

1

- 解答** (1) $-x^3+4x^2+3x-2$
 (2) x について $\dots x^2+(4-3y)x+(y^3-5y+1)$
 y について $\dots y^3-(3x+5)y+(x^2+4x+1)$

解説

- (1) (与式) $= -x^3+4x^2+3x-2$
 (2) x について $x^2+(4-3y)x+(y^3-5y+1)$
 y について $y^3-(3x+5)y+(x^2+4x+1)$

2

- 解答** (1) $x^3+12x^2+48x+64$ (2) $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$ (3) a^3+125
 (4) $8x^3-343y^3$ (5) x^6-1

解説

- (1) $(x+4)^3 = x^3+3 \cdot x^2 \cdot 4+3 \cdot x \cdot 4^2+4^3$
 $= x^3+12x^2+48x+64$
 (2) $(3a-2b)^3 = (3a)^3-3 \cdot (3a)^2 \cdot 2b+3 \cdot 3a \cdot (2b)^2-(2b)^3$
 $= 27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$
 (3) $(a+5)(a^2-5a+25) = (a+5)(a^2-a \cdot 5+5^2)$
 $= a^3+5^3 = a^3+125$
 (4) $(2x-7y)(4x^2+14xy+49y^2) = (2x-7y)\{(2x)^2+2x \cdot 7y+(7y)^2\}$
 $= (2x)^3-(7y)^3 = 8x^3-343y^3$
 (5) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) = (x-1)(x^2+x+1) \times (x+1)(x^2-x+1)$
 $= (x^3-1)(x^3+1) = (x^3)^2-1^2 = x^6-1$

3

- 解答** (1) $(x+3)(x^2-3x+9)$ (2) $(4p-3q)(16p^2+12pq+9q^2)$ (3) $(x-2)^3$

解説

- (1) $x^3+27 = x^3+3^3 = (x+3)(x^2-x \cdot 3+3^2) = (x+3)(x^2-3x+9)$
 (2) $64p^3-27q^3 = (4p)^3-(3q)^3 = (4p-3q)\{(4p)^2+(4p) \cdot (3q)+(3q)^2\}$
 $= (4p-3q)(16p^2+12pq+9q^2)$
 (3) $x^3-6x^2+12x-8 = (x^3-8)-(6x^2-12x)$
 $= (x-2)(x^2+x \cdot 2+2^2)-6x(x-2)$
 $= (x-2)(x^2+2x+4)-6x(x-2)$
 $= (x-2)(x^2+2x+4-6x) = (x-2)(x^2-4x+4)$
 $= (x-2)(x-2)^2 = (x-2)^3$

別解 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = (a-b)^3$ の公式を適用してもよい。

$$x^3-6x^2+12x-8 = x^3-3 \cdot x^2 \cdot 2+3 \cdot x \cdot 2^2-2^3$$

$$= (x-2)^3$$

4

- 解答** (1) $(x-z)(y-u)$ (2) $(x+y)(x-y)(y-z)$ (3) $(a-c)(b-ac+c^2)$

解説

- (1) (与式) $= (x-z)y-ux+zu = (x-z)y-(x-z)u = (x-z)(y-u)$
 (2) (与式) $= (-x^2+y^2)z+x^2y-y^3 = -(x^2-y^2)z+(x^2-y^2)y$
 $= (x^2-y^2)(-z+y) = (x+y)(x-y)(y-z)$

$$(3) \text{ (与式)} = (a-c)b-c(a^2-2ac+c^2) = (a-c)b-c(a-c)^2$$

$$= (a-c)\{b-c(a-c)\} = (a-c)(b-ac+c^2)$$

5

- 解答** (1) $(x+y+4)(x-3y+2)$ (2) $(x-3y+4)(2x+y-1)$

解説

$$(1) \begin{array}{r} x^2-2xy-3y^2+6x-10y+8 \\ = x^2-(2y-6)x-(3y^2+10y-8) \\ = x^2-(2y-6)x-(y+4)(3y-2) \\ = (x+(y+4))(x-(3y-2)) \\ = (x+y+4)(x-3y+2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad y+4 \rightarrow y+4 \\ 1 \quad -(3y-2) \rightarrow -3y+2 \\ 1 \quad -(y+4)(3y-2) \rightarrow -2y+6 \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{r} 2x^2-5xy-3y^2+7x+7y-4 \\ = 2x^2-(5y-7)x-(3y^2-7y+4) \\ = 2x^2-(5y-7)x-(y-1)(3y-4) \\ = (x-(3y-4))(2x+(y-1)) \\ = (x-3y+4)(2x+y-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -(3y-4) \rightarrow -6y+8 \\ 2 \quad y-1 \rightarrow y-1 \\ 2 \quad -(y-1)(3y-4) \rightarrow -5y+7 \end{array}$$

6

- 解答** (1) $(a+b)(b+c)(c+a)$ (2) $(x-y)(y-z)(z-x)$

解説

- (1) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$
 $= (b+c)^2a+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc$
 $= (b+c)a^2+\{(b+c)^2+2bc+2bc-4bc\}a+bc^2+b^2c$
 $= (b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
 $= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
 $= (b+c)(a+b)(a+c)$
 $= (a+b)(b+c)(c+a)$
 (2) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2) = -(y-z)x^2+(y^2-z^2)x+yz^2-y^2z$
 $= -(y-z)x^2+(y+z)(y-z)x-yz(y-z)$
 $= -(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$
 $= -(y-z)(x-y)(x-z)$
 $= (x-y)(y-z)(z-x)$

7

- 解答** (1) $(x+y-1)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$
 (2) $(a-2b+1)(a^2+2ab+4b^2-a+2b+1)$

解説

- (1) $x^3+3xy+y^3-1 = x^3+y^3+(-1)^3-3 \cdot x \cdot y \cdot (-1)$
 $= (x+y+(-1))\{x^2+y^2+(-1)^2-xy-y \cdot (-1)-(-1) \cdot x\}$
 $= (x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+y+x)$
 $= (x+y-1)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$
 (2) $a^3+6ab-8b^3+1 = a^3+(-2b)^3+1^3-3 \cdot a \cdot (-2b) \cdot 1$
 $= (a+(-2b)+1)\{a^2+(-2b)^2+1^2-a \cdot (-2b)-(-2b) \cdot 1-1 \cdot a\}$
 $= (a-2b+1)(a^2+4b^2+1+2ab+2b-a)$
 $= (a-2b+1)(a^2+2ab+4b^2-a+2b+1)$

1

- 解答** 降べきの順, 昇べきの順の順に
 (1) $7x^2+4x-8, -8+4x+7x^2$ (2) $x^3-x^2-5, -5-x^2+x^3$
 x についての降べきの順, x についての昇べきの順,
 y についての降べきの順の順に
 (3) $6x^2-(2y+3)x+(-4y^2+4y+1), (-4y^2+4y+1)-(2y+3)x+6x^2,$
 $-4y^2-(2x-4)y+(6x^2-3x+1)$
 (4) $-x^2+(3y+2)x+(2y^2-y+4), (2y^2-y+4)+(3y+2)x-x^2,$
 $2y^2+(3x-1)y+(-x^2+2x+4)$

解説

- (1) 降べきの順に整理すると $(-3+10)x^2+(12-8)x+(-17+9) = 7x^2+4x-8$
 昇べきの順に整理すると $-8+4x+7x^2$
 (2) 降べきの順に整理すると $x^3+(-2+1)x^2+(-4+3+1)x-5 = x^3-x^2-5$
 昇べきの順に整理すると $-5-x^2+x^3$
 (3) x について降べきの順に整理すると $6x^2-(2y+3)x+(-4y^2+4y+1)$
 x について昇べきの順に整理すると $(-4y^2+4y+1)-(2y+3)x+6x^2$
 y について降べきの順に整理すると $-4y^2-(2x-4)y+(6x^2-3x+1)$
 (4) x について降べきの順に整理すると $-x^2+(3y+2)x+(2y^2-y+4)$
 x について昇べきの順に整理すると $(2y^2-y+4)+(3y+2)x-x^2$
 y について降べきの順に整理すると $2y^2+(3x-1)y+(-x^2+2x+4)$

2

- 解答** (1) $x^3+9x^2+27x+27$ (2) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$
 (3) $8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3$ (4) x^3+64 (5) $27a^3-64b^3$
 (6) x^6-y^6

