$$

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=2$$

この直線が点 (3，1) を通るから

$$3x_1+y_1=2 \quad \cdots\cdots ②$$



①，② から y_1 を消去して整理すると

$$5x_1^2-6x_1+1=0$$

よって　$(5x_1-1)(x_1-1)=0$　　ゆえに　$x_1=\dfrac{1}{5},\ 1$

② に代入して　$x_1=\dfrac{1}{5}$ のとき　$y_1=\dfrac{7}{5}$，　$x_1=1$ のとき　$y_1=-1$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$x+7y=10,\ \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right);\ x-y=2,\ (1,\ -1)$$

別解 1　点 (3，1) を通る接線は，x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は，傾きを m とすると次のようにおける。

$$y-1=m(x-3) \quad すなわち \quad y=mx-(3m-1) \quad \cdots\cdots ③$$

③ を円の方程式に代入して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2m(3m-1)x+\{(3m-1)^2-2\}=0 \quad \cdots\cdots ④$$

$m^2+1 \neq 0$ であるから，2 次方程式 ④ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-m(3m-1)\}^2-(m^2+1)\{(3m-1)^2-2\}$$

$$=\{m^2-(m^2+1)\}(3m-1)^2+2(m^2+1)$$

$$=-7m^2+6m+1=-(7m+1)(m-1)$$

円と直線 ③ が接するための条件は　$D=0$

よって　$-(7m+1)(m-1)=0$　　ゆえに　$m=-\dfrac{1}{7},\ 1$

$m=-\dfrac{1}{7}$ のとき，④ の重解は　$x=\dfrac{m(3m-1)}{m^2+1}=\dfrac{1}{5}$

$m=1$　のとき，④ の重解は　$x=1$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$y=-\frac{1}{7}x+\frac{10}{7},\ \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right);\ y=x-2,\ (1,\ -1)$$

別解 2　(別解 1 と 3 行目まで同じ)

③ から　$mx-y-3m+1=0$　$\cdots\cdots$ ⑤

円の中心 (0，0) と接線の距離が円の半径 $\sqrt{2}$ に等しいから

$$\frac{|m\cdot 0-0-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

両辺に $\sqrt{m^2+1}$ を掛けて　$|-3m+1|=\sqrt{2(m^2+1)}$

両辺を 2 乗して整理すると　$7m^2-6m-1=0$

よって　$(7m+1)(m-1)=0$　　ゆえに　$m=-\dfrac{1}{7},\ 1$

$m=-\dfrac{1}{7}$ のとき，⑤ は　$x+7y-10=0$　$\cdots\cdots$ ⑥

直線 OP は $y=7x$ と表されるから，⑥ と連立させて解くと，接点の座標は

$$\left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$$

$m=1$ のとき，⑤ は　$x-y-2=0$　$\cdots\cdots$ ⑦

直線 OP は $y=-x$ と表されるから，⑦ と連立させて解くと，接点の座標は

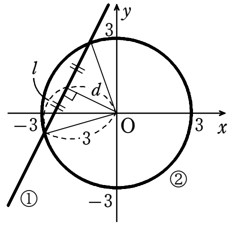
$$(1,\ -1)$$

6

解答　4

解説

$2x-y+5=0$ $\cdots\cdots$ ①，　$x^2+y^2=9$ $\cdots\cdots$ ②　とする。



円 ② の中心 (0，0) と直線 ① の距離 d は

$$d=\frac{|5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

円 ② の半径は 3 であるから，弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2=3^2-d^2=9-5=4$$

$l>0$ であるから　$l=2$

よって，弦の長さは　$2l=4$

別解　① から　$y=2x+5$

これを ② に代入すると　$x^2+(2x+5)^2=9$

よって　$5x^2+20x+16=0$　$\cdots\cdots$ ③

直線 ① と円 ② の交点の座標を $(\alpha,\ 2\alpha+5)$，$(\beta,\ 2\beta+5)$ とすると，α，β は 2 次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{20}{5}=-4,\quad \alpha\beta=\frac{16}{5}$$

求める弦の長さを L とすると

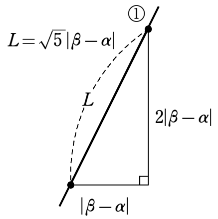
$$L^2=(\beta-\alpha)^2+\{(2\beta+5)-(2\alpha+5)\}^2=5(\beta-\alpha)^2$$

$$=5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=5\left\{(-4)^2-4\cdot\frac{16}{5}\right\}=16$$

$L>0$ であるから　$L=4$

参考　① の傾きが 2 であるから，右の図のようになる。

このことから，$L=\sqrt{5}|\beta-\alpha|$ を導いてもよい。



7

解答　(1)　略　　(2)　$x+2y-3=0$　　(3)　中心 $\left(\dfrac{5}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{205}}{8}$

解説

(1)　円 $x^2+y^2-5=0$ の中心は (0，0)，半径は $\sqrt{5}$

円 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ について，方程式を変形すると

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

ゆえに，中心は (1，2)，半径は 2

よって，中心間の距離は　$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\sqrt{5}-2<\sqrt{5}<2+\sqrt{5}$ であるから，2 つの円は異なる 2 点で交わる。

(2)　k を定数として，次の方程式を考える。

$$k(x^2+y^2-5)+x^2+y^2-2x-4y+1=0 \quad \cdots\cdots [A]$$

[A] は，与えられた 2 つの円の交点を通る図形を表す。

$k=-1$ のとき，[A] は　$-2x-4y+6=0$　すなわち　$x+2y-3=0$

これは直線を表すから，求める直線の方程式である。

(3)　[A] が点 (1，3) を通るとして，[A] に $x=1$，$y=3$ を代入すると　$5k-3=0$

ゆえに　$k=\dfrac{3}{5}$

[A] に代入して整理すると　$x^2+y^2-\dfrac{5}{4}x-\dfrac{5}{2}y-\dfrac{5}{4}=0$

すなわち　$\left(x-\dfrac{5}{8}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{205}{64}$

したがって　中心 $\left(\dfrac{5}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{205}}{8}$

1

解答　(1)　$(x+2)^2+(y-1)^2=25$　　(2)　$(x+1)^2+y^2=29$　　(3)　$(x-3)^2+(y-4)^2=16$

(4)　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

解説

(1)　半径 r は中心 $(-2,\ 1)$ と点 $(1,\ -3)$ の距離で

$$r^2=(1+2)^2+(-3-1)^2=25$$

よって，求める円の方程式は

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25$$

(2)　中心は，2 点 $(4,\ -2)$，$(-6,\ 2)$ を結ぶ線分の中点である。

その座標は

$$\left(\frac{4-6}{2},\ \frac{-2+2}{2}\right)\quad すなわち\quad (-1,\ 0)$$

半径 r は中心 $(-1,\ 0)$ と点 $(4,\ -2)$ の距離で

$$r^2=(4+1)^2+(-2-0)^2=29$$

よって，求める円の方程式は

$$(x+1)^2+y^2=29$$

(3)　x 軸に接するとき，中心 $(3,\ 4)$ と x 軸の距離 4 が半径に等しい。

よって，求める円の方程式は

$$(x-3)^2+(y-4)^2=16$$

(4)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(-3,\ 4)$ を通るから

$$(-3)^2+4^2-3l+4m+n=0$$

よって　$3l-4m-n=25$　……①

点 $(4,\ 5)$ を通るから

$$4^2+5^2+4l+5m+n=0$$

よって　$4l+5m+n=-41$　……②

点 $(1,\ -4)$ を通るから

$$1^2+(-4)^2+l-4m+n=0$$

よって　$l-4m+n=-17$　……③

①，②，③ を解いて　$l=-2$，$m=-2$，$n=-23$

したがって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

2

解答　(1)　中心 $(5,\ -6)$，半径 8　　(2)　$k<-\sqrt{6}$，$\sqrt{6}<k$

解説

(1)　円の方程式を変形すると

$$(x^2-10x+5^2)+(y^2+12y+6^2)=3+5^2+6^2$$

すなわち　$(x-5)^2+(y+6)^2=8^2$

よって　　中心 $(5,\ -6)$，半径 8

(2)　方程式を変形すると

$$(x^2+2kx+k^2)+\{y^2-4ky+(2k)^2\}=-4k^2-6+k^2+(2k)^2$$

すなわち　$(x+k)^2+(y-2k)^2=k^2-6$

これが円を表すための必要十分条件は　$k^2-6>0$

これを解いて　$k<-\sqrt{6}$，$\sqrt{6}<k$

3

解答　(1)　異なる 2 点 $(-1,\ 2)$，$(2,\ -1)$ で交わる　　(2)　共有点をもたない

(3)　点 $(2,\ -1)$ で接する

解説

(1)　$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ① \\ y=-x+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② を ① に代入して　$x^2+(-x+1)^2=5$

よって　$x^2-x-2=0$　　これを解いて　$x=-1,\ 2$

② から　$x=-1$ のとき　$y=2$，　$x=2$ のとき　$y=-1$

ゆえに，円 ① と直線 ② は異なる 2 点 $(-1,\ 2)$，$(2,\ -1)$ で交わる。

(2)　$\begin{cases} x^2+y^2=4 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　$y=-2x+5$

これを ① に代入して　$x^2+(-2x+5)^2=4$　　よって　$5x^2-20x+21=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-10)^2-5\cdot 21=-5<0$

ゆえに，円 ① と直線 ② は共有点をもたない。

(3)　$\begin{cases} x^2+y^2-2x-1=0 & \cdots\cdots ① \\ y=x-3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② を ① に代入して　$x^2+(x-3)^2-2x-1=0$　　よって　$x^2-4x+4=0$

すなわち　$(x-2)^2=0$　　ゆえに　$x=2$ (重解)

② から　$x=2$ のとき　$y=-1$

よって，円 ① と直線 ② は点 $(2,\ -1)$ で接する。

4

解答　$3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}$

解説

円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ の中心は $(-2,\ 1)$，半径は $\sqrt{5}$

$y=x+m$ から　$x-y+m=0$

円の中心 $(-2,\ 1)$ と直線の距離を d とすると

$$d=\frac{|-2-1+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|m-3|}{\sqrt{2}}$$

円と直線が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は

$$d<\sqrt{5}\quad すなわち\quad \frac{|m-3|}{\sqrt{2}}<\sqrt{5}$$

よって　$|m-3|<\sqrt{10}$　　ゆえに　$-\sqrt{10}<m-3<\sqrt{10}$

したがって　$3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}$

別解　$\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=5 & \cdots\cdots ① \\ y=x+m & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② を ① に代入して　$(x+2)^2+(x+m-1)^2=5$

よって　$2x^2+2(m+1)x+m^2-2m=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-2(m^2-2m)=-m^2+6m+1$$

円 ① と直線 ② が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は

$$D>0\quad すなわち\quad -m^2+6m+1>0$$

よって　$m^2-6m-1<0$　　これを解いて　$3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}$

5

解答　(1)　$3x-\sqrt{7}\,y=16$

(2)　$-3x+y=10$，$(-3,\ 1)$；$x+3y=10$，$(1,\ 3)$

解説

(1)　$3\cdot x+(-\sqrt{7})\cdot y=16$　　すなわち　$3x-\sqrt{7}\,y=16$

(2)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする。

点 P は円 $x^2+y^2=10$ 上にあるから

$$x_1{}^2+y_1{}^2=10\quad \cdots\cdots ①$$

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=10\quad \cdots\cdots ②$$

この直線が点 $(-2,\ 4)$ を通るから　$-2x_1+4y_1=10$

よって　$x_1=2y_1-5$　……③

③ を ① に代入して

$(2y_1-5)^2+y_1{}^2=10$　　ゆえに　$y_1{}^2-4y_1+3=0$

これを解いて　$y_1=1,\ 3$

[1]　$y_1=1$ のとき，③ から　$x_1=-3$

よって，接点の座標は　$(-3,\ 1)$

接線の方程式は，② から

$-3\cdot x+1\cdot y=10$　　すなわち　$-3x+y=10$

[2]　$y_1=3$ のとき，③ から　$x_1=1$

よって，接点の座標は　$(1,\ 3)$

接線の方程式は，② から

$1\cdot x+3\cdot y=10$　　すなわち　$x+3y=10$

6

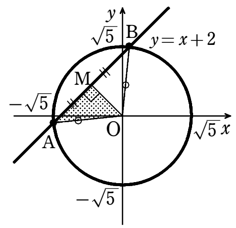
解答　$2\sqrt{3}$

解説

円と直線の交点をA，Bとし，線分 AB の中点を M とする。

線分 OM の長さは，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $y=x+2$ の距離に等しいから

$$\mathrm{OM}=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$



$\mathrm{OA}=\sqrt{5}$ であるから

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OM}^2}$$
$$=2\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$$

別解　$y=x+2$，$x^2+y^2=5$ から y を消去して　$x^2+(x+2)^2=5$

整理すると　$2x^2+4x-1=0$　……①

円と直線の交点の座標を $(\alpha,\ \alpha+2)$，$(\beta,\ \beta+2)$ とすると，α，β は 2 次方程式 ① の解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

求める線分の長さを l とすると

$$l^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+2)-(\alpha+2)\}^2=2(\beta-\alpha)^2$$

$$=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=2\left\{(-2)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

したがって，求める線分の長さは　$l=2\sqrt{3}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　略　(2)　$x^2+y^2-6x-y=0$　(3)　$2x+y-5=0$

解説

(1)　$x^2+y^2-4x-5=0$ を変形すると　$(x-2)^2+y^2=3^2$

この円の中心は点 $(2,\ 0)$，半径は 3

$x^2+y^2+2y-15=0$ を変形すると　$x^2+(y+1)^2=4^2$

この円の中心は点 $(0,\ -1)$，半径は 4

よって，2 円の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(0-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$$

$4-3<d<4+3$ であるから，2 円は 2 点で交わる。

(2)　k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-4x-5)+(x^2+y^2+2y-15)=0\ \cdots\cdots ①$$

を考えると，① の表す図形は 2 円の 2 つの交点を通る。

図形 ① が原点を通るとき　$-5k-15=0$　よって　$k=-3$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2-6x-y=0$

これが求める円の方程式である。

(3)　図形 ① が直線であるとき，x^2，y^2 の項の係数が 0 になるから　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　$2x+y-5=0$

$\boxed{1}$

解答　$m<-\frac{3}{4}$ のとき 2 個，$m=-\frac{3}{4}$ のとき 1 個，$m>-\frac{3}{4}$ のとき 0 個

解説

[解法 1]　$y=mx+1$ を $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ に代入して

$$x^2+(mx+1)^2-2x+2(mx+1)+1=0$$

整理して　$(m^2+1)x^2+2(2m-1)x+4=0$

$m^2+1\neq 0$ であるから，この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2m-1)^2-4(m^2+1)=-4m-3$$

よって，求める共有点の個数は

$D>0$ すなわち $m<-\frac{3}{4}$ のとき　2 個，

$D=0$ すなわち $m=-\frac{3}{4}$ のとき　1 個，

$D<0$ すなわち $m>-\frac{3}{4}$ のとき　0 個

[解法 2]　$y=mx+1\ \cdots\cdots ①$，$x^2+y^2-2x+2y+1=0\ \cdots\cdots ②$ とする。

② を変形すると　$(x-1)^2+(y+1)^2=1$

よって，円 ② の中心は $(1,\ -1)$，半径は 1 である。

また，① から　$mx-y+1=0$

円 ② の中心と直線 ① の距離 d は

$$d=\frac{|m\cdot 1-(-1)+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$$

[1]　直線 ① と円 ② が異なる 2 つの共有点をもつための条件は

$d<1$　すなわち　$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}<1$

ゆえに　$|m+2|<\sqrt{m^2+1}$

両辺は負でないから，2 乗して　$(m+2)^2<m^2+1$

よって　$4m<-3$　ゆえに　$m<-\frac{3}{4}$

[2]　直線 ① と円 ② が 1 点で接するための条件は

$d=1$　すなわち　$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

同様にして　$m=-\frac{3}{4}$

[3]　直線 ① と円 ② が共有点をもたないための条件は

$d>1$　すなわち　$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}>1$

同様にして　$m>-\frac{3}{4}$

よって，求める共有点の個数は

$m<-\frac{3}{4}$ のとき　2 個，　$m=-\frac{3}{4}$ のとき　1 個，　$m>-\frac{3}{4}$ のとき　0 個

$\boxed{2}$

解答　(前半) $m\leqq-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}\leqq m$

(後半) $m=\sqrt{3}$ のとき，接点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$m=-\sqrt{3}$ のとき，接点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

解説

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ y=mx+2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② を ① に代入して　$x^2+(mx+2)^2=1$

整理すると　$(m^2+1)x^2+4mx+3=0\ \cdots\cdots ③$

判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+1)\cdot 3=m^2-3$

円 ① と直線 ② が共有点をもつのは，$D\geqq 0$ のときである。

よって，$m^2-3\geqq 0$ より　$m\leqq-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}\leqq m$

また，円 ① と直線 ② が接するのは，$D=0$ のときである。

よって，$m^2-3=0$ より　$m=\pm\sqrt{3}$

③ の重解は　$x=-\frac{4m}{2(m^2+1)}=-\frac{2m}{m^2+1}$

このとき，② から　$y=m\cdot\left(-\frac{2m}{m^2+1}\right)+2=\frac{2}{m^2+1}$

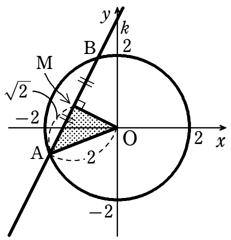
したがって，接点の座標は

$m=\sqrt{3}$ のとき $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$m=-\sqrt{3}$ のとき $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{3}$

解答　$k=\pm\sqrt{10}$

解説



円の中心を O，弦を AB，その中点を M とすると，

△OAM において

$$\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2=\mathrm{OA}^2$$

すなわち　$\left\{\frac{|2\cdot 0-0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right\}^2+(\sqrt{2})^2=2^2$

よって　$k=\pm\sqrt{10}$

別解　円と直線の方程式から y を消去して整理すると

$$5x^2+4kx+k^2-4=0\ \cdots\cdots ①$$

① の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{4k}{5},\quad \alpha\beta=\frac{k^2-4}{5}$$

