$\boxed{1}$

解答　(1)　$x^4-12x^3+54x^2-108x+81$

(2)　$64x^6+192x^5y+240x^4y^2+160x^3y^3+60x^2y^4+12xy^5+y^6$

解説

(1)　$(x-3)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3(-3)+{}_4C_2x^2(-3)^2+{}_4C_3x(-3)^3+{}_4C_4(-3)^4$

$=1\cdot x^4+4\cdot x^3(-3)+6x^2\cdot 9+4x(-27)+1\cdot 81$

$=x^4-12x^3+54x^2-108x+81$

(2)　$(2x+y)^6={}_6C_0(2x)^6+{}_6C_1(2x)^5y+{}_6C_2(2x)^4y^2$

$+{}_6C_3(2x)^3y^3+{}_6C_4(2x)^2y^4+{}_6C_5(2x)y^5+{}_6C_6y^6$

$=64x^6+192x^5y+240x^4y^2+160x^3y^3+60x^2y^4+12xy^5+y^6$

$\boxed{2}$

解答　(1)　720　(2)　-20000　(3)　5376

解説

(1)　展開式の一般項は　${}_5C_r(2x)^{5-r}(3y)^r={}_5C_r\cdot 2^{5-r}\cdot 3^r x^{5-r}y^r$

x^3y^2 の項は $r=2$ のときで，その係数は

${}_5C_2\cdot 2^3\cdot 3^2=10\cdot 8\cdot 9=720$

(2)　展開式の一般項は　${}_6C_r(5x^2)^{6-r}\cdot(-2)^r={}_6C_r\cdot 5^{6-r}\cdot(-2)^r x^{2(6-r)}$

ここで，$2(6-r)=6$ とすると　$r=3$

よって，x^6 の項の係数は

${}_6C_3\cdot 5^3\cdot(-2)^3=20\cdot 125\cdot(-8)=-20000$

(3)　展開式の一般項は　${}_9C_r(x^2)^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_9C_r\cdot(-2)^r\frac{x^{2(9-r)}}{x^r}$

これが定数項となるとき　$\frac{x^{2(9-r)}}{x^r}=1$　よって　$x^{18-2r}=x^r$

両辺の x の指数を比較して　$18-2r=r$　ゆえに　$r=6$

よって，定数項は　${}_9C_6\cdot(-2)^6=84\cdot 64=5376$

$\boxed{3}$

解答　略

解説

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$$

において，$x=2$ とすると

$$3^n={}_nC_0+2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots\cdots+2^n{}_nC_n$$

よって，与えられた等式が成り立つ。

$\boxed{4}$

解答　(1)　30　(2)　840

解説

(1)　xy^2z^2 の項の係数は　$\frac{5!}{1!2!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3}{2\cdot1}=30$

別解　$\{(x+y)+z\}^5$ の展開式において，z^2 を含む項は　${}_5C_2(x+y)^3z^2$

また，$(x+y)^3$ の展開式において，xy^2 の項の係数は　${}_3C_2$

よって，xy^2z^2 の項の係数は　${}_5C_2\times{}_3C_2=10\times3=30$

(2)　$(a+b-2c)^7$ の $a^2b^3c^2$ の項は

$\frac{7!}{2!3!2!}a^2b^3(-2c)^2=\frac{7!}{2!3!2!}(-2)^2a^2b^3c^2$

よって，$a^2b^3c^2$ の項の係数は

$\frac{7!}{2!3!2!}\times(-2)^2=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot1\times2\cdot1}\times4=840$

別解　$\{(a+b)-2c\}^7$ の展開式において，c^2 を含む項は

${}_7C_2(a+b)^5(-2c)^2={}_7C_2(-2)^2(a+b)^5c^2$

また，$(a+b)^5$ の展開式において，a^2b^3 の項の係数は　${}_5C_3$

よって，$a^2b^3c^2$ の項の係数は

${}_7C_2(-2)^2\times{}_5C_3=21\times4\times10=840$

$\boxed{5}$

解答　77

解説

$(1+x+x^2)^7$ の展開式の一般項は

$\frac{7!}{p!q!r!}\cdot1^px^q(x^2)^r=\frac{7!}{p!q!r!}x^{q+2r}$

p，q，r は整数で　$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$，$p+q+r=7$

x^3 の項は $q+2r=3$　すなわち　$q=3-2r$ のときである。

$q\geqq0$ から　$3-2r\geqq0$　よって　$r=0$，1

$q=3-2r$，$p=7-q-r$ から

$r=0$ のとき　$q=3$，$p=4$

$r=1$ のとき　$q=1$，$p=5$

すなわち　$(p,\ q,\ r)=(4,\ 3,\ 0)$，$(5,\ 1,\ 1)$

ゆえに，x^3 の項の係数は

$\frac{7!}{4!3!0!}+\frac{7!}{5!1!1!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}+7\cdot6=35+42=77$

別解　$(1+x+x^2)^7=\{(1+x)+x^2\}^7$ の一般項は ${}_7C_r(1+x)^{7-r}(x^2)^r$ であるから，x^3 の項は，次の２つの場合に現れて，また，これ以外はない。

${}_7C_0(1+x)^7(x^2)^0$ から $(1+x)^7$ の x^3 の項は ${}_7C_0\cdot{}_7C_3x^3$

${}_7C_1(1+x)^6(x^2)^1$ から $(1+x)^6$ の x の項は ${}_7C_1\cdot{}_6C_1x\cdot x^2$

よって，求める x^3 の項の係数は

${}_7C_0\cdot{}_7C_3+{}_7C_1\cdot{}_6C_1=1\cdot35+7\cdot6=77$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

(2)　$x^7-7x^6+21x^5-35x^4+35x^3-21x^2+7x-1$

(3)　$32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$

(4)　$81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4$

解説

(1)　$(a+b)^6={}_6C_0a^6+{}_6C_1a^5b+{}_6C_2a^4b^2+{}_6C_3a^3b^3+{}_6C_4a^2b^4+{}_6C_5ab^5+{}_6C_6b^6$

$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

(2)　$(x-1)^7={}_7C_0x^7+{}_7C_1x^6(-1)+{}_7C_2x^5(-1)^2+{}_7C_3x^4(-1)^3+{}_7C_4x^3(-1)^4+{}_7C_5x^2(-1)^5$

$+{}_7C_6x(-1)^6+{}_7C_7(-1)^7$

$=x^7-7x^6+21x^5-35x^4+35x^3-21x^2+7x-1$

(3)　$(2x+y)^5={}_5C_0(2x)^5+{}_5C_1(2x)^4y+{}_5C_2(2x)^3y^2+{}_5C_3(2x)^2y^3+{}_5C_4(2x)y^4+{}_5C_5y^5$

$=32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$

(4)　$(3x-2y)^4={}_4C_0(3x)^4+{}_4C_1(3x)^3(-2y)+{}_4C_2(3x)^2(-2y)^2+{}_4C_3(3x)(-2y)^3+{}_4C_4(-2y)^4$

$=81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4$

$\boxed{2}$

解答　(1)　280　(2)　x^4 の項の係数は -21，x^3 の項の係数は 0　(3)　120

(4)　180

解説

(1)　$(x+2)^7$ の展開式の一般項は　${}_7C_rx^{7-r}2^r={}_7C_r\cdot2^rx^{7-r}$

x^4 の項は，$7-r=4$ より $r=3$ のときである。

ゆえに，求める係数は　${}_7C_3\cdot2^3=35\times8=280$

(2)　$(x^2-1)^7$ の展開式の一般項は　${}_7C_r(x^2)^{7-r}\cdot(-1)^r=(-1)^r{}_7C_rx^{14-2r}$

x^4 の項は，$14-2r=4$ より $r=5$ のときである。

ゆえに，x^4 の項の係数は　$(-1)^5{}_7C_5=-21$

x^3 の項は，$14-2r=3$ のときであるが，この等式を満たす０以上の整数 r は存在しない。

よって，x^3 の項の係数は　0

(3)　$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式の一般項は　${}_{10}C_r(x^2)^{10-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{10}C_r\cdot\frac{x^{20-2r}}{x^r}={}_{10}C_rx^{20-3r}$

x^{11} の項は，$20-3r=11$ より $r=3$ のときである。

よって，求める係数は　${}_{10}C_3=120$

(4)　$\left(2x^4-\frac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式の一般項は

${}_{10}C_r(2x^4)^{10-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r{}_{10}C_r\cdot2^{10-r}\cdot\frac{x^{40-4r}}{x^r}=(-1)^r{}_{10}C_r\cdot2^{10-r}\cdot x^{40-5r}$

定数項は，$40-5r=0$ より $r=8$ のときである。

よって　$(-1)^8{}_{10}C_8\cdot2^{10-8}={}_{10}C_2\cdot2^2=180$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

二項定理により　$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$　……①

(1)　①に $x=-3$ を代入して　$(-2)^n={}_nC_0-3{}_nC_1+9{}_nC_2-\cdots\cdots+(-3)^n{}_nC_n$

(2)　①に，$x=-1$ を代入して　${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(3)　①に $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入して　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n={}_nC_0-\dfrac{{}_nC_1}{2}+\dfrac{{}_nC_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_nC_n}{2^n}$

4

解答　(1)　12　　(2)　6

解説

(1)　$(x+2y+3z)^4$ の x^3z の項は

$$\frac{4!}{3!0!1!}x^3(2y)^0\cdot 3z=\frac{4!}{3!}\cdot 3x^3z$$

ゆえに，x^3z の項の係数は

$$\frac{4!}{3!}\cdot 3=12$$

別解　$\{(x+2y)+3z\}^4$ の展開式において，z を含む項は

$${}_4C_1(x+2y)^3(3z)={}_4C_1\cdot 3(x+2y)^3z$$

また，$(x+2y)^3$ の展開式において，x^3 の項の係数は

$${}_3C_0$$

よって，x^3z の項の係数は

$${}_4C_1\cdot 3\times{}_3C_0=12\times 1=12$$

(2)　$\left(2x-\dfrac{1}{2}y+z\right)^4$ の xy^2z の項は

$$\frac{4!}{1!2!1!}(2x)\left(-\frac{1}{2}y\right)^2z=\frac{4!}{2!}\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2xy^2z$$

ゆえに，xy^2z の項の係数は

$$\frac{4!}{2!}\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=6$$

別解　$\left\{\left(2x-\dfrac{1}{2}y\right)+z\right\}^4$ の展開式において，z を含む項は

$${}_4C_1\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^3z$$

また，$\left(2x-\dfrac{1}{2}y\right)^3$ の展開式において，xy^2 の項は

$${}_3C_2(2x)\left(-\frac{1}{2}y\right)^2={}_3C_2\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2xy^2$$

よって，xy^2z の項の係数は

$${}_4C_1\times{}_3C_2\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=4\times\frac{3}{2}=6$$

5

解答　-3510

解説

$(x^2-3x+1)^{10}$ の展開式の一般項は

$$\frac{10!}{p!q!r!}(x^2)^p(-3x)^q\cdot 1^r=\frac{10!}{p!q!r!}(-3)^qx^{2p+q}$$

p，q，r は整数で　$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$，$p+q+r=10$

x^3 の項は $2p+q=3$ すなわち $q=3-2p$ のときである。

$q\geqq 0$ から $3-2p\geqq 0$　　よって　　$p=0$，1

$q=3-2p$，$r=10-p-q$ から

$p=0$ のとき　　$q=3$，$r=7$

$p=1$ のとき　　$q=1$，$r=8$

すなわち　　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 7)$，$(1,\ 1,\ 8)$

よって，x^3 の項の係数は

$$\frac{10!}{0!3!7!}\cdot(-3)^3+\frac{10!}{1!1!8!}\cdot(-3)=-3240-270=-3510$$

1

解答　(1)　$n=15$　　(2)　$\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

解説

(1)　$(2x+1)^n$ の展開式における一般項は　${}_nC_r(2x)^{n-r}\cdot 1^r={}_nC_r2^{n-r}x^{n-r}$

$n-r=2$ とすると　$r=n-2$　　x^2 の係数が 420 であることから　${}_nC_{n-2}2^2=420$

よって　$\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 4=420$　　$n>0$ であるから　$n=15$

(2)　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ の展開式の一般項は　${}_{2n}C_r\cdot x^{2n-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_{2n}C_r\cdot x^{2(n-r)}$

これが定数項となるのは $r=n$ のときである．

よって，定数項は　${}_{2n}C_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

2

解答　$a=8$，$b=11$；x^2z^2 の係数は 726

解説

$(x+ay+bz)^4$ の展開式における一般項は　$\dfrac{4!}{p!q!r!}x^p\cdot(ay)^q\cdot(bz)^r=\dfrac{4!}{p!q!r!}a^qb^rx^py^qz^r$

ただし，p，q，r は 0 以上の整数で　$p+q+r=4$

x^2yz の項は $p=2$，$q=1$，$r=1$ のときで，その係数が 1056 であるから

$$\frac{4!}{2!1!1!}ab=1056\qquad\text{よって}\quad ab=88$$

x^3z の項は $p=3$，$q=0$，$r=1$ のときで，その係数が 44 であるから　$\dfrac{4!}{3!0!1!}b=44$

よって　$b=11$　　　　したがって　$a=8$，$b=11$

また，x^2z^2 の項の係数は $p=2$，$q=0$，$r=2$ のときで，その係数は　$\dfrac{4!}{2!0!2!}11^2=726$

3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　二項定理により

$$(1+a)^n={}_nC_0+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots\cdots+{}_nC_na^n$$

$n\geqq 2$，$a>0$ であるから，$2\leqq r\leqq n$ のとき　　$a^r>0$

また，$2\leqq r\leqq n$ のとき　　${}_nC_r>0$

よって　　${}_nC_ra^r>0$

ゆえに　$$\begin{aligned}(1+a)^n&={}_nC_0+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots\cdots+{}_nC_na^n\\&=1+na+({}_nC_2a^2+\cdots\cdots+{}_nC_na^n)\\&>1+na\end{aligned}$$

(2)　$n\geqq 2$ であるから　　$\dfrac{1}{n}>0$

よって，(1) の不等式で $a=\dfrac{1}{n}$ とおくと

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+n\cdot\frac{1}{n}=1+1=2$$

ゆえに　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

1

解答　(1)　931　　(2)　81

解説

(1)　二項定理により　$11^{13}=(10+1)^{13}$

$$=10^{13}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times10^{12}+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{10}\times10^3+{}_{13}\mathrm{C}_{11}\times10^2+{}_{13}\mathrm{C}_{12}\times10+1$$

$$=10^3(10^{10}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times10^9+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{10})+\frac{13\cdot12}{2}\times10^2+13\times10+1$$

$$=10^3(10^{10}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times10^9+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{10})+7931$$

$$=1000(10^{10}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times10^9+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{10}+7)+931$$

$10^{10}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times10^9+\cdots\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{10}+7$ は整数であるから，

11^{13} を 1000 で割った余りは　931

(2)　二項定理により

$$33^{20}=(30+3)^{20}$$

$$={}_{20}\mathrm{C}_0\,30^{20}+{}_{20}\mathrm{C}_1\,30^{19}\cdot3^1+\cdots\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18}\,30^2\cdot3^{18}+{}_{20}\mathrm{C}_{19}\,30^1\cdot3^{19}+{}_{20}\mathrm{C}_{20}\,3^{20}$$