解説

- (1) 与式 $= x^3+3 \cdot x^2 \cdot 3+3 \cdot x \cdot 3^2+3^3$
 $= x^3+9x^2+27x+27$
 (2) 与式 $= a^3+3 \cdot a^2 \cdot 2b+3 \cdot a \cdot (2b)^2+(2b)^3$
 $= a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$
 (3) 与式 $= (2a)^3-3 \cdot (2a)^2 \cdot 5b+3 \cdot 2a \cdot (5b)^2-(5b)^3$
 $= 8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3$
 (4) 与式 $= (x+4)(x^2-x \cdot 4+4^2) = x^3+4^3$
 $= x^3+64$
 (5) 与式 $= (3a-4b)\{(3a)^2+3a \cdot 4b+(4b)^2\}$
 $= (3a)^3-(4b)^3 = 27a^3-64b^3$
 (6) 与式 $= (x+y)(x^2-xy+y^2) \times (x-y)(x^2+xy+y^2)$
 $= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = (x^3)^2-(y^3)^2$
 $= x^6-y^6$

3

- 解答** (1) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$ (2) $(4x-1)(16x^2+4x+1)$
 (3) $(2x-3)^3$

解説

- (1) $8a^3+27b^3 = (2a)^3+(3b)^3$

$$= (2a+3b)((2a)^2 - 2a \cdot 3b + (3b)^2)$$

$$= (2a+3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$$

(2) $64x^3 - 1 = (4x)^3 - 1^3 = (4x-1)((4x)^2 + 4x \cdot 1 + 1^2)$

$$= (4x-1)(16x^2 + 4x + 1)$$

(3) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3$

$$= (2x-3)^3$$

別解 $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 8x^3 - 27 - (36x^2 - 54x)$

$$= (2x-3)(4x^2 + 6x + 9) - 18x(2x-3)$$

$$= (2x-3)(4x^2 + 6x + 9 - 18x)$$

$$= (2x-3)(4x^2 - 12x + 9)$$

$$= (2x-3)(2x-3)^2 = (2x-3)^3$$

4

解答 (1) $(a-4)(-a+2b-4)$ (2) $(x+1)(x-1)(y+1)$ (3) $(x-y)(x+2y-z)$

解説

(1) $16-8b+2ab-a^2 = (2a-8)b - a^2 + 16 = 2(a-4)b - (a^2-16)$

$$= 2(a-4)b - (a+4)(a-4)$$

$$= (a-4)\{2b - (a+4)\} = (a-4)(-a+2b-4)$$

(2) $x^2y + x^2 - y - 1 = (x^2-1)y + x^2 - 1 = (x^2-1)(y+1)$

$$= (x+1)(x-1)(y+1)$$

(3) $x^2 - 2y^2 + xy + yz - zx = (-x+y)z + x^2 + xy - 2y^2$

$$= -(x-y)z + (x+2y)(x-y)$$

$$= (x-y)\{-z + (x+2y)\} = (x-y)(x+2y-z)$$

5

解答 (1) $(x+2y-1)(x+y-5)$ (2) $(x-y+1)(x-y-2)$

(3) $(x+2y+3)(2x+y-2)$ (4) $(x+3y-2)(2x-y+3)$

解説

(1) 与式 $= x^2 + (3y-6)x + (2y^2 - 11y + 5)$

$$= x^2 + (3y-6)x + (2y-1)(y-5)$$

$$= \{x + (2y-1)\}\{x + (y-5)\}$$

$$= (x+2y-1)(x+y-5)$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 2y-1 \rightarrow 2y-1 \\ 1 \times y-5 \rightarrow y-5 \\ \hline 3y-6 \end{array}$$

(2) 与式 $= x^2 - (2y+1)x + y^2 + y - 2$

$$= x^2 - (2y+1)x + (y-1)(y+2)$$

$$= \{x - (y-1)\}\{x - (y+2)\}$$

$$= (x-y+1)(x-y-2)$$

$$\begin{array}{r} 1 \times -(y-1) \rightarrow -y+1 \\ 1 \times -(y+2) \rightarrow -y-2 \\ \hline -2y-1 \end{array}$$

別解 与式 $= (x-y)^2 - (x-y) - 2 = \{(x-y)+1\}\{(x-y)-2\} = (x-y+1)(x-y-2)$

(3) 与式 $= 2x^2 + (5y+4)x + 2y^2 - y - 6$

$$= 2x^2 + (5y+4)x + (2y+3)(y-2)$$

$$= \{x + (2y+3)\}\{2x + (y-2)\}$$

$$= (x+2y+3)(2x+y-2)$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 2y+3 \rightarrow 4y+6 \\ 2 \times y-2 \rightarrow y-2 \\ \hline 5y+4 \end{array}$$

(4) 与式 $= 2x^2 + (5y-1)x - (3y^2 - 11y + 6)$

$$= 2x^2 + (5y-1)x - (3y-2)(y-3)$$

$$= \{x + (3y-2)\}\{2x - (y-3)\}$$

$$= (x+3y-2)(2x-y+3)$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 3y-2 \rightarrow 6y-4 \\ 2 \times -(y-3) \rightarrow -y+3 \\ \hline 5y-1 \end{array}$$

6

解答 (1) $-(a-b)(b-c)(c-a)$ (2) $(a+b)(b+c)(c+a)$

(3) $(a+b)(b+c)(c+a)$ (4) $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

解説

(1) (与式) $= (b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + (b^2c-bc^2)$

$$= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c)$$

$$= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}$$

$$= (b-c)(a-b)(a-c) = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

(2) (与式) $= a^2b + ab^2 + bc(b+c) + c^2a + ca^2 + 2abc$

$$= (b+c)a^2 + (b^2+2bc+c^2)a + bc(b+c)$$

$$= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c)$$

$$= (a+b)(b+c)(c+a)$$

(3) (与式) $= a(b^2-2bc+c^2) + b(c^2-2ca+a^2) + c(a^2-2ab+b^2) + 8abc$

$$= (b+c)a^2 + \{(b^2-2bc+c^2) - 2bc - 2bc + 8bc\}a + bc^2 + b^2c$$

$$= (b+c)a^2 + (b^2+2bc+c^2)a + bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c) = (a+b)(b+c)(c+a)$$

(4) (与式) $= (b+c) \times (a+b)(a+c) + abc$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\} + abc$$

$$= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c) + abc$$

$$= (b+c)a^2 + \{(b+c)^2 + bc\}a + bc(b+c)$$

$$= \{a + (b+c)\}\{(b+c)a + bc\}$$

$$= (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\begin{array}{r} 1 \times b+c \rightarrow (b+c)^2 \\ b+c \times bc \rightarrow bc \\ \hline b+c \quad bc(b+c) \quad (b+c)^2 + bc \end{array}$$

7

解答 (1) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$

(2) $(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)$

解説

(1) $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$

$$= a^3 + (-b)^3 + (-c)^3 - 3a(-b)(-c)$$

$$= \{a + (-b) + (-c)\}\{a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 - a(-b) - (-b)(-c) - (-c)a\}$$

$$= (a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$$

(2) $x^3 + y^3 - 3xy + 1$

$$= x^3 + y^3 + 1^3 - 3xy \cdot 1 = (x+y+1)(x^2+y^2+1^2 - x \cdot y - y \cdot 1 - 1 \cdot x)$$

$$= (x+y+1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1)$$

1

解答 (1) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ (2) $2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x - 3$

(3) $8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$ (4) $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 8x - 6$

(5) $x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4$ (6) $x^8 - y^8$ (7) $1 + a^9$

解説

(1) $(a-b+c)(a-b-c) = \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}$

$$= (a-b)^2 - c^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - c^2$$

(2) $(2x^2-x+1)(x^2+3x-3) = 2x^2(x^2+3x-3) - x(x^2+3x-3) + x^2+3x-3$

$$= 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 - x^3 - 3x^2 + 3x + x^2 + 3x - 3$$

$$= 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x - 3$$

(3) $(2a-5b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2 \cdot 5b + 3 \cdot 2a \cdot (5b)^2 - (5b)^3$

$$= 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$$

(4) $(x^3+x-3)(x^2-2x+2) = x^3(x^2-2x+2) + x(x^2-2x+2) - 3(x^2-2x+2)$

$$= x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^3 - 2x^2 + 2x - 3x^2 + 6x - 6$$

$$= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 8x - 6$$

別解

$$\begin{array}{r} x^3 \quad \quad \quad + x - 3 \\ \times \quad x^2 - 2x \quad + 2 \\ \hline x^5 \quad \quad \quad + x^3 - 3x^2 \\ \quad - 2x^4 \quad \quad \quad - 2x^2 + 6x \\ \hline \quad \quad 2x^3 + \quad \quad 2x - 6 \\ \hline x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 8x - 6 \end{array}$$