また，円と直線の交点の座標は，$(\alpha,\ 2\alpha+k)$，$(\beta,\ 2\beta+k)$ と表されるから，条件より

$(\beta-\alpha)^2+\{(2\beta+k)-(2\alpha+k)\}^2=(2\sqrt{2})^2$　すなわち　$5(\beta-\alpha)^2=8$

ここで　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(-\frac{4k}{5}\right)^2-4\cdot\frac{k^2-4}{5}=\frac{-4k^2+80}{25}$

$5\cdot\frac{-4k^2+80}{25}=8$ を解いて　$k=\pm\sqrt{10}$

$\boxed{4}$

解答　与えられた 2 円を順に ①，② とする。

(1)　円 ① は円 ② の内部にある　(2)　2 つの円 ①，② は 2 点で交わる

(3)　円 ② は円 ① に内接する

解説

(1) ～ (3) において，与えられた 2 円を順に ①，② とする。

また，2 円 ①，② の中心間の距離を d，円 ① の半径を r_1，円 ② の半径を r_2 とする。

(1)　円 ① の中心は　　点 $(0,\ 0)$

　円 ② の中心は　　点 $(1,\ 2)$

よって　　$d=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

また，$r_1=3$，$r_2=6$ であるから

$r_2-r_1=3$　　ゆえに　　$d<r_2-r_1$

したがって，円 ① は円 ② の内部にある。

(2)　円 ① の中心は　　点 $(3,\ 0)$

円 ② の方程式を変形すると

$(x-1)^2+(y+2)^2=1$

ゆえに，円 ② の中心は　　点 $(1,\ -2)$

よって　　$d=\sqrt{(1-3)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{2}$

また，$r_1=2$，$r_2=1$ であるから

$r_1-r_2=1$，$r_1+r_2=3$　　ゆえに　　$r_1-r_2<d<r_1+r_2$

したがって，2 つの円 ①，② は 2 点で交わる。

(3)　円 ① の方程式を変形すると

$(x+1)^2+(y-4)^2=90$

円 ② の方程式を変形すると

$(x+2)^2+(y-1)^2=40$

ゆえに，円 ① の中心は　　点 $(-1,\ 4)$

　円 ② の中心は　　点 $(-2,\ 1)$

よって　　$d=\sqrt{(-2+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$

また，$r_1=3\sqrt{10}$，$r_2=2\sqrt{10}$ であるから

$r_1-r_2=\sqrt{10}$　　ゆえに　　$d=r_1-r_2$

したがって，円 ② は円 ① に内接する。

5

解答　$r=3$，7

解説

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$　……①

$(x-3)^2+(y+1)^2=r^2$　……②　とする。

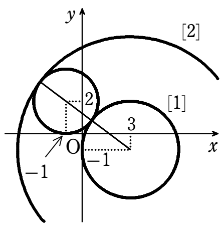
円 ① の中心は点 $(-1,\ 2)$，半径は 2

円 ② の中心は点 $(3,\ -1)$，半径は r

2 円の中心間の距離は

$\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{25}=5$

2 円が接するのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。



[1]　2 円が外接するとき

$5=2+r$　　　よって　　$r=3$

[2]　円 ① が円 ② に内接するとき

$5=r-2$　　　よって　　$r=7$

したがって　　$r=3$，7

注意　円 ② の中心は，円 ① の外部にあるから，円 ② が円 ① に内接することはない。

6

解答　(1)　$x^2+y^2-5x+5y-20=0$　　(2)　$x-y+3=0$　　(3)　$(-1,\ 2)$，$(-2,\ 1)$

解説

k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2+4x-4y+7)=0\quad\cdots\cdots ①$$

を考えると，① の表す図形は 2 円の 2 つの交点を通る。

(1)　図形 ① が点 $(4,\ 3)$ を通るとき　　$k(16+9-5)+(16+9+16-12+7)=0$

よって　　$20k+36=0$　　　ゆえに　　$k=-\dfrac{9}{5}$

これを ① に代入して整理すると　　$x^2+y^2-5x+5y-20=0$

(2)　図形 ① が直線であるとき，x^2，y^2 の項の係数が 0 になるから　　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　　$x-y+3=0$

(3)　2 円の交点は，円 $x^2+y^2=5$ ……② と (2) で求めた直線 $x-y+3=0$ ……③ との交点である。

③ から　　$y=x+3$　……④

④ を ② に代入して　　$x^2+(x+3)^2=5$

よって　　$x^2+3x+2=0$　　　これを解いて　　$x=-1,\ -2$

④ から　　$x=-1$ のとき　$y=2$，　$x=-2$ のとき　$y=1$

したがって，求める交点の座標は　　$(-1,\ 2)$，$(-2,\ 1)$

1

解答　(1)　$2\sqrt{3}$　　(2)　$a=-\dfrac{1}{3}$

解説

(1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ を変形すると

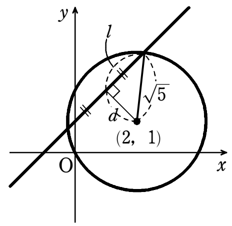
$(x-2)^2+(y-1)^2=5$　……①

$a=-1$ のとき，直線の方程式は

$x-y+1=0$　……②

円 ① の中心 $(2,\ 1)$ と直線 ② の距離 d は

$$d=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$



円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから，弦 AB の長さを $2l$

とすると　　$l^2=(\sqrt{5})^2-d^2=5-2=3$

$l>0$ であるから　　$l=\sqrt{3}$　　　よって　　$\mathrm{AB}=2l=2\sqrt{3}$

別解　② から　　$y=x+1$

これを $x^2+y^2-4x-2y=0$ に代入して　　$x^2+(x+1)^2-4x-2(x+1)=0$

よって　　$2x^2-4x-1=0$　……③

円と直線の交点 A，B の座標を $(\alpha,\ \alpha+1)$，$(\beta,\ \beta+1)$ とすると，α，β は 2 次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

よって　　$\mathrm{AB}^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+1)-(\alpha+1)\}^2=2(\beta-\alpha)^2=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

$$=2\left\{2^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　　$\mathrm{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(2)　弦 AB の長さが最大になるのは，弦 AB が円の直径になるときである。

このとき，直線 $ax+y+a=0$ は円の中心 $(2,\ 1)$ を通るから

$2\cdot a+1+a=0$　　　よって　　$a=-\dfrac{1}{3}$

2

解答　$x^2+y^2-3x+3y-8=0$，6，$\dfrac{25}{2}\pi$

解説

$x+3y-7=0$ ……①，$x-3y-1=0$ ……②，$x-y+1=0$ ……③ とする。

2 直線 ①，② の交点の座標は　　$(4,\ 1)$

2 直線 ②，③ の交点の座標は　　$(-2,\ -1)$

2 直線 ①，③ の交点の座標は　　$(1,\ 2)$

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とすると，この円が

点 $(4,\ 1)$ を通るから　　　$4l+m+n+17=0$　……④

点 $(-2,\ -1)$ を通るから　　$-2l-m+n+5=0$　……⑤

点 $(1,\ 2)$ を通るから　　　$l+2m+n+5=0$　……⑥

(④−⑤)÷2 から　　$3l+m+6=0$　……⑦

(⑥−⑤)÷3 から　　$l+m=0$　　……⑧

⑦−⑧ から　　$2l+6=0$　　　よって　　$l=-3$

これを ⑧ に代入して　　$m=-l=3$

これらを ⑤ に代入して　　$n=2l+m-5=-8$

したがって，求める外接円の方程式は　$x^2+y^2-3x+3y-8=0$

直線③上の２点 $(-2,\ -1)$，$(1,\ 2)$ 間の距離は

$$\sqrt{\{1-(-2)\}^2+\{2-(-1)\}^2}=3\sqrt{2}$$

また，点 $(4,\ 1)$ と直線③の距離は

$$\frac{|4-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

よって，求める三角形の面積は　$\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=6$

また，外接円の方程式を変形すると

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

ゆえに，この円の半径を r とすると　$r^2=\frac{25}{2}$

よって，外接円の面積は　$\pi r^2=\frac{25}{2}\pi$

$\boxed{3}$

解答　$2x+y=2$

解説

$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$ とおく。

２点 P，Q における円の接線の方程式はそれぞれ　$x_1x+y_1y=4$，$x_2x+y_2y=4$

この２直線はともに点 $(4,\ 2)$ を通るから　$4x_1+2y_1=4$，$4x_2+2y_2=4$

すなわち　$2x_1+y_1=2$，$2x_2+y_2=2$

これは，直線 $2x+y=2$ が２点 P，Q を通ること，すなわち，２点 P，Q を通る直線の方程式が $2x+y=2$ であることを示している。

よって，求める直線の方程式は　$2x+y=2$

第３講　例題

$\boxed{1}$

解答　(1)　直線 $2x-y-6=0$　　(2)　点 $(5,\ 0)$ を中心とする半径４の円

解説

(1)　$P(x,\ y)$ とする。

$AP=BP$ から　$AP^2=BP^2$

ゆえに　$(x-2)^2+(y-3)^2=(x-6)^2+(y-1)^2$

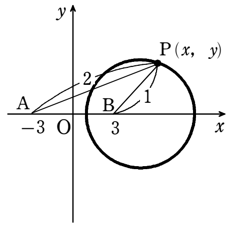
整理して　$2x-y-6=0$　……①

よって，点 P は直線①上にある。

逆に，直線①上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　直線 $2x-y-6=0$

(2)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。



P　に関する条件は　$AP:BP=2:1$

これより　$AP=2BP$

すなわち　$AP^2=4BP^2$

$AP^2=\{x-(-3)\}^2+y^2=(x+3)^2+y^2$，

$BP^2=(x-3)^2+y^2$ を代入すると

$$(x+3)^2+y^2=4\{(x-3)^2+y^2\}$$

整理すると　$x^2-10x+y^2+9=0$

すなわち　$(x-5)^2+y^2=4^2$

よって，点 P は円 $(x-5)^2+y^2=4^2$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点 $P(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　点 $(5,\ 0)$ を中心とする半径４の円

$\boxed{2}$

解答　中心 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，半径２の円

解説

点 Q の座標を $(s,\ t)$ とし，線分 AQ を $2:1$ に内分する点を $P(x,\ y)$ とする。

Q は円 $x^2+y^2=9$ 上の点であるから　$s^2+t^2=9$　……①

P は線分 AQ を $2:1$ に内分する点であるから

$$x=\frac{1\cdot1+2s}{2+1}=\frac{1+2s}{3},\quad y=\frac{1\cdot2+2t}{2+1}=\frac{2+2t}{3}$$

よって　$s=\frac{3x-1}{2}$，$t=\frac{3y-2}{2}$

これを①に代入すると　$\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{3y-2}{2}\right)^2=9$

ゆえに　$\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{9}{4}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=9$

よって　$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=4$　……②

したがって，点 P は円②上にある。

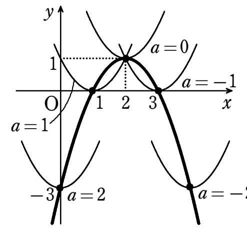
逆に，円②上の任意の点は，条件を満たす。

以上から，求める軌跡は　中心 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，半径２の円

$\boxed{3}$

解答　放物線 $y=-(x-2)^2+1$

解説



放物線の方程式を変形すると

$$y=\{x+(a-2)\}^2-a^2+1$$

放物線の頂点を $P(x,\ y)$ とすると

$x=-a+2$　……①

$y=-a^2+1$　……②

①から　$a=-x+2$

これを②に代入して

$y=-(-x+2)^2+1$

したがって，求める軌跡は

放物線　$y=-(x-2)^2+1$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$m<0$，$4<m$　　(2)　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0$，$2<x$ の部分

解説

(1)　$y=x^2$　……①，　$y=m(x-1)$　……②　とする。

①，②から y を消去して整理すると　$x^2-mx+m=0$　……③

この２次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-m)^2-4m=m(m-4)$$

放物線①と直線②が異なる２点 P，Q で交わるための必要十分条件は

$D>0$　すなわち　$m(m-4)>0$

よって　$m<0$，$4<m$　……④

(2)　P，Q の x 座標を，それぞれ α，β $(\alpha\neq\beta)$ とする。

α，β は③の異なる２つの実数解であるから，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=m$

線分 PQ の中点 M の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2}$　……⑤

$Y=m(X-1)$　……⑥

⑤から　$m=2X$　……⑦

これを⑥に代入して　$Y=2X(X-1)$　　よって　$Y=2X^2-2X$

また，④，⑦から　$2X<0$，$4<2X$　　ゆえに　$X<0$，$2<X$

よって，点 M は放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0$，$2<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 M の軌跡は　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0$，$2<x$ の部分

$\boxed{5}$

解答　原点を中心とし，半径が５の円　ただし，点 $(-5,\ 0)$ を除く

解説

２直線の方程式を変形して

$y=m(x+5)$　……①　　$-my=x-5$　……②

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)$ は①，②を満たす。

[1]　$y\neq0$ のとき，②から　$m=-\frac{x-5}{y}$

これを①に代入して　$y=-\frac{x-5}{y}(x+5)$

よって　$x^2+y^2=25$　……③

③において $y=0$ とすると　$x=\pm5$

ゆえに，$y\neq0$ のとき，点 P は，円③から２点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を除いた図形上にある。

[2]　$y=0$ のとき，② から　　　　$x=5$

$x=5$，$y=0$ を ① に代入すると　　$m=0$

よって，点 $(5,\ 0)$ は，$m=0$ のときの２直線の交点である。

[1]，[2] から，点 P は，原点を中心とし，半径が５の円から点 $(-5,\ 0)$ を除いた図形上にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は

原点を中心とし，半径が５の円　ただし，点 $(-5,\ 0)$ を除く

参考　① から第１の直線は定点 $(-5,\ 0)$ を通り，② から第２の直線は定点 $(5,\ 0)$ を通る。また，この２直線は垂直であるから，点 P は２点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を直径の両端とする円周上にあることがわかる。ただし，① は直線 $x=-5$，② は直線 $y=0$ を表さないから，点 $(-5,\ 0)$ を除く。

1

解答　(1)　直線 $2x-4y+9=0$　　(2)　中心 $(4,\ 0)$，半径４の円

解説

(1)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

AP＝BP であるから　　$AP^2=BP^2$

すなわち　　$(x-3)^2+y^2=x^2+(y-6)^2$　　整理すると　　$2x-4y+9=0$

よって，点 P は直線 $2x-4y+9=0$ 上にある。

逆に，この直線上のすべての点 $P(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　直線 $2x-4y+9=0$

(2)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

P の満たす条件は　　AP : BP＝2 : 1

ゆえに　　AP＝2BP　すなわち　$AP^2=4BP^2$

したがって　　$(x+4)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$

整理すると　　$x^2-8x+y^2=0$

すなわち　　$(x-4)^2+y^2=4^2$

ゆえに，点 P は円 $(x-4)^2+y^2=4^2$ 上にある。

逆に，この円上の任意の点 P は，与えられた条件を満たす。

よって，点 P の軌跡は　　中心 $(4,\ 0)$，半径４の円

2

解答　(1)　直線 $x-2y=-2$　　(2)　放物線 $y=3x^2-8x+4$

(3)　中心が点 $(2,\ 1)$，半径が $\dfrac{1}{3}$ の円

解説

点 P の座標を $(x,\ y)$，点 Q の座標を $(s,\ t)$ とする。

(1)　点 Q は直線 $x-2y=1$ 上にあるから

$s-2t=1$　……①

点 P は線分 AQ の中点であるから

$x=\dfrac{1+s}{2}$，$y=\dfrac{3+t}{2}$　　ゆえに　　$s=2x-1$，$t=2y-3$

これを ① に代入して　　$(2x-1)-2(2y-3)=1$　　すなわち　　$x-2y=-2$

よって，点 P は，直線 $x-2y=-2$ 上にある。

逆に，この直線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は　　直線 $x-2y=-2$

(2)　点 Q は放物線 $y=x^2$ 上にあるから

$t=s^2$　……①

点 P は線分 AQ を 1 : 2 に内分するから

$x=\dfrac{2\cdot2+1\cdot s}{1+2}$，$y=\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot t}{1+2}$　　ゆえに　　$s=3x-4$，$t=3y+4$

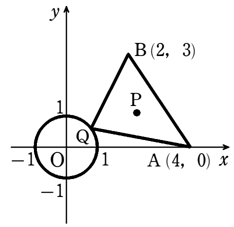
これを ① に代入して　　$3y+4=(3x-4)^2$　　すなわち　　$y=3x^2-8x+4$

よって，点 P は，放物線 $y=3x^2-8x+4$ 上にある。

逆に，この放物線上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は　　放物線 $y=3x^2-8x+4$

(3)　点 Q は直線 AB 上にないから，図形 ABQ は常に三角形になる。



点 Q は円 $x^2+y^2=1$ 上にあるから

$s^2+t^2=1$　……①

点 P は三角形 ABQ の重心であるから

$x=\dfrac{4+2+s}{3}$，$y=\dfrac{0+3+t}{3}$

ゆえに　　$s=3x-6$，$t=3y-3$

これを ① に代入して

$(3x-6)^2+(3y-3)^2=1$　　すなわち　　$(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{9}$

よって，点 P は，円 $(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{9}$ 上にある。

逆に，この円上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は，中心が点 $(2,\ 1)$，半径が $\dfrac{1}{3}$ の円である。

3

解答　放物線 $y=\dfrac{4}{9}x^2$

解説

方程式を変形して　　$\left(x+\dfrac{3}{2}a\right)^2+(y-a^2)^2=\dfrac{1}{4}a^2+1$

$\dfrac{1}{4}a^2+1>0$ であるから，a がすべての実数値をとって変化するとき，与えられた方程式は円を表す。

円の中心の座標を $(x,\ y)$ とすると　　$x=-\dfrac{3}{2}a$，$y=a^2$

$a=-\dfrac{2}{3}x$ であるから，$y=a^2$ に代入して　　$y=\left(-\dfrac{2}{3}x\right)^2=\dfrac{4}{9}x^2$

したがって，求める軌跡は　　放物線 $y=\dfrac{4}{9}x^2$

4

解答　(1)　$m<1$，$9<m$　　(2)　放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2$，$6<x$ の部分