$30^2=900$ および $30\cdot3=90$ は 90 で割り切れるから

$$33^{20}=90k+{}_{20}\mathrm{C}_{20}\,3^{20}\quad(k\text{ は整数})$$

よって，33^{20} を 90 で割った余りは，${}_{20}\mathrm{C}_{20}3^{20}$　すなわち 3^{20} を 90 で割った余りに等しい。

$$3^{20}=(3^4)^5=81^5=(90-9)^5$$

$$={}_5\mathrm{C}_0\,90^5+\cdots\cdots+{}_5\mathrm{C}_4\,90^1\cdot(-9)^4+{}_5\mathrm{C}_5(-9)^5$$

よって　$3^{20}=90l+(-9)^5$　（l は整数）

ゆえに，3^{20} を 90 で割った余りは，$(-9)^5$ を 90 で割った余りに等しい。

$$(-9)^5=(-9)^4\cdot(-9)=81^2\cdot(-9)=(90-9)^2\cdot(-9)$$

$$=(90^2-2\cdot90\cdot9+81)\cdot(-9)$$

よって　$(-9)^5=90m+81\cdot(-9)$　（m は整数）

ゆえに　$(-9)^5=90m+(90-9)\cdot(-9)=90(m-9)+81$

$m-9$ は整数であるから，$(-9)^5$ を 90 で割った余りは　81

したがって，33^{20} を 90 で割った余りは　81

2

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_rx^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$　……① とする。

(1)　① の等式において，$x=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

ゆえに　${}_n\mathrm{C}_0-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}$

(2)　① の等式において，$x=1$ を代入すると

$$2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\quad\cdots\cdots②$$

① の等式において，$x=-1$ を代入すると

$$0={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots-{}_n\mathrm{C}_n\quad\cdots\cdots③$$

②＋③ から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})$

②－③ から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)$

したがって　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}$

(3)　① の等式において，$x=-1$ を代入すると

$$0={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\quad\cdots\cdots④$$

よって，②＋④ から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)$

②－④ から　$2^n=2({}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})$

したがって　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$

1

解答　(1)　商 $x+2$，余り 2　　(2)　商 $3x-1$，余り $6x+6$

解説

(1)

$$\begin{array}{r}
x+2\\
x+3\,\big)\,\overline{x^2+5x+8}\\
\underline{x^2+3x}\\
2x+8\\
\underline{2x+6}\\
2
\end{array}$$

よって，商は $x+2$，余りは 2

(2)

$$\begin{array}{r}
3x-1\\
x^2+3x-1\,\big)\,\overline{3x^3+8x^2+7}\\
\underline{3x^3+9x^2-3x}\\
-x^2+3x+7\\
\underline{-x^2-3x+1}\\
6x+6
\end{array}$$

よって，商は $3x-1$，余りは $6x+6$

2

解答　(1)　$A=2x^3-7x^2+2x+3$　　(2)　$B=2x^2-x+2$

解説

(1)　条件から　$A=(x^2-2x-1)(2x-3)-2x$

右辺を展開して整理すると　$A=2x^3-7x^2+2x+3$

(2)　条件から

$$6x^3-x^2+3x+5=B(3x+1)-2x+3$$

よって　$B(3x+1)=6x^3-x^2+5x+2$

ゆえに，B は $6x^3-x^2+5x+2$ を $3x+1$ で割ったときの商である。

右の計算から　$B=2x^2-x+2$

$$\begin{array}{r}
2x^2-x+2\\
3x+1\,\big)\,\overline{6x^3-x^2+5x+2}\\
\underline{6x^3+2x^2}\\
-3x^2+5x\\
\underline{-3x^2-x}\\
6x+2\\
\underline{6x+2}\\
0
\end{array}$$

3

解答　(1)　$x-3$　　(2)　$\dfrac{5}{x+2}$　　(3)　$\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}$　　(4)　$\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

解説

(1)　(与式)$=\dfrac{x^2-9}{x+3}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}=x-3$

(2)　(与式)$=\dfrac{5x}{x^2-4}-\dfrac{10}{x^2-4}=\dfrac{5x-10}{x^2-4}=\dfrac{5(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{5}{x+2}$

(3)　(与式)$=\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a\times(a+b)}{(a-b)\times(a+b)}-\dfrac{b\times(a-b)}{(a+b)\times(a-b)}$

$$=\frac{a^2+ab-(ab-b^2)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}$$

(4)　(与式)$=\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

$$=\frac{3\times(x+1)}{(x+2)(x-1)\times(x+1)}-\frac{2\times(x+2)}{(x+1)(x-1)\times(x+2)}$$

$$=\frac{3(x+1)-2(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-1)}=\frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x-1)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$\boxed{4}$

解答 (1) $\frac{a+1}{a-1}$　(2) $\frac{x^2-1}{x^3}$

解説

(1) [方法 1] (分母) $=a-\frac{2}{a+1}=\frac{a(a+1)-2}{a+1}=\frac{a^2+a-2}{a+1}=\frac{(a+2)(a-1)}{a+1}$

よって　(与式) $=(a+2)\div\frac{(a+2)(a-1)}{a+1}=(a+2)\times\frac{a+1}{(a+2)(a-1)}=\frac{a+1}{a-1}$

[方法 2] (与式) $=\frac{(a+1)(a+2)}{a(a+1)-2}=\frac{(a+1)(a+2)}{a^2+a-2}=\frac{(a+1)(a+2)}{(a-1)(a+2)}=\frac{a+1}{a-1}$

(2) (与式) $=\frac{1}{x+\frac{1}{\frac{x^2-1}{x}}}=\frac{1}{x+\frac{x}{x^2-1}}=\frac{1}{\frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}}$

$$=\frac{1}{\frac{x^3}{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{x^3}$$

$\boxed{5}$

解答 (1) $a=2$, $b=4$, $c=1$　(2) $a=1$, $b=4$, $c=4$　(3) $a=1$, $b=-2$, $c=5$

解説

(1) 右辺を展開して整理すると　$ax^2+bx=(c+1)x^2+4cx+4c-4$

これが x についての恒等式であるとき，両辺の各項の係数を比較すると

$a=c+1$, $b=4c$, $0=4c-4$　　これを解いて　$a=2$, $b=4$, $c=1$

別解　与えられた等式に $x=-2$, 0, 2 を代入すると，それぞれ

$4a-2b=0$, $0=-4+4c$, $4a+2b=16c$　　これを解いて　$a=2$, $b=4$, $c=1$

このとき，与式は x についての恒等式である。

(2) 右辺を展開して整理すると　$x^2=ax^2+(-4a+b)x+4a-2b+c$

これが x についての恒等式であるとき，両辺の各項の係数を比較すると

$1=a$, $0=-4a+b$, $0=4a-2b+c$　　これを解いて　$a=1$, $b=4$, $c=4$

別解　与えられた等式に $x=0$, 1, 2 を代入すると，それぞれ

$0=4a-2b+c$, $1=a-b+c$, $4=c$　　これを解いて　$a=1$, $b=4$, $c=4$

このとき，与式は x についての恒等式である。

(3) この等式が恒等式ならば，$x=2$, 1, -1 を代入しても成り立つ。

これらの値を代入すると，それぞれ

$3=3a$, $4=-2b$, $30=6c$

よって　$a=1$, $b=-2$, $c=5$

$\boxed{6}$

解答 $a=3$, $b=2$

解説

両辺に $(x+2)(x-1)$ を掛けて

$5x+1=a(x-1)+b(x+2)$　…… ①

[解法 1 (係数比較法)]　右辺を整理して

$5x+1=(a+b)x+(-a+2b)$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$5=a+b$,　$1=-a+2b$

これを解いて　$a=3$, $b=2$

[解法 2 (数値代入法)]　① が x についての恒等式ならば

$x=1$ を代入して　$6=3b$　よって　$b=2$

$x=-2$ を代入して　$-9=-3a$　よって　$a=3$

逆に，このとき ① の右辺は

$3(x-1)+2(x+2)=5x+1$

となり，左辺と一致するから ① は恒等式である。

よって　$a=3$, $b=2$

$\boxed{7}$

解答 $x=-2$, $y=3$

解説

等式を k について整理すると　$k(-2x-y-1)+x+2y-4=0$

これが k についての恒等式であるとき

$2x+y+1=0$, $x+2y-4=0$

これを解いて　$x=-2$, $y=3$

$\boxed{8}$

解答 $a=-11$, $b=2$, 商 $2x+6$

解説

求める商を $2x+c$ とすると，条件から

$2x^3+ax+10=(x^2-3x+b)(2x+c)+3x-2$

が x についての恒等式である。

右辺を展開して整理すると

$2x^3+ax+10=2x^3+(c-6)x^2+(2b-3c+3)x+bc-2$

両辺の同じ次数の項の係数は等しいから

$0=c-6$, $a=2b-3c+3$, $10=bc-2$

これを解いて　$c=6$, $b=2$, $a=-11$

よって　$a=-11$, $b=2$　商は　$2x+6$

別解　右の計算から，割り算の余りは

$(a-2b+18)x+10-6b$

これが $3x-2$ に等しいから

$a-2b+18=3$, $10-6b=-2$

これを解いて　$a=-11$, $b=2$

また，商は　$2x+6$

$$\begin{array}{r} 2x+6 \\ x^2-3x+b\,\big)\,\overline{2x^3\qquad\quad+\qquad ax+10} \\ \underline{2x^3-6x^2+\qquad 2bx\qquad} \\ 6x^2+(a-2b)x+10 \\ \underline{6x^2-\qquad 18x+6b} \\ (a-2b+18)x+10-6b \end{array}$$

$\boxed{1}$

解答 (1) 商 $2x^2+x+2$，余り 1　(2) 商 $x-4$，余り $14x-2$

(3) 商 x^2-2x-1，余り 3　(4) 商 $2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$，余り $\frac{5}{4}x+\frac{23}{2}$

解説

(1)

$$\begin{array}{r} 2x^2+x+2 \\ x+3\,\big)\,\overline{2x^3+7x^2+5x+7} \\ \underline{2x^3+6x^2\qquad\qquad} \\ x^2+5x\qquad \\ \underline{x^2+3x\qquad} \\ 2x+7 \\ \underline{2x+6} \\ 1 \end{array}$$

商 $2x^2+x+2$，余り 1

(2)

$$\begin{array}{r} x-4\qquad\quad \\ x^2+4x-1\,\big)\,\overline{x^3\qquad-\ 3x+2} \\ \underline{x^3+4x^2-\quad x\qquad} \\ -4x^2-\ 2x+2 \\ \underline{-4x^2-16x+4} \\ 14x-2 \end{array}$$

商 $x-4$，余り $14x-2$

(3)

$$\begin{array}{r} x^2-2x-1\qquad \\ 2x^2-3x+1\,\big)\,\overline{2x^4-7x^3+5x^2+\ x+2} \\ \underline{2x^4-3x^3+\ x^2\qquad\qquad} \\ -4x^3+4x^2+\ x\qquad \\ \underline{-4x^3+6x^2-2x\qquad} \\ -2x^2+3x+2 \\ \underline{-2x^2+3x-1} \\ 3 \end{array}$$

商 x^2-2x-1，余り 3

(4)

$$\begin{array}{r} 2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\qquad\quad \\ 2x^2-x+2\,\big)\,\overline{4x^4-\ x^3\qquad+\ 4x+8} \\ \underline{4x^4-2x^3+\ 4x^2\qquad\qquad} \\ x^3-\ 4x^2+\ 4x\qquad \\ \underline{x^3-\frac{1}{2}x^2+\quad x\qquad} \\ -\frac{7}{2}x^2+\ 3x+8 \\ \underline{-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{4}x-\frac{7}{2}} \\ \frac{5}{4}x+\frac{23}{2} \end{array}$$

商 $2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$,

余り $\frac{5}{4}x+\frac{23}{2}$

2

解答　(1)　$A=3x^3+14x^2+3x-1$　　(2)　$B=3x^2+x+2$

解説

(1)　条件から　$A=(x^2+4x-3)(3x+2)+4x+5$

右辺を整理して　$A=3x^3+14x^2+3x-1$

(2)　条件から　$6x^4-7x^3+4x^2-3x+5=B\times(2x^2-3x+1)+2x+3$

よって　$6x^4-7x^3+4x^2-5x+2=B\times(2x^2-3x+1)$

ゆえに，$6x^4-7x^3+4x^2-5x+2$ は $2x^2-3x+1$ で割り切れて，その商が B である。

右の計算により　$B=3x^2+x+2$

$$\begin{array}{r} 3x^2+x+2 \\ 2x^2-3x+1\,\overline{)\,6x^4-7x^3+4x^2-5x+2} \\ \underline{6x^4-9x^3+3x^2} \\ 2x^3+x^2-5x \\ \underline{2x^3-3x^2+x} \\ 4x^2-6x+2 \\ \underline{4x^2-6x+2} \\ 0 \end{array}$$

3

解答　(1)　2　　(2)　1　　(3)　$\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}$　　(4)　$\dfrac{4}{(x-1)(x-5)(x+3)}$

(5)　$\dfrac{2(x+4)}{x(x+2)}$

解説

(1)　$(\text{与式})=\dfrac{x+(x-8)}{x-4}=\dfrac{2(x-4)}{x-4}=2$

(2)　$(\text{与式})=\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{-a}{x-a}=\dfrac{x+(-a)}{x-a}=1$

(3)　$(\text{与式})=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{1\cdot(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(x^2+2x)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}$

(4)　$(\text{与式})=\dfrac{x+3}{(x-1)(x-5)(x+3)}-\dfrac{x-1}{(x-5)(x+3)(x-1)}=\dfrac{(x+3)-(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+3)}$

$=\dfrac{4}{(x-1)(x-5)(x+3)}$

(5)　$(\text{与式})=\dfrac{x+8}{(x+2)(x-1)}+\dfrac{x-4}{x(x-1)}=\dfrac{(x+8)x+(x-4)(x+2)}{x(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{(x^2+8x)+(x^2-2x-8)}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{2x^2+6x-8}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{2(x^2+3x-4)}{x(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{2(x-1)(x+4)}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{2(x+4)}{x(x+2)}$

4

解答　(1)　$x+2$　　(2)　x

解説

(1)　[方法 1]

$(\text{分子})=\dfrac{x(x-1)-6}{x-1}=\dfrac{x^2-x-6}{x-1}=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}$

$(\text{分母})=\dfrac{(x-1)-2}{x-1}=\dfrac{x-3}{x-1}$　であるから

$(\text{与式})=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}\div\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-1}\times\dfrac{x-1}{x-3}=x+2$

[方法 2]

$(\text{与式})=\dfrac{x(x-1)-6}{(x-1)-2}=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-3}=x+2$

(2)　$(\text{与式})=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{x}{x+(1-x)}=x$

5

解答　(1)　$a=-1$，$b=2$　　(2)　$a=1$，$b=1$，$c=-3$　　(3)　$a=3$，$b=7$，$c=35$

(4)　$a=2$，$b=-1$，$c=1$　　(5)　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