(5) $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2) = (x^2+4y^2)^2 - (2xy)^2$

$$= x^4 + 8x^2y^2 + 16y^4 - 4x^2y^2$$

$$= x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4$$

(6) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) = (x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4) = (x^4-y^4)(x^4+y^4)$

$$= x^8 - y^8$$

(7) $(1+a)(1-a^3+a^6)(1-a+a^2) = \{(1+a)(1-a+a^2)\}\{(1-a^3+a^6)\}$

$$= (1+a^3)(1-a^3+a^6)$$

$$= (1+a^3)\{1-a^3+(a^3)^2\}$$

$$= 1 + (a^3)^3 = 1 + a^9$$

2

解答 (1) $t^6 - 12t^4 + 48t^2 - 64$ (2) $a^{12} - 2a^6b^6 + b^{12}$

解説

(1) (与式) $= \{(t+2)(t-2)\}^3 = (t^2-4)^3$

$$= (t^2)^3 - 3 \cdot (t^2)^2 \cdot 4 + 3 \cdot t^2 \cdot 4^2 - 4^3$$

$$= t^6 - 12t^4 + 48t^2 - 64$$

(2) (与式) $= \{(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)\}^2 = \{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)\}^2$

$$= \{(a^2)^3 - (b^2)^3\}^2 = (a^6 - b^6)^2 = a^{12} - 2a^6b^6 + b^{12}$$

3

解答 (1) $(x-4)(2x-7)$ (2) $(x+y-2)(x-y+2)$

(3) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$ (4) $(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$

第1講 レベルA

解説

$$(1) 2(x-1)^2 - 11(x-1) + 15 = \{(x-1)-3\}\{2(x-1)-5\} \\ = (x-4)(2x-7)$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad -3 \quad \rightarrow \quad -6 \\ 2 \quad \quad -5 \quad \rightarrow \quad -5 \\ \hline 2 \quad 15 \quad -11 \end{array}$$

別解 $2(x-1)^2 - 11(x-1) + 15 = 2(x^2 - 2x + 1) - 11x + 26 \\ = 2x^2 - 15x + 28 \\ = (x-4)(2x-7)$

$$(2) x^2 - y^2 + 4y - 4 = x^2 - (y^2 - 4y + 4) = x^2 - (y-2)^2 \\ = \{(x+(y-2))\}\{x-(y-2)\} \\ = (x+y-2)(x-y+2)$$

$$(3) x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2)^2 - 10x^2 + 9 \\ = (x^2-1)(x^2-9) \\ = (x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$$

$$(4) (x^2+3x)^2 - 2(x^2+3x) - 8 = \{(x^2+3x)+2\}\{(x^2+3x)-4\} \\ = (x^2+3x+2)(x^2+3x-4) \\ = (x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$$

4

解答 (1) $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ (2) $4xy(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)$

(3) $(x+2)(x-3)(x^2-2x+4)(x^2+3x+9)$ (4) $(x-1)^2(x^2+x+1)^2$

解説

$$(1) x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1 = (x^3+1)(x^3-1) \\ = (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) \\ = (x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

別解 $x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1 = (x^2-1)(x^4+x^2+1) \\ = (x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$

ここで $x^4+x^2+1 = (x^4+2x^2+1) - x^2 \\ = (x^2+1)^2 - x^2 \\ = (x^2+1+x)(x^2+1-x)$

よって $x^6-1 = (x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$(2) (x+y)^6 - (x-y)^6 = \{(x+y)^3\}^2 - \{(x-y)^3\}^2 \\ = \{(x+y)^3 + (x-y)^3\}\{(x+y)^3 - (x-y)^3\} \\ = (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+x^3-3x^2y+3xy^2-y^3) \\ \times (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3) \\ = (2x^3+6xy^2)(6x^2y+2y^3) \\ = 2x(x^2+3y^2) \cdot 2y(3x^2+y^2) \\ = 4xy(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)$$

$$(3) x^6 - 19x^3 - 216 = (x^3)^2 - 19x^3 - 216 = (x^3+8)(x^3-27) \\ = (x+2)(x^2-2x+4)(x-3)(x^2+3x+9) \\ = (x+2)(x-3)(x^2-2x+4)(x^2+3x+9)$$

$$(4) x^6 - 2x^3 + 1 = (x^3)^2 - 2x^3 + 1 \\ = (x^3-1)^2 \\ = \{(x-1)(x^2+x+1)\}^2 \\ = (x-1)^2(x^2+x+1)^2$$

5

解答 (1) $(x+3)^2(x-2)^2$ (2) $x(x+5)(x^2+5x+10)$ (3) $8xy(x^2+y^2)$

解説

$$(1) (x^2+x-5)(x^2+x-7)+1 = \{(x^2+x)-5\}\{(x^2+x)-7\}+1 \\ = (x^2+x)^2 - 12(x^2+x) + 36 \\ = (x^2+x-6)^2 \\ = \{(x+3)(x-2)\}^2 \\ = (x+3)^2(x-2)^2$$

$$(2) (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 = \{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\} - 24 \\ = \{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\} - 24 \\ = (x^2+5x)^2 + 10(x^2+5x) \\ = (x^2+5x)(x^2+5x+10) \\ = x(x+5)(x^2+5x+10)$$

$$(3) (\text{与式}) = \{(x+y)^2\}^2 - \{(x-y)^2\}^2 \\ = \{(x+y)^2 + (x-y)^2\}\{(x+y)^2 - (x-y)^2\} \\ = (2x^2+2y^2)(2xy+2xy) \\ = 2(x^2+y^2) \cdot 4xy = 8xy(x^2+y^2)$$

6

解答 (1) $(a+2)(a-2)(ab-4)$ (2) $(x+z)(x-z)(xy+1)$ (3) $(2x-y)(3x+z)$
(4) $(x+2z)(3x+2y-z)$

解説

$$(1) a^2b + 16 - 4ab - 4a^2 = (a^3 - 4a)b + 16 - 4a^2 \\ = a(a^2 - 4)b - 4(a^2 - 4) \\ = (a^2 - 4)(ab - 4) \\ = (a+2)(a-2)(ab-4)$$

$$(2) x^3y + x^2 - xyz^2 - z^2 = (x^3 - xz^2)y + x^2 - z^2 \\ = x(x^2 - z^2)y + x^2 - z^2 \\ = (x^2 - z^2)(xy+1) \\ = (x+z)(x-z)(xy+1)$$

$$(3) 6x^2 - yz + 2xz - 3xy = (2x-y)z + 6x^2 - 3xy \\ = (2x-y)z + 3x(2x-y) \\ = (2x-y)(3x+z)$$

$$(4) 3x^2 - 2z^2 + 4yz + 2xy + 5xz = (2x+4z)y + 3x^2 + 5xz - 2z^2 \\ = 2(x+2z)y + (x+2z)(3x-z) \\ = (x+2z)(2y+3x-z) \\ = (x+2z)(3x+2y-z)$$

7

解答 (1) $(x-1)\{(a+b)x-a+b\}$ (2) $(a-b-1)(a+3b-2)$
(3) $(x+2y+3)(3x-y+2)$ (4) $(4x+6y-9)(6x-9y+10)$

解説

$$(1) (a+b)x^2 - 2ax + a - b \\ = (x-1)\{(a+b)x-a+b\}$$

別解 $(a+b)x^2 - 2ax + a - b \\ = a(x^2 - 2x + 1) + b(x^2 - 1) \\ = a(x-1)^2 + b(x+1)(x-1) \\ = (x-1)\{a(x-1) + b(x+1)\} \\ = (x-1)\{(a+b)x-a+b\}$

$$(2) a^2 + (2b-3)a - (3b^2+b-2) \\ = a^2 + (2b-3)a - (b+1)(3b-2) \\ = \{a-(b+1)\}\{a+(3b-2)\} \\ = (a-b-1)(a+3b-2)$$

$$(3) 3x^2 - 2y^2 + 5xy + 11x + y + 6 \\ = 3x^2 + (5y+11)x - 2y^2 + y + 6 \\ = 3x^2 + (5y+11)x - (y-2)(2y+3) \\ = \{x+(2y+3)\}\{3x-(y-2)\} \\ = (x+2y+3)(3x-y+2)$$

$$(4) 24x^2 - 54y^2 - 14x + 141y - 90 \\ = 24x^2 - 14x - (54y^2 - 141y + 90) \\ = 24x^2 - 14x - 3(18y^2 - 47y + 30) \\ = 24x^2 - 14x - 3(2y-3)(9y-10) \\ = \{4x+3(2y-3)\}\{6x-(9y-10)\} \\ = (4x+6y-9)(6x-9y+10)$$