解説

(1)　$y=x^2-3x$ ……①，　$y=m(x-4)$ ……②　とする。

①，② から y を消去して整理すると　　$x^2-(m+3)x+4m=0$　……③

この２次方程式の判別式を D とすると

$D=(m+3)^2-4\cdot1\cdot4m=m^2-10m+9=(m-1)(m-9)$

放物線 ① と直線 ② が異なる２点 A，B で交わるための必要十分条件は

$D>0$　すなわち　$(m-1)(m-9)>0$

よって　　$m<1$，$9<m$　……④

(2)　A，B の x 座標を，それぞれ α，β $(\alpha\neq\beta)$ とする。

α，β は ③ の異なる２つの実数解であるから，解と係数の関係により

$\alpha+\beta=m+3$

線分 AB の中点 P の座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{m+3}{2}$　……⑤　　$Y=m(X-4)$　……⑥

⑤ から　　$m=2X-3$　……⑦

これを ⑥ に代入して　$Y=(2X-3)(X-4)$

よって　$Y=2X^2-11X+12$

また，④，⑦ から　$2X-3<1,\ 9<2X-3$　ゆえに　$X<2,\ 6<X$

よって，点 P は放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2,\ 6<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は　放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2,\ 6<x$ の部分

$\boxed{5}$

解答　中心が原点，半径が 2 の円。ただし，点 $(-2,\ 0)$ を除く

解説

$y=t(x+2)$ ……①，　$ty=2-x$ ……②

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)$ は ①，② を満たす。

[1]　$y\fallingdotseq 0$ のとき，② から　$t=\dfrac{2-x}{y}$

これを ① に代入して　$y=\dfrac{2-x}{y}(x+2)$

よって　$x^2+y^2=4$　……③

③ で $y=0$ とすると　$x=\pm 2$

ゆえに，$y\fallingdotseq 0$ のとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は円 ③ から 2 点 $(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を除いた図形上にある。

[2]　$y=0$ のとき，② から　$x=2$

$x=2,\ y=0$ を ① に代入すると　$t=0$

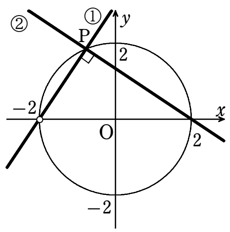
よって，点 $(2,\ 0)$ は，$t=0$ のときの 2 直線の交点である。

[1]，[2] から，点 P は円 ③ から点 $(-2,\ 0)$ を除いた図形上にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は，原点を中心とし，半径が 2 の円である。ただし，点 $(-2,\ 0)$ を除く。

参考　直線 ① は定点 $(-2,\ 0)$ を通り，直線 ② は定点 $(2,\ 0)$ を通る。また，2 直線 ①，② は垂直に交わる（傾きに着目）から，点 P は 2 点 $(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を直径の両端とする円周上にあることがわかる。ただし，① は直線 $x=-2$，② は直線 $y=0$ を表さないから，点 $(-2,\ 0)$ を除く。



$\boxed{1}$

解答　(1)　円 $(x-1)^2+y^2=6$　(2)　直線 $x+y-2=0$

解説

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=30$ から　$(x+2)^2+y^2+(x-4)^2+y^2=30$

整理すると　$x^2-2x+y^2=5$

よって　$(x-1)^2+y^2=6$

ゆえに，点 P の軌跡は　円 $(x-1)^2+y^2=6$

(2)　$2\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ から　$2(x^2+y^2)=(x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2$

整理すると　$x+y-2=0$

よって，点 P の軌跡は　直線 $x+y-2=0$

$\boxed{2}$

解答　中心が点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$，半径が 1 の円。ただし，2 点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$ を除く。

解説

点 P の座標を $(x,\ y)$，点 Q の座標を $(s,\ t)$ とする。

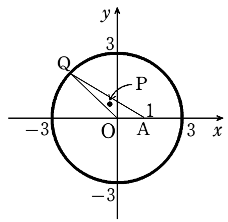
Q が x 軸上にあるとき，図形 OAQ は三角形にならないから　$t\fallingdotseq 0$　……①

Q は円 $x^2+y^2=9$ 上にあるから

$s^2+t^2=9$　……②

P は △OAQ の重心であるから

$x=\dfrac{0+1+s}{3}$，$y=\dfrac{0+0+t}{3}$



よって　$s=3x-1,\ t=3y$

これを ①，② に代入して　$(3x-1)^2+(3y)^2=9,\ 3y\fallingdotseq 0$

すなわち　$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=1,\ y\fallingdotseq 0$　……③

ゆえに，点 P は図形 ③ 上にある。

逆に，図形 ③ 上の任意の点は，条件を満たす。

$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=1$ で，$y=0$ とすると　$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2=1$

これを解くと　$x=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}$

よって，求める軌跡は，中心が点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$，半径が 1 の円である。

ただし，2 点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$ を除く。

$\boxed{3}$

解答　(1)　$0<k<2$　(2)　直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ $(0<x<4)$

解説

(1)　方程式を変形して

$(x-2k)^2+\{y+(3k-1)\}^2=-k^2+2k$

これが円を表すための条件は　$-k^2+2k>0$

よって　$k(k-2)<0$　したがって　$0<k<2$

(2)　円の中心の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=2k,\ y=-3k+1$ $(0<k<2)$

k を消去すると　$y=-\dfrac{3}{2}x+1$

また，$0<k<2$ であるから　$0<2k<4$　すなわち　$0<x<4$

よって，求める軌跡は　直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ $(0<x<4)$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$-1<k<1$　(2)　円 $(x-1)^2+y^2=1$ の $1<x\leqq 2$ の部分

解説

(1)　$y=kx$ を $(x-2)^2+y^2=2$ に代入して　$(x-2)^2+(kx)^2=2$

整理すると　$(k^2+1)x^2-4x+2=0$　……①

円 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わるための条件は，2 次方程式 ① の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2(k^2+1)=-2(k^2-1)>0$

ゆえに　$k^2-1<0$　よって　$-1<k<1$

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，P は直線 ℓ 上の点であるから　$y=kx$

2 次方程式 ① の 2 つの解を α，β とすると，P は線分 AB の中点であり，解と係数の関係から　$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{k^2+1}$

よって　$x=\dfrac{2}{k^2+1}$　……②

$x\fallingdotseq 0$ であるから，$y=kx$ より　$k=\dfrac{y}{x}$

② に代入して　$x=\dfrac{2}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1}$

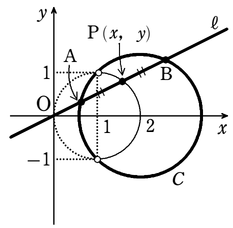
よって　$x^2+y^2=2x$

(1) の結果から　$0\leqq k^2<1$

ゆえに，② から　$1<x\leqq 2$

したがって，求める軌跡は

円 $(x-1)^2+y^2=1$ の $1<x\leqq 2$ の部分



1

解答　(1)　$2x+2y+5=0$，$2x-2y-1=0$　　(2)　$x+7y-23=0$

解説

(1)　2直線のなす角の二等分線上の点をP$(x,\ y)$とする。

点Pは2直線 $x-2y-2=0$，$4x-2y+1=0$ から等距離にあるから

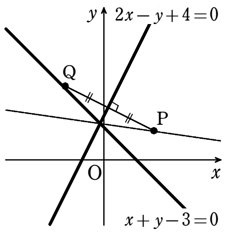
$$\frac{|x-2y-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|4x-2y+1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

よって　$2|x-2y-2|=|4x-2y+1|$

すなわち　$2(x-2y-2)=\pm(4x-2y+1)$

したがって，求める直線の方程式は　$2x+2y+5=0$，$2x-2y-1=0$

(2)　直線 $2x-y+4=0$ に関して，直線 $x+y-3=0$ 上を動く点Q$(s,\ t)$ と対称な点をP$(x,\ y)$ $[x\neq s]$ とする。



直線PQが直線 $2x-y+4=0$ に垂直であるから，その傾きについて

$$2\cdot\frac{y-t}{x-s}=-1$$

よって　$s+2t=x+2y$　……①

また，線分PQの中点 $\left(\frac{x+s}{2},\ \frac{y+t}{2}\right)$ が直線 $2x-y+4=0$ 上にあるから

$$2\cdot\frac{x+s}{2}-\frac{y+t}{2}+4=0$$

よって　$2s-t=-2x+y-8$　……②

①，②から　$s=\frac{-3x+4y-16}{5}$　……③，　$t=\frac{4x+3y+8}{5}$　……④

また，点Qは直線 $x+y-3=0$ 上にあるから　$s+t-3=0$　……⑤

③，④を⑤に代入して　$\frac{-3x+4y-16}{5}+\frac{4x+3y+8}{5}-3=0$

したがって，点Pの軌跡の方程式は　$x+7y-23=0$

これが求める直線の方程式である。

2

解答　放物線　$y=\frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{1}{2}$

解説

Pの座標を$(x,\ y)$とする。

第1象限内の円Cに外接し，x軸に接する円の半径はyである。

2つの円が外接するから

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=y+1$$

両辺は正であるから2乗して

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(y+1)^2$$

整理して　$y=\frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{1}{2}$

したがって，求める軌跡は

放物線　$y=\frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{1}{2}$

3

解答　(1)　$\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$　　(2)　直線 $2x+2y-1=0$

(3)　円 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$

解説

(1)　Qの座標を$(X,\ Y)$とし，kは実数とする。

条件(A)から　$X=kx$，$Y=ky$　……①，　$k>0$

条件(B)から　$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(kx)^2+(ky)^2}=1$

よって　$k(x^2+y^2)=1$　……②

$x^2+y^2\neq0$ であるから　$k=\frac{1}{x^2+y^2}$

したがって，①から　Q$\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

(2)　①から　$x=\frac{X}{k}$，$y=\frac{Y}{k}$　　②に代入して　$\frac{X^2+Y^2}{k}=1$

よって　$x=\frac{X}{X^2+Y^2}$，$y=\frac{Y}{X^2+Y^2}$　……③

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ から　$x^2+y^2-2x-2y=0$

③を代入して　$\frac{X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\frac{2X}{X^2+Y^2}-\frac{2Y}{X^2+Y^2}=0$

ゆえに　$\frac{X^2+Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\frac{2(X+Y)}{X^2+Y^2}=0$

$X^2+Y^2\neq0$ であるから　$1-2(X+Y)=0$

したがって，Qの軌跡は　直線 $2x+2y-1=0$

(3)　$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ から　$x^2+y^2-2x-2y=2$

③を代入して　$\frac{X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\frac{2X}{X^2+Y^2}-\frac{2Y}{X^2+Y^2}=2$

ゆえに　$\frac{X^2+Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\frac{2(X+Y)}{X^2+Y^2}=2$

$X^2+Y^2\neq0$ であるから　$1-2(X+Y)=2(X^2+Y^2)$

よって　$X^2+Y^2+X+Y-\frac{1}{2}=0$

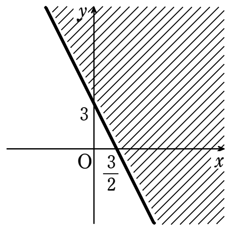
したがって，Qの軌跡は　円 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$

1

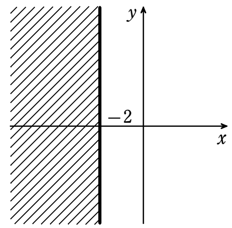
解答　(1)　[図]　境界線を含まない　　(2)　[図]　境界線を含む

(3)　[図]　境界線を含まない　　(4)　[図] 境界線を含む

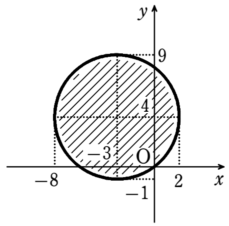
(1)



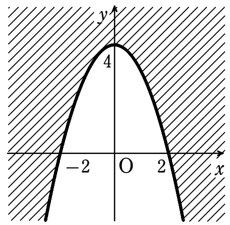
(2)



(3)

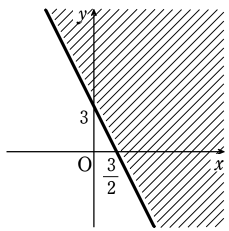


(4)



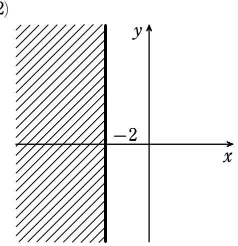
解説

(1)



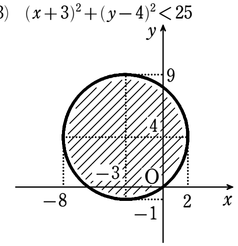
境界線を含まない

(2)



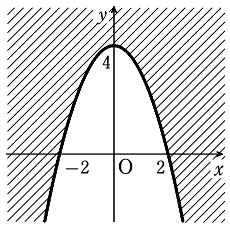
境界線を含む

(3)　$(x+3)^2+(y-4)^2<25$



境界線を含まない

(4)

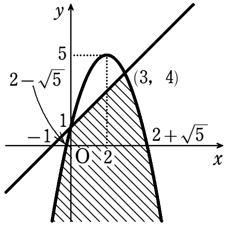


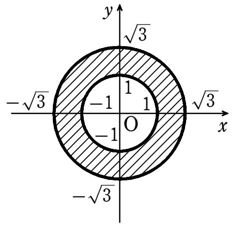
境界線を含む

2

解答　(1)　[図] 境界線を含む　　(2)　[図] 境界線を含む

(1)　　(2)



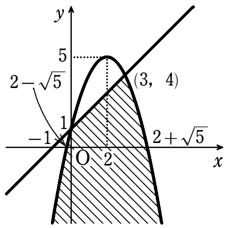


解説

(1)　$y \leqq -x^2+4x+1$ から　　$y \leqq -(x-2)^2+5$

求める領域は，放物線 $y=-(x-2)^2+5$ およびその下側と，直線 $y=x+1$ およびその下側の共通部分で，図の斜線部分。

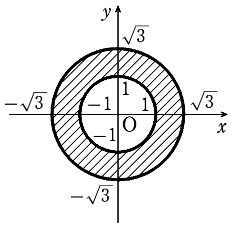
ただし，境界線を含む。



(2)　与式は $\begin{cases}1 \leqq x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \leqq 3\end{cases}$ と同値。

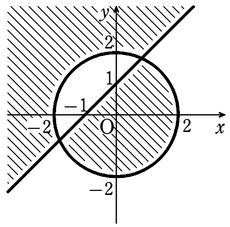
求める領域は，円 $x^2+y^2=1$ の周および外部と，円 $x^2+y^2=3$ の周および内部の共通部分で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



3 ★★☆

解答　〔図〕境界線を含まない



解説

$(x-y+1)(x^2+y^2-4)<0$ を連立不等式で表すと

$$\begin{cases}x-y+1>0 \\ x^2+y^2-4<0\end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases}x-y+1<0 \\ x^2+y^2-4>0\end{cases}$$

すなわち

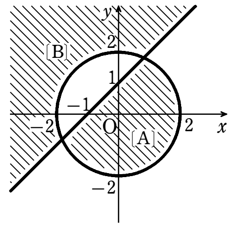
$$\begin{cases}y<x+1 \\ x^2+y^2<2^2\end{cases} \cdots\cdots〔A〕\quad \text{または}$$

$$\begin{cases}y>x+1 \\ x^2+y^2>2^2\end{cases} \cdots\cdots〔B〕$$

求める領域は，〔A〕の表す領域と〔B〕の表す領域の和集合である。

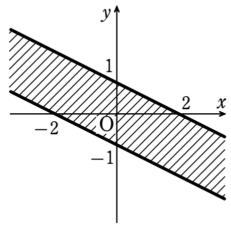
よって，求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



4 ★★☆

解答　〔図〕境界線を含む



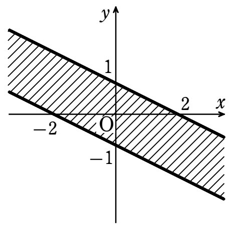
解説

$|x+2y| \leqq 2$ から　　$-2 \leqq x+2y \leqq 2$

よって　$\begin{cases}x+2y \geqq -2 \\ x+2y \leqq 2\end{cases}$　すなわち　$\begin{cases}y \geqq -\dfrac{1}{2}x-1 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x+1\end{cases}$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



5

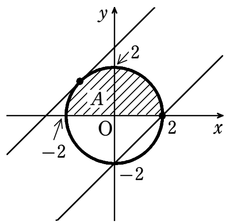
解答　$x=-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$，$x=2$，$y=0$ のとき最小値 -2

解説

連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$，$y \geqq 0$ の表す領域を A とすると，A は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

$-x+y=k$ ……① とおくと，① は傾きが 1，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線 ① が領域 A 上で円 $x^2+y^2=4$ に接するとき，k の値は最大となる。



① から　　$y=x+k$　……②

これを $x^2+y^2=4$ に代入して　　$x^2+(x+k)^2=4$

整理すると　　$2x^2+2kx+k^2-4=0$　……③

この方程式の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-4)=-k^2+8$

直線 ① と円が接するとき，$D=0$ であるから

$-k^2+8=0$　　　よって　　$k=\pm 2\sqrt{2}$

接点が領域 A 上にあるとき　　$k=2\sqrt{2}$

このとき，③ から　　$x=-\dfrac{k}{2}=-\sqrt{2}$

② から　　$y=-\sqrt{2}+k=\sqrt{2}$

また，直線 ① が点 (2，0) を通るとき，k の値は最小となる。

このとき　　$k=-2+0=-2$

したがって，$-x+y$ は　$x=-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$

$x=2$，$y=0$ のとき最小値 -2　をとる。

6

解答　最大値 $\dfrac{41}{9}$，最小値 $\dfrac{1}{2}$

解説

領域 D は，右の図のような，3 直線

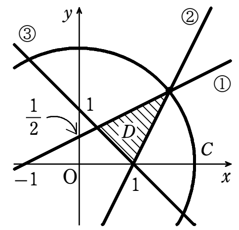
$x-2y+1=0$　……①，

$2x-y-2=0$　……②，

$x+y-1=0$　……③

で囲まれた部分である。

ただし，境界線を含む。



$x^2+y^2=k$ とおくと，$k>0$ のとき，これは中心が原点で半径が $\sqrt{k}$ の円を表す。

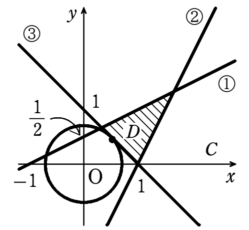
この円を C とおく。

点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，k が最大となるのは，右上の図より，円 C が 2 直線 ①，② の交点を通るときである。

