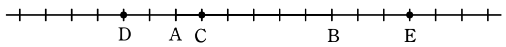
1 ★



2 ★

G は △ABC の重心であるから　CG : GD＝2 : 1

12 : GD＝2 : 1

よって　GD＝6 cm

同様に　AG : GF＝2 : 1

DC∥EF であるから　DG : EF＝AG : AF

6 : EF＝2 : (2＋1)

したがって　EF＝9 cm

3 ★

(1)　△DBE : △DEC＝BE : EC＝2 : 3

(2)　△DBE : △DBC＝BE : BC＝2 : (2＋3)

＝2 : 5

(3)　△DBC : △ADC＝DB : AD＝2 : 1

すなわち　△DBC : △ADC＝2 : 1

よって　$\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{DBC}$

(2) の結果から　$\triangle\mathrm{DBE}=\dfrac{2}{5}\triangle\mathrm{DBC}$

したがって

$\triangle\mathrm{DBE}:\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{2}{5}\triangle\mathrm{DBC}:\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{DBC}$

$=\left(10\times\dfrac{2}{5}\right):\left(10\times\dfrac{1}{2}\right)$

＝4 : 5

(4)　△DBC : △ABC＝DB : AB＝2 : (1＋2)

＝2 : 3

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{DBC}$

(2) の結果から　$\triangle\mathrm{DBE}=\dfrac{2}{5}\triangle\mathrm{DBC}$

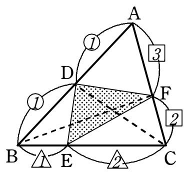
したがって

$\triangle\mathrm{DBE}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{2}{5}\triangle\mathrm{DBC}:\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{DBC}$

$=\left(10\times\dfrac{2}{5}\right):\left(10\times\dfrac{3}{2}\right)$

＝4 : 15

4 ★★



(1)　△ABC : △ADC＝AB : AD＝2 : 1

△ADC : △ADF＝AC : AF＝5 : 3

よって　$\triangle\mathrm{ADF}=\dfrac{3}{5}\triangle\mathrm{ADC}$

$=\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}\right)=\dfrac{3}{10}S$　答

(2)　△ABC : △BDC＝BA : BD＝2 : 1

△BDC : △BED＝BC : BE＝3 : 1

よって　$\triangle\mathrm{BED}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{BDC}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}\right)=\dfrac{1}{6}S$

△ABC : △CFB＝CA : CF＝5 : 2,

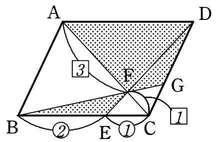
△CFB : △CFE＝CB : CE＝3 : 2

よって　$\triangle\mathrm{CFE}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{CFB}=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{2}{5}\triangle\mathrm{ABC}\right)=\dfrac{4}{15}S$

以上から　△DEF＝△ABC－△ADF－△BED－△CFE

$=S-\dfrac{3}{10}S-\dfrac{1}{6}S-\dfrac{4}{15}S=\dfrac{4}{15}S$　答

5 ★★



平行四辺形 ABCD の面積を S とする。

△ABC≡△CDA であるから　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}S$

AD∥EC であるから

AF : FC＝AD : CE＝(2＋1) : 1＝3 : 1

よって　△ABC : △FBC＝AC : FC＝4 : 1

また　△FBC : △FBE＝BC : BE＝3 : 2

したがって　$\triangle\mathrm{FBE}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{FBC}=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}\right)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{12}S$

AB∥GC であるから　CG : AB＝CF : AF＝1 : 3

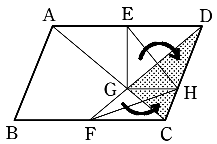
よって　CG : CD＝1 : 3

ゆえに　$\triangle\mathrm{CGF}=\dfrac{\mathrm{CG}}{\mathrm{CD}}\times\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CA}}\times\triangle\mathrm{CDA}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{24}S$

よって　(四角形 AFGD の面積)＝$\triangle\mathrm{CDA}-\triangle\mathrm{CGF}=\dfrac{1}{2}S-\dfrac{1}{24}S=\dfrac{11}{24}S$

したがって　(△FBE の面積) : (四角形 AFGD の面積)＝$\dfrac{1}{12}S:\dfrac{11}{24}S$＝2 : 11　答

6 ★★



平行四辺形 ABCD の面積を S，四角形 EGFH の面積を T とする。

GH∥ED であるから

△GEH＝△GDH

GH∥FC であるから

△GFH＝△GCH

よって　T＝△GEH＋△GFH＝△GDH＋△GCH

＝△CGD

AD∥FC であるから　AG : GC＝AD : FC＝2 : 1

ゆえに　△CGD : △CAD＝CG : CA＝1 : (1＋2)＝1 : 3

また，△CAD≡△ACB であるから　$\triangle\mathrm{CAD}=\dfrac{1}{2}S$

よって　$T=\triangle\mathrm{CGD}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{CAD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{6}S$

したがって，四角形 EGFH の面積は，平行四辺形 ABCD の面積の $\dfrac{1}{6}$ 倍である。

7 ★★★

(1)　△APQ : △ABQ＝AP : AB＝1 : (1＋2)＝1 : 3

したがって　$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABQ}$

Q は辺 AC の中点であるから　$\triangle\mathrm{ABQ}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$

よって　$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}$

したがって　$\triangle\mathrm{APQ}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ABC}$＝1 : 6

(2)　R，D から面 ABC に引いた垂線を，それぞれ RH，DK とする。

RH∥DK であるから　RH : DK＝AR : AD＝2 : (2＋3)＝2 : 5

よって　$\mathrm{RH}=\dfrac{2}{5}\mathrm{DK}$

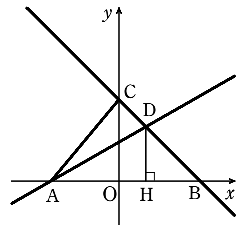
三角錐 APQR の体積は

$\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{APQ}\times\mathrm{RH}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}\times\dfrac{2}{5}\mathrm{DK}=\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{DK}$

$=\dfrac{1}{15}\times$(正四面体 ABCD の体積)

したがって，求める体積の比は　15 : 1

8 ★★★



D から x 軸に引いた垂線の足を H とする。

条件より，△DAB : △CAB＝2 : 3 であるから

DH : CO＝2 : 3

よって，C の y 座標は　$4\times\dfrac{3}{2}=6$

したがって，直線 BC の式は，$y=ax+6$ とおける。

点 (2，4) を通ることから　$4=2a+6$

よって，$a=-1$ であるから，求める式は

$y=-x+6$　答

9 ★★

(1)　△ABC にチェバの定理を用いると

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$　すなわち　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{2}=1$

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{3}{8}$ より　BP : PC＝3 : 8

(2)　△ABC にチェバの定理を用いると

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$　すなわち　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{7}{2}=1$

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{10}{7}$ より　BP : PC＝10 : 7

10★★

(1)　仮定から　$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{3}{1}$，　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{3}{2}$

メネラウスの定理により　$\dfrac{3}{1}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{3}{2}=1$

$$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{2}{9}$$

よって　CQ : QA = 2 : 9

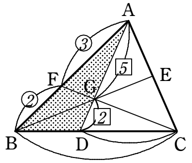
(2)　仮定から　$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{2+1}{1}=\dfrac{3}{1}$，　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{5+2}{2}=\dfrac{7}{2}$