8

解答 (1) $(a-b)(a+b+c)(a+b-c)$ (2) $(a+b)(b+c)(c+a)$
(3) $(a-b)(b-c)(c+a)$

解説

$$(1) (\text{与式}) = a^3 + a^2b - ac^2 - ab^2 + bc^2 - b^3 \\ = -(a-b)c^2 + a^3 - b^3 + a^2b - ab^2 \\ = -(a-b)c^2 + (a-b)(a^2 + ab + b^2) + ab(a-b) \\ = (a-b)\{-c^2 + (a^2 + ab + b^2) + ab\} \\ = (a-b)(a^2 + 2ab + b^2 - c^2) = (a-b)\{(a+b)^2 - c^2\} \\ = (a-b)\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} \\ = (a-b)(a+b+c)(a+b-c)$$

$$(2) (\text{与式}) = (b+c)^2a + b(c^2+2ca+a^2) + c(a^2+2ab+b^2) - 4abc \\ = (b+c)a^2 + \{(b+c)^2 + 2bc + 2bc - 4bc\}a + bc^2 + b^2c \\ = (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c) \\ = (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\} \\ = (b+c)(a+b)(a+c) \\ = (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$(3) (\text{与式}) = (b-c)a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)a - bc(b-c) \\ = (b-c)a^2 - (b-c)^2a - bc(b-c) \\ = (b-c)\{a^2 - (b-c)a - bc\} \\ = (b-c)(a-b)(a+c) \\ = (a-b)(b-c)(c+a)$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad -1 \quad \rightarrow \quad -a-b \\ a+b \quad \quad -(a-b) \quad \rightarrow \quad -a+b \\ \hline a+b \quad \quad \quad a-b \quad \quad -2a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad -(b+1) \quad \rightarrow \quad -b-1 \\ 1 \quad \quad 3b-2 \quad \rightarrow \quad 3b-2 \\ \hline 1 \quad \quad -(b+1)(3b-2) \quad 2b-3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad 2y+3 \quad \rightarrow \quad 6y+9 \\ 3 \quad \quad -(y-2) \quad \rightarrow \quad -y+2 \\ \hline 3 \quad \quad -(y-2)(2y+3) \quad 5y+11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad \times \quad 3(2y-3) \quad \rightarrow \quad 36y-54 \\ 6 \quad \quad -(9y-10) \quad \rightarrow \quad -36y+40 \\ \hline 24 \quad -3(2y-3)(9y-10) \quad -14 \end{array}$$

1

【解答】 $(a+b)^2(a-b)(a^2-ab+b^2)$

【解説】

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5 = a^3(a^2 - b^2) + b^3(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(a^3 + b^3) = (a+b)(a-b) \times (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a+b)^2(a-b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

2

【解答】 $(a+b)(b-c)(a-2c)$

【解説】

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= a^2b + ab^2 - 2bc(b-c) + 2c^2a - ca^2 - 3abc \\ &= (b-c)a^2 + (b^2 - 3bc + 2c^2)a - 2bc(b-c) \\ &= (b-c)a^2 + (b-c)(b-2c)a - 2bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 + (b-2c)a - 2bc\} = (b-c)(a+b)(a-2c) \\ &= (a+b)(b-c)(a-2c) \end{aligned}$$

3

【解答】 (1) $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ (2) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

【解説】

$$\begin{aligned} \text{(1) (与式)} &= (b+c)a^2 + (b^2+3bc+c^2)a + bc(b+c) \\ &= \{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\} \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \begin{array}{l} b+c \longrightarrow b^2+2bc+c^2 \\ b+c \quad \times \quad bc \longrightarrow bc \end{array} & \\ \hline b+c & bc(b+c) & b^2+3bc+c^2 \end{array}$$

【別解】 $\text{(与式)} = ab(a+b+c) - abc + bc(a+b+c) - abc + ca(a+b+c) - abc + 3abc$
 $= ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ca(a+b+c) - abc + 3abc$
 $= (a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$\begin{aligned} \text{(2) (与式)} &= (b-c)^3a + b(c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3) + c(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \\ &= -(b-c)a^3 + \{(b-c)^3 + 3bc(b-c)\}a - bc(b^2 - c^2) \\ &= -(b-c)a^3 + (b-c)\{(b-c)^2 + 3bc\}a - bc(b+c)(b-c) \\ &= -(b-c)a^3 + (b-c)(b^2 + bc + c^2)a - bc(b+c)(b-c) \\ &= -(b-c)\{a^3 - (b^2 + bc + c^2)a + bc(b+c)\} \\ &= -(b-c)\{(c-a)b^2 + (c^2 - ca)b + a(a^2 - c^2)\} \\ &= -(b-c)\{(c-a)b^2 + c(c-a)b - a(c+a)(c-a)\} \\ &= -(b-c)(c-a)\{b^2 + cb - a(c+a)\} \\ &= -(b-c)(c-a)\{c(b-a) + b^2 - a^2\} \\ &= -(b-c)(c-a)(b-a)\{c + (b+a)\} \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \end{aligned}$$

4

【解答】 (1) $3(y-z)(z-x)(x-y)$ (2) $-3(x-z)(y-z)(x+y-2z)$

【解説】

$$\begin{aligned} \text{(1) } y-z &= a, z-x = b, x-y = c \text{ とおくと} \\ \text{(与式)} &= a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \quad \dots\dots \text{①} \end{aligned}$$

ここで、 $a+b+c=(y-z)+(z-x)+(x-y)=0$ であるから、①より
 (与式) $= 3abc = 3(y-z)(z-x)(x-y)$

$$\begin{aligned} \text{(2) } x-z &= a, y-z = b, -(x+y-2z) = c \text{ とおくと} \\ \text{(与式)} &= a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \quad \dots\dots \text{②} \end{aligned}$$

ここで、 $a+b+c=(x-z)+(y-z)+\{-(x+y-2z)\}=0$ であるから、②より
 (与式) $= 3abc = 3(x-z)(y-z)\{-(x+y-2z)\}$
 $= -3(x-z)(y-z)(x+y-2z)$

【別解】 $x-z = a, y-z = b$ とおくと $a+b = x+y-2z$

$$\begin{aligned} \text{よって (与式)} &= a^3 + b^3 - (a+b)^3 \\ &= a^3 + b^3 - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= -3ab(a+b) \\ &= -3(x-z)(y-z)(x+y-2z) \end{aligned}$$

5

【解答】 (1) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ (2) $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$
 (3) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
 (4) $(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)$

【解説】

$$\begin{aligned} \text{(1) (与式)} &= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = \{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\} \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \\ \text{(2) (与式)} &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 9x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (3xy)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + 3xy)(x^2 + y^2 - 3xy) = (x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2) \\ \text{(3) (与式)} &= x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= \{(x^2 + 2) + 2x\}\{(x^2 + 2) - 2x\} = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \\ \text{(4) (与式)} &= (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) - 25x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 - (5xy)^2 \\ &= \{(x^2 - y^2) + 5xy\}\{(x^2 - y^2) - 5xy\} = (x^2 + 5xy - y^2)(x^2 - 5xy - y^2) \end{aligned}$$

1

【解答】 (1) $x > -7$ (2) $x \geq 4$ (3) $x < -2$

【解説】

$$\begin{aligned} \text{(1) 移項すると} & \quad 4x - 3x > -2 - 5 \\ \text{すなわち} & \quad x > -7 \\ \text{(2) 移項すると} & \quad -x - 2x \leq -3 - 9 \\ \text{すなわち} & \quad -3x \leq -12 \\ \text{両辺を } -3 \text{ で割って} & \quad x \geq 4 \\ \text{(3) 両辺に } 2 \text{ を掛けて} & \quad 4 - x > 2(7 + 2x) \\ \text{右辺を展開して} & \quad 4 - x > 14 + 4x \\ \text{移項して整理すると} & \quad -5x > 10 \\ \text{両辺を } -5 \text{ で割って} & \quad x < -2 \end{aligned}$$

2

【解答】 (1) $a=2$ のとき 解はすべての実数、 $a \neq 2$ のとき $x = -3$
 (2) $a > 2$ のとき $x > -3$ 、 $a = 2$ のとき 解はない、 $a < 2$ のとき $x < -3$

【解説】

$$\begin{aligned} \text{(1) } ax - 6 &= 2x - 3a \\ \text{移項すると} & \quad ax - 2x = -3a + 6 \\ \text{よって} & \quad (a-2)x = -3(a-2) \\ \text{[1] } a-2 &= 0 \text{ すなわち } a=2 \text{ のとき} \\ & \quad 0 \cdot x = -3 \cdot 0 \text{ よって、解はすべての実数} \\ \text{[2] } a-2 &\neq 0 \text{ すなわち } a \neq 2 \text{ のとき } x = -3 \\ \text{(2) } ax - 6 &> 2x - 3a \\ \text{移項すると} & \quad ax - 2x > -3a + 6 \\ \text{よって} & \quad (a-2)x > -3(a-2) \\ \text{[1] } a-2 &> 0 \text{ すなわち } a > 2 \text{ のとき} \\ & \quad \text{両辺を正の数 } a-2 \text{ で割って } x > -3 \\ \text{[2] } a-2 &= 0 \text{ すなわち } a=2 \text{ のとき} \\ & \quad \text{与えられた不等式 } 0 \cdot x > -3 \cdot 0 \text{ には解はない} \\ \text{[3] } a-2 &< 0 \text{ すなわち } a < 2 \text{ のとき} \\ & \quad \text{両辺を負の数 } a-2 \text{ で割って } x < -3 \end{aligned}$$