①，② を連立させて解くと　　$x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{4}{3}$

よって，このとき k の値は　　$k=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{41}{9}$

また，点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，k が最小となるのは，右の図より，円 C が直線 ③ に接するときである。



よって　　$\dfrac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{k}$

ゆえに　　$\sqrt{k}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$k=\dfrac{1}{2}$

以上から　最大値 $\dfrac{41}{9}$，最小値 $\dfrac{1}{2}$

参考　(接点の座標)

$x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ と ③ を連立させて解くと　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$

よって，接点の座標は　　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

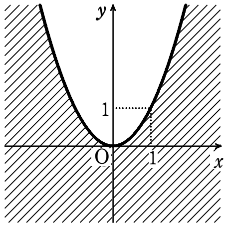
2 直線 ①，③ の交点の座標は $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ であり，

2 直線 ②，③ の交点の座標は (1，0) であるから，

$k=\dfrac{1}{2}$ のとき円 C は確かに領域 D と共有点をもつ。

$\boxed{7}$

解答　(1)　$k=2,\ -4$　　(2)　［図］境界線を含む



解説

(1)　直線①が点 $(1,\ -8)$ を通るとき

$$2k\cdot1+(-8)+k^2=0 \quad すなわち \quad k^2+2k-8=0$$

よって　$(k-2)(k+4)=0$　　　ゆえに　$k=2,\ -4$

(2)　①を k について整理すると　$k^2+2xk+y=0$　……②

直線①が点 $(x,\ y)$ を通る条件は，②を満たす実数 k が存在することである。

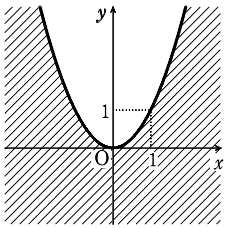
よって，k の２次方程式②の判別式 D について

$$\frac{D}{4}=x^2-y\geqq0$$

ゆえに　$y\leqq x^2$

したがって，直線①が通る範囲は，放物線 $y=x^2$ およびその下側の部分で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



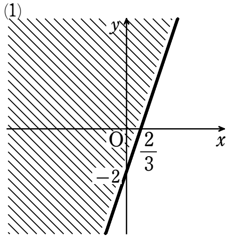
$\boxed{1}$

解答　(1)［図］　境界線を含まない　　(2)［図］　境界線を含む

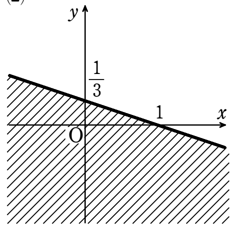
(3)［図］　境界線を含まない　　(4)［図］　境界線を含む

(5)［図］　境界線を含まない　　(6)［図］　境界線を含まない

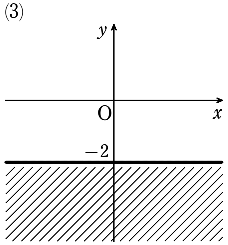
(1)



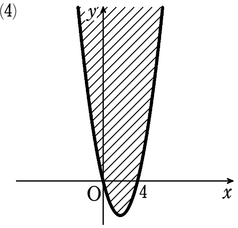
(2)



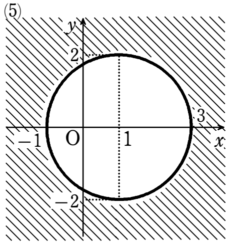
(3)



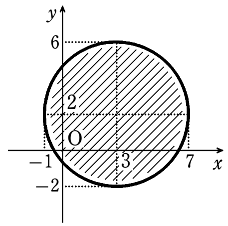
(4)



(5)



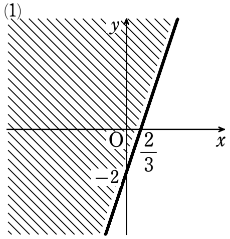
(6)



解説

(1)　図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

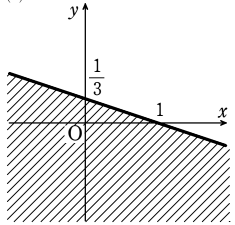
(1)



(2)　$x+3y\leqq1$ から　　$y\leqq-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

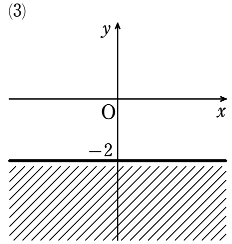
(2)



(3)　$y+2<0$ から　　$y<-2$

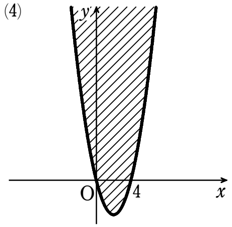
図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

(3)



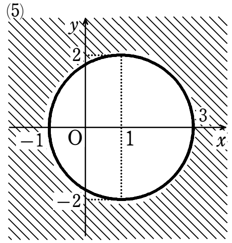
(4)　図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

(4)



(5)　図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

(5)

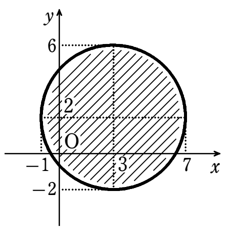


(6)　$x^2+y^2-6x-4y-3<0$ から　　$(x-3)^2+(y-2)^2<16$

よって，求める領域は，円 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$ の内部で，［図］の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。

(6)

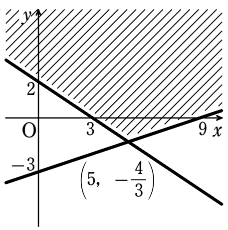


2

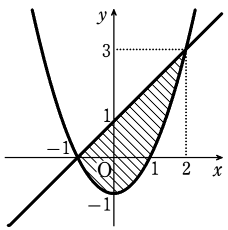
解答　(1)〔図〕境界線を含まない　　(2)〔図〕境界線を含む

(3)〔図〕円 $x^2+y^2=1$ は含まない，他は含む

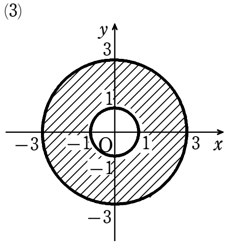
(1)



(2)



(3)



解説

(1)　不等式を変形すると

$$y>\frac{1}{3}x-3,\ \ y>-\frac{2}{3}x+2$$

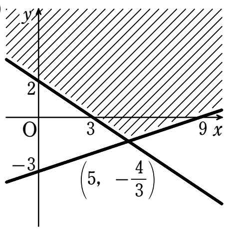
求める領域は，直線 $y=\frac{1}{3}x-3$ の上側と，

直線 $y=-\frac{2}{3}x+2$ の上側の共通部分で，

右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。

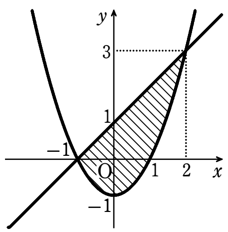
(1)



(2)　求める領域は，直線 $y=x+1$ およびその下側と，放物線 $y=x^2-1$ およびその上側の共通部分で，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。

(2)



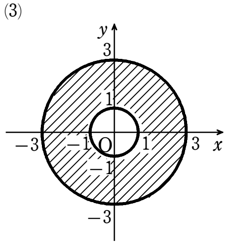
(3)　$1<x^2+y^2\leqq 9$ から

$$x^2+y^2>1\quad かつ\quad x^2+y^2\leqq 9$$

よって，求める領域は，円 $x^2+y^2=1$ の外部と円 $x^2+y^2=9$ およびその内部の共通部分で，〔図〕の斜線部分である。

ただし，境界線は，円 $x^2+y^2=1$ は含まないで，他は含む。

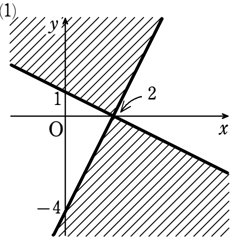
(3)



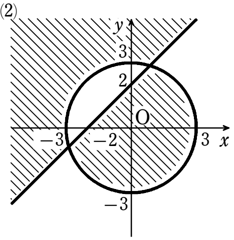
3

解答　(1)〔図〕境界線を含む　　(2)〔図〕境界線を含まない

(1)



(2)



解説

(1)　与えられた不等式は，次のように表される。

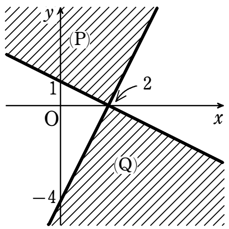
$$\begin{cases} x+2y-2\geqq 0 \\ 2x-y-4\leqq 0 \end{cases}\ \cdots\cdots(\mathrm{P})$$

または

$$\begin{cases} x+2y-2\leqq 0 \\ 2x-y-4\geqq 0 \end{cases}\ \cdots\cdots(\mathrm{Q})$$

求める領域は，(P) の表す領域と (Q) の表す領域の和集合で，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(2)　与えられた不等式は，次のように表される。

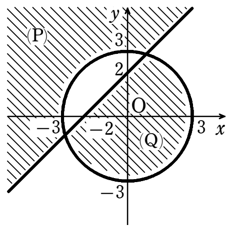
$$\begin{cases} x^2+y^2-9>0 \\ y-x-2>0 \end{cases}\ \cdots\cdots(\mathrm{P})$$

または

$$\begin{cases} x^2+y^2-9<0 \\ y-x-2<0 \end{cases}\ \cdots\cdots(\mathrm{Q})$$

求める領域は，(P) の表す領域と (Q) の表す領域の和集合で，右の図の斜線部分である。

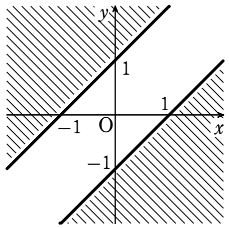
ただし，境界線を含まない。



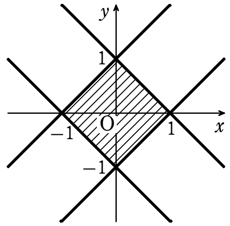
4

解答　(1)〔図〕境界線を含まない　　(2)〔図〕境界線を含む

(1)



(2)



解説

(1)　$|x-y|>1$ から　　$x-y<-1$ または $1<x-y$

すなわち　　$y>x+1$ または $y<x-1$

よって，求める領域は〔図〕の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

(2)　$|x|+|y|\leqq 1$　……①

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，① は　　$x+y\leqq 1$　　よって　$y\leqq -x+1$

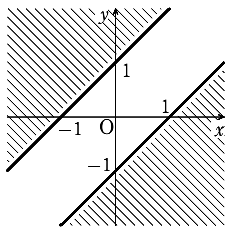
$x\geqq 0$，$y<0$ のとき，① は　　$x-y\leqq 1$　　よって　$y\geqq x-1$

$x<0$，$y\geqq 0$ のとき，① は　　$-x+y\leqq 1$　　よって　$y\leqq x+1$

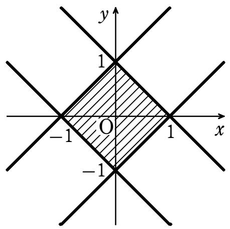
$x<0$，$y<0$ のとき，① は　　$-x-y\leqq 1$　　よって　$y\geqq -x-1$

ゆえに，求める領域は〔図〕の斜線部分。ただし，境界線を含む。

(1)



(2)

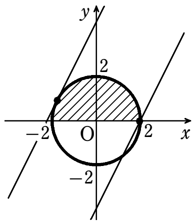


5

解答　$x=2$，$y=0$ のとき最大値 4；$x=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$，$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$

解説

連立不等式 $x^2+y^2\leqq 4$，$y\geqq 0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域は右図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$2x-y=k$ ……①

とおくと，①は傾きが 2，y 切片が $-k$ の直線を表す。
図から，直線①が点 (2，0) を通るとき $-k$ の値は最小となる。すなわち，k の値は最大となる。

このとき　$k=2\cdot 2-0=4$

また，領域上で直線①が円 $x^2+y^2=4$ に接するとき $-k$ の値は最大となる。すなわち，k の値は最小となる。

①から　$y=2x-k$ ……②

これを $x^2+y^2=4$ に代入して

$x^2+(2x-k)^2=4$　よって　$5x^2-4kx+k^2-4=0$ ……③

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-4)=-k^2+20$$

直線①が円に接するとき，$D=0$ であるから

$-k^2+20=0$　よって　$k=\pm 2\sqrt{5}$

接点が領域上にあるとき，接線②の y 切片は正であるから　$k=-2\sqrt{5}$

このとき，③から　$x=\dfrac{2k}{5}=-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

②から　$y=2\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)-k=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

よって，$2x-y$ は

$x=2$，$y=0$ のとき最大値 4，

$x=-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，$y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$

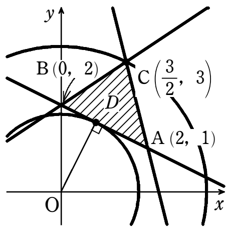
をとる。

6

解答　$x=\dfrac{3}{2}$，$y=3$ のとき最大値 $\dfrac{45}{4}$；$x=\dfrac{4}{5}$，$y=\dfrac{8}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{16}{5}$

解説

与えられた連立不等式の表す領域 D は，3 点 A (2，1)，B (0，2)，C$\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$ を頂点とする三角形の周および内部である。



$x^2+y^2=k$ $(k>0)$ ……① とおくと，①は原点を中心とし，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。この円①が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から，円①が C$\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$ を通るとき，k は最大で

$$k=\mathrm{OC}^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2=\frac{45}{4}$$

また，図から円①が直線 AB：$x+2y-4=0$ ……② に接するとき，k が最小になる。
接点の座標は，原点を通り直線②に垂直な直線 $2x-y=0$ と，直線②の交点であるから

$$(x,\ y)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$

円①がこの点を通るとき，k は最小で

$$k=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$$

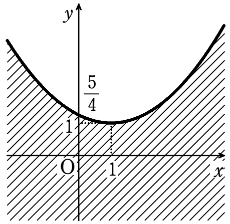
よって，x^2+y^2 は　$x=\dfrac{3}{2}$，$y=3$ のとき最大値 $\dfrac{45}{4}$ をとり，

$x=\dfrac{4}{5}$，$y=\dfrac{8}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{16}{5}$ をとる。

7

解答　(1)　$k=0,\ 1$

(2)　$y\leqq\dfrac{1}{4}(x-1)^2+1$；[図]　境界線を含む。



解説

(1)　$x=2$，$y=1$ を L の式に代入して

$1=k\cdot 2+1-k-k^2$

すなわち　$k^2-k=0$　　よって　$k(k-1)=0$

ゆえに　$k=0,\ 1$

(2)　L の式を k について整理すると

$k^2-(x-1)k+y-1=0$ ……①

直線 L が点 $(x,\ y)$ を通るとき，①を満たす実数 k が存在する。

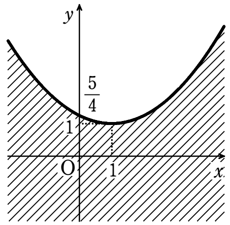
よって，k の 2 次方程式①の判別式を D とすると

$D=\{-(x-1)\}^2-4(y-1)\geqq 0$

すなわち　$y-1\leqq\dfrac{1}{4}(x-1)^2$

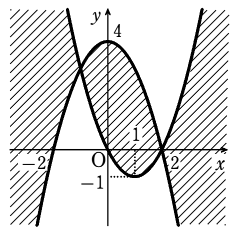
ゆえに　$y\leqq\dfrac{1}{4}(x-1)^2+1$

よって，直線 L が通る範囲は，右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



1

解答　[図]，境界線を含む



解説

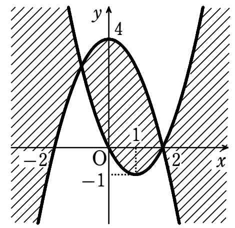
与えられた不等式は

$\begin{cases}x^2-2x-y\geqq 0\\ x^2+y-4\geqq 0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x^2-2x-y\leqq 0\\ x^2+y-4\leqq 0\end{cases}$

すなわち

$\begin{cases}y\leqq x^2-2x\\ y\geqq -x^2+4\end{cases}$　または　$\begin{cases}y\geqq x^2-2x\\ y\leqq -x^2+4\end{cases}$

よって，求める領域は右の図の斜線部分。
ただし，境界線を含む。



2

解答　(1)　$x^2+y^2>4$，$(x-2)^2+y^2<1$，$y>0$　　(2)　$(x^2-y-1)(x^2+y-1)<0$

解説

(1)　円 $x^2+y^2=2^2$ の外部を領域 A，
円 $(x-2)^2+y^2=1^2$ の内部を領域 B，
x 軸の上側を領域 C
とすると，与えられた図の斜線部分は $A\cap B\cap C$ であるから，求める不等式は

$$\begin{cases}x^2+y^2>4\\ (x-2)^2+y^2<1\\ y>0\end{cases}$$

(2)　放物線 $y=x^2-1$ の上側を領域 A，下側を領域 B，
放物線 $y=-x^2+1$ の上側を領域 C，下側を領域 D
とすると，与えられた図の斜線部分は $(A\cap C)\cup(B\cap D)$ であるから，求める不等式は

$\begin{cases}y>x^2-1\\ y>-x^2+1\end{cases}$　または　$\begin{cases}y<x^2-1\\ y<-x^2+1\end{cases}$

すなわち

$\begin{cases}x^2-y-1<0\\ x^2+y-1>0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x^2-y-1>0\\ x^2+y-1<0\end{cases}$

よって　$(x^2-y-1)(x^2+y-1)<0$

3

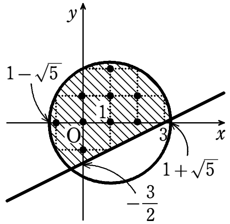
解答　$(-1,\ 0)$，$(0,\ -1)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$