メネラウスの定理により　$\dfrac{3}{1}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{7}{2}=1$

$$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{2}{21}$$

よって　CQ : QA = 2 : 21

11★★



△ABD と直線 FC において，メネラウスの定理により

$$\dfrac{BC}{CD}\times\dfrac{DG}{GA}\times\dfrac{AF}{FB}=1$$

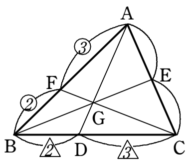
DG : GA = 2 : 5，AF : FB = 3 : 2 であるから

$$\dfrac{BC}{CD}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{2}=1$$

よって　$\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{5}{3}$

したがって　BC : CD = 5 : 3

よって　BD : DC = (5 − 3) : 3 = 2 : 3



△ABC において，チェバの定理により

$$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{AF}{FB}=1$$

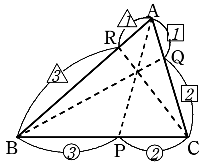
BD : DC = 2 : 3，AF : FB = 3 : 2 であるから

$$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{3}{2}=1$$

よって　$\dfrac{CE}{EA}=1$

したがって　AE : EC = 1 : 1　答

12★★★

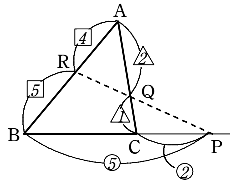


証明　BP : PC = 3 : 2，CQ : QA = 2 : 1，
AR : RB = 1 : 3

よって　$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1}\times\dfrac{1}{3}=1$

したがって，チェバの定理の逆により，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。　終

13★★★



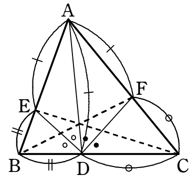
証明　BP : PC = 5 : 2，CQ : QA = 1 : 2，
AR : RB = 4 : 5

よって

$$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}=1$$

したがって，メネラウスの定理の逆により，3 点 P，Q，R は一直線上にある。　終

14★★★



証明　DE は ∠ADB の二等分線であるから

AE : EB = DA : DB

よって　$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{DA}{DB}$

DF は ∠ADC の二等分線であるから

CF : FA = DC : DA

よって　$\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{DC}{DA}$

したがって　$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CF}{FA}\times\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{DC}{DA}\times\dfrac{DA}{DB}=1$

よって，チェバの定理の逆により，3 直線 AD，BF，CE は 1 点で交わる。　終

15★★★

三角形の内角，外角の二等分線と比の定理により

BP : PC = AB : AC，CQ : QA = BC : AB，AR : RB = AC : BC

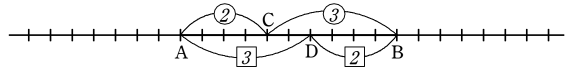
すなわち　$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{AB}{AC}$，　$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{BC}{AB}$，　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{AC}{BC}$

よって　$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{AB}{AC}\times\dfrac{BC}{AB}\times\dfrac{AC}{BC}$
$=1$

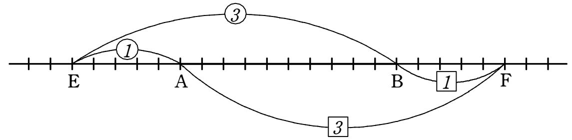
したがって，メネラウスの定理の逆により，3 点 P，Q，R は一直線上にある。　終

1

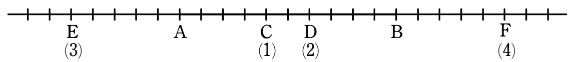
(1)，(2)　線分 AB の内分点 C，D は，下の図のようになる。



(3)，(4)　線分 AB の外分点 E，F は，下の図のようになる。



以上を 1 つの図に表すと，下のようになる。



2

(1)　E は辺 BC の中点である。

FE∥AB より　FE : AB = CE : CB = 1 : 2

よって　$FE=\dfrac{1}{2}AB=6$ (cm)

HG∥FE より　HG : FE = AG : AE = 2 : 3

よって　$HG=\dfrac{2}{3}FE=4$ (cm)

(2)　FE∥AB より　CF : FA = CE : EB = 1 : 1

したがって，F は辺 AC の中点であるから

$AF=\dfrac{15}{2}$ cm

HG∥FE より　AH : HF = AG : GE = 2 : 1

よって　$HF=\dfrac{1}{3}AF=\dfrac{5}{2}$ (cm)

3

(1)　△DBE : △ADE = DB : AD = 3 : 2

(2)　△DBE : △ABE = DB : AB = 3 : (3 + 2) = 3 : 5

(3)　△ABE : △AEC = BE : EC = 1 : 2

よって　△AEC = 2△ABE

(2) の結果から　$\triangle DBE=\dfrac{3}{5}\triangle ABE$

したがって　$\triangle DBE:\triangle AEC=\dfrac{3}{5}\triangle ABE:2\triangle ABE=3:10$

(4)　△AEC : △ABC = EC : BC = 2 : (2 + 1) = 2 : 3

よって　$\triangle ABC=\dfrac{3}{2}\triangle AEC$

(3) の結果から　$\triangle DBE=\dfrac{3}{10}\triangle AEC$

したがって　$\triangle DBE:\triangle ABC=\dfrac{3}{10}\triangle AEC:\dfrac{3}{2}\triangle AEC=1:5$

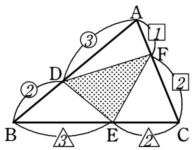
4

$\triangle \mathrm{ADF}=\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}\times\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}}\times\triangle \mathrm{ABC}$

$=\dfrac{3}{3+2}\times\dfrac{1}{1+2}\times 75=15$

$\triangle \mathrm{BED}=\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}}\times\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BA}}\times\triangle \mathrm{ABC}$

$=\dfrac{3}{3+2}\times\dfrac{2}{2+3}\times 75=18$



$\triangle \mathrm{CFE}=\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CA}}\times\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CB}}\times\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{2}{2+1}\times\dfrac{2}{2+3}\times 75=20$

したがって　$\triangle \mathrm{DEF}=\triangle \mathrm{ABC}-\triangle \mathrm{ADF}-\triangle \mathrm{BED}-\triangle \mathrm{CFE}$

$=75-15-18-20=22\,(\mathrm{cm}^2)$

5

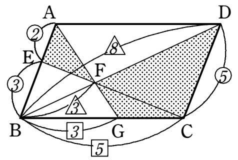
平行四辺形 ABCD の面積を S とする。

$\triangle \mathrm{ABD}\equiv\triangle \mathrm{CDB}$ であるから

$\triangle \mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}S$

EB∥DC であるから

BF : FD = EB : DC = 3 : 5



よって　$\triangle \mathrm{ABD}:\triangle \mathrm{ABF}=\mathrm{BD}:\mathrm{BF}$

$=(3+5):3=8:3$

また　$\triangle \mathrm{ABF}:\triangle \mathrm{AEF}=\mathrm{AB}:\mathrm{AE}=(2+3):2=5:2$

したがって　$\triangle \mathrm{AEF}=\dfrac{2}{5}\triangle \mathrm{ABF}=\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{3}{8}\triangle \mathrm{ABD}\right)$

$=\dfrac{3}{20}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{3}{40}S$

AD∥BG であるから　BG : AD = BF : FD = 3 : 5

よって　BG : BC = 3 : 5

ゆえに　$\triangle \mathrm{BGF}=\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BC}}\times\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BD}}\times\triangle \mathrm{BCD}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{9}{80}S$

よって　(四角形 DFGC の面積) $=\triangle \mathrm{BCD}-\triangle \mathrm{BGF}=\dfrac{1}{2}S-\dfrac{9}{80}S=\dfrac{31}{80}S$

したがって　($\triangle$AEF の面積) : (四角形 DFGC の面積) $=\dfrac{3}{40}S:\dfrac{31}{80}S=6:31$