3

【解答】 (1) 6 (2) 2.7 (3) $\frac{2}{5}$ (4) -4 (5) $4 - \pi$ (6) $2 - \sqrt{3}$

【解説】

$$\begin{aligned} \text{(1) } |-6| &= -(-6) = 6 \\ \text{(2) } |2.7| &= 2.7 \\ \text{(3) } \left| -\frac{2}{5} \right| &= -\left(-\frac{2}{5} \right) = \frac{2}{5} \\ \text{(4) } |-2| - |-6| &= 2 - 6 = -4 \\ \text{(5) } \pi - 4 < 0 \text{ であるから} & \quad |\pi - 4| = -(\pi - 4) = 4 - \pi \\ \text{(6) } \sqrt{3} - 2 < 0 \text{ であるから} & \quad |\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

4

【解答】 (1) $x = 4, 2$ (2) $x = -1, -9$ (3) $x = \frac{4}{3}, -2$

【解説】

- (1) $|x-3|=1$ から $x-3=\pm 1$ よって $x=4, 2$
 (2) $|x+5|=4$ から $x+5=\pm 4$ よって $x=-1, -9$
 (3) $|3x+1|=5$ から $3x+1=\pm 5$ よって $x=\frac{4}{3}, -2$

5

- 【解答】 (1) $1 < x < 5$ (2) $x \leq -6, 2 \leq x$ (3) $-\frac{9}{2} \leq x \leq -\frac{5}{2}$

【解説】

- (1) $|x-3| < 2$ から $-2 < x-3 < 2$
 各辺に3を加えて $1 < x < 5$
 (2) $|x+2| \geq 4$ から $x+2 \leq -4$ または $4 \leq x+2$
 よって $x \leq -6, 2 \leq x$
 (3) $|2x+7| \leq 2$ から $-2 \leq 2x+7 \leq 2$
 各辺から7を引いて $-9 \leq 2x \leq -5$ よって $-\frac{9}{2} \leq x \leq -\frac{5}{2}$

6

- 【解答】 (1) $x \geq -1$ のとき $x+1, x < -1$ のとき $-x-1$
 (2) $x \geq 2$ のとき $2x-4, x < 2$ のとき $-2x+4$
 (3) $x < -4$ のとき $-2x-2, -4 \leq x < 2$ のとき $6, 2 \leq x$ のとき $2x+2$

【解説】

- (1) $x+1 \geq 0$ すなわち $x \geq -1$ のとき
 与式 $= x+1$
 $x+1 < 0$ すなわち $x < -1$ のとき
 与式 $= -(x+1) = -x-1$
 (2) $2x-4 \geq 0$ すなわち $x \geq 2$ のとき
 与式 $= 2x-4$
 $2x-4 < 0$ すなわち $x < 2$ のとき
 与式 $= -(2x-4) = -2x+4$
 (3) $x < -4$ のとき
 与式 $= -(x-2)-(x+4) = -2x-2$
 $-4 \leq x < 2$ のとき
 与式 $= -(x-2)+(x+4) = 6$
 $2 \leq x$ のとき
 与式 $= (x-2)+(x+4) = 2x+2$

7

- 【解答】 (1) $x=1$ (2) $x=-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}$

【解説】

- (1) $x-3 \geq 0$ すなわち $x \geq 3$ のとき $x-3=2x$
 これを解いて $x=-3$ これは $x \geq 3$ を満たさない。
 $x-3 < 0$ すなわち $x < 3$ のとき $-(x-3)=2x$
 これを解いて $x=1$ これは $x < 3$ を満たす。
 よって、方程式の解は $x=1$
 (2) $x \geq 1$ のとき $x+2(x-1)=x+3$
 これを解いて $x=\frac{5}{2}$ これは $x \geq 1$ を満たす。

$0 \leq x < 1$ のとき $x-2(x-1)=x+3$
 これを解いて $x=-\frac{1}{2}$ これは $0 \leq x < 1$ を満たさない。

$x < 0$ のとき $-x-2(x-1)=x+3$
 これを解いて $x=-\frac{1}{4}$ これは $x < 0$ を満たす。

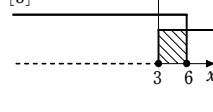
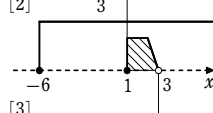
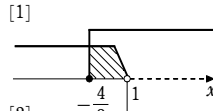
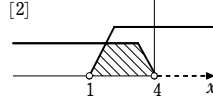
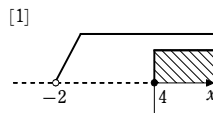
よって、方程式の解は $x=-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}$

8

- 【解答】 (1) $x > 1$ (2) $-\frac{4}{3} \leq x \leq 6$

【解説】

- (1) [1] $x \geq 4$ のとき、不等式は $x-4 < 3x$
 これを解いて $x > -2$
 $x \geq 4$ との共通範囲は $x \geq 4$ ……①
 [2] $x < 4$ のとき、不等式は $-(x-4) < 3x$
 これを解いて $x > 1$
 $x < 4$ との共通範囲は $1 < x < 4$ ……②
 求める解は、①と②を合わせた範囲で $x > 1$
 (2) [1] $x < 1$ のとき、不等式は $-(x-1)-2(x-3) \leq 11$
 よって $x \geq -\frac{4}{3}$
 $x < 1$ との共通範囲は $-\frac{4}{3} \leq x < 1$ ……①
 [2] $1 \leq x < 3$ のとき、不等式は $x-1-2(x-3) \leq 11$
 よって $x \geq -6$
 $1 \leq x < 3$ との共通範囲は $1 \leq x < 3$ ……②
 [3] $3 \leq x$ のとき、不等式は $x-1+2(x-3) \leq 11$
 よって $x \leq 6$
 $3 \leq x$ との共通範囲は $3 \leq x \leq 6$ ……③
 求める解は、①~③を合わせた範囲で $-\frac{4}{3} \leq x \leq 6$



1

- 【解答】 (1) $x \geq 5$ (2) $x \leq -\frac{11}{7}$ (3) $x < \frac{17}{25}$

【解説】

- (1) 移項して $5x-9x \leq -4-16$
 整理して $-4x \leq -20$
 両辺を -4 で割って $x \geq 5$
 (2) 括弧をはずして $3x-3 \geq 10x+8$
 よって $3x-10x \geq 8+3$
 すなわち $-7x \geq 11$
 両辺を -7 で割って $x \leq -\frac{11}{7}$
 (3) 両辺に12を掛けて $3(5x+1)-4(2-3x) < 2x+12$
 括弧をはずして $15x+3-8+12x < 2x+12$
 整理して $25x < 17$
 両辺を25で割って $x < \frac{17}{25}$

2

- 【解答】 (1) $a \neq 2$ のとき $x = \frac{2a}{a-2}$, $a=2$ のとき 解はない
 (2) $a > 0$ のとき $x \leq \frac{3}{a}$, $a=0$ のとき すべての実数,
 $a < 0$ のとき $x \geq \frac{3}{a}$
 (3) $a > 1$ のとき $x > a+1$, $a=1$ のとき 解はない,
 $a < 1$ のとき $x < a+1$

【解説】

- (1) 方程式から $(a-2)x=2a$ ……①
 [1] $a-2 \neq 0$ すなわち $a \neq 2$ のとき
 ①の両辺を $a-2$ で割って $x = \frac{2a}{a-2}$
 [2] $a-2=0$ すなわち $a=2$ のとき
 ①は $0 \cdot x=4$ となり、これを満たす x の値はない。
 よって、解はない。
 (2) $ax \leq 3$ ……②
 [1] $a > 0$ のとき
 ②の両辺を正の数 a で割って $x \leq \frac{3}{a}$
 [2] $a=0$ のとき
 ②は $0 \cdot x \leq 3$ となり、これはすべての実数 x について成り立つ。
 よって、解はすべての実数。
 [3] $a < 0$ のとき
 ②の両辺を負の数 a で割って $x \geq \frac{3}{a}$
 (3) $ax+1 > x+a^2$ から $(a-1)x > a^2-1$
 よって $(a-1)x > (a+1)(a-1)$ ……③
 [1] $a-1 > 0$ すなわち $a > 1$ のとき
 ③の両辺を正の数 $a-1$ で割って $x > a+1$

第2講 例題演習

- [2] $a-1=0$ すなわち $a=1$ のとき
 ③は $0 \cdot x > 0$ となり、これを満たす x の値はない。
 よって、解はない。

- [3] $a-1 < 0$ すなわち $a < 1$ のとき
 ③の両辺を負の数 $a-1$ で割って $x < a+1$

[3]