解説

$x^2+y^2-2x-4<0$ から　$(x-1)^2+y^2<5$ ……①

$x-2y-3<0$ から　$y>\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ ……②

よって，与えられた不等式の表す領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。



図から　$1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}$

これを満たす整数 x は　$x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$x=-1$ のとき，①，②から　$y^2<1,\ y>-2$

これを満たす整数 y は　$y=0$

$x=0$ のとき，①，②から　$y^2<4,\ y>-\frac{3}{2}$

これを満たす整数 y は　$y=-1,\ 0,\ 1$

$x=1$ のとき，①，②から　$y^2<5,\ y>-1$

これを満たす整数 y は　$y=0,\ 1,\ 2$

$x=2$ のとき，①，②から　$y^2<4,\ y>-\frac{1}{2}$

これを満たす整数 y は　$y=0,\ 1$

$x=3$ のとき，①，②から　$y^2<1,\ y>0$

これを満たす整数 y は存在しない。

よって，求める整数 $(x,\ y)$ の組は

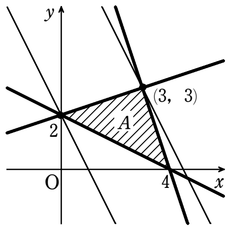
$(-1,\ 0),\ (0,\ -1),\ (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1)$

4

解答　$x=3,\ y=3$ のとき最大値 9；$x=0,\ y=2$ のとき最小値 2

解説

与えられた連立不等式の表す領域を A とする。



領域 A は 3 点 $(4,\ 0),\ (3,\ 3),\ (0,\ 2)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$$2x+y=k \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，これは傾きが -2，y 切片が k である直線を表す。

領域 A においては，直線①が

点 $(3,\ 3)$ を通るとき k は最大で，そのとき　$k=9$

点 $(0,\ 2)$ を通るとき k は最小で，そのとき　$k=2$

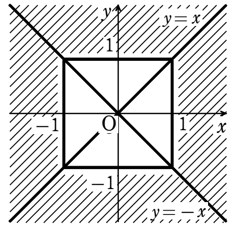
よって　$x=3,\ y=3$ のとき最大値 9；$x=0,\ y=2$ のとき最小値 2

1

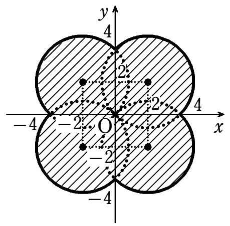
解答　(1)　［図］境界線を含まない

(2)　［図］境界線を含む

(1)



(2)



解説

(1)　$y\leqq x$　かつ　$y\geqq -x$ のとき

$|x-y|+|x+y|=(x-y)+(x+y)=2x$

よって　$2x>2$　　ゆえに　$x>1$

$y\leqq x$　かつ　$y<-x$ のとき

$|x-y|+|x+y|=(x-y)-(x+y)=-2y$

よって　$-2y>2$　　ゆえに　$y<-1$

$y>x$　かつ　$y\geqq -x$ のとき

$|x-y|+|x+y|=-(x-y)+(x+y)=2y$

よって　$2y>2$　　ゆえに　$y>1$

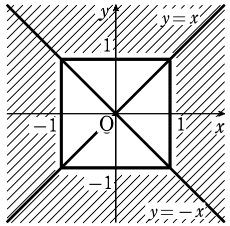
$y>x$　かつ　$y<-x$ のとき

$|x-y|+|x+y|=-(x-y)-(x+y)=-2x$

よって　$-2x>2$　　ゆえに　$x<-1$

したがって，求める領域は，図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



(2)　$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき

$x^2+y^2\leqq 4x+4y$

よって　$(x-2)^2+(y-2)^2\leqq 8$

$x\geqq 0,\ y<0$ のとき

$x^2+y^2\leqq 4x-4y$

よって　$(x-2)^2+(y+2)^2\leqq 8$

$x<0,\ y\geqq 0$ のとき

$x^2+y^2\leqq -4x+4y$

よって　$(x+2)^2+(y-2)^2\leqq 8$

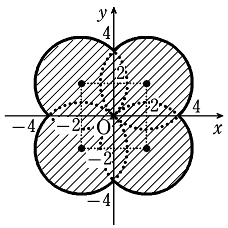
$x<0,\ y<0$ のとき

$x^2+y^2\leqq -4x-4y$

よって　$(x+2)^2+(y+2)^2\leqq 8$

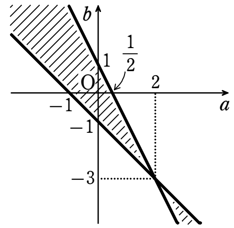
したがって，求める領域は，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



2

解答　［図］境界線を含まない



解説

条件を満たすのは，2 点 P，Q のうち，一方が直線 $y=ax+b$ の上側，他方が下側にあるときである。

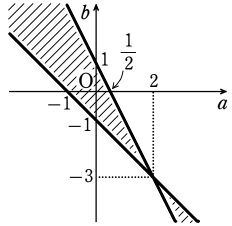
よって　$(-1>a\cdot 1+b$ かつ $1<a\cdot 2+b)$

または　$(-1<a\cdot 1+b$ かつ $1>a\cdot 2+b)$

ゆえに　$\begin{cases} a+b+1<0 \\ 2a+b-1>0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} a+b+1>0 \\ 2a+b-1<0 \end{cases}$

すなわち　$\begin{cases} b<-a-1 \\ b>-2a+1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} b>-a-1 \\ b<-2a+1 \end{cases}$

したがって，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は［図］の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。



参考　$f(x,\ y)=ax-y+b$ とおく。

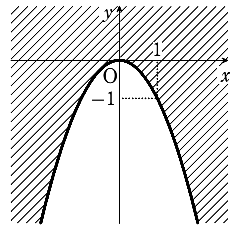
直線 $y=ax+b$ すなわち $f(x,\ y)=0$ により座標平面は 2 つの領域 $f(x,\ y)>0$，$f(x,\ y)<0$ に分けられる。

P，Q がそれぞれ別の領域に属すればよいから

$\begin{cases} f(1,\ -1)<0 \\ f(2,\ 1)>0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} f(1,\ -1)>0 \\ f(2,\ 1)<0 \end{cases}$

3

解答　(1)　$y=-x^2$　　(2)　［図］境界線を含む



解説

(1)　P$(p,\ q)$ とする。

直線 ℓ_t が点 P を通るとき　$q=2tp+t^2$

すなわち　$t^2+2pt-q=0$　……①

点 P を通る直線 ℓ_t がただ 1 つであるための条件は，①を満たす実数 t がただ 1 つ存在することである。

よって，t の 2 次方程式①の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=p^2+q=0$　　ゆえに　$q=-p^2$

したがって，点Ｐの軌跡の方程式は　$y=-x^2$

(2)　$y=2tx+t^2$ から　$t^2+2xt-y=0$　……②

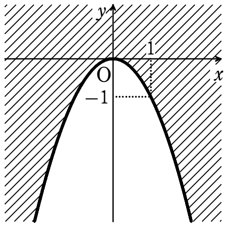
直線 ℓ_t が点 $(x,\ y)$ を通る条件は，② を満たす実数 t が存在することである。

よって，t の２次方程式②の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=x^2+y\geqq 0$$

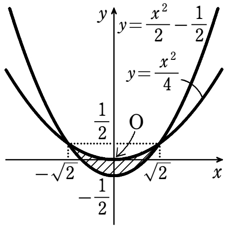
ゆえに　$y\geqq -x^2$

したがって，直線 ℓ_t が通る範囲は図の斜線部分。ただし，境界線を含む。



$\boxed{4}$［東京工業大］

解答　［図］，境界線を含む



解説

$x+y=X$，$xy=Y$ とおく。

$x^2+y^2\leqq 1$ から　$(x+y)^2-2xy\leqq 1$ すなわち $X^2-2Y\leqq 1$

したがって　$Y\geqq \frac{X^2}{2}-\frac{1}{2}$　……①

また，x，y は２次方程式 $t^2-(x+y)t+xy=0$　すなわち $t^2-Xt+Y=0$ の２つの実数解であるから，判別式 D について

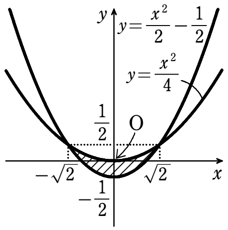
$D=X^2-4Y\geqq 0$ より　$Y\leqq \frac{X^2}{4}$　……②

①，② から　$\frac{X^2}{2}-\frac{1}{2}\leqq Y\leqq \frac{X^2}{4}$

変数を x，y におき換えて

$$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\leqq y\leqq \frac{x^2}{4}$$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分。ただし，境界線を含む。



1

解答　P$(-17,\ 1)$，Q$(-5,\ -12)$，R$(22,\ 11)$，重心$(0,\ 0)$

解説

点Pは辺ABを$2:3$に外分するから，その座標は

$$\left(\frac{-3\cdot(-5)+2\cdot1}{2-3},\ \frac{-3\cdot(-1)+2\cdot(-2)}{2-3}\right)\quad すなわち\quad (-17,\ 1)$$

点Qは辺BCを$2:3$に外分するから，その座標は

$$\left(\frac{-3\cdot1+2\cdot4}{2-3},\ \frac{-3\cdot(-2)+2\cdot3}{2-3}\right)\quad すなわち\quad (-5,\ -12)$$

点Rは辺CAを$2:3$に外分するから，その座標は

$$\left(\frac{-3\cdot4+2\cdot(-5)}{2-3},\ \frac{-3\cdot3+2\cdot(-1)}{2-3}\right)\quad すなわち\quad (22,\ 11)$$

よって，△PQRの重心の座標は

$$\left(\frac{-17+(-5)+22}{3},\ \frac{1+(-12)+11}{3}\right)\quad すなわち\quad (0,\ 0)$$

2

解答　A$(1,\ 8)$，B$(-1,\ -2)$，C$(3,\ 4)$

解説

A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$とすると，x座標について

$$\frac{x_2+x_3}{2}=1,\quad \frac{x_3+x_1}{2}=2,\quad \frac{x_1+x_2}{2}=0$$

よって　$x_2+x_3=2,\ x_3+x_1=4,\ x_1+x_2=0$　……①

辺々加えると　$2(x_1+x_2+x_3)=6$　ゆえに　$x_1+x_2+x_3=3$

これと①から　$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=3$

また，y座標について　$\frac{y_2+y_3}{2}=1,\ \frac{y_3+y_1}{2}=6,\ \frac{y_1+y_2}{2}=3$

よって　$y_2+y_3=2,\ y_3+y_1=12,\ y_1+y_2=6$　……②

辺々加えると　$2(y_1+y_2+y_3)=20$　ゆえに　$y_1+y_2+y_3=10$

これと②から　$y_1=8,\ y_2=-2,\ y_3=4$

したがって　A$(1,\ 8)$，B$(-1,\ -2)$，C$(3,\ 4)$

3

解答　(1)　平行な直線の方程式は $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$，垂直な直線の方程式は $y=2x-4$

(2)　$y=2x-\frac{5}{2}$

解説

(1)　2点$(-3,\ 4)$，$(7,\ -1)$を通る直線をℓとする。

直線ℓの傾きは　$\frac{-1-4}{7-(-3)}=-\frac{1}{2}$

点$(1,\ -2)$を通り，直線ℓに平行な直線の方程式は

$$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1)\quad すなわち\quad y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

直線ℓに垂直な直線の傾きをmとすると

$$-\frac{1}{2}m=-1\qquad これを解いて\qquad m=2$$

したがって，点$(1,\ -2)$を通り，直線ℓに垂直な直線の方程式は

$$y-(-2)=2(x-1)\quad すなわち\quad y=2x-4$$

別解　2点$(-3,\ 4)$，$(7,\ -1)$を通る直線の方程式は

$$y-4=\frac{-1-4}{7-(-3)}\{x-(-3)\}\quad すなわち\quad x+2y-5=0$$

点$(1,\ -2)$を通り，直線$x+2y-5=0$に平行，垂直な直線の方程式は，それぞれ

$$1\cdot(x-1)+2\{y-(-2)\}=0,\quad 2(x-1)-1\cdot\{y-(-2)\}=0$$

すなわち　$x+2y+3=0,\ 2x-y-4=0$

(2)　線分ABの中点Mの座標は　M$\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$

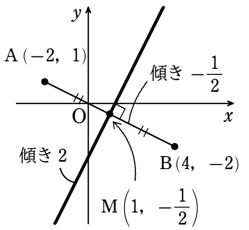
線分ABの傾きは　$\frac{-2-1}{4-(-2)}=-\frac{1}{2}$

線分ABの垂直二等分線の傾きをmとすると

$$-\frac{1}{2}m=-1\qquad これを解いて\qquad m=2$$

よって，求める直線の方程式は，点Mを通るから

$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=2(x-1)\quad すなわち\quad y=2x-\frac{5}{2}$$



4

解答　(1)　C$(3,\ 0)$　(2)　P$(4,\ 3)$

解説

(1)　Cの座標を$(p,\ q)$とする。

対称の条件から

[1]　線分ACの中点がℓ上にある

[2]　AC⊥ℓ

よって　$\frac{q+4}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}+1,\quad \frac{q-4}{p-1}\cdot\frac{1}{2}=-1$

ゆえに　$p-2q=3,\ 2p+q=6$

これを解いて　$p=3,\ q=0$

よって　C$(3,\ 0)$

(2)　AP＝CPから　AP＋PB＝CP＋PB≧BC

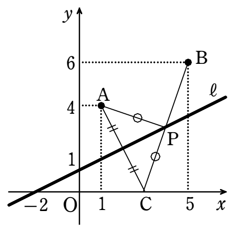
よって，AP＋PBは，Pが直線BCと直線ℓとの交点のとき最小となる。

直線BCの方程式は　$y-0=\frac{6-0}{5-3}(x-3)$

すなわち　$y=3x-9$　……①

①とℓ：$y=\frac{1}{2}x+1$から　$x=4,\ y=3$

よって，AP＋PBを最小にするものは　P$(4,\ 3)$



5

解答　(1)　$\left(26,\ \frac{20}{3}\right)$　(2)　$\left(\frac{63}{2},\ -8\right)$　(3)　$(18,\ 9)$　(4)　$(15,\ 36)$

解説

(1)　$\left(\frac{0+63+15}{3},\ \frac{0+0+20}{3}\right)$　すなわち　$\left(26,\ \frac{20}{3}\right)$

(2)　線分OAの垂直二等分線$x=\frac{63}{2}$と線分OBの垂直二等分線$y=-\frac{3}{4}x+\frac{125}{8}$との交点であるから　$\left(\frac{63}{2},\ -8\right)$

(3)　内心の座標を$(a,\ b)$とすると，この点は，3直線

OA：$y=0$，　OB：$4x-3y=0$，　AB：$5x+12y-315=0$

から等距離にある。

ゆえに　$|b|=\frac{|4a-3b|}{5}=\frac{|5a+12b-315|}{13}$

内心は△OABの内部にあるから　$b>0,\ 4a-3b>0,\ 5a+12b-315<0$

よって　$b=\frac{4a-3b}{5}=-\frac{5a+12b-315}{13}$

したがって　$(a,\ b)=(18,\ 9)$

別解　BO＝25，AB＝52

また，内心をI，BIの延長がOAと交わる点をDとすると　OD：DA＝BO：AB＝25：52

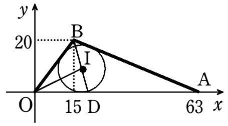
よって　D$\left(\frac{52\cdot0+25\cdot63}{25+52},\ \frac{52\cdot0+25\cdot0}{25+52}\right)$

すなわち　D$\left(\frac{225}{11},\ 0\right)$

また　DI：IB＝OD：OB＝$\frac{225}{11}$：25＝9：11

ゆえに　I$\left(\frac{11\cdot\frac{225}{11}+9\cdot15}{9+11},\ \frac{11\cdot0+9\cdot20}{9+11}\right)$

すなわち　I$(18,\ 9)$



(4)　OからABに下ろした垂線の方程式は，ABの傾きが$-\frac{5}{12}$であるから　$y=\frac{12}{5}x$

これと，直線$x=15$との交点が垂心であるから，その座標は　$(15,\ 36)$

6

解答　(1)　$y=-\frac{7}{4}x+\frac{15}{2}$　(2)　$y=-8x+10$

解説

(1)　点B$(-2,\ 11)$を通り，△OABの面積を2等分する直線は，線分OAの中点$(2,\ 4)$を通る。

よって，その方程式は

$$y-4=\frac{11-4}{-2-2}(x-2)\quad すなわち\quad y=-\frac{7}{4}x+\frac{15}{2}$$

(2)　点P$(1,\ 2)$は，線分OAを$1:3$に内分する点である。

よって　AP$=\frac{3}{4}$OA　……①

求める直線と線分ABとの交点をQ，∠OAB$=\theta$とすると，条件より△OAB：△PAQ＝2：1であるから

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AB}\sin\theta=2\times\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\sin\theta\quad ……②$$

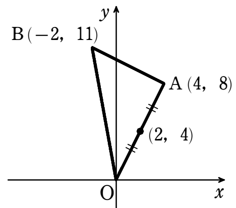
①，②から　$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{OA}}{2\mathrm{AP}}=\frac{2}{3}$

したがって，点Qは線分ABを$2:1$に内分する。その座標は

$$\left(\frac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{2+1},\ \frac{1\cdot8+2\cdot11}{2+1}\right)\quad すなわち\quad (0,\ 10)$$