6

AD∥EF より　$\triangle \mathrm{AEF}=\triangle \mathrm{DEF}$

よって　$\triangle \mathrm{AEF}+\triangle \mathrm{EBF}=\triangle \mathrm{DEF}+\triangle \mathrm{EBF}=\triangle \mathrm{DBF}$

AD∥EF より　DF : FC = AE : EC = 1 : 2

よって　$\triangle \mathrm{DBF}=\dfrac{1}{3}\triangle \mathrm{DBC}$

また，$\triangle \mathrm{DBC}:\triangle \mathrm{BAD}=\mathrm{BC}:\mathrm{AD}=2:1$ であるから，台形 ABCD の面積を S で表すと　$\triangle \mathrm{DBC}:S=2:3$

したがって　$\triangle \mathrm{DBC}=\dfrac{2}{3}S$

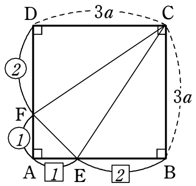
よって　$\triangle \mathrm{DBF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}S=\dfrac{2}{9}S$

したがって，$\triangle$AEF の面積と $\triangle$EBF の面積の和は，台形 ABCD の面積の $\dfrac{2}{9}$ 倍である。

7

正四角錐 O－ABCD の底面である正方形 ABCD の面積を S，1 辺の長さを $3a$ とおくと

$S=3a\times 3a=9a^2$



このとき　$\triangle \mathrm{AEF}=\dfrac{1}{2}\times a\times a=\dfrac{1}{2}a^2$

$\triangle \mathrm{BCE}=\triangle \mathrm{CDF}=\dfrac{1}{2}\times 2a\times 3a=3a^2$

よって，三角錐 P－ECF の底面である $\triangle$CFE の面積は

$\triangle \mathrm{CFE}=9a^2-\dfrac{1}{2}a^2-3a^2-3a^2=\dfrac{5}{2}a^2$

したがって　$S:\triangle \mathrm{CFE}=9a^2:\dfrac{5}{2}a^2=18:5$

よって　$S=\dfrac{18}{5}\triangle \mathrm{CFE}$

また，正四角錐 O－ABCD と三角錐 P－ECF の高さの比は，OA : PA = 3 : 2 であるから　$V:V'=\left(\dfrac{18}{5}\times\dfrac{3}{2}\right):1=\dfrac{27}{5}:1=27:5$

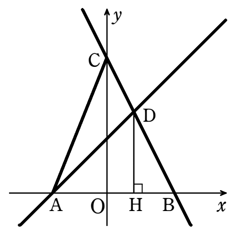
8

D から x 軸に引いた垂線を DH とする。

条件より，$\triangle \mathrm{DAB}:\triangle \mathrm{CAB}=3:5$ であるから

DH : CO = 3 : 5

したがって，C の y 座標は　$6\times\dfrac{5}{3}=10$



よって，直線 BC の式は，$y=ax+10$ とおける。

直線 BC が点 D (2, 6) を通ることから　$6=2a+10$

$a=-2$

したがって，求める式は　$y=-2x+10$

9

(1)　仮定から　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{3}{4}$，　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{1}{2}$

チェバの定理により　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=1$

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{8}{3}$

よって　BP : PC = 8 : 3

(2)　仮定から　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{3}{7+3}=\dfrac{3}{10}$，　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{2+1}{1}=\dfrac{3}{1}$

チェバの定理により　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{1}=1$

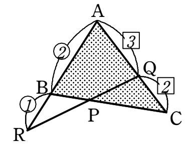
$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{10}{9}$

よって　BP : PC = 10 : 9

10

(1)　$\triangle$ABC と直線 QR において，メネラウスの定理により

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$



CQ : QA = 2 : 3，AR : RB = (2+1) : 1 = 3 : 1 であるから

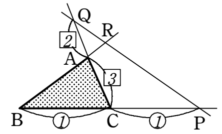
$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{1}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{1}{2}$

したがって　BP : PC = 1 : 2

(2)　$\triangle$ABC と直線 PQ において，メネラウスの定理により

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$



BP : PC = (1+1) : 1 = 2 : 1,

CQ : QA = (3+2) : 2 = 5 : 2 であるから

$\dfrac{2}{1}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$

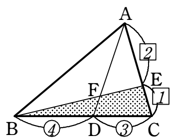
よって　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{1}{5}$

ゆえに　AR : RB = 1 : 5

したがって　RA : AB = 1 : (5－1) = 1 : 4

(3)　$\triangle$BCE と直線 AD において，メネラウスの定理により

$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\times\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AE}}\times\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=1$



BD : DC = 4 : 3，CA : AE = (1+2) : 2 = 3 : 2 であるから　$\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=\dfrac{1}{2}$

したがって　EF : FB = 1 : 2

11

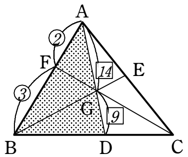
(1)　△ABD と直線 FC において，メネラウスの定理により

$$\frac{BC}{CD}\times\frac{DG}{GA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

DG : GA＝9 : 14，AF : FB＝2 : 3 であるから

$$\frac{BC}{CD}\times\frac{9}{14}\times\frac{2}{3}=1$$

よって　$\frac{BC}{CD}=\frac{7}{3}$　　したがって　BC : CD＝7 : 3



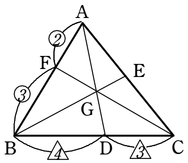
△ABC において，チェバの定理により

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

BD : DC＝(7−3) : 3＝4 : 3，AF : FB＝2 : 3 であるから

$$\frac{4}{3}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{2}{3}=1$$

よって　$\frac{CE}{EA}=\frac{9}{8}$　　したがって　AE : EC＝8 : 9



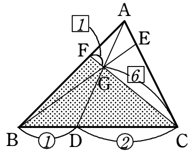
(2)　△CBF と直線 DA において，メネラウスの定理により

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CG}{GF}\times\frac{FA}{AB}=1$$

BD : DC＝1 : 2，CG : GF＝6 : 1 であるから

$$\frac{1}{2}\times\frac{6}{1}\times\frac{FA}{AB}=1$$

よって　$\frac{FA}{AB}=\frac{1}{3}$　　したがって　FA : AB＝1 : 3



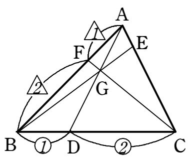
△ABC において，チェバの定理により

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

BD : DC＝1 : 2，AF : FB＝1 : (3−1)＝1 : 2 であるから

$$\frac{1}{2}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{1}{2}=1$$

よって　$\frac{CE}{EA}=4$　　したがって　AE : EC＝1 : 4



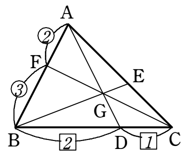
(3)　△ABC において，チェバの定理により

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

BD : DC＝2 : 1，AF : FB＝2 : 3 であるから

$$\frac{2}{1}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{2}{3}=1$$

よって　$\frac{CE}{EA}=\frac{3}{4}$　　したがって　CE : EA＝3 : 4



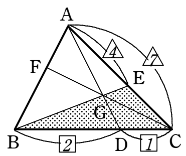
△BCE と直線 AD において，メネラウスの定理により

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CA}{AE}\times\frac{EG}{GB}=1$$