- 【解答】 (1) $\frac{1}{3}$ (2) 3 (3) -5 (4) 0 (5) $2-\sqrt{2}$ (6) 1

【解説】

- (1) $\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$
 (2) $|-5+2| = |-3| = 3$
 (3) $|2-|-7|| = |2-7| = -5$
 (4) $\left|-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-1-2+3}{6}\right| = |0| = 0$
 (5) $\sqrt{2} = 1.41\dots$ であるから、 $2-\sqrt{2} = 0.5\dots$ は正の数である。
 よって $|2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$
 (6) $\pi = 3.14\dots$ であるから、 $\pi-3$ は正の数、 $\pi-4$ は負の数である。
 よって $|\pi-3|+|\pi-4| = \pi-3-(\pi-4) = \pi-3-\pi+4 = 1$

[4]

- 【解答】 (1) $x=3, -1$ (2) $x=1, -\frac{5}{3}$ (3) $x=\frac{1}{5}, 1$

【解説】

- (1) $|x-1|=2$ から $x-1 = \pm 2$
 よって $x=3, -1$
 (2) $|3x+1|=4$ から $3x+1 = \pm 4$
 よって $x=1, -\frac{5}{3}$
 (3) $|3-5x|=2$ から $3-5x = \pm 2$
 よって $x=\frac{1}{5}, 1$

[5]

- 【解答】 (1) $-2 < x < 6$ (2) $x \leq 1, 5 \leq x$ (3) $x < -3, \frac{1}{3} < x$

【解説】

- (1) $|x-2| < 4$ から $-4 < x-2 < 4$
 よって $-2 < x < 6$
 (2) $|3-x| \geq 2$ から $3-x \leq -2, 2 \leq 3-x$
 よって $x \leq 1, 5 \leq x$
 (3) $|3x+4| > 5$ から $3x+4 < -5, 5 < 3x+4$
 よって $3x < -9, 1 < 3x$
 ゆえに $x < -3, \frac{1}{3} < x$

[6]

- 【解答】 (1) $x \leq 4$ のとき $4-x, x > 4$ のとき $x-4$

- (2) $x \geq -\frac{2}{3}$ のとき $3x+2, x < -\frac{2}{3}$ のとき $-3x-2$
 (3) $x < -4$ のとき $-2x-2, -4 \leq x < 2$ のとき $6, 2 \leq x$ のとき $2x+2$

【解説】

- (1) $4-x \geq 0$ すなわち $x \leq 4$ のとき
 $|4-x| = 4-x$
 $4-x < 0$ すなわち $x > 4$ のとき
 $|4-x| = -(4-x) = x-4$
 (2) $3x+2 \geq 0$ すなわち $x \geq -\frac{2}{3}$ のとき
 $|3x+2| = 3x+2$
 $3x+2 < 0$ すなわち $x < -\frac{2}{3}$ のとき
 $|3x+2| = -(3x+2) = -3x-2$
 (3) $x < -4$ のとき
 与式 $= -(x-2)-(x+4) = -2x-2$
 $-4 \leq x < 2$ のとき
 与式 $= -(x-2)+(x+4) = 6$
 $2 \leq x$ のとき
 与式 $= (x-2)+(x+4) = 2x+2$

[7]

- 【解答】 (1) $x = \frac{1}{2}$ (2) $x = -3$ (3) $x = -\frac{4}{3}, \frac{8}{5}$

【解説】

- (1) [1] $x+1 \geq 0$ すなわち $x \geq -1$ のとき
 $|x+1| = x+1$ であるから、方程式は $x+1=3x$
 ゆえに $x = \frac{1}{2}$ これは $x \geq -1$ を満たす。
 [2] $x+1 < 0$ すなわち $x < -1$ のとき
 $|x+1| = -(x+1)$ であるから、方程式は $-(x+1)=3x$
 ゆえに $x = -\frac{1}{4}$ これは $x < -1$ を満たさない。
 よって、解は $x = \frac{1}{2}$

- (2) [1] $x-3 \geq 0$ すなわち $x \geq 3$ のとき
 $|x-3| = x-3$ であるから、方程式は $x-3=-2x$
 ゆえに $x=1$ これは $x \geq 3$ を満たさない。
 [2] $x-3 < 0$ すなわち $x < 3$ のとき
 $|x-3| = -(x-3)$ であるから、方程式は $-(x-3)=-2x$
 ゆえに $x=-3$ これは $x < 3$ を満たす。
 よって、解は $x=-3$

- (3) [1] $x < 0$ のとき
 $|2x| = -2x, |x-2| = -(x-2)$ であるから、方程式は $-2x-(x-2)=6$
 ゆえに $x = -\frac{4}{3}$ これは $x < 0$ を満たす。
 [2] $0 \leq x < 2$ のとき
 $|2x| = 2x, |x-2| = -(x-2)$ であるから、方程式は $2x-(x-2)=6$

ゆえに $x=4$ これは $0 \leq x < 2$ を満たさない。

- [3] $x \geq 2$ のとき
 $|2x| = 2x, |x-2| = x-2$ であるから、方程式は $2x+(x-2)=6$
 ゆえに $x = \frac{8}{3}$ これは $x \geq 2$ を満たす。
 よって、解は $x = -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$

[8]

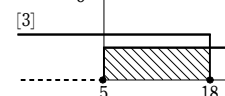
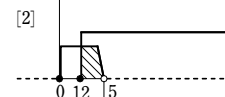
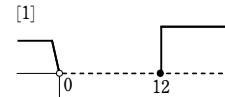
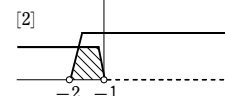
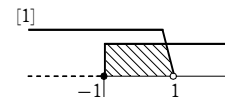
- 【解答】 (1) $-2 < x < 1$ (2) $\frac{12}{5} \leq x \leq 18$

【解説】

- (1) [1] $x \geq -1$ のとき、不等式は $3(x+1) < x+5$
 これを解いて $x < 1$
 $x \geq -1$ との共通範囲は $-1 \leq x < 1$ ……①
 [2] $x < -1$ のとき、不等式は $-3(x+1) < x+5$
 これを解いて $x > -2$
 $x < -1$ との共通範囲は $-2 < x < -1$ ……②
 求める解は、①と②を合わせた範囲で $-2 < x < 1$

- (2) $|x-5| \leq \frac{2}{3}|x|+1$ から $3|x-5| \leq 2|x|+3$

- [1] $x < 0$ のとき、不等式は $-3(x-5) \leq -2x+3$
 ゆえに $-x \leq -12$ よって $x \geq 12$
 これは $x < 0$ を満たさない。
 [2] $0 \leq x < 5$ のとき、不等式は $-3(x-5) \leq 2x+3$
 ゆえに $-5x \leq -12$ よって $x \geq \frac{12}{5}$
 $0 \leq x < 5$ との共通範囲は $\frac{12}{5} \leq x < 5$ ……①
 [3] $5 \leq x$ のとき、不等式は $3(x-5) \leq 2x+3$
 これを解いて $x \leq 18$
 $5 \leq x$ との共通範囲は $5 \leq x \leq 18$ ……②
 求める解は、①と②を合わせた範囲で $\frac{12}{5} \leq x \leq 18$



1

解答 (1) $a \neq 0, a \neq 1$ のとき $x = \frac{1}{a}$; $a = 0$ のとき 解はない;

$a = 1$ のとき 解はすべての数

(2) $a > 1$ のとき $x > a + 2$, $a = 1$ のとき 解はない, $a < 1$ のとき $x < a + 2$

解説

(1) $a^2x + 1 = ax + a$ から $a(a-1)x = a-1$ ……①

$a(a-1) \neq 0$ すなわち $a \neq 0, a \neq 1$ のとき $x = \frac{1}{a}$

$a = 0$ のとき, ①は $0 \cdot x = -1$

これを満たす x の値はない。すなわち, 解はない。

$a = 1$ のとき, ①は $0 \cdot x = 0$

これはすべての数 x について成り立つ。

すなわち, 解はすべての数。

(2) 与式から $(a-1)x > (a-1)(a+2)$ ……①

[1] $a-1 > 0$ すなわち $a > 1$ のとき $x > a+2$

[2] $a-1 = 0$ すなわち $a = 1$ のとき ①は $0 \cdot x > 0$

これを満たす x の値はない。

[3] $a-1 < 0$ すなわち $a < 1$ のとき $x < a+2$

よって $\begin{cases} a > 1 \text{ のとき } x > a + 2 \\ a = 1 \text{ のとき } \text{解はない} \\ a < 1 \text{ のとき } x < a + 2 \end{cases}$