よって，求める直線の方程式は

$$y-10=\frac{2-10}{1-0}(x-0)\quad すなわち\quad y=-8x+10$$



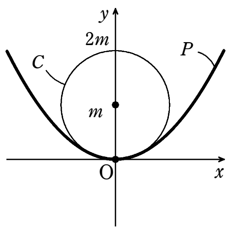
7

解答　$0<m\leqq2a$

解説

$a>0$ であるから，P は下に凸の放物線である。また，$m>0$ であるから，円 C の中心の y 座標は正である。
よって，円 C と放物線 P が1点のみを共有するときの共有点は，点 $(0,\ 0)$ である。
したがって，円 C の方程式は，次のように表される。

$$x^2+(y-m)^2=m^2 \quad \cdots\cdots①$$



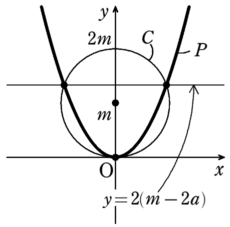
円 C と放物線 P の共有点の y 座標は，① と $y=\dfrac{1}{4a}x^2$
すなわち $x^2=4ay$ から x^2 を消去して

$$4ay+(y-m)^2=m^2$$

ゆえに　$y^2-2(m-2a)y=0$
よって　$y\{y-2(m-2a)\}=0$
ゆえに　$y=0,\ 2(m-2a)$
円 C と放物線 P が1点のみを共有するのは，

$$2(m-2a)\leqq 0 \quad または \quad 2(m-2a)\geqq 2m$$

のときである。
$2(m-2a)\leqq 0$ から　$m\leqq 2a$
$2(m-2a)\geqq 2m$ から　$a\leqq 0$　これは $a>0$ に反する。
したがって　$0<m\leqq 2a$

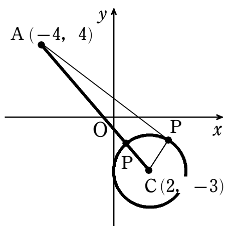


8

解答　(1) $\sqrt{85}-2$　(2) $\dfrac{1}{4}$

解説

(1) 円の中心を C とする。
点 A は円の外側にあるから　AP+CP≧AC
等号が成り立つのは，線分 AC 上に点 P があるときである。
CP=2 (円の半径)，
AC$=\sqrt{(2+4)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{85}$
であるから
AP≧AC−CP$=\sqrt{85}-2$
よって，求める最短距離は　$\sqrt{85}-2$

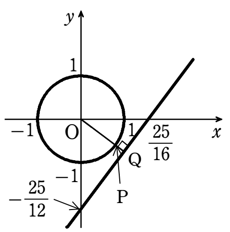


(2) 円の中心を O とする。
与えられた円と直線は共有点をもたないから，点 Q は円の外側にあり　OP+PQ≧OQ
OP=1 であるから　PQ≧OQ−1
よって，線分 PQ の長さが最小となるのは，線分 OQ の長さが最小となるときである。
点 O と直線 $16x-12y=25$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|-25|}{\sqrt{16^2+(-12)^2}}=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$$

よって，求める距離 PQ の最小値は

$$d-1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$



9

解答　弦の長さ $\sqrt{14}$，弦の中点の座標 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

解説

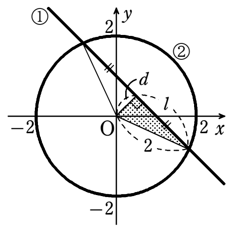
円 ② の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ① の距離を d とすると

$$d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

円 ② の半径は 2 であるから，弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2=2^2-d^2=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$l>0$ であるから　$l=\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$
よって，弦の長さは　$2l=\sqrt{14}$



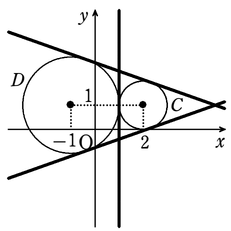
また，弦の中点は，円 ② の中心 $(0,\ 0)$ から直線 ① に下ろした垂線と，直線 ① との交点である。
この垂線の方程式は　$y=x$ ……③　　①，③ を解くと　$x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$
よって，弦の中点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

10

解答　(1) $(x+1)^2+(y-1)^2=4$
(2) $x=1,\ x+2\sqrt{2}\,y-5-2\sqrt{2}=0,\ x-2\sqrt{2}\,y-5+2\sqrt{2}=0$

解説

(1) 円 C の方程式を変形すると　$(x-2)^2+(y-1)^2=1$
よって，円 C の中心は $(2,\ 1)$，半径は 1
2 円 C，D の中心間の距離 d は
$d=|2-(-1)|=3$
円 D の半径を r とすると，円 C と円 D が外接するための条件は　$d=1+r$
よって　$r=d-1=3-1=2$
したがって，円 D の方程式は　$(x+1)^2+(y-1)^2=4$



(2) 円 C 上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると　$(x_1-2)^2+(y_1-1)^2=1$ ……①
接線の方程式は　$(x_1-2)(x-2)+(y_1-1)(y-1)=1$ ……②
ゆえに　$(x_1-2)x+(y_1-1)y-2x_1-y_1+4=0$ ……②′
直線 ② が円 D に接するための条件は，円 D の中心 $(-1,\ 1)$ と直線 ②′ の距離が，円 D の半径 2 に等しいことである。
よって　$\dfrac{|-(x_1-2)+(y_1-1)-2x_1-y_1+4|}{\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-1)^2}}=2$
① を代入して整理すると　$|-3x_1+5|=2$
すなわち　$-3x_1+5=2$　または　$-3x_1+5=-2$
これを解くと　$x_1=1$　または　$x_1=\dfrac{7}{3}$
$x_1=1$ のとき，① から　$(y_1-1)^2=0$　　したがって　$y_1=1$
$x_1=1,\ y_1=1$ を ② に代入して　$x=1$
$x_1=\dfrac{7}{3}$ のとき，① から　$\dfrac{1}{9}+(y_1-1)^2=1$
ゆえに　$(y_1-1)^2=\dfrac{8}{9}$　　よって　$y_1-1=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
$x_1=\dfrac{7}{3},\ y_1-1=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ を ② に代入して

$$\frac{1}{3}(x-2)\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}(y-1)=1$$

すなわち　$x-2\pm2\sqrt{2}(y-1)=3$ (複号同順)
以上から，求める共通接線の方程式は

$$x=1,\ x+2\sqrt{2}\,y-5-2\sqrt{2}=0,\ x-2\sqrt{2}\,y-5+2\sqrt{2}=0$$

11

解答　(1) $x^2+y^2-15x-5y+50=0$
(2) $(2,\ 4)$，$(-3,\ -1)$

解説

(1) $k(3x+y-20)+x^2+y^2-50=0$ (k は定数) ……①
とすると，① は，与えられた円と直線の交点を通る図形を表す。① が点 $(10,\ 0)$ を通るとして，① に $x=10$，$y=0$ を代入すると
$10k+50=0$　　ゆえに　$k=-5$
① に代入して　$-5(3x+y-20)+x^2+y^2-50=0$
整理すると　$x^2+y^2-15x-5y+50=0$
これは円を表すから，求める方程式である。
(2) 円の方程式を k について整理すると
$(x-y+2)k+x^2+y^2-2x-16=0$
この等式が k の恒等式となるための条件は
$x-y+2=0$ ……①，$x^2+y^2-2x-16=0$ ……②
①，② から y を消去して　$x^2+x-6=0$
よって　$(x-2)(x+3)=0$　　ゆえに　$x=2,\ -3$
① から　$x=2$ のとき　$y=4$，
$x=-3$ のとき　$y=-1$
よって，求める 2 点の座標は　$(2,\ 4)$，$(-3,\ -1)$

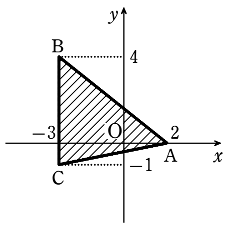
12

解答　$\begin{cases} 4x+5y-8\leqq 0 \\ x+3\geqq 0 \\ x-5y-2\leqq 0 \end{cases}$

解説

直線 AB の方程式は　$y=\dfrac{4-0}{-3-2}(x-2)$　　すなわち　$y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{8}{5}$
直線 BC の方程式は　$x=-3$
直線 CA の方程式は　$y=\dfrac{-1-0}{-3-2}(x-2)$　　すなわち　$y=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5}$

A，B，Cを頂点とする三角形の内部および周上は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



この斜線部分は，

直線ABの下側，　直線BCの右側，

直線CAの上側，

の共通部分である。

よって，求める連立不等式は

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{4}{5}x+\dfrac{8}{5} \\ x \geqq -3 \\ y \geqq \dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5} \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 4x+5y-8 \leqq 0 \\ x+3 \geqq 0 \\ x-5y-2 \leqq 0 \end{cases}$$

13

解答　略

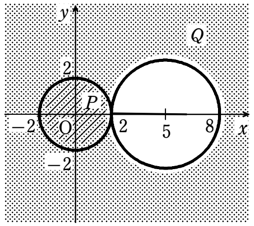
解説

$x^2+y^2<4$　の表す領域を P，

$x^2+y^2>10x-16$ の表す領域を Q とする。

$x^2+y^2>10x-16$ から　$(x-5)^2+y^2>9$

P は円 $x^2+y^2=4$ の内部であり，Q は円 $(x-5)^2+y^2=9$ の外部である。



よって，P，Q は右の図のようになり，

$P \subset Q$

が成り立つ。

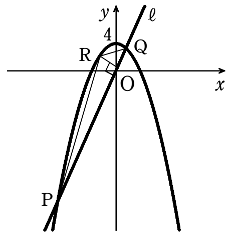
したがって，$x^2+y^2<4$ ならば $x^2+y^2>10x-16$ である。

1

解答　P，Qの座標は　$(-2-2\sqrt{2},\ -8-8\sqrt{2})$，$(-2+2\sqrt{2},\ -8+8\sqrt{2})$

Rの座標は　$(-2,\ 0)$

解説



$y=-x^2+4$，$y=4x$ から y を消去して

$-x^2+4=4x$　すなわち　$x^2+4x-4=0$

これを解くと　$x=-2\pm2\sqrt{2}$

$x=-2-2\sqrt{2}$ のとき　$y=-8-8\sqrt{2}$

$x=-2+2\sqrt{2}$ のとき　$y=-8+8\sqrt{2}$

したがって，2点P，Qの座標は

$(-2-2\sqrt{2},\ -8-8\sqrt{2})$，$(-2+2\sqrt{2},\ -8+8\sqrt{2})$

△PQRの面積が最大になるのは，点Rから直線PQまでの距離 d が最大になるときである。

直線PQの方程式は　$y=4x$　すなわち　$4x-y=0$

R$(t,\ -t^2+4)$ $(-2-2\sqrt{2}<t<-2+2\sqrt{2})$ とすると

$$d=\frac{|4t-(-t^2+4)|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|t^2+4t-4|}{\sqrt{17}}=\frac{|(t+2)^2-8|}{\sqrt{17}}$$

よって，d は $t=-2$ のとき最大になる。

このときの点Rの座標は　$(-2,\ 0)$

2

解答　(1)　略　(2)　略

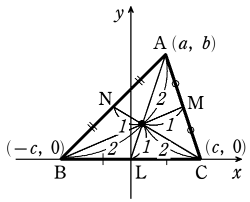
解説

(1)　3つの中線をAL，BM，CNとする。

また，Lを原点に，直線BCを x 軸にとると，各頂点の座標は

A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$

と表すことができる。このとき



L$(0,\ 0)$，M$\left(\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$，N$\left(\dfrac{a-c}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$

よって，中線AL，BM，CNを2：1に内分する点の座標はそれぞれ

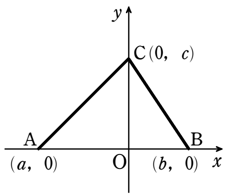
$\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{b}{3}\right)$，$\left(\dfrac{-c+(a+c)}{2+1},\ \dfrac{0+b}{2+1}\right)$，

$\left(\dfrac{c+(a-c)}{2+1},\ \dfrac{0+b}{2+1}\right)$　となり，一致する。

すなわち，△ABCの3つの中線は1点で交わる。

(2)　直線ABを x 軸にとり，Cを y 軸上にとると，各頂点の座標は，A$(a,\ 0)$，B$(b,\ 0)$，C$(0,\ c)$ と表すことができる。

ただし，a，b は同時に0になることはなく，$c\neq0$ とする。



このとき　$(2+\mathrm{AC}^2)(2+\mathrm{BC}^2)-2\mathrm{AB}^2$

$=(2+a^2+c^2)(2+b^2+c^2)-2(a-b)^2$

$=c^4+(a^2+b^2+4)c^2+(a^2+2)(b^2+2)-2(a-b)^2$

$=c^4+(a^2+b^2+4)c^2+a^2b^2+2a^2+2b^2+4-2(a^2-2ab+b^2)$

$=c^4+(a^2+b^2+4)c^2+a^2b^2+4ab+4$

$=c^4+(a^2+b^2+4)c^2+(ab+2)^2$

$c^4>0$，$(a^2+b^2+4)c^2>0$，$(ab+2)^2\geqq0$ であるから

$(2+\mathrm{AC}^2)(2+\mathrm{BC}^2)-2\mathrm{AB}^2>0$

すなわち　$2\mathrm{AB}^2<(2+\mathrm{AC}^2)(2+\mathrm{BC}^2)$

3

解答　(1)　順に $p\neq\dfrac{9}{2}$，$p=\dfrac{9}{2}$ かつ $q\neq-\dfrac{3}{2}$，$p=\dfrac{9}{2}$ かつ $q=-\dfrac{3}{2}$

(2)　(ア)　$a\neq1$　(イ)　$a=1$ かつ $b\neq1$　(ウ)　$a=1$ かつ $b=1$

解説

(1)　連立方程式がただ1組の解をもつ条件は，方程式が表す2直線が平行でないことである。

よって　$2\cdot p-3\cdot3\neq0$

したがって　$p\neq\dfrac{9}{2}$

また，連立方程式が解をもたない条件は，方程式が表す2直線が平行であり，かつ一致しないことである。

$p=\dfrac{9}{2}$ のとき，2直線は　$2x+3y=-1$，$2x+3y=\dfrac{2q}{3}$

よって　$-1\neq\dfrac{2q}{3}$　すなわち　$q\neq-\dfrac{3}{2}$

したがって，求める条件は　$p=\dfrac{9}{2}$　かつ　$q\neq-\dfrac{3}{2}$

更に，連立方程式が無数の解をもつ条件は，方程式が表す2直線が一致することである。

ゆえに，$p=\dfrac{9}{2}$ のとき　$-1=\dfrac{2q}{3}$　すなわち　$q=-\dfrac{3}{2}$

したがって，求める条件は　$p=\dfrac{9}{2}$　かつ　$q=-\dfrac{3}{2}$

(2)　2直線がただ1つの共有点をもつための必要十分条件は，2直線が平行でないことである。

したがって　$a(a-2)-1\cdot(-1)\neq0$

よって　$a^2-2a+1\neq0$　すなわち　$(a-1)^2\neq0$

したがって　ア $a\neq1$

また，2直線が共有点をもたないための必要十分条件は，2直線が平行であり，かつ一致しないことである。

$a=1$ のとき，2直線は　$x-y=2b$，$x-y=b+1$

よって　$2b\neq b+1$　すなわち　$b\neq1$

したがって　イ $a=1$　かつ　$b\neq1$

更に，2直線が2つ以上の共有点をもつための必要十分条件は，2直線が一致することである。

したがって　ウ $a=1$　かつ　$b=1$

4

解答　略

解説

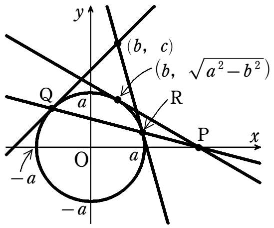
点$\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$における接線の方程式は

$$bx+\sqrt{a^2-b^2}\,y=a^2$$

この式で $y=0$ とすると，$b\neq 0$ であるから

$$x=\frac{a^2}{b}$$

よって　P$\left(\frac{a^2}{b},\ 0\right)$



また，Q$(x_1,\ y_1)$，R$(x_2,\ y_2)$，$x_1\neq x_2$ とすると，
点Q，R における接線の方程式は，それぞれ

$$x_1x+y_1y=a^2,\quad x_2x+y_2y=a^2$$

点$(b,\ c)$を通るから，それぞれ　$bx_1+cy_1=a^2$，$bx_2+cy_2=a^2$
を満たし，これは2点Q，R が直線 $bx+cy=a^2$ 上にあることを示している。

$bx+cy=a^2$ で $y=0$ とすると　$x=\frac{a^2}{b}$

したがって，2点Q，R を通る直線は点Pを通る。

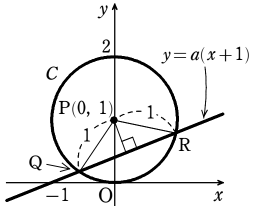
5

解答　(1)　$S(a)=\frac{\sqrt{2a}\,(1-a)}{a^2+1}$　　(2)　$a=2-\sqrt{3}$

解説

(1)　点P(0, 1)と直線 $y=a(x+1)$ すなわち
$-ax+y-a=0$ の距離を d とすると，$0<a<1$ で
あるから

$$d=\frac{|-a\cdot0+1-a|}{\sqrt{(-a)^2+1^2}}=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$



よって　$QR=2\sqrt{1^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{(1-a)^2}{a^2+1}}$

$$=\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}$$

したがって　$S(a)=\frac{1}{2}QR\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{2a}\,(1-a)}{a^2+1}$

(2)　$\angle QPR=\theta$ とすると，$0°<\theta<180°$ であり

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$$

よって，$\theta=90°$ のとき $S(a)$ は最大になる。

このとき，△PQR は直角二等辺三角形になるから　$d=\frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　よって　$\sqrt{2}(1-a)=\sqrt{a^2+1}$

$0<a<1$ より，両辺を2乗しても同値である。

$$2(1-2a+a^2)=a^2+1$$

ゆえに　$a^2-4a+1=0$

$0<a<1$ であるから　$a=2-\sqrt{3}$

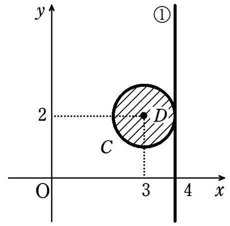
6

解答　(1)　7　　(2)　$14+2\sqrt{13}$　　(3)　$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$　　(4)　64

解説

不等式 $(x-3)^2+(y-2)^2\leqq1$ の表す領域 D は，中心が$(3,\ 2)$で半径が1の円 C およびその内部である。

(1)　$2x-1=k$ とおくと　　$x=\frac{k+1}{2}$　……①



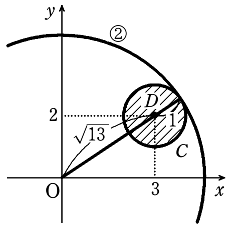
x 軸に垂直な直線①が領域 D と共有点をもつとき，
x 軸との交点の x 座標 $\frac{k+1}{2}$ が最大となるのは，直線①が円 C に図のように接するときである。