BD : DC＝2 : 1，CA : AE＝(3＋4) : 4＝7 : 4 であるから

$$\frac{2}{1}\times\frac{7}{4}\times\frac{EG}{GB}=1$$

よって　$\frac{EG}{GB}=\frac{2}{7}$　　したがって　BG : GE＝7 : 2

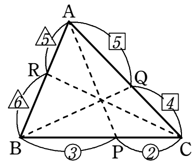


12

証明　BP : PC＝3 : 2，CQ : QA＝4 : 5，
AR : RB＝5 : 6

よって　$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=1$

したがって，チェバの定理の逆により，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。　終



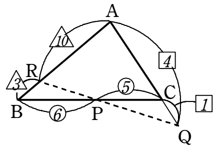
13

証明　BP : PC＝6 : 5，　CQ : QA＝1 : 4，
AR : RB＝10 : 3

よって

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=\frac{6}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{10}{3}=1$$

したがって，メネラウスの定理の逆により，3 点 P，Q，R は一直線上にある。　終



14

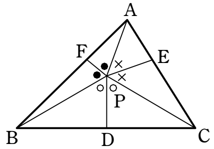
PD，PE，PF はそれぞれ ∠BPC，∠CPA，∠APB の二等分線であるから

BD : DC＝PB : PC，　CE : EA＝PC : PA，
AF : FB＝PA : PB

すなわち　$\frac{BD}{DC}=\frac{PB}{PC}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{PC}{PA}$，$\frac{AF}{FB}=\frac{PA}{PB}$

よって　$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{PB}{PC}\cdot\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PA}{PB}=1$

したがって，チェバの定理の逆により，AD，BE，CF は 1 点で交わる。



15

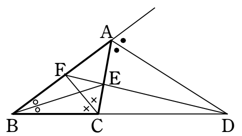
AD は ∠A の外角の二等分線であるから

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\quad\cdots\cdots ①$$

また，BE，CF は ∠B，∠C の二等分線であるから

$$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{BA}\quad\cdots\cdots ②$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{CA}{CB}\quad\cdots\cdots ③$$



①，②，③ の辺々を掛けて　$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{CA}{CB}=1$

よって，メネラウスの定理の逆により，3 点 D，E，F は 1 つの直線上にある。

1

AD，BE は △ABC の中線であるから，
その交点 G は △ABC の重心である。

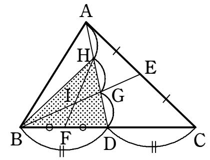
よって　　AG : GD＝2 : 1

仮定より，AG : HG＝2 : 1 であるから

HG : GD＝1 : 1

したがって，HF，BG は △HBD の中線であるから，
その交点 I は △HBD の重心である。

よって　　HI : IF＝2 : 1



2

(1)　PR∥BQ より　PR : BQ＝AP:AB＝3 : (3＋2)＝3 : 5

よって　PR＝$\frac{3}{5}$BQ　　また　QC＝$\frac{1}{3}$BQ

したがって　PR : QC＝$\frac{3}{5}$BQ : $\frac{1}{3}$BQ＝9 : 5

(2)　PR∥BQ より，AR : RQ＝AP : PB＝3 : 2 であるから

$$\triangle CRQ=\frac{2}{3}\triangle ARC=\frac{2}{3}\times 25=\frac{50}{3}\ (\text{cm}^2)$$

△PQR : △CRQ＝PR : QC で，(1) の結果から

△PQR : △CRQ＝9 : 5

よって　$\triangle PQR=\frac{9}{5}\triangle CRQ=\frac{9}{5}\times\frac{50}{3}=30\ (\text{cm}^2)$

3

△ABC の面積を S とする。

$\frac{\triangle AEF}{\triangle ABC}=\frac{AF}{AB}\cdot\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$ であるから

$$\triangle AEF=\frac{2}{5}\triangle ABC=\frac{2}{5}S$$

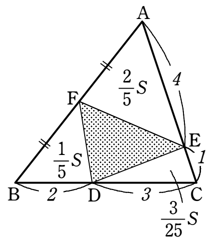
同様にして，$\frac{\triangle BDF}{\triangle ABC}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$ から　$\triangle BDF=\frac{1}{5}S$

$\frac{\triangle CDE}{\triangle ABC}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$ から　$\triangle CDE=\frac{3}{25}S$

ゆえに　△DEF＝△ABC−△AEF−△BDF−△CDE

$$=S-\frac{2}{5}S-\frac{1}{5}S-\frac{3}{25}S=\frac{7}{25}S$$

よって　$\frac{7}{25}S=14$　　したがって　$S=14\cdot\frac{25}{7}=50$



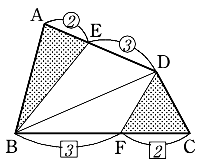
4

△ABE : △ABD＝AE : AD＝2 : 5
△CDF : △CDB＝CF : CB＝2 : 5

よって　$\triangle ABE+\triangle CDF=\frac{2}{5}\triangle ABD+\frac{2}{5}\triangle CDB$

$$=\frac{2}{5}(\triangle ABD+\triangle CDB)$$

$$=\frac{2}{5}\times 100=40\ (\text{cm}^2)$$



$\boxed{5}$

(1)　$\angle BAD=\angle CAD$ であるから，三角形の内角の二等分線と比の定理により

$$BD : DC=AB : AC=15 : 9=5 : 3$$

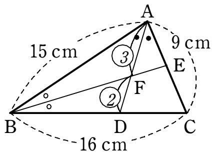
ここで，$BC=16$ cm であるから

$$BD=\frac{5}{5+3}\times BC=\frac{5}{8}\times 16=10\,(\text{cm})$$

(2)　$\angle ABF=\angle DBF$ であるから，三角形の内角の二等分線と比の定理により

$$AF : FD=BA : BD=15 : 10=3 : 2$$

(3)　(2) の結果より，$AF : FD=3 : 2$ であるから



$$\triangle ABF : \triangle ABD=3 : (3+2)=3 : 5$$

よって　$\triangle ABD=\frac{5}{3}\triangle ABF$　……①

また，$BD : DC=5 : 3$ であるから

$$\triangle ABD : \triangle ABC=5 : (5+3)=5 : 8$$

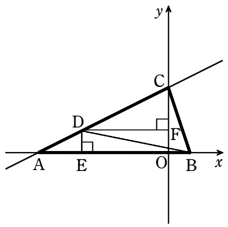
よって　$\triangle ABC=\frac{8}{5}\triangle ABD$　……②

①，② から　$\triangle ABC=\frac{8}{5}\times\frac{5}{3}\triangle ABF=\frac{8}{3}\triangle ABF$

したがって　$\triangle ABF : \triangle ABC=3 : 8$

$\boxed{6}$

(1)　D から x 軸，y 軸に引いた垂線の足をそれぞれ E，F とする。



$\triangle ABD : \triangle CBD=1 : 2$ であるから　$AD : DC=1 : 2$

したがって，$DF : AO=CD : CA=2 : 3$ であるから

$$DF=\frac{2}{3}AO=\frac{2}{3}\times 12=8$$

よって，D の x 座標は　-8

同様に考えると，$DE : CO=1 : 3$ であるから　$DE=\frac{1}{3}CO=\frac{1}{3}\times 6=2$

よって，D の y 座標は　2

以上から，点 D の座標は　$(-8,\ 2)$

(2)　点 B を通り，$\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線は，線分 AC の中点 M を通る。

(1) と同様に考えると，M の座標は　$(-6,\ 3)$

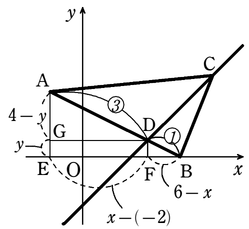
B と M を通る直線の式を $y=ax+b$ とおくと　$0=2a+b$，　$3=-6a+b$