2

解答 (1) $x \leq 4$ (2) $\frac{5}{2} < x \leq 3$ (3) $-2 < x < 12$ (4) $x < -\frac{7}{3}, 1 < x$

解説

(1) 両辺に 6 を掛けると $4(x+1) - 5 \geq 6x - 9$

すなわち $4x + 4 - 5 \geq 6x - 9$

移項すると $-2x \geq -8$ よって $x \leq 4$

(2) $-x + 5 \geq 2x - 4$ から $-3x \geq -9$

よって $x \leq 3$ ……①

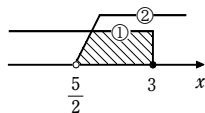
$3(2x-1) + 1 > 4x + 3$ から $6x - 3 + 1 > 4x + 3$

すなわち $2x > 5$

よって $x > \frac{5}{2}$ ……②

①と②の共通範囲を求めて

$$\frac{5}{2} < x \leq 3$$



(3) $|x-5| < 7$ から $-7 < x-5 < 7$

各辺に 5 を足して $-2 < x < 12$

(4) $|3x+2| > 5$ から $3x+2 < -5, 5 < 3x+2$

各辺から 2 を引いて $3x < -7, 3 < 3x$

各辺を 3 で割って $x < -\frac{7}{3}, 1 < x$

3

解答 (1) $x = -\frac{5}{3}, 1, 5$ (2) $x = 6, -4$

解説

(1) [1] $x < -1$ のとき, 方程式は $-2(x+1) + (x-3) = 2x$

よって $-3x = 5$ ゆえに $x = -\frac{5}{3}$ $x = -\frac{5}{3}$ は $x < -1$ を満たす。

[2] $-1 \leq x < 3$ のとき, 方程式は $2(x+1) + (x-3) = 2x$

これを解いて $x = 1$ $x = 1$ は $-1 \leq x < 3$ を満たす。

[3] $3 \leq x$ のとき, 方程式は $2(x+1) - (x-3) = 2x$

これを解いて $x = 5$ $x = 5$ は $3 \leq x$ を満たす。

以上から, 求める解は $x = -\frac{5}{3}, 1, 5$

(2) [1] $x \geq 1$ のとき, 方程式は $|(x-1) - 2| - 3 = 0$

すなわち $|x-3| = 3$ よって $x-3 = \pm 3$

ゆえに $x = 6, 0$

これらのうち, $x \geq 1$ を満たすのは $x = 6$

[2] $x < 1$ のとき, 方程式は $|-(x-1) - 2| - 3 = 0$

すなわち $|x+1| = 3$ よって $x+1 = \pm 3$

ゆえに $x = 2, -4$

これらのうち, $x < 1$ を満たすのは $x = -4$

以上から, 求める解は $x = 6, -4$

別解 $||x-1| - 2| = 3$ から $|x-1| - 2 = \pm 3$

よって $|x-1| = 5, -1$

$|x-1| = 5$ から $x-1 = \pm 5$ これを解いて $x = 6, -4$

$|x-1| = -1$ を満たす x は存在しない。

以上から, 求める解は $x = 6, -4$

1

解説 $a > 3$ のとき $x > -\frac{b}{a-3}$, $a = 3$ かつ $b > 0$ のとき 解はすべての数,

$a = 3$ かつ $b \leq 0$ のとき 解はない, $a < 3$ のとき $x < -\frac{b}{a-3}$

解説

$ax > 3x - b$ から $(a-3)x > -b$ ……①

[1] $a-3 > 0$ すなわち $a > 3$ のとき, ①から $x > -\frac{b}{a-3}$

[2] $a-3 = 0$ すなわち $a = 3$ のとき, ①は $0 \cdot x > -b$

(i) $b > 0$ のとき, $-b < 0$ であるから, 解はすべての数。

(ii) $b \leq 0$ のとき, $-b \geq 0$ であるから, 解はない。

[3] $a-3 < 0$ すなわち $a < 3$ のとき, ①から $x < -\frac{b}{a-3}$

よって $a > 3$ のとき $x > -\frac{b}{a-3}$

$a = 3$ かつ $b > 0$ のとき 解はすべての数

$a = 3$ かつ $b \leq 0$ のとき 解はない

$a < 3$ のとき $x < -\frac{b}{a-3}$

2

解答 $-7 < k < 9$

解説

$|x-1| < 6$ から $-6 < x-1 < 6$

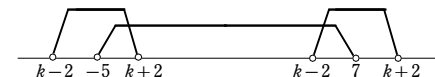
よって $-5 < x < 7$

$|x-k| < 2$ から $-2 < x-k < 2$

よって $k-2 < x < k+2$

与えられた連立不等式を満たす実数 x が存在するための条件は

$$-5 < k+2 \text{ かつ } k-2 < 7$$



よって $-7 < k < 9$

3

解答 (1) $x = -1, 5$ (2) $x = 1$ (3) $x \leq -5, \frac{1}{5} \leq x$ (4) $-5 < x < 5$

解説

(1) [1] $x < \frac{3}{2}$ のとき, 方程式は $-(x-3) - (2x-3) = 9$

これを解いて $x = -1$ $x = -1$ は $x < \frac{3}{2}$ を満たす。

[2] $\frac{3}{2} \leq x < 3$ のとき, 方程式は $-(x-3) + (2x-3) = 9$

これを解いて $x = 9$ $x = 9$ は $\frac{3}{2} \leq x < 3$ を満たさない。

[3] $3 \leq x$ のとき, 方程式は $(x-3) + (2x-3) = 9$

これを解いて $x = 5$ $x = 5$ は $3 \leq x$ を満たす。

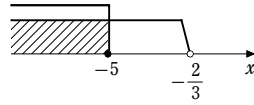
以上から、求める解は $x = -1, 5$

(2) [1] $x < 2$ のとき、方程式は $-(x-2)-4=3x$
 よって $-x-2=3x$ ゆえに $|x+2|=3x$ ……①
 (i) $x < -2$ のとき、①は $-(x+2)=3x$
 よって $x = -\frac{1}{2}$
 $x = -\frac{1}{2}$ は $x < -2$ を満たさない。
 (ii) $-2 \leq x < 2$ のとき、①は $x+2=3x$
 ゆえに $x=1$ $x=1$ は $-2 \leq x < 2$ を満たす。

[2] $x \geq 2$ のとき、方程式は $|x-2-4|=3x$
 よって $|x-6|=3x$ ……②
 (i) $2 \leq x < 6$ のとき、②は $-(x-6)=3x$
 ゆえに $x = \frac{3}{2}$ $x = \frac{3}{2}$ は $2 \leq x < 6$ を満たさない。
 (ii) $x \geq 6$ のとき、②は $x-6=3x$
 よって $x = -3$ $x = -3$ は $x \geq 6$ を満たさない。

以上から、求める解は $x = 1$

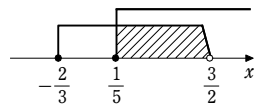
(3) [1] $x < -\frac{2}{3}$ のとき、不等式は
 $-(2x-3) \leq -(3x+2)$
 ゆえに $-2x+3 \leq -3x-2$
 よって $x \leq -5$



$x < -\frac{2}{3}$ との共通範囲は $x \leq -5$ ……①

[2] $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}$ のとき、不等式は $-(2x-3) \leq 3x+2$

ゆえに $-2x+3 \leq 3x+2$
 よって $x \geq \frac{1}{5}$

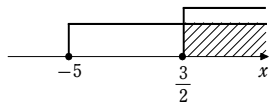


$-\frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}$ との共通範囲は

$\frac{1}{5} \leq x < \frac{3}{2}$ ……②

[3] $\frac{3}{2} \leq x$ のとき、不等式は $2x-3 \leq 3x+2$

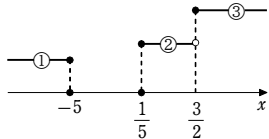
ゆえに $-x \leq 5$ よって $x \geq -5$



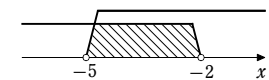
$\frac{3}{2} \leq x$ との共通範囲は $\frac{3}{2} \leq x$ ……③

求める解は、①と②と③を合わせた範囲であるから

$x \leq -5, \frac{1}{5} \leq x$



(4) [1] $x < -2$ のとき、不等式は
 $-2(x+2)-(x-4) < 15$
 ゆえに $-2x-4-x+4 < 15$
 よって $x > -5$