解説

(1)　等式の右辺を x について整理すると　$x=(a+b)x-(2a+b)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$1=a+b$，$0=2a+b$

これを解いて　$a=-1$，$b=2$

別解　等式に $x=1$，2 を代入すると，それぞれ

$1=-a$，$2=b$　　よって　$a=-1$，$b=2$

逆に，このとき

$(\text{右辺})=-(x-2)+2(x-1)=x=(\text{左辺})$

となり，与式は x についての恒等式である。

したがって　$a=-1$，$b=2$

(2)　等式の右辺を x について整理すると　$x^2-x-3=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$1=a$，$-1=-2a+b$，$-3=a-b+c$

これを解いて　$a=1$，$b=1$，$c=-3$

別解　等式に $x=1$，0，2 を代入すると，それぞれ

$-3=c$，$-3=a-b+c$，$-1=a+b+c$

これを解いて　$a=1$，$b=1$，$c=-3$

逆に，このとき

$(\text{右辺})=(x-1)^2+(x-1)-3$

$=(x^2-2x+1)+(x-1)-3=x^2-x-3=(\text{左辺})$

となり，与式は x についての恒等式である。

したがって　$a=1$，$b=1$，$c=-3$

(3)　等式の右辺を x について整理すると　$12x^2+43x+c=4ax^2+(5a+4b)x+5b$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$12=4a$，$43=5a+4b$，$c=5b$

これを解いて　$a=3$，$b=7$，$c=35$

(4)　等式の左辺を x について整理すると　$(a+b+c)x^2+(a-b)x-c=2x^2+3x-1$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$a+b+c=2$，$a-b=3$，$-c=-1$

これを解いて　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

別解　等式に $x=0$，1，-1 を代入すると，それぞれ

$-c=-1$，$2a=4$，$2b=-2$

これを解いて　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

逆に，このとき

$(\text{左辺})=2x(x+1)-x(x-1)+(x+1)(x-1)$

$=2x^2+2x-x^2+x+x^2-1=2x^2+3x-1=(\text{右辺})$

となり，与式は x についての恒等式である。

したがって　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

(5)　等式の右辺を x について整理すると

$x^3=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$1=a$，$0=3a+b$，$0=3a+2b+c$，$0=a+b+c+d$

これを解いて　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

別解　等式に $x=-2$，-1，0，1 を代入すると，それぞれ

$-8=-a+b-c+d$，$-1=d$，$0=a+b+c+d$，$1=8a+4b+2c+d$

これを解いて　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

逆に，このとき

$(\text{右辺})=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1$

$=(x^3+3x^2+3x+1)-3(x^2+2x+1)+3(x+1)-1$

$=x^3=(\text{左辺})$

となり，与式は x についての恒等式である。

したがって　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

6

解答　(1)　$a=1$，$b=2$　　(2)　$a=3$，$b=1$，$c=-1$

解説

(1)　両辺に $(x-1)(x+1)$ を掛けて

$3x-1=a(x+1)+b(x-1)$　……①

[解法 1]　(係数比較法)　右辺を展開して整理すると

$3x-1=(a+b)x+a-b$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$3=a+b$，$-1=a-b$

この連立方程式を解いて　$a=1$，$b=2$

[解法 2]　(数値代入法)　① が x についての恒等式ならば

$x=1$　を代入して　$2=2a$　　よって　$a=1$

$x=-1$ を代入して　$-4=-2b$　よって　$b=2$

逆に，このとき ① の右辺は

$(x+1)+2(x-1)=3x-1$

となり，左辺と一致するから ① は恒等式である。

よって　$a=1$，$b=2$

(2)　両辺に $(x+1)^2(x-1)$ を掛けて

$x-5=a(x-1)+b(x+1)(x-1)+c(x+1)^2$　……①

[解法 1]　(係数比較法)　右辺を展開して整理すると

$x-5=(b+c)x^2+(a+2c)x+(-a-b+c)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$0=b+c$，$1=a+2c$，$-5=-a-b+c$

この連立方程式を解いて　$a=3$，$b=1$，$c=-1$

[解法 2]　(数値代入法)　① が x についての恒等式ならば

$x=1$　を代入して　$-4=4c$

$x=-1$ を代入して　$-6=-2a$

$x=0$　を代入して　$-5=-a-b+c$

これを解いて　$a=3$，$b=1$，$c=-1$

逆に，このとき ① の右辺は

$3(x-1)+(x+1)(x-1)-(x+1)^2=x-5$

となり，左辺と一致するから ① は恒等式である。

よって　　$a=3$，$b=1$，$c=-1$

$\boxed{7}$

解答　$x=-1$，$y=-2$

解説

等式を k について整理すると

$$(x-2y-3)k+(x-3y-5)=0$$

これが k についての恒等式であるとき

$$x-2y-3=0,\quad x-3y-5=0$$

これを解いて　　$x=-1$，$y=-2$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$a=-3$，$b=4$，商は $2x-1$　　(2)　$a=6$，$b=24$，商は $x+8$

解説

(1)　商は１次式になるから $cx+d$ とおくと

$$2x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)(cx+d)+x+3$$

この等式は x についての恒等式である。

右辺を x について整理すると

$$2x^3+ax^2+bx+2=cx^3+(-c+d)x^2+(c-d+1)x+(d+3)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$2=c,\quad a=-c+d,\quad b=c-d+1,\quad 2=d+3$$

これを解いて　　$a=-3$，$b=4$，$c=2$，$d=-1$

よって　　$a=-3$，$b=4$，商は　$2x-1$

(2)　商は１次式になるから $cx+d$ とおくと

$$x^3+ax^2-13x+b=(x^2-2x+3)(cx+d)$$

この等式は x についての恒等式である。

右辺を x について整理すると

$$x^3+ax^2-13x+b=cx^3+(-2c+d)x^2+(3c-2d)x+3d$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$1=c,\quad a=-2c+d,\quad -13=3c-2d,\quad b=3d$$

これを解いて　　$a=6$，$b=24$，$c=1$，$d=8$

よって　　$a=6$，$b=24$，商は　$x+8$

$\boxed{1}$

解答　(1)　商 $2x+3y+4$，余り $-y^2+11y+8$

(2)　商 $2y+3x+12$，余り $-x^2-5x+32$

解説

$2x^2+5xy+2y^2-2x+6y-4$ を x について整理すると

$$2x^2+(5y-2)x+(2y^2+6y-4)$$

y について整理すると　　$2y^2+(5x+6)y+(2x^2-2x-4)$

(1)

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x+(3y+4) \\ \hline
x+(y-3) & 2x^2+(5y-2)x+(2y^2+6y-4) \\
 & 2x^2+(2y-6)x \\ \cline{2-2}
 & \quad (3y+4)x+(2y^2+6y-4) \\
 & \quad (3y+4)x+(3y^2-5y-12) \\ \cline{2-2}
 & \qquad -y^2+11y+8
\end{array}$$

商 $2x+3y+4$，
余り $-y^2+11y+8$

(2)

$$\begin{array}{r|l}
 & 2y+(3x+12) \\ \hline
y+(x-3) & 2y^2+(5x+6)y+(2x^2-2x-4) \\
 & 2y^2+(2x-6)y \\ \cline{2-2}
 & \quad (3x+12)y+(2x^2-2x-4) \\
 & \quad (3x+12)y+(3x^2+3x-36) \\ \cline{2-2}
 & \qquad -x^2-5x+32
\end{array}$$

商 $2y+3x+12$，
余り $-x^2-5x+32$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\dfrac{x^2-3}{x-3}$　　(2)　$-4x^2+7x$

解説

(1)　$$\frac{x^4-7x^2+12}{x^2-x-6}\times\frac{2x^2+7x+3}{2x+1}=\frac{(x^2-3)(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-3)}\times\frac{(2x+1)(x+3)}{2x+1}$$

$$=\frac{(x^2-3)(x-2)(x+3)}{x-3}$$

よって　　$$(与式)=\frac{\dfrac{(x^2-3)(x-2)(x+3)}{x-3}}{(x-2)(x+3)}=\frac{x^2-3}{x-3}$$

(2)　$$(与式)=\frac{3x-5}{1-\dfrac{x+1}{(x+1)-1}}-\frac{x(2x-3)}{1+\dfrac{x-1}{(x-1)-1}}$$

$$=\frac{3x-5}{1-\dfrac{x+1}{x}}-\frac{x(2x-3)}{1+\dfrac{x-1}{x-2}}=\frac{(3x-5)x}{x-(x+1)}-\frac{x(2x-3)(x-2)}{(x-2)+(x-1)}$$

$$=-x(3x-5)-\frac{x(2x-3)(x-2)}{2x-3}=-3x^2+5x-x(x-2)$$

$$=-3x^2+5x-x^2+2x=-4x^2+7x$$

$\boxed{3}$

解答　$a=2$，$b=2$，$c=1$

解説

右辺を展開して整理すると

$$2x^2-xy-3y^2+5x-5y+a=2x^2-xy-3y^2+(2b+c)x+(-3b+c)y+bc$$

この等式が x，y についての恒等式となるのは，両辺の各項の係数が等しいときであるから

$2b+c=5$　　…… ①

$-3b+c=-5$　…… ②

$bc=a$　　…… ③

①，② から　　$b=2$，$c=1$

これを ③ に代入して　　$a=2$

以上から　　$a=2$，$b=2$，$c=1$

$\boxed{1}$

解答　$p=-4$，$q=12$，$r=6$

解説

$2x-4y+5z=3$ ……①，$3x+y+4z=1$ ……② とする。

①×4−②×5 から　$-7x-21y=7$

したがって　$x=-3y-1$ ……③

①×3−②×2 から　$-14y+7z=7$

したがって　$z=2y+1$ ……④

③，④ を $px^2+qy^2+rz^2=2$ に代入すると

$$p(-3y-1)^2+qy^2+r(2y+1)^2=2$$

整理すると　$(9p+q+4r)y^2+(6p+4r)y+p+r-2=0$

これが y についての恒等式であるから

$$9p+q+4r=0,\ 6p+4r=0,\ p+r-2=0$$

この連立方程式を解いて　$p=-4$，$q=12$，$r=6$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$(a,\ b)=(6,\ 6),\ (-6,\ -6)$　(2)　$a=7, b=13$

解説

(1)　$x^4+ax^3+11x^2+bx+1=(x^2+px+q)^2$ とおける．

右辺を展開すると

$$x^4+ax^3+11x^2+bx+1=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$$

両辺の係数を比較すると

$$a=2p\text{……①},\ 11=p^2+2q\text{……②},\ b=2pq\text{……③},\ 1=q^2\text{……④}$$

④ から　$q=\pm1$

[1]　$q=1$ のとき

② に代入して　$11=p^2+2$　よって　$p=\pm3$

(i)　$p=3$ のとき　① から　$a=6$，③ から　$b=6$

これは a，b が整数であるから適する．

(ii)　$p=-3$ のとき　① から　$a=-6$，③ から　$b=-6$

これは a，b が整数であるから適する．

[2]　$q=-1$ のとき

② に代入して　$11=p^2-2$　よって　$p=\pm\sqrt{13}$

①，③ に代入すると，a，b が整数にならないから不適．

[1]，[2] から，求める a，b の値は　$(a,\ b)=(6,\ 6),\ (-6,\ -6)$

(2)　条件から　$x^4-x^3-ax^2+bx-6=(x-1)^2(x^2+cx+d)$ と表される．

右辺を展開すると　右辺$=x^4+(c-2)x^3+(-2c+d+1)x^2+(c-2d)x+d$

よって　$-1=c-2, -a=-2c+d+1, b=c-2d, -6=d$

これを解いて　$c=1, d=-6, a=7, b=13$　答

$\boxed{3}$

解答　(1)　$f(0)=f(1)=f(2)=0$　(2)　3　(3)　$f(x)=x^3-3x^2+2x$

解説

(1)　与式に $x=0$ を代入すると　$f(0)=0$

$x=-1$ を代入すると　$f(1)=-f(0)$

$x=1$ 　を代入すると　$f(1)=f(2)$

よって　$f(0)=f(1)=f(2)=0$

(2)　$f(x)$ の次数を n とする。

(1) より，$f(x)$ は異なる 3 個の x の値に対して 0 となるが，恒等的に 0 ではない。

よって，恒等式の両辺の次数を比較すると

$2n=n+3$　ゆえに　$n=3$

(3)　(2) の結果から，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおける。

$f(0)=f(1)=f(2)=0$ であるから

$d=0$，$a+b+c+d=0$，$8a+4b+2c+d=0$

よって　$b=-3a$，$c=2a$，$d=0$

ゆえに　$f(x)=ax^3-3ax^2+2ax=ax(x^2-3x+2)=ax(x-1)(x-2)$

$f(x^2)=ax^2(x^2-1)(x^2-2)$，$f(x+1)=a(x+1)x(x-1)$ を恒等式に代入すると

$$ax^2(x^2-1)(x^2-2)=x^3\cdot a(x+1)x(x-1)-2x^4+2x^2$$

x^2 の項の係数を比較すると　$2a=2$　よって　$a=1$

ゆえに　$f(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$

$\boxed{1}$

解答　略

解説

$(\text{左辺})=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)=6a^2b+2b^3$

$(\text{右辺})=6a^2b+2b^3$

よって　$(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$

別解　$(\text{左辺})=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

$=6a^2b+2b^3=2b(3a^2+b^2)=(\text{右辺})$

よって　$(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$a+b=1$ より，$b=1-a$ であるから

$(\text{左辺})=a^2+(1-a)^2+1=a^2+1-2a+a^2+1=2a^2-2a+2=2(a^2-a+1)$

$(\text{右辺})=2\{a+(1-a)-a(1-a)\}=2(a+1-a-a+a^2)=2(a^2-a+1)$

よって，等式は成り立つ。

別解　$a+b=1$ であるから

$(\text{左辺})=(a+b)^2-2ab+1=1^2-2ab+1=2-2ab=2(1-ab)$

$(\text{右辺})=2(1-ab)$

よって，等式は成り立つ。

(2)　$a+b+c=0$ から　$c=-(a+b)$

$(\text{左辺})=b\{-(a+b)\}\{b-(a+b)\}-(a+b)a\{-(a+b)+a\}+ab(a+b)$

$=ab(a+b)+ab(a+b)+ab(a+b)=3ab(a+b)$

$(\text{右辺})=-3ab\{-(a+b)\}=3ab(a+b)$

よって　$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)=-3abc$

別解 1　$(\text{左辺})-(\text{右辺})=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$

$=\{bc(b+c)+abc\}+\{ca(c+a)+abc\}+\{ab(a+b)+abc\}$

$=bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)$

$=(bc+ca+ab)(a+b+c)$

$a+b+c=0$ であるから　$(\text{左辺})-(\text{右辺})=0$

よって　$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)=-3abc$

別解 2　$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$ であるから

$(\text{左辺})=bc(-a)+ca(-b)+ab(-c)=-3abc=(\text{右辺})$

よって　$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)=-3abc$

(3)　$a+b+c=0$ から　$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$

$(\text{左辺})=a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)+3abc$

$=-a^3-b^3-c^3+3abc$

$=-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$=-0\cdot(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　(2)　略