これを，連立方程式として解くと　$a=-\frac{3}{8}$，$b=\frac{3}{4}$

よって，求める直線の式は　$y=-\frac{3}{8}x+\frac{3}{4}$

$\boxed{7}$

$\triangle CDB=\frac{1}{4}\triangle ABC$ であるから



$$\triangle ABC : \triangle CDB=4 : 1$$

よって　$AD : DB=(4-1) : 1=3 : 1$

点 A から x 軸に垂線 AE を引き，点 D から，x 軸，線分 AE にそれぞれ垂線 DF，DG を引く。

点 D の座標を $(x,\ y)$ とする。

DF∥AE であるから　$BF : FE=BD : DA$

すなわち　$(6-x) : \{x-(-2)\}=1 : 3$

よって　$x=4$

GD∥EB であるから　$AG : GE=AD : DB$

すなわち　$(4-y) : y=3 : 1$

よって　$y=1$

したがって，点 D の座標は　$(4,\ 1)$

求める直線の式を $y=ax+b$ とおく。

$x=4$ のとき $y=1$ であるから　$1=4a+b$　……①

$x=8$ のとき $y=5$ であるから　$5=8a+b$　……②

①，② を解くと　$a=1$，$b=-3$

したがって　$y=x-3$

$\boxed{8}$

(1)　CD∥BO であるから　$\triangle BOC=\triangle BOD$

$DO : OA=3 : 7$ であるから　$\triangle BOD : \triangle ABO=DO : OA=3 : 7$

よって　$\triangle BOC : \triangle ABO=3 : 7$

(2)　点 B の座標を $(a,\ b)$ とおく。

$$(\text{四角形 ABCO の面積})=\triangle BOC+\triangle ABO$$
$$=\triangle BOD+\triangle ABO$$
$$=\triangle ABD$$

$\triangle ABD$ において，AD を底辺と考えたときの高さは，点 B の y 座標 b である。

四角形 ABCO の面積が 25，$AD=7-(-3)=10$ であるから

$$25=\frac{1}{2}\times 10\times b\qquad \text{したがって}\qquad b=5$$

すなわち　$B(a,\ 5)$

CD∥BO であるから，直線 OB の傾きと，直線 DC の傾きは等しい。

OB の傾きは　$\frac{5-0}{a-0}=\frac{5}{a}$，　DC の傾きは　$\frac{4-0}{1-(-3)}=1$

よって　$\frac{5}{a}=1$　　したがって　$a=5$

よって，点 B の座標は　$(5,\ 5)$

$\boxed{9}$

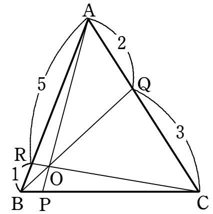
(ア)　TC　　(イ)　OA　　(ウ)　OA

$\boxed{10}$

(ア)　QC　　(イ)　$\frac{DQ}{QC}$　　(ウ)　$\frac{AQ}{QD}$

$\boxed{11}$

(1)　$\triangle ABC$ にチェバの定理を用いると



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{1}=1$

$\frac{BP}{PC}=\frac{2}{15}$ より　$BP : PC=2 : 15$

(2)　$\triangle ABP$ と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

(1) より，$BC : CP=17 : 15$ であるから

$$\frac{17}{15}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{5}{1}=1$$

$\frac{PO}{OA}=\frac{3}{17}$ より　$PO : OA=3 : 17$

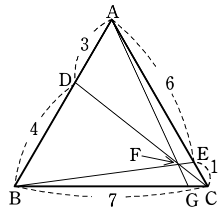
(3)　$\triangle OBC$ と $\triangle ABC$ において，辺 BC を共通の底辺とみると，高さの比は $PO : PA$ に等しい。

したがって，面積比 $\triangle OBC : \triangle ABC$ は，$PO : PA$ に等しい。

(2) より，$PO : PA=3 : 20$ であるから　$\triangle OBC : \triangle ABC=3 : 20$

$\boxed{12}$

(1)　$AD=3$，$DB=7-3=4$，$AE=6$，$CE=7-6=1$



チェバの定理により

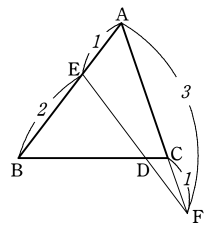
$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

ゆえに　$\frac{3}{4}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{1}{6}=1$

よって　$BG=8GC$

ゆえに　$CG=\frac{1}{9}\cdot BC=\frac{1}{9}\cdot 7=\frac{7}{9}$

(2)　$\triangle ABC$ と直線 EF について，メネラウスの定理により



$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$$

ゆえに　$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$

よって　$BD : DC=6 : 1$

$\triangle AEF$ と直線 BC について，メネラウスの定理により

$$\frac{ED}{DF}\cdot\frac{FC}{CA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$$

ゆえに　$\frac{ED}{DF}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=1$

よって　$ED : DF=4 : 3$

$\boxed{1}$

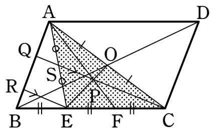
(1)　ER∥CQ であるから

$$BR : RQ = BE : EC = 1 : 2$$

(2)　△AEC において，AF，EO は中線であるから，その交点 P は △AEC の重心である。

よって，直線 CP と辺 AE の交点を S とすると，S は辺 AE の中点である。

また，QS∥RE であるから，中点連結定理の逆により，点 Q は線分 AR の中点である。



よって　　$RQ = QA$

(1) より，$BR = \frac{1}{2}RQ$ であるから

$$AQ : QB = RQ : \left(RQ + \frac{1}{2}RQ\right) = RQ : \frac{3}{2}RQ = 2 : 3$$

$\boxed{2}$

証明　線分 AC，BD の交点を I とする。

長方形 AEGC を取り出して考える。

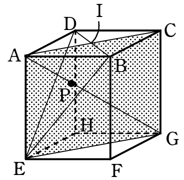
AI＝IC であるから

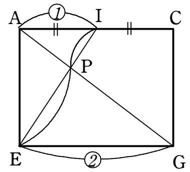
$$AI = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}EG$$