このとき，k も最大となるから

$$\frac{k+1}{2}=4\quad すなわち\quad k=7$$

よって，求める最大値は　　7

(2)　$x^2+y^2=R\ (R>0)$ ……②とおく。



原点を中心とする円②が領域 D と共有点をもつとき，円②の半径 $\sqrt{R}$ が最大となるのは，円 C が円②に図のように内接するときである。このとき
(円②の半径)$=$(中心間の距離)$+$(円 C の半径)

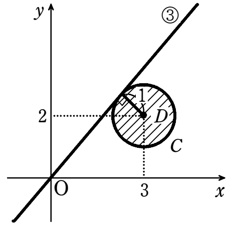
よって　　$\sqrt{R}=\sqrt{3^2+2^2}+1=\sqrt{13}+1$

ゆえに　　$R=(\sqrt{13}+1)^2=14+2\sqrt{13}$

このとき R も最大であるから，求める最大値は

$$14+2\sqrt{13}$$

(3)　$\frac{y}{x}=m$ とおくと　　$y=mx$　……③



原点を通る直線③が領域 D と共有点をもつとき，
傾き m が最大となるのは，直線③が円 C に図のように接するときである。

このとき，円 C の中心$(3,\ 2)$と直線③の距離が円 C の半径1と一致するから

$$\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

すなわち　　　$|3m-2|=\sqrt{m^2+1}$

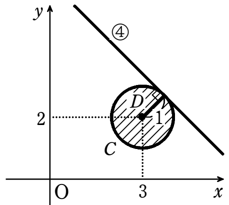
両辺を2乗して　　$(3m-2)^2=m^2+1$

整理して　　　$8m^2-12m+3=0$

これを解いて　　$m=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-8\cdot3}}{8}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$

よって，求める最大値は　　$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

(4)　$10x+10y=n$ とおくと　　$y=-x+\frac{n}{10}$　……④



傾き -1 の直線④が領域 D と共有点をもつとき，
円 C の中心$(3,\ 2)$と直線④の距離は円 C の半径1以下であるから

$$\frac{|10\cdot3+10\cdot2-n|}{\sqrt{10^2+10^2}}\leqq1$$

よって　　$|50-n|\leqq10\sqrt{2}$

ゆえに　　$-10\sqrt{2}\leqq50-n\leqq10\sqrt{2}$

すなわち　$50-10\sqrt{2}\leqq n\leqq50+10\sqrt{2}$

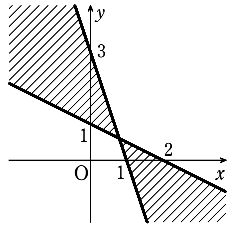
$1.4<\sqrt{2}<1.5$ であるから，これを満たす最大の整数値は

$$n=50+10\cdot1.4=64$$

7

解答　(1)　［図］境界線を含む

(2)　$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{4}{5}$ のとき最小値 $\frac{4}{5}$



解説

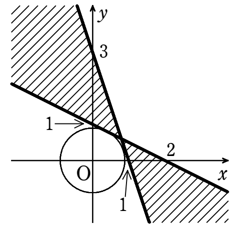
(1)　$3x^2+7xy+2y^2-9x-8y+6$

$=2y^2+(7x-8)y+3(x-1)(x-2)$

$=\{y+3(x-1)\}(2y+x-2)$

ゆえに，不等式は　　$(y+3x-3)(2y+x-2)\leqq0$

よって　$\begin{cases}y\leqq-3x+3\\ y\geqq-\frac{1}{2}x+1\end{cases}$　または　$\begin{cases}y\geqq-3x+3\\ y\leqq-\frac{1}{2}x+1\end{cases}$



したがって，領域 D は右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

注意　図の円は，(2)のためのもので，(1)の答えには関係ない。

(2)　$x^2+y^2=k$ ……①とおくと，$k>0$ のとき，①は，原点を中心とする半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

x^2+y^2 の値の範囲は，円①が領域 D と共有点をもつような k の値の範囲である。
図から，k の値が最小となるのは，円①が直線 $3x+y-3=0$ ……②，
$x+2y-2=0$ ……③のいずれかと接するときである。

原点と直線②の距離は　　$\frac{|-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

原点と直線③の距離は　　$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2>\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$ であるから　　$\frac{3}{\sqrt{10}}>\frac{2}{\sqrt{5}}$

ゆえに，円①と直線③が接するとき，k の値は最小となる。

直線③に垂直で原点を通る直線の方程式は　　$y=2x$　……④

③，④を連立して解くと　　$(x,\ y)=\left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)$

よって　　$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{4}{5}$ のとき最小値 $\frac{4}{5}$

8

解答　$0<c\leqq\frac{3}{2}$

解説

$x^2+y^2-cy<0$ から　　$x^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2<\frac{c^2}{4}$

$P=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ x^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2<\frac{c^2}{4}\right\}$，$Q=\{(x,\ y)\mid(x-1)^2+y^2<4\}$ とする。

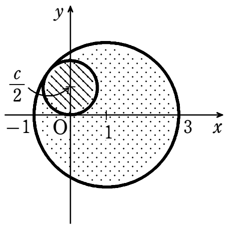
$x^2+y^2-cy<0 \Longrightarrow (x-1)^2+y^2<4$ が成り立つための条件は，$P\subset Q$ である。

$c>0$ であるから，$x^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}$ は円を表す。

求める条件は，円 $x^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}$ が，円 $(x-1)^2+y^2=4$ の内部にあるか，または内接することである。

ゆえに，(中心間の距離)≦(半径の差) により

$$\sqrt{(1-0)^2+\left(0-\frac{c}{2}\right)^2}\leqq\left|2-\frac{c}{2}\right|$$



両辺は負でないから平方して　$1+\frac{c^2}{4}\leqq\left(2-\frac{c}{2}\right)^2$

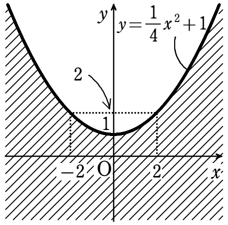
これを解いて　$c\leqq\frac{3}{2}$

$c>0$ であるから　$0<c\leqq\frac{3}{2}$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$2tx-4y-t^2+4=0$

(2)　〔図〕　境界線を含む



解説

(1)　$t=0$ のとき，線分 PQ の垂直二等分線の方程式は　$y=1$

$t\neq0$ のとき，直線 PQ の傾きは　$-\frac{2}{t}$

また，線分 PQ の中点の座標は　$\left(\frac{t}{2},\ 1\right)$

よって，線分 PQ の垂直二等分線の方程式は　$y-1=\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)$

すなわち　$2tx-4y-t^2+4=0$　……①

① に $t=0$ を代入すると，$y=1$ が得られる。

よって，求める線分 PQ の垂直二等分線の方程式は　$2tx-4y-t^2+4=0$

別解　線分 PQ の垂直二等分線上の点を R$(x,\ y)$ とする。

線分 PQ の垂直二等分線は，$\mathrm{PR}^2=\mathrm{QR}^2$ を満たす点 R の軌跡である。

よって，線分 PQ の垂直二等分線の方程式は　$(x-t)^2+y^2=x^2+(y-2)^2$

整理すると　$2tx-4y-t^2+4=0$

(2)　t について整理すると　$t^2-2xt+4y-4=0$　……②

よって，線分 PQ の垂直二等分線が通過する領域は，② を満たす実数 t が存在するような点 $(x,\ y)$ 全体である。

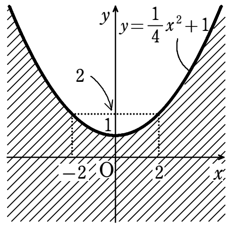
② の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-x)^2-(4y-4)=x^2-4y+4\geqq0$$

から　$y\leqq\frac{1}{4}x^2+1$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



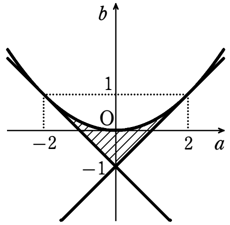
$\boxed{10}$

解答　(1)　〔図〕 境界線を含む

(2)　$a=2,\ b=1$ のとき最大値 4，

$a=0,\ b=-1$ のとき最小値 -2

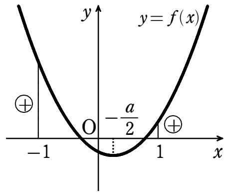
(1)



解説

(1)　$f(x)=x^2+ax+b$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸で，軸は直線 $x=-\frac{a}{2}$ である。

よって，方程式 $f(x)=0$ が実数解をもち，すべての解の絶対値が 1 以下となるための条件は，その判別式を D とすると，次の 4 つが同時に成り立つことである。



$D=a^2-4b\geqq0$　……①

$f(-1)=1-a+b\geqq0$　……②

$f(1)=1+a+b\geqq0$　……③

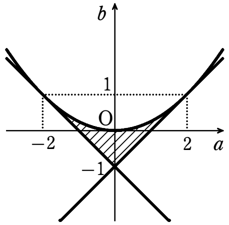
軸について　$-1\leqq-\frac{a}{2}\leqq1$　……④

① から　$b\leqq\frac{a^2}{4}$　　② から　$b\geqq a-1$

③ から　$b\geqq-a-1$　　④ から　$-2\leqq a\leqq2$

これらを同時に満たす点 $(a,\ b)$ 全体を図示すると，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



(2)　$a+2b=k$ とおくと　$b=-\frac{1}{2}a+\frac{k}{2}$　……⑤

これは傾きが $-\frac{1}{2}$，b 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す。

この直線 ⑤ が (1) で求めた領域と共有点をもつような k の最大値と最小値を求めればよい。

図から，直線 ⑤ が点 (2, 1) を通るとき，k は最大で

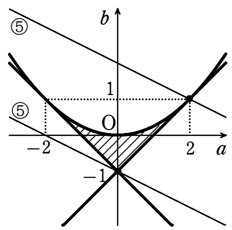
$k=2+2\cdot1=4$

また，点 $(0,\ -1)$ を通るとき，k は最小で

$k=0+2\cdot(-1)=-2$

したがって　$a=2,\ b=1$ のとき最大値 4

$a=0,\ b=-1$ のとき最小値 -2



$\boxed{11}$

解答　(1)　$\mathrm{Q}\left(\frac{11}{5},\ \frac{7}{5}\right)$，$\mathrm{R}\left(-\frac{9}{7},\ -\frac{10}{7}\right)$　　(2)　$\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2$

解説

(1)　$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$　……①，

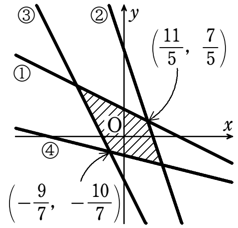
$y=-3x+8$　……②，$y=-2x-4$　……③，

$y=-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$　……④　とする。

領域 D を図示すると，右図の斜線部分になる。

ただし，境界線を含む。

$x+y=k$ とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。



$-3<-1<-\frac{1}{2}$ から，$x=\frac{11}{5}$，$y=\frac{7}{5}$ のとき，k は最大値 $\frac{18}{5}$ をとる。

$-2<-1<-\frac{1}{4}$ から，$x=-\frac{9}{7}$，$y=-\frac{10}{7}$ のとき，k は最小値 $-\frac{19}{7}$ をとる。

よって　$\mathrm{Q}\left(\frac{11}{5},\ \frac{7}{5}\right)$，$\mathrm{R}\left(-\frac{9}{7},\ -\frac{10}{7}\right)$

(2)　$ax+by=k$ とおくと，これは傾きが $-\frac{a}{b}\ (<0)$，y 切片が $\frac{k}{b}$ の直線を表す。

また，$b>0$ であるから，k が最大のとき $\frac{k}{b}$ も最大であり，k が最小のとき $\frac{k}{b}$ も最小である。

点 Q でのみ最大値をとるから，$-3<-\frac{a}{b}<-\frac{1}{2}$ より　$\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<3$　……⑤

点 R でのみ最小値をとるから，$-2<-\frac{a}{b}<-\frac{1}{4}$ より　$\frac{1}{4}<\frac{a}{b}<2$　……⑥

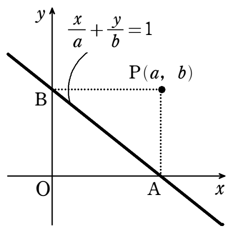
⑤，⑥ から　$\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2$

1

解答 $\frac{\sqrt{2}}{4}k$

解説

直線ABの方程式は $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$



点P(a, b)と直線ABの距離をdとすると

$$d=\frac{\left|\frac{1}{a}\cdot a+\frac{1}{b}\cdot b-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

ここで, $\frac{1}{a^2}>0$, $\frac{1}{b^2}>0$ であるから,

(相加平均)≧(相乗平均) により

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{a^2b^2}}=\frac{2}{ab} \quad \cdots\cdots①$$

また, $a>0$, $b>0$ であるから, (相加平均)≧(相乗平均) により

$$k=a+b\geqq 2\sqrt{ab}$$

よって $k^2\geqq 4ab$　ゆえに $\frac{1}{ab}\geqq\frac{4}{k^2}$ ……②

したがって, ①, ② から $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqq 2\cdot\frac{4}{k^2}=\frac{8}{k^2}$ ……③

① の等号が成立するのは $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}$ すなわち $a=b$ のときであり, ② の等号が成立するのは $a=b=\frac{k}{2}$ のときである。

よって, ③ の等号が成立するのも $a=b=\frac{k}{2}$ のときである。

したがって, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ は $a=b=\frac{k}{2}$ のとき最小値 $\frac{8}{k^2}$ をとる。

このとき, dは最大となり, その最大値は $d=\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{k^2}}}=\frac{k}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}k$

別解 直線ABの方程式は $y-0=-\frac{b}{a}(x-a)$

すなわち $bx+ay-ab=0$

点P(a, b)と直線ABの距離をdとすると

$$d=\frac{|b\cdot a+a\cdot b-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{\sqrt{(a+b)^2-2ab}}=\frac{ab}{\sqrt{k^2-2ab}}$$

kは定数であるから, abが最大となるときdは最大となる。

ここで $ab=a(k-a)=-a^2+ak=-\left(a-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{4}$

$0<a<k$ であるから, ab は $a=b=\frac{k}{2}$ のとき最大値 $\frac{k^2}{4}$ をとる。

このとき, dは最大となり, その最大値は $d=\frac{\frac{k^2}{4}}{\sqrt{k^2-2\cdot\frac{k^2}{4}}}=\frac{k^2}{4\sqrt{\frac{k^2}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}k$

2

解答 (前半) 略　(後半) 略

解説

(前半) 直線BCの傾きは $\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{c-b}=-\frac{1}{bc}$

よって, Aを通り直線BCに垂直な直線ℓ の方程式は $y-\frac{1}{a}=bc(x-a)$

すなわち $y=bcx-abc+\frac{1}{a}$ ……①

同様に, Bを通り直線CAに垂直な直線mの方程式は

$$y=cax-abc+\frac{1}{b} \quad \cdots\cdots②$$

①, ② から yを消去すると $bcx-abc+\frac{1}{a}=cax-abc+\frac{1}{b}$

よって $(a-b)cx=-\frac{a-b}{ab}$　$a\neq b$ であるから $x=-\frac{1}{abc}$

① に代入すると $y=bc\left(-\frac{1}{abc}\right)-abc+\frac{1}{a}$　よって $y=-abc$

ゆえに, 垂心Hの座標は $\left(-\frac{1}{abc}, -abc\right)$

$-abc=\frac{1}{-\frac{1}{abc}}$ であるから, 垂心Hは曲線K上にある。

(後半) $-\frac{1}{abc}=h$ とおくと H$\left(h, \frac{1}{h}\right)$

(1) から, △ABHの垂心の座標は $\left(-\frac{1}{abh}, -abh\right)$

h に $-\frac{1}{abc}$ を代入すると $\left(-\frac{1}{ab\left(-\frac{1}{abc}\right)}, -ab\left(-\frac{1}{abc}\right)\right)$

すなわち $\left(c, \frac{1}{c}\right)$

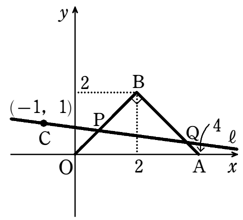
したがって, △ABHの垂心は点Cに一致する。

3

解答 $m=\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$

解説

△OAB$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$



また, 直線OBの方程式は $y=x$, 直線ABの方程式は $y=-x+4$ であるから, 直線OBと直線ABは垂直に交わる。

よって ∠OBA$=90^\circ$

ℓ の方程式を変形すると $y=m(x+1)+1$

ゆえに, ℓ は点$(-1, 1)$を通り, 傾きがmの直線である。

ここで, 点$(-1, 1)$をCとすると

$$△\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2=\frac{1}{2}△\mathrm{OAB}$$

このことから, ℓ が△OABの面積を2等分するとき, ℓ は辺ABと交わることがわかる。

ℓ が点Aを通るとき $0=4m+m+1$　よって $m=-\frac{1}{5}$

ℓ が点Bを通るとき $2=2m+m+1$　よって $m=\frac{1}{3}$

ゆえに $-\frac{1}{5}<m<\frac{1}{3}$ ……①

① のとき, ℓ と辺OBの交点をPとし, ℓ と辺ABの交点をQとする。

点Pのx座標は, $x=mx+m+1$ を解いて $x=\frac{m+1}{1-m}$

点Qのx座標は, $-x+4=mx+m+1$ を解いて $x=\frac{3-m}{m+1}$

直線OBの傾きは1であるから $\mathrm{BP}=\sqrt{2}\left(2-\frac{m+1}{1-m}\right)=\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{1-m}$

直線ABの傾きは-1であるから $\mathrm{BQ}=\sqrt{2}\left(\frac{3-m}{m+1}-2\right)=\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{m+1}$

したがって $△\mathrm{BPQ}=\frac{1}{2}\mathrm{BP}\cdot\mathrm{BQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{1-m}\cdot\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{m+1}=\frac{(1-3m)^2}{1-m^2}$