解説

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$，$c=dk$

(1)　$(\text{左辺})=(bk+b)(dk-d)=bd(k+1)(k-1)$

$(右辺)=(bk-b)(dk+d)=bd(k-1)(k+1)$

よって　$(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d)$

(2)　$(左辺)=\dfrac{b^2k+d^2k}{b^2k-d^2k}=\dfrac{k(b^2+d^2)}{k(b^2-d^2)}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

$(右辺)=\dfrac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\dfrac{k^2(b^2+d^2)}{k^2(b^2-d^2)}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

よって　$\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

$$\begin{aligned}(a-2)(b-2)(c-2)&=\{ab-2(a+b)+4\}(c-2)\\&=abc-2ab-2(a+b)c+4(a+b)+4c-8\\&=abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8\\&=abc-abc+4\cdot2-8=0\end{aligned}$$

よって　$a-2=0$　または　$b-2=0$　または　$c-2=0$

したがって，a，b，c のうち少なくとも１つは２である。

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$(右辺)=(x^5+x^4+x^3+x^2+x)-(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$=x^5-1=(左辺)$

よって　$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

(2)　$(左辺)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$(右辺)=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2adbc+b^2c^2$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

よって　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

別解　$(右辺)=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2adbc+b^2c^2$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$

$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(左辺)$

よって　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$a+b+c=0$ から　$c=-(a+b)$

$(左辺)=a^3\{b+(a+b)\}+b^3\{-(a+b)-a\}+\{-(a+b)\}^3(a-b)$

$=a^3(a+2b)+b^3(-2a-b)-(a+b)^3(a-b)$

$=a^4+2a^3b-2ab^3-b^4-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a-b)$

$=a^4+2a^3b-2ab^3-b^4-(a^4+2a^3b-2ab^3-b^4)$

$=0=(右辺)$

よって　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0$

別解　$(左辺)=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+b^3c-bc^3$

$=(b-c)a^3-(b-c)(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)(b-c)$

$=(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}$

ここで

$$\begin{aligned}a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)&=(c-a)b^2+(c^2-ca)b+a^3-c^2a\\&=(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c+a)(c-a)\\&=(c-a)\{b^2+cb-a(c+a)\}\\&=(c-a)\{b+(c+a)\}(b-a)\\&=-(a-b)(c-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

であるから

$(左辺)=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

よって，$a+b+c=0$ のとき　$(左辺)=0$

ゆえに　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0$

(2)　$a+b+c=0$ から　$c=-(a+b)$

$(左辺)=\{b-(a+b)\}^2+\{-(a+b)+a\}^2+(a+b)^2$

$=a^2+b^2+(a^2+2ab+b^2)=2(a^2+ab+b^2)$

$(右辺)=-2\{-b(a+b)-(a+b)a+ab\}$

$=-2(-ab-b^2-a^2-ab+ab)=2(a^2+ab+b^2)$

よって　$(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2=-2(bc+ca+ab)$

別解　$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$ であるから

$(左辺)-(右辺)=(-a)^2+(-b)^2+(-c)^2+2(bc+ca+ab)$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=(a+b+c)^2=0^2=0$

よって　$(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2=-2(bc+ca+ab)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$，$c=dk$

[1]　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{bk-b}{b}=k-1$，　$\dfrac{c-d}{d}=\dfrac{dk-d}{d}=k-1$

よって　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

[2]　$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{b^2k}{b^2k^2+b^2}=\dfrac{k}{k^2+1}$，　$\dfrac{cd}{c^2+d^2}=\dfrac{d^2k}{d^2k^2+d^2}=\dfrac{k}{k^2+1}$

よって　$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{cd}{c^2+d^2}$

(2)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと　$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$

[1]　$\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{ak+bk+ck}{a+b+c}=k$，　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{ak}{a}=k$

よって　$\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x}{a}$

[2]　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{a^2+b^2+c^2}=k^2$

$\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}=\dfrac{abk^2+bck^2+cak^2}{ab+bc+ca}=k^2$

よって　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

$(x-a)(y-a)(z-a)=xyz-(yz+zx+xy)a+(x+y+z)a^2-a^3$

よって，$x+y+z=a$，$a(yz+zx+xy)=xyz$ が成り立つとき

$(x-a)(y-a)(z-a)=xyz-xyz+a\cdot a^2-a^3=0$

したがって，$x-a=0$ または $y-a=0$ または $z-a=0$ であるから，

x，y，z のうち少なくとも１つは a である。

$\boxed{1}$

解答　略

解説

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$$(\text{左辺})=\frac{a^2}{(a+b)(-b)}+\frac{b^2}{(-a)(b+a)}+\frac{(a+b)^2}{(-b)(-a)}$$

$$=\frac{-a^3-b^3+(a+b)^3}{ab(a+b)}=\frac{3a^2b+3ab^2}{ab(a+b)}=\frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)}=3$$

したがって，等式は証明された。

別解　$a+b+c=0$ より，

$a+b=-c$，$a+c=-b$，$b+c=-a$ であるから

$$(\text{左辺})=\frac{a^2}{(-c)(-b)}+\frac{b^2}{(-a)(-c)}+\frac{c^2}{(-b)(-a)}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc+3abc}{abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$$

$$=\frac{3abc}{abc}=3$$

したがって，等式は証明された。

$\boxed{2}$

解答　$\dfrac{2}{11}$

解説

$\dfrac{x+y}{6}=\dfrac{y+z}{7}=\dfrac{z+x}{8}=k$ とおくと，$k\fallingdotseq 0$ で

$x+y=6k$　……①

$y+z=7k$　……②

$z+x=8k$　……③

辺々加えて　$2(x+y+z)=21k$　　よって　$x+y+z=\dfrac{21}{2}k$　……④

④−②，④−③，④−① から　$x=\dfrac{7}{2}k$，$y=\dfrac{5}{2}k$，$z=\dfrac{9}{2}k$

したがって　$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xz+yz-y^2}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)+(xz+yz)}$

$$=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)+(x+y)z}=\frac{x-y}{x-y+z}$$

$$=\frac{\frac{7}{2}k-\frac{5}{2}k}{\frac{7}{2}k-\frac{5}{2}k+\frac{9}{2}k}=\frac{k}{\frac{11}{2}k}=\frac{2}{11}$$

$\boxed{3}$

解答　$a+b+c\fallingdotseq 0$ のとき 2，$a+b+c=0$ のとき -1

解説

$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=k$ とおくと

$b+c=ak$ ……①，$c+a=bk$ ……②，$a+b=ck$ ……③

①+②+③ から　$2(a+b+c)=(a+b+c)k$

[1]　$a+b+c\fallingdotseq 0$ のとき　$k=2$

このとき，①−② から　$a=b$，　②−③ から　$b=c$

すなわち，$a=b=c$ が得られる。

[2]　$a+b+c=0$ のとき　$b+c=-a$

したがって　$k=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{-a}{a}=-1$

よって　$a+b+c\fallingdotseq 0$ のとき 2，$a+b+c=0$ のとき -1

$\boxed{1}$

解答　略

解説

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$ から　$\dfrac{yz+zx+xy}{xyz}=\dfrac{1}{x+y+z}$

よって　$(x+y+z)(yz+zx+xy)=xyz$

ゆえに　$\{x+(y+z)\}\{(y+z)x+yz\}-xyz=0$

$(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)=0$

$(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}=0$

$(y+z)(x+y)(x+z)=0$

よって　$y+z=0$ または $x+y=0$ または $x+z=0$

したがって，x，y，z のうちどれか 2 つの和は 0 である。

$\boxed{2}$［大阪市立大］

解答　略

解説

$A=(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2+(\gamma-1)^2$ とおくと

$$A=(\alpha^2-2\alpha+1)+(\beta^2-2\beta+1)+(\gamma^2-2\gamma+1)$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2(\alpha+\beta+\gamma)+3$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2(\alpha+\beta+\gamma)+3$$

これに条件式を代入すると

$$A=3^2-2\cdot 3-2\cdot 3+3=0$$

すなわち　$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2+(\gamma-1)^2=0$

よって，α，β，γ はすべて 1 である。

$\boxed{3}$

解答　略

解説

異なる 3 つの値 x_1，x_2，x_3 に対して

$a{x_1}^2+bx_1+c=0$　……①，$a{x_2}^2+bx_2+c=0$　……②，

$a{x_3}^2+bx_3+c=0$　……③

が成り立つとする。

①−② から　$(x_1-x_2)\{a(x_1+x_2)+b\}=0$

①−③ から　$(x_1-x_3)\{a(x_1+x_3)+b\}=0$

$x_1\fallingdotseq x_2$，$x_1\fallingdotseq x_3$ であるから

$a(x_1+x_2)+b=0$　……④，$a(x_1+x_3)+b=0$　……⑤

④−⑤ から　$a(x_2-x_3)=0$　　$x_2\fallingdotseq x_3$ であるから　$a=0$

$a=0$ を ④ に代入して　$b=0$

$a=b=0$ を ① に代入して　$c=0$

$\boxed{1}$

解答 (1)　略　(2)　略

解説

(1)　$x>3$，$y>4$ から　$x-3>0$，$y-4>0$

よって　$xy+12-(4x+3y)=x(y-4)-3(y-4)$
$=(x-3)(y-4)>0$

ゆえに　$xy+12>4x+3y$

(2)　$\dfrac{a}{1+a}-\dfrac{b}{1+b}=\dfrac{a(1+b)-b(1+a)}{(1+a)(1+b)}=\dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)}$

$a>b>0$ より，$a-b>0$，$1+a>0$，$1+b>0$ であるから　$\dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)}>0$

したがって　$\dfrac{a}{1+a}>\dfrac{b}{1+b}$

$\boxed{2}$

解答 (1)　略　(2)　証明は略，等号成立は $x=y=-2$ のとき　(3)　略

解説

(1)　$(a^2+11)-6a=a^2-6a+11$
$=(a^2-6a+9)+11-9=(a-3)^2+2>0$

よって　$a^2+11>6a$

(2)　$x^2+2y^2-(2xy-4y-4)=x^2-2xy+2y^2+4y+4$
$=(x^2-2xy+y^2)-y^2+2y^2+4y+4$
$=(x-y)^2+y^2+4y+4=(x-y)^2+(y+2)^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$x-y=0$ かつ $y+2=0$ すなわち $x=y=-2$ のときである。

(3)　$x^2-xy+y^2+x-2y+2=x^2-(y-1)x+y^2-2y+2$

$$=\left\{x^2-2\cdot\frac{y-1}{2}x+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{y-1}{2}\right)^2+y^2-2y+2$$

$$=\left(x-\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{2}y+\frac{7}{4}$$

$$=\left(x-\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2+1>0$$

$\boxed{3}$

解答 (1)　証明略，$a=0$ または $b=0$　(2)　証明略，$a=b$　(3)　証明略，$ab\geqq 0$

解説

(1)　$(5\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2-(\sqrt{25a+9b})^2=(25a+30\sqrt{a}\sqrt{b}+9b)-(25a+9b)$
$=30\sqrt{a}\sqrt{b}=30\sqrt{ab}\geqq 0$　……①

よって　$(5\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2\geqq(\sqrt{25a+9b})^2$

$5\sqrt{a}+3\sqrt{b}\geqq 0$，$\sqrt{25a+9b}\geqq 0$ であるから

$5\sqrt{a}+3\sqrt{b}\geqq\sqrt{25a+9b}$

等号が成り立つのは，① から $a=0$ または $b=0$ のときである。

(2)　$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$
$=a-2\sqrt{ab}+b$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$　……①

よって　$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2\geqq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{2(a+b)}\geqq 0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqq 0$ であるから　$\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

等号が成り立つのは，① から $a=b$ のときである。

(3)　$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$
$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$
$=2(|ab|-ab)\geqq 0$　……①

よって　$|a+b|^2\leqq(|a|+|b|)^2$

$|a+b|\geqq 0$，$|a|+|b|\geqq 0$ であるから　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

等号が成り立つのは，$|ab|-ab=0$

すなわち　$|ab|=ab$　より　$ab\geqq 0$　のとき

別解　$-|a|\leqq a\leqq|a|$，$-|b|\leqq b\leqq|b|$ であるから

辺々を加えて　$-(|a|+|b|)\leqq a+b\leqq|a|+|b|$

$|a|+|b|\geqq 0$ であるから　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

$\boxed{4}$

解答 (1)　証明は略，等号成立は $a=\dfrac{1}{6}$ のとき

(2)　証明は略，等号成立は $ab=4$ のとき

解説

相加平均と相乗平均の大小関係を利用する。

(1)　$9a>0$，$\dfrac{1}{4a}>0$ であるから

$$9a+\frac{1}{4a}\geqq 2\sqrt{9a\cdot\frac{1}{4a}}=2\sqrt{\frac{9}{4}}=3$$

等号が成り立つのは，$9a=\dfrac{1}{4a}$ すなわち $a^2=\dfrac{1}{36}$ のときであるが，$a>0$ であるから

$a=\dfrac{1}{6}$ のときである。

(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{16}{a}\right)=ab+16+1+\dfrac{16}{ab}=ab+\dfrac{16}{ab}+17$

$a>0$，$b>0$ より，$ab>0$，$\dfrac{16}{ab}>0$ であるから

$$ab+\frac{16}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}}=8$$

よって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{16}{a}\right)\geqq 8+17=25$

等号が成り立つのは，$ab=\dfrac{16}{ab}$ すなわち $(ab)^2=16$ のときであるが，$ab>0$ であるから $ab=4$ のときである。

$\boxed{5}$

解答　$a=\sqrt{2}-1$ のとき最小値 $2\sqrt{2}-3$

解説

$a-2+\dfrac{2}{a+1}=a+1+\dfrac{2}{a+1}-3$

$a>0$ より，$a+1>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$$a+1+\frac{2}{a+1}\geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{2}{a+1}}=2\sqrt{2}$$

よって　$a-2+\dfrac{2}{a+1}\geqq 2\sqrt{2}-3$

等号が成り立つのは，$a+1=\dfrac{2}{a+1}$ のときである。

このとき　$(a+1)^2=2$

$a+1>0$ であるから　$a=\sqrt{2}-1$

したがって　$a=\sqrt{2}-1$ のとき最小値 $2\sqrt{2}-3$

1

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$x>-3$，$y>2$ より　　$x+3>0$，$y-2>0$

よって　　$xy-6-(2x-3y)=x(y-2)+3(y-2)$

$=(x+3)(y-2)>0$

ゆえに　　$xy-6>2x-3y$

(2)　$\dfrac{b+2}{a+1}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a(b+2)-b(a+1)}{a(a+1)}=\dfrac{2a-b}{a(a+1)}$