AI∥EG であるから

$$EP : PI = EG : AI$$

$$= EG : \frac{1}{2}EG = 2 : 1$$





IB＝DI であるから，EI は △BDE の中線であり，

点 P はその中線を 2 : 1 に内分する。

したがって，点 P は △BDE の重心である。　終

$\boxed{3}$

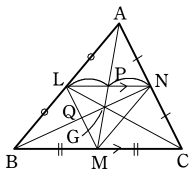
証明　△ABC の重心を G とする。

△ABC において，点 L，N はそれぞれ辺 AB，AC の中点であるから，中点連結定理により

$$LN∥BC$$

よって，線分 AM と LN の交点を P とすると，

△ABM において，中点連結定理の逆により，点 P は線分 AM の中点である。



よって，中点連結定理により

$$LP = \frac{1}{2}BM,\ NP = \frac{1}{2}CM$$

BM＝CM であるから　　LP＝NP

よって，点 P は線分 LN の中点であるから，線分 MP は △LMN の中線である。

また，線分 BN と LM の交点を Q とすると，同様にして，線分 NQ は △LMN の中線である。

△LMN の中線 MP，NQ の交点は G であるから，△LMN の重心は点 G である。

よって，△ABC の重心と △LMN の重心は一致する。　終

$\boxed{4}$

(1)　AD∥EG∥BC であるから

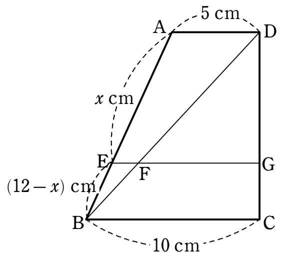
$$DG : DC = AE : AB = x : 12$$

△DBC において

$$FG : BC = DG : DC$$

すなわち　　$FG : 10 = x : 12$

よって　　$FG = \frac{5}{6}x$ cm



(2)　△ABD において，EF∥AD であるから

$$EF : AD = BE : BA$$

すなわち　　$EF : 5 = (12-x) : 12$

よって　　$EF = \frac{5}{12}(12-x)$

EF : FG＝1 : 4 であるから

$$\frac{5}{12}(12-x) : \frac{5}{6}x = 1 : 4$$

よって　　$\frac{5}{6}x = 4 \times \frac{5}{12}(12-x)$

これを解くと　　$x = 8$

(3)　△DFG＝S とする。

FG∥BC であるから　　△DFG∽△DBC

DF : DB＝AE : AB より，DF : DB＝8 : 12＝2 : 3 であるから，

面積比は　　△DFG : △DBC＝$2^2 : 3^2 = 4 : 9$

よって　　△DBC＝$\frac{9}{4}S$

また，△ABD : △DBC＝AD : BC＝1 : 2 であるから

$$△ABD = \frac{1}{2}△DBC = \frac{1}{2} \times \frac{9}{4}S = \frac{9}{8}S$$

よって，台形 ABCD の面積は

$$△ABD + △DBC = \frac{9}{8}S + \frac{9}{4}S = \frac{27}{8}S$$

であるから，台形 ABCD の面積は △DFG の $\frac{27}{8}$ 倍である。

$\boxed{5}$

(1)　△APE : △EPC＝AE : EC＝2 : 1

よって　△APE＝2△EPC＝$2y$

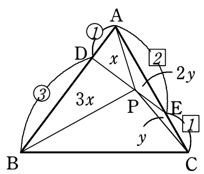
したがって

$$△ADE = △APD + △APE$$

$$= x + 2y\ (cm^2)$$

△BPD : △APD＝BD : DA ＝3 : 1

よって　△BPD＝3△APD＝$3x$



△PBC＝$\frac{1}{2}$△ABC　であるから

$$△PBC = △BPD + △APD + △APE + △EPC$$

$$= 3x + x + 2y + y = 4x + 3y\ (cm^2)$$

(2)　$△ADE = \frac{AD}{AB} \times \frac{AE}{AC} \times △ABC = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times 30 = 5$

よって，(1) から　　$x + 2y = 5$　　…… ①

また　　$△PBC = \frac{1}{2}△ABC = 15$

よって，(1) から　　$4x + 3y = 15$　　…… ②

①，② を解くと　　$x = 3,\ y = 1$

$\boxed{6}$

(1)　AS は ∠DAB の二等分線であるから　　DS : SB＝AD : AB＝6 : 10＝3 : 5

DP∥AB より　DP : AB＝DS : SB

$$DP : 10 = 3 : 5$$

$$DP = 6$$

よって，PC＝10－6＝4 であるから

$$DP : PC = 6 : 4 = 3 : 2$$

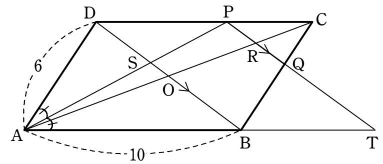
(2)　平行四辺形 ABCD の面積を S とすると　　$△ACD = \frac{1}{2}S$

DP : PC＝3 : 2 であるから

$$△ACP = \frac{2}{3+2}△ACD = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}S = \frac{1}{5}S$$

よって，△ACP の面積は平行四辺形 ABCD の面積の $\frac{1}{5}$ 倍である。

(3)　直線 AB と直線 PQ の交点を T とする。



PQ∥DB より　　BQ : QC＝DP : PC＝3 : 2

また，BT∥PC より　BT : PC＝BQ : QC

$$BT : 4 = 3 : 2$$

よって　　BT＝6

AT∥PC より

$$AR : RC = AT : PC = (10+6) : 4 = 4 : 1$$

したがって

$$△ARP = \frac{4}{4+1}△ACP = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}S = \frac{4}{25}S$$

PR∥SO より　　△ARP∽△AOS

AS : SP＝AB : DP＝5 : 3 であるから，その相似比は

$$AP : AS = (5+3) : 5 = 8 : 5$$

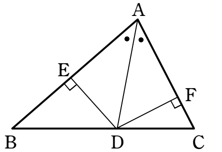
よって，面積比は　$8^2 : 5^2 = 64 : 25$

したがって，四角形 ORPS の面積は　　$\frac{64-25}{64}△ARP = \frac{39}{64} \times \frac{4}{25}S = \frac{39}{400}S$

よって，四角形 ORPS の面積は平行四辺形 ABCD の面積の $\frac{39}{400}$ 倍である。

$\boxed{7}$

(1) 点Dから，辺AB，ACに引いた垂線の足を，それぞれE，Fとする。



このとき，△ADEと△ADFにおいて

∠DEA＝∠DFA＝90°

AD＝AD （共通）

∠EAD＝∠FAD （仮定）

直角三角形ADEとADFは，斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから　△ADE≡△ADF

よって　DE＝DF

ここで，△ABDと△ACDにおいて，底辺をそれぞれAB，ACとして考えると，高さがDE＝DFで等しいから，その面積比は，底辺の長さの比に等しい。

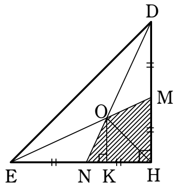
したがって　△ABD：△ACD＝AB：AC

(2) △ABDと△ACDにおいて，底辺をそれぞれBD，DCとして考えると，高さが等しいから，その面積比は，底辺の長さの比に等しい。

よって　△ABD：△ACD＝BD：DC

これと，(1)の結果から　BD：DC＝AB：AC

$\boxed{8}$



DNとEMの交点をOとする。

DN，EMは△DEHの中線であるから，その交点Oは△DEHの重心である。

よって　EO：EM＝2：3

Oから辺EHに引いた垂線の足をKとすると，

OK∥MHであるから　OK：MH＝EO：EM

OK：3＝2：3

よって　OK＝2

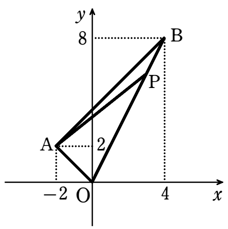
したがって　$\triangle ONH=\frac{1}{2}\times3\times2=3\,(\mathrm{cm}^2)$

同様に考えると　$\triangle OMH=3\,(\mathrm{cm}^2)$

したがって，求める体積は　$\frac{1}{3}\times(3+3)\times6=12\,(\mathrm{cm}^3)$

$\boxed{9}$

(1) △AOBは上底の長さが2，下底の長さが8，高さが6の台形から，底辺の長さが2，高さが2の直角三角形と，底辺の長さが4，高さが8の直角三角形を除いたものである。



よって

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times6\times(2+8)-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times4\times8=12$

△ABP＝3のとき，△AOP＝12−3＝9であるから

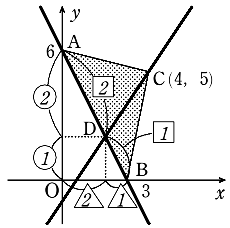
OP：OB＝9：12＝3：4

したがって，Pの x 座標は　$4\times\frac{3}{4}=3$，y 座標は　$8\times\frac{3}{4}=6$

すなわち，Pの座標は　(3, 6)