ℓ が△OABの面積を2等分するとき, △BPQ$=2$ となるから $\frac{(1-3m)^2}{1-m^2}=2$

分母を払って $(1-3m)^2=2(1-m^2)$

整理すると $11m^2-6m-1=0$　これを解いて $m=\frac{3\pm2\sqrt{5}}{11}$

① を満たすのは $m=\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$

別解 [P, Qのx座標を求めるところまでは同じ]

点P, Qのx座標を, それぞれp, qとすると

BP : BO$=(2-p):2$, BQ : BA$=(q-2):2$

直線ℓが△OABの面積を2等分するとき

$\frac{△\mathrm{BPQ}}{△\mathrm{BOA}}=\frac{\mathrm{BP}\cdot\mathrm{BQ}}{\mathrm{BO}\cdot\mathrm{BA}}=\frac{1}{2}$　すなわち $\frac{(2-p)(q-2)}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}$

ゆえに $(2-p)(q-2)=2$

$p=\frac{m+1}{1-m}$, $q=\frac{3-m}{m+1}$ であるから, これを代入して

$\left(2-\frac{m+1}{1-m}\right)\left(\frac{3-m}{m+1}-2\right)=2$　すなわち $\frac{(1-3m)^2}{(1-m)(1+m)}=2$

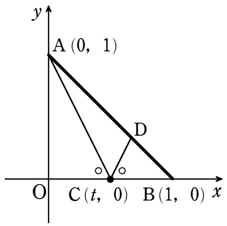
したがって, $\frac{(1-3m)^2}{1-m^2}=2$ が得られる。 (以後同じ)

4

解答 $3-2\sqrt{2}$

解説

直線 AC の傾きは $-\frac{1}{t}$



∠ACO＝∠BCD より，直線 AC の傾きと直線 CD の傾きは絶対値が等しく，符号が異なるから，直線 CD の傾きは $\frac{1}{t}$ である。

直線 CD の方程式は　$y=\frac{1}{t}(x-t)$　……①

直線 AB の方程式は　$y=-x+1$　……②

点 D の y 座標は①と②の連立方程式の解である。

①の両辺を t 倍して　$ty=x-t$　……③

②＋③から　$(t+1)y=1-t$

$t+1\neq 0$ であるから　$y=\frac{1-t}{t+1}$

三角形 ACD の面積を S とすると

$$S=\triangle ABO-\triangle ACO-\triangle BCD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-\frac{1}{2}\cdot t\cdot1-\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\frac{1-t}{t+1}=\frac{1}{2}\left\{1-t-\frac{(1-t)^2}{t+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t^2-(1-2t+t^2)}{t+1}=\frac{t-t^2}{t+1}=-t+2-\frac{2}{t+1}$$
$$=3-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right)$$

$t+1>0$，$\frac{2}{t+1}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$S\leqq 3-2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{2}{t+1}}=3-2\sqrt{2}$$

等号は，$0<t<1$ かつ $t+1=\frac{2}{t+1}$ すなわち $t=\sqrt{2}-1$ のとき成り立つ。

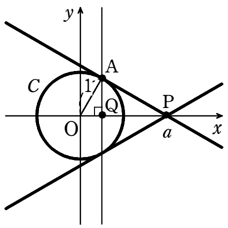
したがって，三角形 ACD の面積は $t=\sqrt{2}-1$ のとき最大値 $3-2\sqrt{2}$ をとる。

5

解答　(1) $\frac{1}{a}$　(2) $\frac{PR}{QR}=a$　(3) 順に $\left(\frac{2a}{a^2+1},\ \pm\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$，$\frac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}$

解説

(1) P から C へ引いた 2 本の接線の接点のうち，1 つを A とする。



△OAP∽△OQA より　OP：OA＝OA：OQ

よって　$a:1=1:\mathrm{OQ}$　　ゆえに　$\mathrm{OQ}=\frac{1}{a}$

したがって，点 Q の x 座標は　$\frac{1}{a}$

(2) 点 R の座標を $(s,\ t)$ とする。

点 R は円 C 上の点であるから　$s^2+t^2=1$　……①

ここで　$PR^2=(s-a)^2+t^2=s^2+t^2-2as+a^2$

①を代入して　$PR^2=a^2-2as+1$　……②

また　$QR^2=\left(s-\frac{1}{a}\right)^2+t^2=s^2+t^2-\frac{2s}{a}+\frac{1}{a^2}$

①を代入して　$QR^2=\frac{1}{a^2}-\frac{2s}{a}+1=\frac{1}{a^2}(a^2-2as+1)$

よって　$\frac{PR^2}{QR^2}=a^2$　　$a>1$ より　$\frac{PR}{QR}=a$

したがって，$\frac{PR}{QR}$ は R によらず一定である。

(3) ∠PRQ＝90° より，△PQR について三平方の定理を用いると

$PR^2+QR^2=PQ^2$　　よって　$QR^2\left\{\left(\frac{PR}{QR}\right)^2+1\right\}=PQ^2$

(2) より　$\frac{1}{a^2}(a^2-2as+1)(a^2+1)=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

展開して整理すると　$as+\frac{s}{a}-2=0$　　ゆえに　$s=\frac{2a}{a^2+1}$

これを①に代入して　$\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2+t^2=1$

よって　$t^2=\frac{(a^2-1)^2}{(a^2+1)^2}$　　ゆえに　$t=\pm\frac{a^2-1}{a^2+1}$

したがって，点 R の座標は　$\left(\frac{2a}{a^2+1},\ \pm\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$

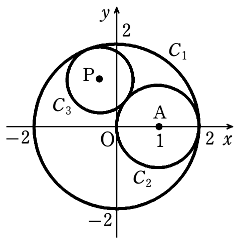
また，線分 PR の長さは②から　$PR=\sqrt{a^2-2a\cdot\frac{2a}{a^2+1}+1}=\frac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}$

6

解答　(1) $a=-3t+2$，$b=\sqrt{-8t^2+8t}$，$0<t<1$　(2) $t=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$

解説

(1) O(0, 0)，A(1, 0)，P$(a,\ b)$ とする。



円 C_3 が円 C_1 に内接するから　$0<t<2$　……①

OP＝$2-t$ であるから

$\sqrt{a^2+b^2}=2-t$　……②

円 C_3 が円 C_2 に外接するから　AP＝$1+t$

よって　$\sqrt{(a-1)^2+b^2}=1+t$　……③

①のとき，②，③の右辺は正であるから，それぞれの両辺を 2 乗しても同値である。

②から　$a^2+b^2=(2-t)^2$　……④

③から　$(a-1)^2+b^2=(1+t)^2$　……⑤

④，⑤から，b を消去すると　$2a-1=-6t+3$　　したがって　$a=-3t+2$

④に代入すると　$(-3t+2)^2+b^2=(2-t)^2$　　ゆえに　$b^2=-8t^2+8t$

b は正の実数であるから　$-8t^2+8t>0$　すなわち　$-8t(t-1)>0$

これを解いて　$0<t<1$　……⑥

t がとりうる値の範囲は，①と⑥の共通範囲を求めて　$0<t<1$

このとき　$b=\sqrt{-8t^2+8t}$

(2) $b=\sqrt{-8t^2+8t}=\sqrt{-8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2}$

(1) の結果から，t は $0<t<1$ の範囲を動く。

よって，b は $t=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

7

解答　(1) $8tx+(t^2-16)y-8=0$　(2) 証明略，$x^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

解説

(1) 円 C_2 の方程式は　$x^2+y^2=1$

$P_1(a,\ b)$，$P_2(c,\ d)$，$Q\left(t,\ \frac{t^2}{8}-2\right)$ とする。

点 P_1 における円 C_2 の接線の方程式は　$ax+by=1$

これが点 Q を通るから　$at+b\left(\frac{t^2}{8}-2\right)=1$　……①

点 P_2 における円 C_2 の接線の方程式は　$cx+dy=1$

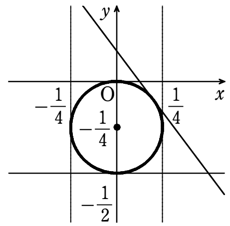
これが点 Q を通るから　$ct+d\left(\frac{t^2}{8}-2\right)=1$　……②

①，②より，直線 $tx+\left(\frac{t^2}{8}-2\right)y=1$ は 2 点 P_1，P_2 を通る。

したがって，直線 ℓ の方程式は　$tx+\left(\frac{t^2}{8}-2\right)y=1$

すなわち　$8tx+(t^2-16)y-8=0$　……③

(2) 直線 ℓ が t の値にかかわらず，ある円に接するならば，その円は③で $t=0,\ 4,\ -4,\ 8$ として得られる 4 直線に接する。



③より

$t=0$ のとき　$y=-\frac{1}{2}$　　$t=4$ のとき　$x=\frac{1}{4}$

$t=-4$ のとき　$x=-\frac{1}{4}$

$t=8$ のとき　$y=-\frac{4}{3}x+\frac{1}{6}$

この 4 直線に接する円は $x^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$ だけである。

③より，この円の中心 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$ と直線 ℓ の距離は

$$\frac{\left|-\frac{1}{4}(t^2-16)-8\right|}{\sqrt{64t^2+(t^2-16)^2}}=\frac{\left|-\frac{1}{4}(t^2+16)\right|}{\sqrt{(t^2+16)^2}}=\frac{1}{4}$$

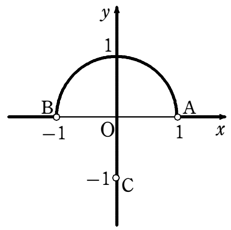
したがって，t の値によらず点 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$ と直線 ℓ の距離は $\frac{1}{4}$ である。

ゆえに，直線 ℓ は t の値によらず中心 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$，半径 $\frac{1}{4}$ の円に接し，その円の方程式は

式は　$x^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

8

解答　〔図〕



解説

点Pが直線AC上または直線BC上（ただし，点PはCと異なる）にあるとすると

$$\angle \mathrm{APC} \neq \angle \mathrm{BPC}$$

よって，△APCと△BPCが存在する。

$\mathrm{AP}=a$，$\mathrm{BP}=b$，$\mathrm{CP}=c$ とおき，△APCと△BPCに余弦定理を用いると

$$\frac{a^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2ac}=\frac{b^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2bc}$$

ゆえに　$b(a^2+c^2-2)=a(b^2+c^2-2)$

$ab(a-b)-c^2(a-b)+2(a-b)=0$

$(a-b)(ab-c^2+2)=0$

よって　$a=b$　または　$ab=c^2-2$

[1]　$a=b$ のとき

点Pは線分ABの垂直二等分線上，すなわち y 軸上を動く。ただし，点PはCと異なるから，点 $(0,\ -1)$ を除く。

[2]　$ab=c^2-2$ のとき　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}=x^2+(y+1)^2-2$

よって　$x^2+(y+1)^2 \geqq 2$　……①　かつ

$(x^2+1+y^2-2x)(x^2+1+y^2+2x)=\{(x^2+1+y^2)+2(y-1)\}^2$　……②

②から　$(x^2+1+y^2)^2-4x^2=(x^2+1+y^2)^2+4(y-1)(x^2+1+y^2)+4(y-1)^2$

ゆえに　$(y-1)(x^2+y^2+1)+(y-1)^2+x^2=0$

$(y-1)(x^2+y^2+1)+x^2+y^2+1-2y=0$

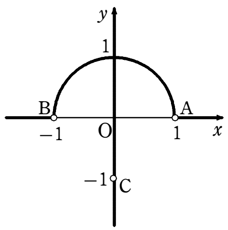
$y(x^2+y^2+1)-2y=0$

$y(x^2+y^2-1)=0$

これと①から

$(y=0$ または $x^2+y^2=1)$　かつ　$x^2+(y+1)^2 \geqq 2$

[1]，[2]と，点PがA，Bと異なることから，点Pの軌跡は右の図のようになる。



9

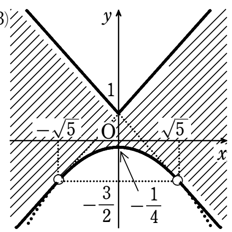
解答　(1)　$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$

(2)　$2ax+4y-a^2+1=0$

(3)　［図］境界線は放物線 $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$

$(-\sqrt{5}<x<\sqrt{5})$ を含み，他は含まない。

(3)



解説

(1)　円 C の半径は2，C と D の中心間の距離は $\sqrt{a^2+4}$ であるから，C と D が異なる2点で交わるための条件は　$2-1<\sqrt{a^2+4}<2+1$

各辺を2乗して　$1<a^2+4<9$

したがって　$-3<a^2<5$　　$-3<a^2$ は常に成り立つ。

$a^2<5$ を満たす a の値の範囲を求めて　$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$

(2)　円 C の方程式は　$x^2+(y+2)^2=4$　……①

円 D の方程式は　$(x-a)^2+y^2=1$　……②

①−②から　$2ax-a^2+4y+4=3$

すなわち　$2ax+4y-a^2+1=0$　……③

C と D の2つの交点の座標は，①，②を満たすから，③も満たす。

したがって，③が求める直線の方程式である。

(3)　③から　$a^2-2xa-4y-1=0$　……④

この2次方程式が $-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ の範囲に解をもつための条件を求める。

$f(a)=a^2-2xa-4y-1$ とすると　$f(a)=(a-x)^2-x^2-4y-1$

[1]　$x \leqq -\sqrt{5}$ のとき

$f(-\sqrt{5})<0$　かつ　$f(\sqrt{5})>0$　から

$4+2\sqrt{5}x-4y<0$　かつ　$4-2\sqrt{5}x-4y>0$

すなわち　$y>\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$　かつ　$y<-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$

[2]　$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ のとき

方程式④の判別式を D とすると，$D \geqq 0$　かつ

$(f(-\sqrt{5})>0$　または　$f(\sqrt{5})>0)$ から

$\frac{D}{4}=x^2+4y+1 \geqq 0$　かつ

$(4+2\sqrt{5}x-4y>0$　または　$4-2\sqrt{5}x-4y>0)$

すなわち　$y \geqq -\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$　かつ

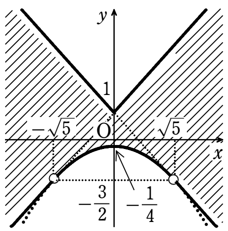
$\left(y<\frac{\sqrt{5}}{2}x+1\right.$　または　$\left.y<-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1\right)$

[3]　$x \geqq \sqrt{5}$ のとき　　$f(-\sqrt{5})>0$　かつ　$f(\sqrt{5})<0$ から

$4+2\sqrt{5}x-4y>0$　かつ　$4-2\sqrt{5}x-4y<0$

すなわち　$y<\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$　かつ　$y>-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$

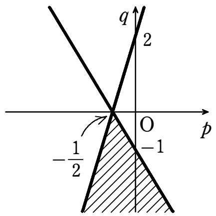
[1]～[3]から，求める領域は右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線は放物線 $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$ $(-\sqrt{5}<x<\sqrt{5})$ を含み，他は含まない。



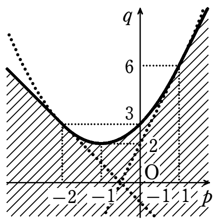
10

解答　(1)　［図］境界線を含む　　(2)　［図］境界線を含む

(1)



(2)



解説

(1)　点 $(p,\ q)$ が $D(a)$ の点であるとき

$q \leqq 2ap-a^2+2a+2$

よって　$a^2-2(p+1)a+q-2 \leqq 0$

$f(a)=a^2-2(p+1)a+q-2$ とする。

$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対して，不等式 $f(a) \leqq 0$ が成り立つような p，q の条件を求める。

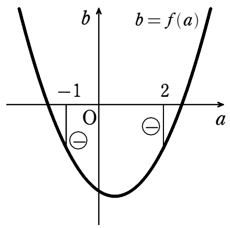
$b=f(a)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，満たすべき条件は　$f(-1) \leqq 0$　かつ　$f(2) \leqq 0$

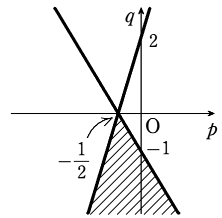
すなわち　$(-1)^2-2(p+1)\cdot(-1)+q-2 \leqq 0$

かつ　$2^2-2(p+1)\cdot 2+q-2 \leqq 0$

整理すると　$q \leqq -2p-1$　かつ　$q \leqq 4p+2$

したがって，求める点 $(p,\ q)$ の範囲は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。





(2)　(1)と同様に，$f(a)=a^2-2(p+1)a+q-2$ とする。

$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対して，不等式 $f(a) \leqq 0$ が成り立つような p，q の条件を求める。

ここで，「$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対して，不等式 $f(a) \leqq 0$ が成り立つ」ことと，「$-1 \leqq a \leqq 2$ における $f(a)$ の最小値が0以下である」ことは同値である。

よって，$-1 \leqq a \leqq 2$ における $f(a)$ の最小値が0以下となる p，q の条件を求めればよい。

$f(a)=a^2-2(p+1)a+q-2=\{a-(p+1)\}^2-(p+1)^2+q-2$

[1]　$p+1<-1$　すなわち　$p<-2$ のとき

$f(a)$ の最小値は　$f(-1)$

よって，満たすべき条件は　$f(-1) \leqq 0$　　ゆえに　$q \leqq -2p-1$

[2]　$-1 \leqq p+1 \leqq 2$　すなわち　$-2 \leqq p \leqq 1$ のとき

$f(a)$ の最小値は　$f(p+1)$

よって，満たすべき条件は　$f(p+1) \leqq 0$

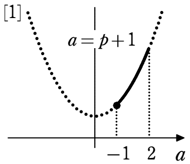
すなわち　$-(p+1)^2+q-2 \leqq 0$　　ゆえに　$q \leqq (p+1)^2+2$

[3]　$2<p+1$　すなわち　$1<p$ のとき

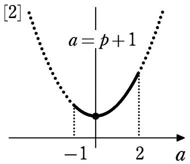
$f(a)$ の最小値は　$f(2)$

よって，満たすべき条件は　$f(2) \leqq 0$　　ゆえに　$q \leqq 4p+2$

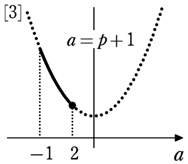
[1]



[2]



[3]



以上から，求める点 $(p,\ q)$ の範囲は，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。