$2a>b>0$ より，$2a-b>0$ であるから　　$\dfrac{2a-b}{a(a+1)}>0$

したがって　　$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+2}{a+1}$

(3)　$xy+yz-(zx+y^2)=x(y-z)-y(y-z)=(x-y)(y-z)$

$x\geqq y\geqq z$ より，$x-y\geqq 0$，$y-z\geqq 0$ であるから　　$(x-y)(y-z)\geqq 0$

したがって　　$xy+yz\geqq zx+y^2$

参考　等号が成り立つのは　　$x-y=0$　または　$y-z=0$

すなわち，$x=y$　または　$y=z$ のときである。

2

解答　(1)　証明は略，等号成立は $x=2$ のとき

(2)　証明は略，等号成立は $x=y=0$ のとき

(3)　証明は略，等号成立は $x=y=0$ のとき

(4)　証明略，等号が成り立つのは $x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ のとき

解説

(1)　$(x^2-x+4)-3x=x^2-4x+4=(x-2)^2\geqq 0$

よって　　$x^2-x+4\geqq 3x$

等号が成り立つのは，$x-2=0$ すなわち $x=2$ のときである。

(2)　$x^2+6xy+11y^2=(x^2+6xy+9y^2)-9y^2+11y^2$

$=(x+3y)^2+2y^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$x+3y=0$ かつ $y=0$ すなわち $x=y=0$ のときである。

(3)　$2(x^2+3y^2)-5xy=2\left(x^2-\dfrac{5}{2}xy\right)+6y^2=2\left(x-\dfrac{5}{4}y\right)^2-2\cdot\dfrac{25}{16}y^2+6y^2$

$=2\left(x-\dfrac{5}{4}y\right)^2+\dfrac{23}{8}y^2\geqq 0$

よって　　$2(x^2+3y^2)\geqq 5xy$

等号が成り立つのは，$x-\dfrac{5}{4}y=0$ かつ $y=0$ すなわち $x=y=0$ のときである。

(4)　$x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5=x^2+2(y-2)x+5y^2-8y+5$

$=\{x^2+2(y-2)x+(y-2)^2\}-(y-2)^2+5y^2-8y+5$

$=\{x+(y-2)\}^2+4y^2-4y+1$

$=(x+y-2)^2+(2y-1)^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$x+y-2=0$　かつ　$2y-1=0$，すなわち $x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ のときである。

3

解答　(1)　証明略，$a=0$ または $b=0$　　(2)　証明略，$b=0$ または $a=b$

(3)　証明略，$a=b$ または $a=-b$

解説

(1)　$(7\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2-(\sqrt{49a+4b})^2=(49a+28\sqrt{ab}+4b)-(49a+4b)$

$=28\sqrt{ab}\geqq 0$　……①

よって　$(7\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2\geqq(\sqrt{49a+4b})^2$

$7\sqrt{a}+2\sqrt{b}\geqq 0$，$\sqrt{49a+4b}\geqq 0$ であるから

$7\sqrt{a}+2\sqrt{b}\geqq\sqrt{49a+4b}$

等号が成り立つのは，① から　$a=0$　または　$b=0$ のとき。

(2)　$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)$

$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$　……①

$a\geqq b\geqq 0$ のとき　　$2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geqq 0$

よって　　$(\sqrt{a-b})^2\geqq(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$\sqrt{a-b}\geqq 0$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}\geqq 0$ であるから　　$\sqrt{a-b}\geqq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

等号が成り立つのは，① から，$\sqrt{b}=0$　または　$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$

すなわち　$b=0$　または　$a=b$ のときである。

(3)　$\left\{\sqrt{2(a^2+b^2)}\right\}^2-(|a|+|b|)^2=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$

$=a^2-2|a||b|+b^2=(|a|-|b|)^2\geqq 0$

よって　　$\left\{\sqrt{2(a^2+b^2)}\right\}^2\geqq(|a|+|b|)^2$

$\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqq 0$，$|a|+|b|\geqq 0$ であるから　　$\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqq|a|+|b|$

等号が成り立つのは，$|a|-|b|=0$　のとき，

すなわち，　$|a|=|b|$　より　　$a=b$ または $a=-b$　のとき

4

解答　(1)　証明は略，等号成立は $a=3$ のとき

(2)　証明は略，等号成立は $a=2b$ のとき

(3)　証明は略，等号成立は $a+b=1$ のとき

解説

相加平均と相乗平均の大小関係を利用する。

(1)　$a>0$ であるから　　$a+\dfrac{9}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{9}{a}}=6$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{9}{a}$　すなわち　$a^2=9$　のときであるが，

$a>0$ であるから $a=3$ のときである。

(2)　(左辺)$=4+\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}\geqq 4+2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{4b}{a}}=8$

等号が成り立つのは，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{4b}{a}$　すなわち　$a^2=4b^2$　のときであるが，

$a>0$，$b>0$ であるから $a=2b$ のときである。

(3)　$a+b>0$ であるから

(左辺)$=\dfrac{2}{a+b}+2(a+b)\geqq 2\sqrt{\dfrac{2}{a+b}\cdot 2(a+b)}=4$

等号が成り立つのは，$\dfrac{2}{a+b}=2(a+b)$　すなわち $(a+b)^2=1$ のときであるが，

$a+b>0$ であるから $a+b=1$ のときである。

5

解答　(1)　$x=1$ で最小値 4　　(2)　$a=2b$ のとき最小値 49

解説

(1)　$x+\dfrac{9}{x+2}=x+2+\dfrac{9}{x+2}-2$

$x>0$ より $x+2>0$，$\dfrac{9}{x+2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$x+2+\dfrac{9}{x+2}\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\dfrac{9}{x+2}}=2\cdot 3=6$

ゆえに　　$x+\dfrac{9}{x+2}\geqq 4$

等号が成り立つのは，$x+2=\dfrac{9}{x+2}$ のときである。

このとき　　$(x+2)^2=9$

$x+2>0$ であるから　　$x+2=3$

ゆえに　　$x=1$

したがって　　$x=1$ で最小値 4

(2)　$(2a+3b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{3}{b}\right)=25+\dfrac{24b}{a}+\dfrac{6a}{b}$

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{24b}{a}>0$，$\dfrac{6a}{b}>0$ であるから，

(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$\dfrac{24b}{a}+\dfrac{6a}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{24b}{a}\cdot\dfrac{6a}{b}}=24$

よって　　$25+\dfrac{24b}{a}+\dfrac{6a}{b}\geqq 25+24=49$

等号が成り立つのは，$\dfrac{24b}{a}=\dfrac{6a}{b}$ のときである。

このとき　　$a^2=4b^2$　　$a>0$，$b>0$ であるから　　$a=2b$

したがって　　$a=2b$ のとき最小値 49

1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$a+b=1$ から　$b=1-a$

よって　$a^2+b^2-\frac{1}{2}=a^2+(1-a)^2-\frac{1}{2}$

$$=2a^2-2a+\frac{1}{2}=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0$$

したがって　$a^2+b^2\geqq\frac{1}{2}$

(2)　$a+b+c=1$ から　$c=1-(a+b)$

よって　$a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}=a^2+b^2+\{1-(a+b)\}^2-\frac{1}{3}$

$$=2a^2+2ab+2b^2-2a-2b+\frac{2}{3}$$

$$=2\{a^2+(b-1)a\}+2b^2-2b+\frac{2}{3}$$

$$=2\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2-2\left(\frac{b-1}{2}\right)^2+2b^2-2b+\frac{2}{3}$$

$$=2\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(b^2-\frac{2}{3}b+\frac{1}{9}\right)$$

$$=2\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(b-\frac{1}{3}\right)^2\geqq 0$$

したがって　$a^2+b^2+c^2\geqq\frac{1}{3}$

2

解答　略

解説

$|a|<1$ から　$-1<a<1$

$a>-1$ の両辺に b を加えて　$a+b>b-1$

$b>1$ より，$b-1>0$ であるから　$a+b>0$

ゆえに　$\frac{ab+1}{a+b}+1=\frac{ab+1+a+b}{a+b}=\frac{(a+1)(b+1)}{a+b}>0$,

$1-\frac{ab+1}{a+b}=\frac{a+b-1-ab}{a+b}=\frac{(1-a)(b-1)}{a+b}>0$

よって　$-1<\frac{ab+1}{a+b}<1$

3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　[1]　$|a|-|b|<0$ のとき

$|a+b|\geqq 0$ であるから，$|a|-|b|<|a+b|$ は成り立つ。

[2]　$|a|-|b|\geqq 0$ のとき

$|a+b|^2-(|a|-|b|)^2=a^2+2ab+b^2-(a^2-2|a||b|+b^2)$

$=2(ab+|ab|)\geqq 0$

よって　$(|a|-|b|)^2\leqq|a+b|^2$

$|a|-|b|\geqq 0$，$|a+b|\geqq 0$ であるから　$|a|-|b|\leqq|a+b|$

[1]，[2] から　$|a|-|b|\leqq|a+b|$

(2)　$\sqrt{14}-\sqrt{10}>\sqrt{15}-\sqrt{11}$ を示すには，$\sqrt{14}+\sqrt{11}>\sqrt{15}+\sqrt{10}$ を示せばよい。

$\sqrt{14}+\sqrt{11}>0$，$\sqrt{15}+\sqrt{10}>0$　……①

両辺の平方の差をとると

$(\sqrt{14}+\sqrt{11})^2-(\sqrt{15}+\sqrt{10})^2=(14+2\sqrt{14\cdot 11}+11)-(15+2\sqrt{15\cdot 10}+10)$

$=2(\sqrt{154}-\sqrt{150})>0$

よって　$(\sqrt{14}+\sqrt{11})^2>(\sqrt{15}+\sqrt{10})^2$

ゆえに，① から　$\sqrt{14}+\sqrt{11}>\sqrt{15}+\sqrt{10}$

したがって　$\sqrt{14}-\sqrt{10}>\sqrt{15}-\sqrt{11}$

4

解答　(ア)　25　　(イ)　$\frac{1}{6}$

解説

$$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)=36xy+9+4+\frac{1}{xy}=13+36xy+\frac{1}{xy}$$

$x>0$，$y>0$ より，$36xy>0$，$\frac{1}{xy}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$36xy+\frac{1}{xy}\geqq 2\sqrt{36xy\cdot\frac{1}{xy}}=12$$

よって　$13+36xy+\frac{1}{xy}\geqq 13+12=25$

等号が成り立つのは，$36xy=\frac{1}{xy}$ (>0) すなわち　$xy=\frac{1}{6}$ のときである。

ゆえに，$x>0$，$y>0$ において，$\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)$ は $xy=\frac{1}{6}$ のとき最小値 25 をとる。

したがって，$x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\left(9x+\frac{1}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)\geqq k$ が常に成り立つような定数 k の最大値は　ア25

また，$k=25$ のとき等号が成り立つのは，$xy=$ イ$\frac{1}{6}$ のときである。

5

解答　証明略，$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=6$

解説

(左辺)$=\left(ab+\frac{4a}{c}+1+\frac{4}{bc}\right)\left(c+\frac{9}{a}\right)$

$=abc+9b+4a+\frac{36}{c}+c+\frac{9}{a}+\frac{4}{b}+\frac{36}{abc}$

$=\left(4a+\frac{9}{a}\right)+\left(9b+\frac{4}{b}\right)+\left(c+\frac{36}{c}\right)+\left(abc+\frac{36}{abc}\right)$

各項はすべて正であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

(左辺)$\geqq 2\sqrt{4a\cdot\frac{9}{a}}+2\sqrt{9b\cdot\frac{4}{b}}+2\sqrt{c\cdot\frac{36}{c}}+2\sqrt{abc\cdot\frac{36}{abc}}$

$=12+12+12+12=48$

よって　$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{c}\right)\left(c+\frac{9}{a}\right)\geqq 48$

等号が成り立つのは

$4a=\frac{9}{a}$ かつ $9b=\frac{4}{b}$ かつ $c=\frac{36}{c}$ かつ $abc=\frac{36}{abc}$

すなわち　$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=6$ のときである。

別解　$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$a+\frac{1}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ ……①，$b+\frac{4}{c}\geqq 2\sqrt{\frac{4b}{c}}$ ……②，$c+\frac{9}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{9c}{a}}$ ……③

この３つの不等式の各辺はすべて正であるから，辺々掛けて

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{c}\right)\left(c+\frac{9}{a}\right)\geqq 8\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{c}\cdot\frac{9c}{a}}=8\cdot 6=48$$

等式が成り立つのは，①，②，③ のすべてで等号が成り立つとき，すなわち

$ab=1$ ……①′，$bc=4$ ……②′，$ca=9$ ……③′ のときである。

①′，②′，③′ の辺々を掛けて　$(abc)^2=36$

$abc>0$ であるから　$abc=6$ ……④

④ と ②′，④ と ③′，④ と ①′ から，それぞれ

$$a=\frac{3}{2},\ b=\frac{2}{3},\ c=6$$

6

解答　(1)　(ア)　$\sqrt{3}$　　(イ)　$2\sqrt{3}-4$　　(2)　(ウ)　$-1+\sqrt{3}$　　(エ)　6

解説

(1)　$\frac{x^2-4x+3}{x}=x-4+\frac{3}{x}$

$x>0$，$\frac{3}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{3}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{3}$$

ゆえに　$x-4+\frac{3}{x}\geqq 2\sqrt{3}-4$

等号が成り立つのは，$x>0$　かつ　$x=\frac{3}{x}$ のとき，

すなわち　$x=\sqrt{3}$ のときである。

したがって，$\frac{x^2-4x+3}{x}$ は $x=$ ア$\sqrt{3}$ のとき，最小値 イ$2\sqrt{3}-4$ をとる。

(2)　$x^2+2x+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+2}+2=x(x+2)+\frac{2(x+2)-2x}{x(x+2)}+2$

$$=x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}+2$$

$x(x+2)>0$，$\frac{4}{x(x+2)}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}\geqq 2\sqrt{x(x+2)\cdot\frac{4}{x(x+2)}}=4$$

ゆえに　$x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}+2\geqq 6$

等号が成り立つのは，$x>0$　かつ　$x(x+2)=\frac{4}{x(x+2)}$ のときである。

$x(x+2)=\frac{4}{x(x+2)}$ から　$x^2(x+2)^2=4$

よって　$(x^2+2x)^2-4=0$

ゆえに　$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=0$

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ であるから　$x^2+2x-2=0$

これを解いて　$x=-1\pm\sqrt{3}$

$x>0$ を満たすものは　$x=-1+\sqrt{3}$

したがって，$x=$ ウ $-1+\sqrt{3}$ のとき，最小値 エ 6 をとる。

1

解答　略

解説

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

ここで，$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから　$x+y+z>0$

また　$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$$=\frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geqq 0$$

ゆえに　$x^3+y^3+z^3\geqq 3xyz$ ……①

参考　等号は $x-y=y-z=z-x=0$ すなわち $x=y=z$ のとき成り立つ。

$X=\sqrt[3]{x}$，$Y=\sqrt[3]{y}$，$Z=\sqrt[3]{z}$ とすると，X，Y，Z も正の実数であるから，① において

$x=X$，$y=Y$，$z=Z$ とすると　$X^3+Y^3+Z^3\geqq 3XYZ$

すなわち　$x+y+z\geqq 3\cdot\sqrt[3]{xyz}$　　ゆえに　$\dfrac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$

参考　等号は $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$ すなわち $x=y=z$ のとき成り立つ。