(2) 条件より，△ADC：△BDC＝2：1であるから

AD：DB＝2：1



よって，Dの x 座標は $3\times\frac{2}{3}=2$，y 座標は $6\times\frac{1}{3}=2$

すなわち，Dの座標は(2, 2)である。

CとDを通る直線の式を $y=ax+b$ とおくと

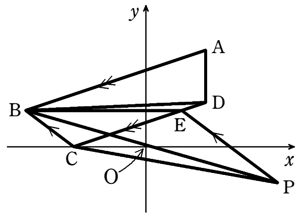
$5=4a+b$

$2=2a+b$

これを，連立方程式として解くと　$a=\frac{3}{2}$，$b=-1$

よって，求める直線の式は　$y=\frac{3}{2}x-1$

$\boxed{10}$



(1) 直線ABの傾きは　$\frac{3-8}{(-10)-5}=\frac{1}{3}$

AB∥CDより，直線CDの式は $y=\frac{1}{3}x+k$ とおける。

Cを通ることから　$0=\frac{1}{3}\times(-6)+k$

$k=2$

よって，直線CDの式は　$y=\frac{1}{3}x+2$　……①

また，直線BCの傾きは　$\frac{0-3}{-6-(-10)}=-\frac{3}{4}$

BC∥EPより，直線EPの式は $y=-\frac{3}{4}x+m$ とおける。

直線EPは点Pを通るから　$-3=-\frac{3}{4}\times11+m$

$m=\frac{21}{4}$

よって，直線EPの式は　$y=-\frac{3}{4}x+\frac{21}{4}$　……②

①，②を連立方程式として解くと　$x=3$，$y=3$

したがって，Eの座標は　(3, 3)

(2) BC∥EPより　△PBC＝△EBC

よって，△DBC：△EBC＝11：9であるから　CD：CE＝11：9

Dの x 座標を t とすると　$\{t-(-6)\}:\{3-(-6)\}=11:9$　したがって　$t=5$

また，Dの y 座標は　$\frac{1}{3}\times5+2=\frac{11}{3}$

よって，Dの座標は　$\left(5,\ \frac{11}{3}\right)$

$\boxed{11}$

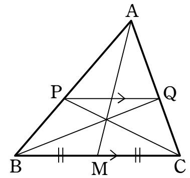
チェバの定理により　$\frac{BM}{MC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AD}{DB}=1$

仮定より　$\frac{BM}{MC}=\frac{1}{1}=1$　であるから　$\frac{CE}{EA}\times\frac{AD}{DB}=1$　よって　$\frac{CE}{EA}=\frac{DB}{AD}$

すなわち　AE：EC＝AD：DB

線分の比と平行線の定理から　DE∥BC

$\boxed{12}$



PQ∥BCであるから　$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$

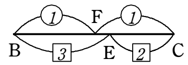
また，Mは辺BCの中点であるから　BM＝MC

よって　$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AP}{PB}=1\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AQ}{QC}=1$

したがって，チェバの定理の逆により，3直線AM，BQ，CPは1点で交わる。

$\boxed{13}$

(1) BE：EC＝3：2であるから　$BE=\frac{3}{5}BC$　……①



点Fは，辺BCの中点であるから　$BF=\frac{1}{2}BC$

このとき　$EF=BE-BF=\frac{3}{5}BC-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{10}BC$　……②

①，②から　$BE:EF=\frac{3}{5}BC:\frac{1}{10}BC=6:1$

(2) (1)の結果から　$\frac{BE}{EF}=\frac{6}{1}$

三角形の重心は，各中線を2：1に内分するから　$\frac{FG}{GA}=\frac{1}{2}$

仮定から　$\frac{AD}{DB}=\frac{1}{3}$

よって　$\frac{BE}{EF}\times\frac{FG}{GA}\times\frac{AD}{DB}=\frac{6}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=1$

したがって，メネラウスの定理の逆により，3点D，G，Eは一直線上にある。

1

直線 BG と辺 CD の交点を F とし，線分AF と PQ の交点を I とする。

△ACD において，点 P，Q はそれぞれ辺 AC，AD の中点であるから，中点連結定理により

$PQ /\!/ CD$

よって，中点連結定理の逆により

$AI : IF = 1 : 1$　……①

線分 AG，BF を含む平面の上で考える。

点 G は △BCD の重心であるから

$BG : GF = 2 : 1$

ここで，$BI /\!/ GJ$ となるように辺 AF 上に点 J をとる。

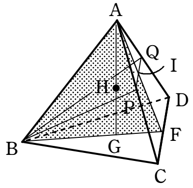
$BI /\!/ GJ$ であるから

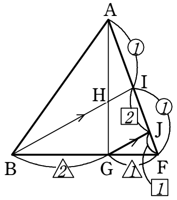
$IJ : JF = BG : GF = 2 : 1$

よって，① から　$IJ = \frac{2}{3} \times IF = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} AF = \frac{1}{3} AF$

$HI /\!/ GJ$ であるから

$AH : HG = AI : IJ = \frac{1}{2} AF : \frac{1}{3} AF = 3 : 2$





2

線分 AD，AG を含む平面の上で考える。

直線 DG と辺 BC との交点を F とすると，点 H は線分 AG，EF の交点となる。

点 G は △BCD の重心であるから

$DG : GF = 2 : 1$

ここで，$FE /\!/ GI$ となるように，辺 AD 上に点 I をとる。

$FE /\!/ GI$ であるから

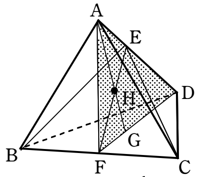
$DI : IE = DG : GF = 2 : 1$

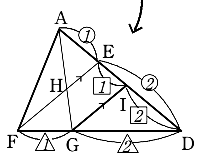
よって　$EI = \frac{1}{3} DE = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} AD = \frac{2}{9} AD$

$HE /\!/ GI$ であるから

$AH : HG = AE : EI$

$= \frac{1}{3} AD : \frac{2}{9} AD = 3 : 2$　答





3

右の図のように，もとの三角形を △AB′C とし，AB と DC の交点を E とする。

△AB′C において　　$\angle B' + \angle C = 90^\circ$

$AC /\!/ DB$ であるから　　$\angle BDE = \angle ACE$

折り返した角は等しいから　$\angle AB'E = \angle EBD$

よって，△BDE において　$\angle B + \angle D = 90^\circ$

したがって，$AE \perp DC$ である。

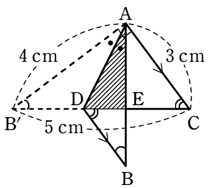
△AB′E と △CB′A において

$\angle AEB' = \angle CAB'$　$(=90^\circ)$

$\angle AB'E = \angle CB'A$　(共通)

2 組の角がそれぞれ等しいから　△AB′E∽△CB′A

よって　　$AE : CA = AB' : CB'$



$AE : 3 = 4 : 5$

$AE = \frac{12}{5}$

同様にして　$B'E : B'A = AB' : CB'$

$B'E : 4 = 4 : 5$

$B'E = \frac{16}{5}$

よって　　$\triangle AB'E = \frac{1}{2} \times \frac{16}{5} \times \frac{12}{5} = \frac{96}{25}$ (cm²)

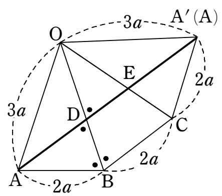
$\angle B'AD = \angle EAD$ であるから　　$B'D : DE = AB' : AE = 4 : \frac{12}{5} = 5 : 3$

したがって，求める図形の面積は　　$\triangle ADE = \frac{96}{25} \times \frac{3}{5+3} = \frac{36}{25}$ (cm²)