2

解答　(1) 略　(2) $\dfrac{1}{3}$

解説

(1) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-2abxy-2bcyz-2cazx$$

$$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+c^2x^2-2cazx+a^2z^2$$

$$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\geqq 0$$

よって，$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ が成り立つ。

(2) (1) の不等式で $a=b=c=1$ とおくと

$$3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2=1$$

よって　$x^2+y^2+z^2\geqq\dfrac{1}{3}$

等号が成り立つのは，$y-x=z-y=x-z=0$ すなわち $x=y=z$ のとき。

このとき，$x+y+z=1$ から　$x=y=z=\dfrac{1}{3}$

したがって，$x^2+y^2+z^2$ は $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}$ をとる。

3

解答　$\dfrac{a+2}{a+1}$，$\sqrt{2}$，$\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a}$

解説

$a>\sqrt{2}$ であるから　$a-\sqrt{2}>0$

$$\sqrt{2}-\frac{a+2}{a+1}=\frac{\sqrt{2}(a+1)-(a+2)}{a+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)a-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{a+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2})}{a+1}>0$$

よって　$\dfrac{a+2}{a+1}<\sqrt{2}$

また　$\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a}-\sqrt{2}=\dfrac{a^2+2-2\sqrt{2}a}{2a}=\dfrac{(a-\sqrt{2})^2}{2a}>0$

よって　$\sqrt{2}<\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a}$

したがって，3 つの数を小さい方から順に並べると

$$\frac{a+2}{a+1},\ \sqrt{2},\ \frac{a}{2}+\frac{1}{a}$$

4

解答　$a=b=c$ のとき最小値 8

解説

$P=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ とおくと

$$P=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)$$

$$=\left(1+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\right)$$

$$=2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$ (等号成立は $a=b$ のとき)

$\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{b}}=2$ (等号成立は $b=c$ のとき)

$\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\geqq 2\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}}=2$ (等号成立は $c=a$ のとき)

よって　$P\geqq 2+2\times 3=8$

したがって，$a=b=c$ のとき最小値 8 をとる。

別解　$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$，$b+c\geqq 2\sqrt{bc}$，$c+a\geqq 2\sqrt{ca}$

(等号成立は，それぞれ $a=b$，$b=c$，$c=a$ のとき)

それぞれ，両辺ともに正であるから辺々を掛けると

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$$

よって　$\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geqq 8$

したがって，$a=b=c$ のとき最小値 8 をとる。

1

解答　(ア)　4　(イ)　6　(ウ)　3　(エ)　-3　(オ)　6

解説

$(x^3+1)^4$ の展開式の一般項は　${}_4\mathrm{C}_r x^{3r}$

x^9 の項は $r=3$ のときで，その係数は　${}_4\mathrm{C}_3={}^{ア}4$

x^6 の項は $r=2$ のときで，その係数は　${}_4\mathrm{C}_2={}^{イ}6$

また，$(x^3+x-1)^3$ の展開式の一般項は

$$\frac{3!}{p!q!r!}x^{3p}x^q\cdot(-1)^r=\frac{3!}{p!q!r!}(-1)^r x^{3p+q}$$

ただし　$p+q+r=3$　……①

x^5 の項は $3p+q=5$ のときで，これと ① を同時に満たす 0 以上の整数 p，q，r は $p=1$，$q=2$，$r=0$ のみである。

よって，x^5 の係数は　$\dfrac{3!}{1!2!0!}(-1)^0={}^{ウ}3$

同様にして，x^2 の項は $p=0$，$q=2$，$r=1$ のときであるから，x^2 の係数は

$$\frac{3!}{0!2!1!}(-1)^1={}^{エ}-3$$

ここで，$(x^3+1)^4(x^3+x-1)^3$ の展開式における x^{11} の係数を考える。

$(x^3+1)^4$ の項は x^{12}，x^9，x^6，x^3，定数項だけであることと $(x^3+x-1)^3$ の項を考えて

$$x^{11}=x^9\cdot x^2,\quad x^{11}=x^6\cdot x^5$$

の場合がある。

よって，上で求めたア ～ エより，x^{11} の係数は　$4\times(-3)+6\times3={}^{オ}6$

2

解答　(1)　略　(2)　$\dfrac{n}{k}$　(3)　略

解説

(1)　$2^n=(1+1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k$

(2)　${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

よって　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k}{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}=\dfrac{\dfrac{n!}{k!}}{\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!}}=\dfrac{n}{k}$

(3)　(2) から　$k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$　　また，(1) から　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k=2^{n-1}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n}n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k=n\cdot2^{n-1}$

3

解答　(1)　$54x^2-12x+1$　(2)　$780x^2+40x+1$　(3)　$780x^2-1520x+741$

解説

(1)　$(3x-1)^4=\{3x+(-1)\}^4$ の展開式で x の 2 次以下の項が x^3 で割ったときの余りである。

よって　${}_4\mathrm{C}_2(3x)^2(-1)^2+{}_4\mathrm{C}_3 3x\cdot(-1)^3+{}_4\mathrm{C}_4(-1)^4=54x^2-12x+1$

(2)　$(x+1)^{40}$ の展開式で x の 2 次以下の項が x^3 で割ったときの余りである。

よって　${}_{40}\mathrm{C}_{38}x^2\cdot1^{38}+{}_{40}\mathrm{C}_{39}x\cdot1^{39}+{}_{40}\mathrm{C}_{40}1^{40}=780x^2+40x+1$

(3)　$x-1=t$ とおくと　$x=t+1$

よって，x^{40} すなわち $(t+1)^{40}$ を，$(x-1)^3$ すなわち t^3 で割ったときの余りは，(2) の結果から　$780t^2+40t+1=780(x-1)^2+40(x-1)+1=780x^2-1520x+741$

4

解答　(1)　227　(2)　(ア)　3　(イ)　-1

解説

(1)　$15^2=x$ とおくと　$15^{10}+2\cdot15^2+1=x^5+2x+1$

$15^4-15^2+1=x^2-x+1$

x^5+2x+1 を x^2-x+1 で割ると次のようになる。

$$\begin{array}{r}
x^3+x^2-1\\
x^2-x+1\,\big)\overline{\,x^5+2x+1}\\
\underline{x^5-x^4+x^3}\\
x^4-x^3+2x+1\\
\underline{x^4-x^3+x^2}\\
-x^2+2x+1\\
\underline{-x^2+x-1}\\
x+2
\end{array}$$

したがって，余りは　$15^2+2=225+2=227$

(2)　x^3+4x^2+2x+k を $x+1$ で割ると次のようになる。

$$\begin{array}{r}
x^2+3x-1\\
x+1\,\big)\overline{\,x^3+4x^2+2x+k}\\
\underline{x^3+x^2}\\
3x^2+2x\\
\underline{3x^2+3x}\\
-x+k\\
\underline{-x-1}\\
k+1
\end{array}$$

よって，商は　$x^2+{}^{ア}3x-1$

また，余りは 0 であるから　$k+1=0$　　ゆえに　$k={}^{イ}-1$

5

解答　(1)　$a=-3$，$b=5$　(2)　$(x^2+5x-5)(x^2-5x-1)$

(3)　$x=\dfrac{-5\pm3\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

解説

(1)　(右辺)$=x^4+2ax^2+a^2-(b^2x^2-4bx+4)=x^4+(2a-b^2)x^2+4bx+a^2-4$

であるから，等式は　$x^4-31x^2+20x+5=x^4+(2a-b^2)x^2+4bx+a^2-4$

両辺の係数を比較すると

$2a-b^2=-31$　……①，

$4b=20$　……②，

$a^2-4=5$　……③

② から　$b=5$

① に代入して　$2a-25=-31$　　よって　$a=-3$

これは ③ を満たす。

したがって　$a=-3$，$b=5$

(2)　$a=-3$，$b=5$ のとき，(1) の等式から

$$\begin{aligned}x^4-31x^2+20x+5&=(x^2-3)^2-(5x-2)^2=\{(x^2-3)+(5x-2)\}\{(x^2-3)-(5x-2)\}\\&=(x^2+5x-5)(x^2-5x-1)\end{aligned}$$

(3)　(2) から　$(x^2+5x-5)(x^2-5x-1)=0$

ゆえに　$x^2+5x-5=0$ または $x^2-5x-1=0$

よって　$x=\dfrac{-5\pm3\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

6

解答　(1)　証明略，$a=b=c$　(2)　証明略，$a=b=c$　(3)　証明略，$a=b$

解説

(1)　
$$\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2&=2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca)\\&=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\\&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqq0\end{aligned}$$

ゆえに　$3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$

等号が成り立つのは　$a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$ すなわち $a=b=c$ のときである。

別解　コーシー・シュワルツの不等式

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$

[等号が成り立つのは，$ay=bx$ かつ $bz=cy$ かつ $cx=az$ のとき]

において，$x=y=z=1$ とすると

$3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$

等号が成り立つのは，$a=b$ かつ $b=c$ かつ $c=a$ すなわち $a=b=c$ のときである。

(2)　$\left(\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$

$=\dfrac{a+b+c}{3}-\dfrac{a+b+c+2\sqrt{a}\sqrt{b}+2\sqrt{b}\sqrt{c}+2\sqrt{c}\sqrt{a}}{9}$

$=\dfrac{2a+2b+2c-2\sqrt{a}\sqrt{b}-2\sqrt{b}\sqrt{c}-2\sqrt{c}\sqrt{a}}{9}$

$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2}{9}\geqq0$　……①

よって　$\left(\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}\right)^2\geqq\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$　……②

a，b，c が正の数のとき $\sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}>0$，$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}>0$ であるから

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}\geqq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}$$

等号が成り立つのは，① から　$a=b=c$ のときである。

(3)　$P=\left|\dfrac{a}{b}\sqrt{a}-\dfrac{b}{a}\sqrt{b}\right|^2-|\sqrt{a}-\sqrt{b}|^2$ とすると

$$\begin{aligned}P&=\left(\frac{a}{b}\sqrt{a}-\frac{b}{a}\sqrt{b}\right)^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=\frac{a^3}{b^2}-2\sqrt{ab}+\frac{b^3}{a^2}-(a-2\sqrt{ab}+b)\\&=\frac{a^5-a^3b^2-a^2b^3+b^5}{a^2b^2}=\frac{(a^2-b^2)(a^3-b^3)}{a^2b^2}\\&=\frac{(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2}\end{aligned}$$

$a>0$，$b>0$ であるから　$P\geqq0$

ゆえに　$\left|\dfrac{a}{b}\sqrt{a}-\dfrac{b}{a}\sqrt{b}\right|^2\geqq|\sqrt{a}-\sqrt{b}|^2$

$\left|\dfrac{a}{b}\sqrt{a}-\dfrac{b}{a}\sqrt{b}\right|\geqq 0$，$|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\geqq 0$ であるから

$$\left|\frac{a}{b}\sqrt{a}-\frac{b}{a}\sqrt{b}\right|\geqq|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$$

また，等号が成り立つのは $a=b$ のときである。

$\boxed{7}$

解答　(1)　略

(2)　$x=\dfrac{3}{13}$，$y=\dfrac{2}{13}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{13}$

(3)　$x=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，$y=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$ のとき最大値 $\sqrt{13}$

解説

(1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$

$$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2\geqq 0$$

よって　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

参考　等号が成り立つのは $ay=bx$ のときである。

なお，この不等式はコーシー・シュワルツの不等式と呼ばれている。

(2)　(1) の不等式に $a=3$，$b=2$ を代入すると

$$(3^2+2^2)(x^2+y^2)\geqq(3x+2y)^2$$

$3x+2y=1$　……①であるから　$13(x^2+y^2)\geqq 1$　よって　$x^2+y^2\geqq\dfrac{1}{13}$

等号が成り立つのは $3y=2x$　……②のときである。

①，②を解くと　$x=\dfrac{3}{13}$，$y=\dfrac{2}{13}$

ゆえに，x^2+y^2 は $x=\dfrac{3}{13}$，$y=\dfrac{2}{13}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{13}$ をとる。

(3)　(1) の不等式に $a=2$，$b=3$ を代入すると

$$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geqq(2x+3y)^2$$

$x^2+y^2=1$　……①であるから　$13\cdot 1\geqq(2x+3y)^2$

ゆえに　$-\sqrt{13}\leqq 2x+3y\leqq\sqrt{13}$

等号が成り立つのは $2y=3x$　……②のときである。

①，②を解くと

$$x=\pm\frac{2\sqrt{13}}{13},\ y=\pm\frac{3\sqrt{13}}{13}\quad(\text{複号同順})$$

このうち，$2x+3y=\sqrt{13}$ となるのは $x=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，$y=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$ のときである。

したがって，$2x+3y$ は $x=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，$y=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$ のとき最大値 $\sqrt{13}$ をとる。

$\boxed{8}$

解答　$x=\sqrt{2}-1$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解説

$$\frac{x+1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}}=\frac{1}{x+1+\dfrac{2}{x+1}}$$

$x>0$ であるから，$\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$ が最大となるのは，$x+1+\dfrac{2}{x+1}$ が最小となるときである。$x>0$ のとき $x+1>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$$x+1+\frac{2}{x+1}\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{x+1}}=2\sqrt{2}$$

等号が成り立つのは，$x+1=\dfrac{2}{x+1}$ のときである。

このとき　$(x+1)^2=2$　$x+1>0$ であるから　$x+1=\sqrt{2}$

したがって，$x=\sqrt{2}-1$ で最大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ をとる。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{80-k}{5(k+1)}$　(2)　13 乗

解説

(1)　$(x+5)^{80}$ の展開式の一般項は　${}_{80}\mathrm{C}_r x^{80-r}\cdot 5^r=5^r{}_{80}\mathrm{C}_r x^{80-r}$

x^k $(1\leqq k\leqq 80)$ の係数を a_k とすると　$a_k=5^{80-k}{}_{80}\mathrm{C}_{80-k}$

よって　$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{5^{79-k}{}_{80}\mathrm{C}_{79-k}}{5^{80-k}{}_{80}\mathrm{C}_{80-k}}$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{80!}{(79-k)!\{80-(79-k)\}!}\times\frac{(80-k)!\{80-(80-k)\}!}{80!}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{80!}{(79-k)!(k+1)!}\cdot\frac{(80-k)!k!}{80!}=\frac{80-k}{5(k+1)}$$

(2)　(1)の結果から

[1]　$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}<1$ とすると　$\dfrac{80-k}{5(k+1)}<1$

両辺に $5(k+1)$ $[>0]$ を掛けて　$80-k<5(k+1)$

これを解いて　$k>\dfrac{75}{6}=12.5$　よって，$k\geqq 13$ のとき　$a_k>a_{k+1}$

[2]　$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}>1$ とすると　$80-k>5(k+1)$

これを解いて　$k<\dfrac{75}{6}=12.5$　よって，$k\leqq 12$ のとき　$a_k<a_{k+1}$

ゆえに　$a_1<a_2<\cdots\cdots<a_{12}<a_{13}>a_{14}>\cdots\cdots>a_{80}$

よって，x の 13 乗の係数が最大になる。

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　$(1+x)^n(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n)$

$$+{}_n\mathrm{C}_1x({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n)+\cdots\cdots$$

$$+{}_n\mathrm{C}_nx^n({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n)$$