4

(1)　正三角錐の側面の展開図を考える。糸の長さが最短となるためには，右の図のように，直線 AA′ と辺 OB，OC の交点をそれぞれ D，E とすればよい。

このとき，図は左右対称であるから　　$AA' /\!/ BC$



[1]　AD の長さについて

△OAB と △OBC は合同な二等辺三角形であるから　　$\angle OBA = \angle OBC$

また，平行線の錯角は等しいから

$\angle OBC = \angle ADB$

よって　　$\angle OBA = \angle ADB$

したがって，△ABD は $AB = AD$ の二等辺三角形である。

よって　　$AD = 2a$

[2]　DE の長さについて

△OAB∽△ABD であるから

$OA : AB = AB : BD$

$3a : 2a = 2a : BD$

$BD = \frac{4}{3}a$

よって　　$OD = 3a - \frac{4}{3}a = \frac{5}{3}a$

$DE /\!/ BC$ であるから

$DE : BC = OD : OB$

$DE : 2a = \frac{5}{3}a : 3a$

したがって　　$DE = \frac{10}{9}a$

[3]　EA′ の長さについて　　$EA' = AD = 2a$

[1]～[3] から，求める糸の長さは　　$AD + DE + EA' = 2a + \frac{10}{9}a + 2a = \frac{46}{9}a$

(2)　2 つの立体について，底面を △ODE，四角形 DBCE と考えると，高さが等しいから，体積比は △ODE と四角形 DBCE の面積比に等しい。

△ODE と △OBC は相似で，相似比は (1) から

$DE : BC = \frac{10}{9}a : 2a = 5 : 9$

よって　　$\triangle ODE : \triangle OBC = 5^2 : 9^2 = 25 : 81$

したがって　　$V : V' = 25 : (81 - 25) = 25 : 56$

5

(1)　△BCF と直線 AE について，メネラウスの定理により　$\frac{BE}{EC} \times \frac{CA}{AF} \times \frac{FQ}{QB} = 1$

仮定から　　$\frac{BE}{EC} = \frac{2}{1}$，　$\frac{CA}{AF} = \frac{2+1}{1} = \frac{3}{1}$

よって　　$\frac{2}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{FQ}{QB} = 1$

$\frac{FQ}{QB} = \frac{1}{6}$

したがって　　$BQ : QF = 6 : 1$

(2)　(1) の結果より，$BQ : QF = 6 : 1$ であるから

$\triangle BQA : \triangle ABF = 6 : (6+1) = 6 : 7$

よって　　$\triangle ABF = \frac{7}{6} \triangle BQA$　……①

また，$CF : AF = 2 : 1$ であるから

$\triangle ABF : \triangle ABC = 1 : (2+1) = 1 : 3$

したがって　　$\triangle ABC = 3\triangle ABF$　……②

①，② から　　$\triangle ABC = 3 \times \frac{7}{6} \triangle BQA = \frac{7}{2} \triangle BQA$

よって　　$\triangle ABC : \triangle BQA = 7 : 2$

(3)　△CRB，△APC についても，(2) と同様に考えて

$\triangle CRB = \triangle APC = \triangle BQA = \frac{2}{7} \triangle ABC$

このとき　　$\triangle PQR = \triangle ABC - \triangle CRB - \triangle APC - \triangle BQA$

$= \triangle ABC - 3 \times \frac{2}{7} \triangle ABC = \frac{1}{7} \triangle ABC$

したがって　　$\triangle ABC = 7\triangle PQR$

よって，△ABC の面積は，△PQR の面積の 7 倍である。

6 [青チャート数学A　宮崎大]

(1)　△ABD と直線 CE について，メネラウスの定理により　　$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1$

よって　　$\frac{1}{a} \cdot \frac{1+b}{b} \cdot \frac{DP}{PA} = 1$　　　ゆえに　　$\frac{PA}{DP} = \frac{1+b}{ab}$

したがって　　$AP : PD = (1+b) : ab$

(2)　$\frac{\triangle APE}{\triangle APB} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{1+a}$，　$\frac{\triangle ABD}{\triangle ABC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{1+b}$

更に，(1) から

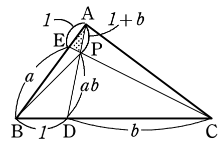
$\frac{\triangle APB}{\triangle ABD} = \frac{AP}{AD} = \frac{1+b}{1+b+ab}$

よって　　$\frac{\triangle APE}{\triangle ABC} = \frac{\triangle APE}{\triangle APB} \cdot \frac{\triangle APB}{\triangle ABD} \cdot \frac{\triangle ABD}{\triangle ABC}$

$= \frac{1}{1+a} \cdot \frac{1+b}{1+b+ab} \cdot \frac{1}{1+b}$

$= \frac{1}{(1+a)(1+b+ab)}$

すなわち　　$\triangle APE : \triangle ABC = 1 : (1+a)(1+b+ab)$



$\boxed{7}$

(1) △ABC において，チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

また，△ABC と直線 RS について，メネラウスの定理により

$$\frac{BS}{SC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{BS}{SC}$

よって　BP : PC＝BS : SC

(2) ∠BAP＝∠CAP であるとき，AP は ∠A の二等分線であるから

BP : PC＝AB : AC

これと (1) から

BS : SC＝AB : AC

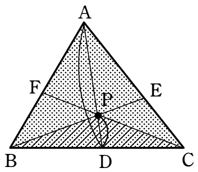
よって，AS は ∠A の外角の二等分線である。

∠A＋(∠A の外角)＝180° であるから

$$\angle PAS=\angle CAP+\angle CAS$$
$$=\frac{1}{2}\{\angle A+(\angle A \text{ の外角})\}=90^\circ$$

$\boxed{8}$

証明　△ABC : △PBC＝AD : PD であるから



$$\frac{PD}{AD}=\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}$$

同様にして　$\dfrac{PE}{BE}=\dfrac{\triangle PCA}{\triangle ABC}$

$$\frac{PF}{CF}=\frac{\triangle PAB}{\triangle ABC}$$

したがって

$$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle PCA}{\triangle ABC}+\frac{\triangle PAB}{\triangle ABC}$$
$$=\frac{\triangle PBC+\triangle PCA+\triangle PAB}{\triangle ABC}$$
$$=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1$$ 終

$\boxed{9}$

(1) △ABP と直線 RC について，メネラウスの定理により

$$\frac{BC}{CP}\times\frac{PO}{OA}\times\frac{AR}{RB}=1$$

よって　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{PC}{BC}\times\dfrac{AO}{OP}$

(2) △APC と直線 QB について，メネラウスの定理により

$$\frac{CB}{BP}\times\frac{PO}{OA}\times\frac{AQ}{QC}=1$$

よって　$\dfrac{AQ}{QC}=\dfrac{BP}{BC}\times\dfrac{AO}{OP}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\frac{AR}{RB}+\frac{AQ}{QC}=\frac{PC}{BC}\times\frac{AO}{OP}+\frac{BP}{BC}\times\frac{AO}{OP}$$
$$=\left(\frac{PC}{BC}+\frac{BP}{BC}\right)\times\frac{AO}{OP}$$
$$=\frac{BC}{BC}\times\frac{AO}{OP}=\frac{AO}{OP}$$

すなわち　$\dfrac{AO}{OP}=\dfrac{AR}{RB}+\dfrac{AQ}{QC}$

$\boxed{10}$

△BCG と直線 DQF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CD}{DG}\cdot\frac{GQ}{QB}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，四角形 ABCD，EBFP，PFCG，AEGD はいずれも平行四辺形であるから

CD＝BA，　BF＝EP，

FC＝PG，　DG＝AE

よって，① は　$\dfrac{EP}{PG}\cdot\dfrac{BA}{AE}\cdot\dfrac{GQ}{QB}=1$　　すなわち　$\dfrac{BA}{AE}\cdot\dfrac{EP}{PG}\cdot\dfrac{GQ}{QB}=1$

したがって，△EBG と 3 点 A，P，Q において，メネラウスの定理の逆により，3 点 A，P，Q は 1 つの直線上にある。