ゆえに，$(1+x)^n(1+x)^n$ の展開式において，x^n の項の係数は，${}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}$ により

$${}_n\mathrm{C}_0\cdot{}_n\mathrm{C}_n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-1}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot{}_n\mathrm{C}_0$$

$$={}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_k{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2$$

一方，$(1+x)^{2n}$ の展開式において，x^n の項の係数は　${}_{2n}\mathrm{C}_n$

したがって　${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2={}_{2n}\mathrm{C}_n$

(2)　$k{}_n\mathrm{C}_k=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ が成り立つ。

また　$2^{n-1}=(1+1)^{n-1}={}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$

よって，これらのことから

$${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n=n({}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})$$

$$=n\cdot 2^{n-1}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略　(4)　3

解説

(1)　$r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=r\cdot\dfrac{n\,!}{(n-r)\,!\,r\,!}=\dfrac{n\,!}{(n-r)\,!\,(r-1)\,!}$

$n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)\,!}{(n-r)\,!\,(r-1)\,!}=\dfrac{n\,!}{(n-r)\,!\,(r-1)\,!}$

よって　$r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

(2)　p は素数であるから，$p\geqq 2$ である。

ゆえに，(1) の等式から　$r\cdot{}_p\mathrm{C}_r=p\cdot{}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$　……[A]

ここで，${}_p\mathrm{C}_r$，${}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$ は整数である。

また，p は素数，r は $1\leqq r\leqq p-1$ を満たす整数であるから，p と r は互いに素である。

よって，[A] から，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数である。

したがって，${}_p\mathrm{C}_r$ は p で割り切れる。

(3)　二項定理により

$(1+x)^p={}_p\mathrm{C}_0+{}_p\mathrm{C}_1x+{}_p\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_rx^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^p$　……①

この等式 ① で $x=1$ とおくと

$2^p={}_p\mathrm{C}_0+{}_p\mathrm{C}_1+{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}+{}_p\mathrm{C}_p$

$=2+{}_p\mathrm{C}_1+{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}$　……②

(2) より，$1\leqq r\leqq p-1$ のとき，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数であるから，${}_p\mathrm{C}_1+{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}$ は p の倍数である。

$p\geqq 3$ であるから，② より，2^p を p で割った余りは 2 である。

(4)　(3) の等式 ① に $x=2$ を代入すると

$3^p={}_p\mathrm{C}_0+2{}_p\mathrm{C}_1+2^2{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^{p-1}{}_p\mathrm{C}_{p-1}+2^p{}_p\mathrm{C}_p$

$=2^p+1+2{}_p\mathrm{C}_1+2^2{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^{p-1}{}_p\mathrm{C}_{p-1}$　……③

(2) より，$1\leqq r\leqq p-1$ のとき，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数であるから，

$2{}_p\mathrm{C}_1+2^2{}_p\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^{p-1}{}_p\mathrm{C}_{p-1}$ は p の倍数である。

よって，③ から，3^p を p で割った余りは，2^p+1 を p で割った余りに等しい。

(3) より，2^p を p で割った余りは 2 であり，また，$p\geqq 5$ であるから，3^p を p で割った余りは　　$2+1=3$

4

解答　(1)　商は　$x+5$，　余りは　$-4x+6$

(2)　$X=26$，　$Y=4$

(3)　$a=1+\sqrt{5}$

解説

(1)　割り算を実行すると，右のようになる。

よって，商は　$x+5$，　余りは　$-4x+6$

$$\begin{array}{r}
x+5\\
x^2-2x\,\big)\,\overline{x^3+3x^2-14x+6}\\
\underline{x^3-2x^2}\\
5x^2-14x\\
\underline{5x^2-10x}\\
-4x+6
\end{array}$$

(2)　(1) より

$x^3+3x^2-14x+6=(x^2-2x)(x+5)-4x+6$

$x=a$ を代入すると

$a^3+3a^2-14a+6=(a^2-2a)(a+5)-4a+6$

すなわち　$X=Y(a+5)-4a+6$

a について整理すると　$(4-Y)a+X-5Y-6=0$

a は無理数，X，Y は有理数であるから　$4-Y=0$，　$X-5Y-6=0$

よって　$X=26$，　$Y=4$

(3)　$Y=4$ から　$a^2-2a=4$

よって，$a^2-2a-4=0$ を解いて　$a=1\pm\sqrt{5}$

素数 5 の平方根 $\sqrt{5}$ は無理数であるから，$1\pm\sqrt{5}$ は無理数である。

また，a は正の数であるから　$a=1+\sqrt{5}$

5

解答　$P(x)=x^2-x+1$

解説

$P(x)$ を定数とすると条件と矛盾する。よって

$P(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots$

とおく。ただし，$a\neq 0$，$n\geqq 1$ である。

よって

$P(x+1)-P(x)=a(x+1)^n+b(x+1)^{n-1}+\cdots\cdots-(ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots)$

$=anx^{n-1}+q_{n-2}(x)$

ただし，$q_{n-2}(x)$ を $n-2$ 次以下の整式とする。

$P(x+1)-P(x)=2x$ は x についての恒等式であるから，最高次の項を比較して

$n-1=1$　……①，　$an=2$　……②

① から　$n=2$

よって，② から　$a=1$

このとき，$P(x)=x^2+bx+c$ とおける。

$P(0)=1$ から　$c=1$

また　$P(x+1)-P(x)=(x+1)^2+b(x+1)+c-(x^2+bx+c)$

$=2x+b+1$

よって　$2x+b+1=2x$

この等式は，x についての恒等式であるから　$b+1=0$

すなわち　$b=-1$

したがって　$P(x)=x^2-x+1$

6

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　(右辺)−(左辺)$=\dfrac{y}{1+y}-\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{y(1+x)-x(1+y)}{(1+y)(1+x)}=\dfrac{y-x}{(1+y)(1+x)}$

$0\leqq x\leqq y$ であるから　$\dfrac{y-x}{(1+y)(1+x)}\geqq 0$　　よって　$\dfrac{x}{1+x}\leqq\dfrac{y}{1+y}$

参考　等号が成り立つのは，$x=y$ のときである。

(2)　(右辺)^2−(左辺)$^2=(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=(a^2+2|a||b|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)$

ここで，$-|ab|\leqq ab\leqq|ab|$ であるから　$2(|ab|-ab)\geqq 0$

ゆえに　$|a+b|^2\leqq(|a|+|b|)^2$

$|a+b|\geqq 0$，$|a|+|b|\geqq 0$ であるから　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

参考　等号が成り立つのは，$|ab|=ab$ すなわち $ab\geqq 0$ のときである。

(3)　(2) より，$0\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$ であるから，(1) において，$x=|a+b|$，$y=|a|+|b|$ とすると　$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqq\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}$　……①

ここで，$1+|a|+|b|\geqq 1+|a|$，$1+|a|+|b|\geqq 1+|b|$ であるから

$\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqq\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$　……②

①，② から　$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqq\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$

参考　等号が成り立つのは，

$|a+b|=|a|+|b|$ かつ $\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|}{1+|a|}$ かつ $\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|b|}{1+|b|}$

すなわち　$a=0$ または $b=0$ のときである。

7

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqq 0$

よって　$3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$

また，等号が成り立つとき

$a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$

すなわち　$a=b=c$

(2)　(1) を利用すると　$3(a^4+b^4+c^4)\geqq(a^2+b^2+c^2)^2$

よって　$27(a^4+b^4+c^4)\geqq 9(a^2+b^2+c^2)^2=\{3(a^2+b^2+c^2)\}^2$

(1) から　$\{3(a^2+b^2+c^2)\}^2\geqq\{(a+b+c)^2\}^2=(a+b+c)^4$

ゆえに　$27(a^4+b^4+c^4)\geqq(a+b+c)^4$

8

解答　(1)　[略]　　(2)　$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 3),\ (0,\ 3,\ 0),\ (3,\ 0,\ 0)$ のとき最大値 10

解説

(1)　$(1+2^{a+b})-(2^a+2^b)=(2^a-1)(2^b-1)$

条件より $a\geqq 0$, $b\geqq 0$ であるから $2^a\geqq 1$, $2^b\geqq 1$

ゆえに　$(2^a-1)(2^b-1)\geqq 0$　　よって　$2^a+2^b\leqq 1+2^{a+b}$

等号は $2^a=1$ または $2^b=1$

すなわち　$a=0$ または $b=0$ のときに成立する．

(2)　(1) で証明した不等式を用いると $2^a+2^b+2^c\leqq 1+2^{a+b}+2^c$ ……①

$\leqq 1+1+2^{a+b+c}$ ……②

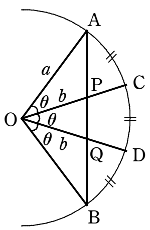
$=1+1+2^3=10$

① の等号は $a=0$ または $b=0$ のときに成り立ち，② の等号は $a+b=0$ または $c=0$ のときに成り立つ．ゆえに，$a+b+c=3$ であるから $(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 3),\ (0,\ 3,\ 0),\ (3,\ 0,\ 0)$ のとき最大値 10 をとる．

9

解答　略

解説



$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=b$，

$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{COD}=\theta$ $(0^\circ<\theta<60^\circ)$ とおく．

$\triangle\mathrm{AOP}$ において，余弦定理により

$\mathrm{AP}^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$\triangle\mathrm{POQ}$ において，余弦定理により

$\mathrm{PQ}^2=b^2+b^2-2b^2\cos\theta$

よって

$\mathrm{AP}^2-\mathrm{PQ}^2=a^2-b^2-2b(a-b)\cos\theta$

$=(a-b)(a+b-2b\cos\theta)$

$a>b$，$0^\circ<\theta<60^\circ$ であるから

$a-b>0$，

$$a+b-2b\cos\theta > b+b-2b\cos\theta = 2b(1-\cos\theta) > 0$$

ゆえに　$AP^2-PQ^2>0$　　すなわち　$AP^2>PQ^2$

したがって　　$AP>PQ$

別解　$\angle APO=\alpha$ とおくと　$\angle OPQ=180°-\alpha$

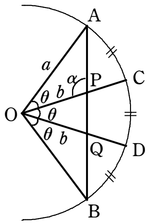
△AOPにおいて，正弦定理により　$\dfrac{AP}{\sin\theta}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

よって　　$AP=\dfrac{a\sin\theta}{\sin\alpha}$

△POQ において，正弦定理により　$\dfrac{PQ}{\sin\theta}=\dfrac{b}{\sin(180°-\alpha)}$

すなわち　$\dfrac{PQ}{\sin\theta}=\dfrac{b}{\sin\alpha}$

よって　　$PQ=\dfrac{b\sin\theta}{\sin\alpha}$



$a>b$ であるから　　$AP>PQ$

10

解答　$x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ で最小値6

解説

$x^4-2x^3-x^2+2x+34=(x^2-x+3)(x^2-x-5)+49$

であるから

$$\frac{x^4-2x^3-x^2+2x+34}{x^2-x+3}=\frac{(x^2-x+3)(x^2-x-5)+49}{x^2-x+3}$$
$$=(x^2-x-5)+\frac{49}{x^2-x+3}$$
$$=(x^2-x+3)+\frac{49}{x^2-x+3}-8 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，x^2-x+3 について　　$x^2-x+3=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$

よって，$x^2-x+3>0$，$\dfrac{49}{x^2-x+3}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係に

より　　$(x^2-x+3)+\dfrac{49}{x^2-x+3}\geqq 2\sqrt{(x^2-x+3)\cdot\dfrac{49}{x^2-x+3}}=2\cdot 7=14$　$\cdots\cdots ②$

①，② から　　$f(x)\geqq 14-8=6$

等号が成り立つのは $x^2-x+3=\dfrac{49}{x^2-x+3}$ すなわち $x^2-x+3=7$ のときである。

ゆえに　　$x^2-x-4=0$

$x\geqq 0$ であるから，この2次方程式の解は　　$x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

したがって，関数 $f(x)$ は $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ で最小値6 をとる。

11

解答　$x=y=z=24$ のとき最小値144

解説

$(x+2y+3z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}\right)=14+2\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)+6\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\right)+3\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ より

$$x+2y+3z=4\left\{14+2\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+6\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+3\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\right\}$$

$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係から

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqq 2\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}=2$，　$\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\geqq 2\sqrt{\dfrac{z}{y}\cdot\dfrac{y}{z}}=2$，　$\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\geqq 2\sqrt{\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{z}{x}}=2$

等号は，それぞれ $\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{z}{y}=\dfrac{y}{z}$，$\dfrac{x}{z}=\dfrac{z}{x}$ のとき成立するから，$x=y=z$ のときすべての等号が成立する。

このとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ から　　$\dfrac{6}{x}=\dfrac{1}{4}$

よって　　$x=y=z=24$

したがって，$x+2y+3z$ は，$x=y=z=24$ のとき

最小値　$24+2\cdot 24+3\cdot 24=144$

をとる。

別解　$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから，コーシー・シュワルツの不等式により

$$\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2y})^2+(\sqrt{3z})^2\}\times\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2\right\}$$
$$\geqq\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{2y}\cdot\sqrt{\frac{2}{y}}+\sqrt{3z}\cdot\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2$$

すなわち　　$(x+2y+3z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}\right)\geqq(1+2+3)^2$

よって　　$(x+2y+3z)\cdot\dfrac{1}{4}\geqq 6^2$

ゆえに　　$x+2y+3z\geqq 144$

等号は，$\sqrt{x}:\sqrt{2y}:\sqrt{3z}=\sqrt{\dfrac{1}{x}}:\sqrt{\dfrac{2}{y}}:\sqrt{\dfrac{3}{z}}$　$(x>0,\ y>0,\ z>0)$

　　かつ　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$，

すなわち $x=y=z=24$ のとき成立する。

したがって，求める最小値は　　144

1

解答　(1)　$\dfrac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}$　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p$ は，p 個の因数 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r$ の積

$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)\times(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)\times\cdots\cdots\times(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)$ である。

$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p$ の展開式における ${x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots\cdots{x_r}^{p_r}$ $(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_r=p)$ の項は，p 個の因数のうちから，x_1 を p_1 個，x_2 を p_2 個，……，x_r を p_r 個取り，それらを掛け合わせて得られる項をすべて加え合わせたものである。

それらの項の数は，p 個の因数のうちから，x_1 を p_1 個，x_2 を p_2 個，……，x_r を p_r 個選ぶ順列の総数であるから，${x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots\cdots{x_r}^{p_r}$ の項の係数は　　$\dfrac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}$

(2)　$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p$ の展開式における ${x_1}^p$，${x_2}^p$，……，${x_r}^p$ の係数はそれぞれ1である。

したがって，(1) から，

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p-({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots\cdots+{x_r}^p) \quad \cdots\cdots ①$$

の各項は　　$\dfrac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}{x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots\cdots{x_r}^{p_r}$

ただし　$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_r=p$，

$1\leqq i\leqq r$ について　$0\leqq p_i\leqq p-1$ $\cdots\cdots ②$

と表すことができる。

ここで，$\dfrac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}=\dfrac{p\cdot(p-1)!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}$ は整数であるが，p は素数であり，② から，この式の分母は p を素因数にもたない。

ゆえに，$\dfrac{p!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}$ は p の倍数である。よって，① は p で割り切れる。

(3)　(2) の ① において，$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_r=1$ を代入すると，$r^p-r=r(r^{p-1}-1)$ は素数 p で割り切れる。

ここで，r は p で割り切れないから，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れる。

2

解答　(1)　15　　(2)　順に -120，225　　(3)　15　　(4)　略

解説

(1)　$(1-x^2)^6$ の展開式の一般項は　　${}_6C_r\cdot 1^{6-r}\cdot(-x^2)^r=(-1)^r{}_6C_rx^{2r}$

x^4 の項は $2r=4$ すなわち $r=2$ のときで，その係数は　　$(-1)^2{}_6C_2=15$

(2)　$(1+x)^6$ の展開式の一般項は　　${}_6C_p\cdot 1^{6-p}\cdot x^p={}_6C_px^p$

$(1-y)^6$ の展開式の一般項は　　${}_6C_q\cdot 1^{6-q}\cdot(-y)^q=(-1)^q{}_6C_qy^q$

よって，$(1+x)^6(1-y)^6$ の展開式の一般項は　　$(-1)^q{}_6C_p\cdot{}_6C_qx^py^q$

xy^3 の項は $p=1$，$q=3$ のときで，その係数は　　$(-1)^3{}_6C_1\cdot{}_6C_3=-6\cdot 20=-120$

x^2y^2 の項は $p=2$，$q=2$ のときで，その係数は　　$(-1)^2{}_6C_2\cdot{}_6C_2=15\cdot 15=225$

(3)　求める値は，$(1+x)^6(1-y)^6$ の展開式における x，y の4次の項，すなわち y^4，xy^3，x^2y^2，x^3y，x^4 の係数の和である。

これは $y=x$ とおいた $(1+x)^6(1-y)^6=(1-x^2)^6$ の展開式における x^4 の係数に等しい。

(1) により，求める値は　　15

別解　(与式)$=2({}_6C_0\cdot{}_6C_4-{}_6C_1\cdot{}_6C_3)+({}_6C_2)^2=2(1\cdot 15-6\cdot 20)+15^2=15$

(4) $f(n)$ は $(1+x)^n(1-y)^n$ の展開式における x，y の4次の項，すなわち y^4，xy^3，x^2y^2，x^3y，x^4 の係数の和である。

これは $y=x$ とおいた $(1+x)^n(1-y)^n=(1-x^2)^n$ の展開式における x^4 の係数に等しい。

$(1-x^2)^n$ の展開式の一般項は　${}_nC_r\cdot 1^{n-r}\cdot(-x^2)^r=(-1)^r{}_nC_r x^{2r}$

x^4 の項は $2r=4$ すなわち $r=2$ のときであるから　$f(n)=(-1)^2{}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

よって，$f(n)$ は n の2次式である。

別解　$f(n)=2({}_nC_0\cdot{}_nC_4-{}_nC_1\cdot{}_nC_3)+({}_nC_2)^2$

$$=2\left\{1\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}-n\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}\right\}+\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$$

$$=\frac{n(n-1)}{12}\{(n-2)(n-3)-4n(n-2)+3n(n-1)\}$$

$$=\frac{n(n-1)}{12}(n^2-3n+6-4n^2+8n+3n^2-3n)=\frac{n(n-1)}{12}\cdot 6=\frac{n(n-1)}{2}$$

よって，$f(n)$ は n の2次式である。

3

解答　(1) 略　(2) $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

解説

(1) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\neq 0)$ とおくと

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a_n}{x^{n-4}}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-5}}+\cdots\cdots+a_0x^4$$

この右辺は，$n\geqq 5$ のとき多項式にならない。

一方，条件(A)から $x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は多項式である。

よって，条件(A)を満たす多項式 $f(x)$ の次数は4以下である。

(2) $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ とおくと

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$$

条件(A)から　$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

この両辺の各項の係数を比較すると　$a_0=a_4$，$a_1=a_3$

よって　$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$　……①

条件(B)において，$x=1$，$x=2$ を代入すると

$$f(0)=f(1),\quad f(-1)=f(2)$$

これと条件(C)から

$$a_0=1,\quad 2a_0+2a_1+a_2=1,\quad 2a_0-2a_1+a_2=17a_0+10a_1+4a_2$$

よって　$a_0=1$，$a_1=-2$，$a_2=3$

①に代入して　$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

このとき　$f(1-x)=(1-x)^4-2(1-x)^3+3(1-x)^2-2(1-x)+1$

$$=(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)-2(1-3x+3x^2-x^3)$$
$$+3(1-2x+x^2)-2(1-x)+1$$
$$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1=f(x)$$

となり，条件(B)を満たす。

したがって　$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

4

解答　(1) 略　(2) 略

解説

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ から　$\dfrac{bc+ca+ab}{abc}=\dfrac{1}{a+b+c}$

ゆえに　$(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$

$\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-abc=0$

$(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)=0$

$(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}=0$

よって　$(b+c)(c+a)(a+b)=0$

ゆえに　$a+b=0$　または　$b+c=0$　または　$c+a=0$

$a+b=0$ のとき　$b=-a$

n は奇数であるから　$\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{(-a)^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{c^n}$

$$\frac{1}{(a+b+c)^n}=\frac{1}{(a-a+c)^n}=\frac{1}{c^n}$$

したがって　$\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{(a+b+c)^n}$

$b+c=0$，$c+a=0$ のときも同様に成り立つ。

以上から　$\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{(a+b+c)^n}$

(2) $x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおくと，条件の式は

$$X+Y+Z=0,\quad X^3+Y^3+Z^3=0$$

$X^3+Y^3+Z^3=(X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)+3XYZ$ であるから

$0=3XYZ$　すなわち　$XYZ=0$

ゆえに　$(x-1)(y-1)(z-1)=0$

したがって　$x-1=0$　または　$y-1=0$　または　$z-1=0$

すなわち，x，y，z の少なくとも1つは1に等しい。

5

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) 略

解説

(1) $(n+2)^3-(n+1)(n+2)(n+3)=n^3+6n^2+12n+8-(n^3+6n^2+11n+6)$
$$=n+2>0$$

したがって　$(n+1)(n+2)(n+3)<(n+2)^3$

よって　$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)}<n+2$　……①

参考　まず，$(n+1)(n+3)<(n+2)^2$ が成り立つことを示し，両辺に $n+2$ を掛けてもよい。

(2) $(n+1)(n+4)(n+6)-(n+3)^3=n^3+11n^2+34n+24-(n^3+9n^2+27n+27)$
$$=2n^2+7n-3$$
$$=2n^2+4n+3(n-1)>0$$

したがって　$(n+3)^3<(n+1)(n+4)(n+6)$

よって　$n+3<\sqrt[3]{(n+1)(n+4)(n+6)}$　……②

(3) $(n+2)(n+3)(n+5)-(n+3)^3=n^3+10n^2+31n+30-(n^3+9n^2+27n+27)$
$$=n^2+4n+3>0$$

したがって　$(n+3)^3<(n+2)(n+3)(n+5)$

よって　$n+3<\sqrt[3]{(n+2)(n+3)(n+5)}$　……③

参考　まず，$(n+3)^2<(n+2)(n+5)$ が成り立つことを示し，両辺に $n+3$ を掛けてもよい。

(4) ②，③の辺々を掛けて

$$(n+3)^2<\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$$

したがって　$n+3<\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$

①において，n を $n+3$ におき換えると

$$\sqrt[3]{(n+4)(n+5)(n+6)}<n+5\quad\cdots\cdots④$$

①，④の辺々を掛けて

$$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<(n+2)(n+5)$$
$$=n^2+7n+10$$
$$=\left(n+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}<\left(n+\frac{7}{2}\right)^2$$

したがって　$\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<n+\dfrac{7}{2}$

以上から　$n+3<\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<n+\dfrac{7}{2}$

6

解答　(1) 最小値 $\dfrac{k^2}{3}$　(2) 最大値 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

解説

(1) $x+2y=k$ より　$x=-2y+k$

よって　$x^2+2y^2=(-2y+k)^2+2y^2=6y^2-4ky+k^2=6\left(y-\dfrac{k}{3}\right)^2+\dfrac{k^2}{3}$

ゆえに，$y=\dfrac{k}{3}$，$x=\dfrac{k}{3}$ のとき，x^2+2y^2 は最小値 $\dfrac{k^2}{3}$ をとる。

(2) $x+2y=k$ とすると　$f(x,\ y)=\dfrac{k+3}{x^2+2y^2+3}$

$k\leqq -3$ のとき，$f(x,\ y)\leqq 0$ となる．最大値を考えるのだから，$k>-3$ としてよい．

このとき，(1)から

$$f(x,\ y)\leqq\frac{k+3}{\frac{k^2}{3}+3}=\frac{3(k+3)}{k^2+9}=\frac{3}{\frac{k^2+9}{k+3}}=\frac{3}{\frac{(k-3)(k+3)+18}{k+3}}$$

$$=\frac{3}{k-3+\frac{18}{k+3}}=\frac{3}{k+3+\frac{18}{k+3}-6}$$

ここで，$k+3>0$，$\dfrac{18}{k+3}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均)から

$$k+3+\frac{18}{k+3}\geqq 2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$$

よって　$\dfrac{3(k+3)}{k^2+9}\leqq\dfrac{3}{6\sqrt{2}-6}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

ゆえに　$f(x,\ y)\leqq\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

等号が成り立つのは，$y=\dfrac{k}{3}$，$x=\dfrac{k}{3}$　かつ　$k>-3$　かつ　$k+3=\dfrac{18}{k+3}$ のとき，

すなわち，$x=y=-1+\sqrt{2}$　のときである．

このとき，$f(x,\ y)$ は最大値 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる．

7

解答　(1) 証明略，等号は $x=y$ のとき成り立つ

(2)　証明略，等号は $n=1$ または $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$ $(n\geqq 2)$ のとき成り立つ

解説

(1)　$x>0$，$y>0$ より，$xy>0$ であるから

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}-2=\frac{y^2+x^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geqq 0$$

よって　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqq 2$

等号が成立するための条件は，$x=y$ である。

(2)　[1]　$n=1$ のとき

左辺$=a_1\cdot\dfrac{1}{a_1}=1$，右辺$=1^2=1$ より，成り立つ。

[2]　$n\geqq 2$ のとき

$$(a_1+\cdots\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$=a_1\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)+a_2\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)+\cdots\cdots+a_n\left(\frac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_1}{a_n}\right)+\left(\frac{a_2}{a_1}+1+\cdots\cdots+\frac{a_2}{a_n}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_n}{a_2}+\cdots\cdots+1\right)$$

$$=n+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$$

（ただし，$1\leqq i<j\leqq n$）

ここで，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たす自然数の組 $(i,\ j)$ は ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個ある。

また，$a_i>0$，$a_j>0$ であるから，(1) より

$$\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\geqq 2\qquad（等号成立は\ a_i=a_j\ のとき）$$

よって　$(a_1+\cdots\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqq n+2\times\dfrac{n(n-1)}{2}=n^2$

$n=1$ のとき，等号は常に成り立つ。

$n\geqq 2$ のとき，等号が成立するための条件は　$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$

参考　一般に，次のシュワルツの不等式が成り立つ。

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)\geqq(x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n)^2$$

$x_i=a_i$，$y_j=\dfrac{1}{a_j}$ とすると，(2) の不等式になる。

8

解答　(1)　略　　(2)　$(x,\ y)=(3,\ 1),\ (7,\ 5)$

解説

(1)　$x^2=y^2+z$ から　$(x+y)(x-y)=z$

$z>0$ から　$(x+y)(x-y)>0$

$x>0$，$y>0$ より，$x+y>0$ であるから　$x-y>0$

よって　$x>y$　……①

また　$y+\dfrac{z}{2y}-x=\dfrac{2y^2+z-2xy}{2y}=\dfrac{2y^2+(x^2-y^2)-2xy}{2y}=\dfrac{(x-y)^2}{2y}$

$y>0$，① から　$\dfrac{(x-y)^2}{2y}>0$

よって　$y+\dfrac{z}{2y}>x$　……②

①，② から　$y<x<y+\dfrac{z}{2y}$

(2)　x，y を正の整数とすると，$y\geqq 1$ より $8\sqrt{2y-1}>0$ であるから，(1) の結果を利用すると，次の不等式が成り立つ。

$y<x<y+\dfrac{8\sqrt{2y-1}}{2y}$　……③

ここで　$\dfrac{8\sqrt{2y-1}}{2y}=4\sqrt{\dfrac{2y-1}{y^2}}=4\sqrt{\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{y^2}}=4\sqrt{-\left(\dfrac{1}{y}-1\right)^2+1}\leqq 4$

よって，③ から　$y<x<y+4$

x，y は整数であるから　$x=y+1,\ y+2,\ y+3$

[1]　$x=y+1$ のとき

$(y+1)^2=y^2+8\sqrt{2y-1}$ から　$2y+1=8\sqrt{2y-1}$

両辺を 2 乗すると　$(2y+1)^2=64(2y-1)$

整理すると　$4y^2-124y+65=0$

これを解くと　$y=\dfrac{31\pm 8\sqrt{14}}{2}$

y は整数であるから，不適。

[2]　$x=y+2$ のとき

$(y+2)^2=y^2+8\sqrt{2y-1}$ から　$y+1=2\sqrt{2y-1}$

両辺を 2 乗すると　$(y+1)^2=4(2y-1)$

整理すると　$y^2-6y+5=0$

よって　$(y-1)(y-5)=0$　　ゆえに　$y=1,\ 5$

$y=1$ のとき $x=3$，$y=5$ のとき $x=7$

[3]　$x=y+3$ のとき

$(y+3)^2=y^2+8\sqrt{2y-1}$ から　$6y+9=8\sqrt{2y-1}$

両辺を 2 乗すると　$(6y+9)^2=64(2y-1)$

整理すると　$36y^2-20y+145=0$

この 2 次方程式は実数解をもたないから，不適。

[1]～[3] から，求める正の整数 x，y の組は　$(x,\ y)=(3,\ 1),\ (7,\ 5)$

9

解答　略

解説

$x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$=x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$=(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2\geqq 0$

$1-(x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$

$=1-x^2-y^2+x^2y^2+x^2y^2-2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$=(1-x^2)(1-y^2)+x^2y^2-2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$=(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy)^2\geqq 0$

よって　$0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq 1$

別解　$x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$=x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$=(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2$

$|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ より $x=\cos\alpha$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$，$y=\cos\beta$ $(0\leqq\beta\leqq\pi)$ となる α，β が存在する。

$$\begin{aligned}x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}&=(\cos\alpha)\sqrt{1-\cos^2\beta}+(\cos\beta)\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\&=(\cos\alpha)|\sin\beta|+(\cos\beta)|\sin\alpha|\\&=\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha\\&=\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

$-1\leqq\sin(\alpha+\beta)\leqq 1$ から　$0\leqq\sin^2(\alpha+\beta)\leqq 1$

よって　$0\leqq(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2\leqq 1$

したがって　$0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq 1$