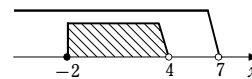
$x < -2$ との共通範囲は $-5 < x < -2$ ……①

[2] $-2 \leq x < 4$ のとき、不等式は
 $2(x+2)-(x-4) < 15$

ゆえに $2x+4-x+4 < 15$

よって $x < 7$

$-2 \leq x < 4$ との共通範囲は $-2 \leq x < 4$ ……②

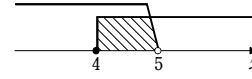


[3] $4 \leq x$ のとき、不等式は
 $2(x+2)+(x-4) < 15$

ゆえに $2x+4+x-4 < 15$

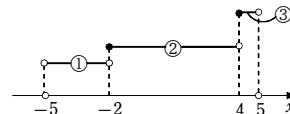
よって $x < 5$

$4 \leq x$ との共通範囲は $4 \leq x < 5$ ……③



求める解は、①と②と③を合わせた範囲であるから

$-5 < x < 5$



[1]

解答 (1) $2\sqrt{6}$ (2) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

解説

$$(1) (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = ((\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5})((\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5})$$

$$= (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = (5 + 2\sqrt{6}) - 5$$

$$= 2\sqrt{6}$$

(2) (1)の結果を利用して

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{2 - (8 - 2\sqrt{15})}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{15} - 6}{2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{15} - 6)\sqrt{6}}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{10} - 6\sqrt{6}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}$$

[2]

解答 (1) 18 (2) 1 (3) 18 (4) 322 (5) 5778

解説

$$(1) x + y = \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} + \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} = \frac{(\sqrt{5} + 2)^2 + (\sqrt{5} - 2)^2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = (9 + 4\sqrt{5}) + (9 - 4\sqrt{5}) = 18$$

$$(2) xy = \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} \times \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} = 1$$

$$(3) x^2y + xy^2 = xy(x + y) = 1 \cdot 18 = 18$$

$$(4) x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 18^2 - 2 \cdot 1 = 322$$

$$(5) x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 18^3 - 3 \cdot 1 \cdot 18 = 5778$$

別解 $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 18(322 - 1) = 5778$

参考 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ から $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ から $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

[3]

解答 (1) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (3) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}$

解説

$$(1) \sqrt{9 - 2\sqrt{14}} = \sqrt{(7 + 2) - 2\sqrt{7 \cdot 2}} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$$

$$(2) \sqrt{11 + 4\sqrt{6}} = \sqrt{11 + 2 \cdot 2\sqrt{6}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{24}} = \sqrt{(8 + 3) + 2\sqrt{8 \cdot 3}}$$

$$= \sqrt{8} + \sqrt{3} = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$(3) \sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{(5 + 3) - 2\sqrt{5 \cdot 3}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}$$

[4]

解答 (1) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (2) {100, 105, 110, ……., 995}

(3) {-3, -2, -1, 0, 1, 2} (4) {2, 5, 8, 11, ……}

第3講 例題

解説

- (1) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (2) {100, 105, 110, ……., 995}
 (3) {-3, -2, -1, 0, 1, 2}
 (4) {3·1-1, 3·2-1, 3·3-1, 3·4-1, ……}
 すなわち {2, 5, 8, 11, ……}

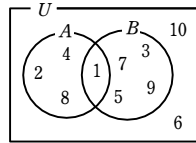
5 ★☆☆

- 解答 (1) {3, 5, 6, 7, 9, 10} (2) {2, 4, 6, 8, 10} (3) {6, 10}
 (4) {6, 10} (5) {1, 2, 4, 6, 8, 10} (6) {3, 5, 7, 9}

解説

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ である。

- (1) $\overline{A} = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$
 (2) $\overline{B} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 (3) $\overline{A \cap B} = \{6, 10\}$
 (4) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ であるから
 $\overline{A \cup B} = \{6, 10\}$
 (5) $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$
 (6) $\overline{A \cap B} = \{3, 5, 7, 9\}$



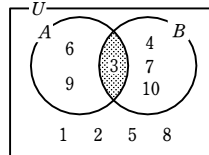
6 ★☆☆

解答 $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{3, 4, 7, 10\}$, $A \cap \overline{B} = \{6, 9\}$

解説

与えられた集合の要素を図に書き込むと、右のようになるから

- $A = \{3, 6, 9\}$
 $B = \{3, 4, 7, 10\}$
 $A \cap \overline{B} = \{6, 9\}$



第3講 例題演習

1

解答 (1) $\frac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$ (2) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{35}}{5}$

解説

(1) (与式) $= \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}\}}$
 $= \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+2\sqrt{6}+6)-7}$
 $= \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2\sqrt{6}} = \frac{(1+\sqrt{6}-\sqrt{7})\sqrt{6}}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$

(2) (与式) $= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{7}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{7}\}}$
 $= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{(2+2\sqrt{14}+7)-5}{(2+2\sqrt{10}+5)-7} = \frac{4+2\sqrt{14}}{2\sqrt{10}}$
 $= \frac{2+\sqrt{14}}{\sqrt{10}} = \frac{(2+\sqrt{14})\sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}+2\sqrt{35}}{10} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{35}}{5}$

2

解答 (1) $x+y=14$, $xy=1$ (2) 194 (3) 14 (4) 2702

解説

(1) $x+y = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$
 $= \frac{(4+4\sqrt{3}+3)+(4-4\sqrt{3}+3)}{4-3} = 14$

$xy = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 1$

(2) $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 14^2 - 2 \cdot 1 = 194$

(3) $x^4y^3 + x^3y^4 = x^3y^3(x+y) = (xy)^3(x+y) = 1^3 \cdot 14 = 14$

(4) $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 14^3 - 3 \cdot 1 \cdot 14 = 2702$

別解 $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = 14(194-1) = 2702$

3

解答 (1) $\sqrt{3}+1$ (2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{2}+1$ (4) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(3+1)+2\sqrt{3} \cdot 1}$
 $= \sqrt{3} + \sqrt{1} = \sqrt{3} + 1$

(2) $\sqrt{5-\sqrt{24}} = \sqrt{5-2\sqrt{6}}$
 $= \sqrt{(3+2)-2\sqrt{3} \cdot 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

(3) $\sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{9+2\sqrt{8}}$
 $= \sqrt{(8+1)+2\sqrt{8} \cdot 1}$
 $= \sqrt{8} + \sqrt{1} = 2\sqrt{2} + 1$

(4) $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5} \cdot 1}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

4

- 解答 (1) {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15} (2) {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}
 (3) {-2, -1, 0, 1, 2, 3} (4) {1, 4, 7, 10, 13}

解説

- (1) {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}
 (2) {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}
 (3) {-2, -1, 0, 1, 2, 3}
 (4) {3·1-2, 3·2-2, 3·3-2, 3·4-2, 3·5-2}
 すなわち {1, 4, 7, 10, 13}

5

- 解答 (1) {5, 6, 7} (2) {1, 3, 5, 7} (3) {1, 3, 5, 6, 7} (4) {5, 7}
 (5) {2, 4, 5, 6, 7} (6) {1, 3}

解説

A, B, U の要素を図に書き込んでいくと、右のようになる。

- (1) $\overline{A} = \{5, 6, 7\}$
 (2) $\overline{B} = \{1, 3, 5, 7\}$
 (3) $\overline{A \cap B} = \{1, 3, 5, 6, 7\}$
 (4) $\overline{A \cap \overline{B}} = \{5, 7\}$
 (5) $\overline{A \cup B} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$
 (6) $A \cap \overline{B} = \{1, 3\}$

参考 (3), (4)は、ド・モルガンの法則

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

を用いて求めてもよい。

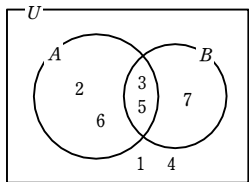
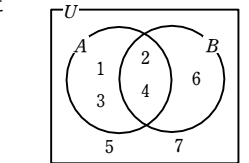
6

- 解答 (1) {1, 4} (2) {2, 6}

解説

全体集合を U とし、与えられた集合の要素を図に書き込むと、右のようになる。

- (1) $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B} = \{1, 4\}$
 (2) $A \cap \overline{B} = \{2, 6\}$



第3講 レベルA

1

【解答】 (1) $2\sqrt{2}$ (2) 6 (3) $10\sqrt{2}$ (4) $58\sqrt{2}$

【解説】

(1) $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$

よって $x + \frac{1}{x} = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1) = 2\sqrt{2}$

(2) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = (2\sqrt{2})^2 - 2 = 6$

(3) $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = (2\sqrt{2})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

【別解】 $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 2\sqrt{2}(6-1) = 10\sqrt{2}$

(4) $x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 10\sqrt{2} \cdot 6 - 2\sqrt{2} = 58\sqrt{2}$

【参考】 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ から $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ から $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^5 + x^3 \cdot \frac{1}{x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x}$ から

$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

2

【解答】 (1) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (2) $2 + \sqrt{3}$ (3) $\sqrt{10}$ (4) $2\sqrt{3} + 1$

【解説】

(1) $\sqrt{11+4\sqrt{6}} = \sqrt{11+2\sqrt{24}} = \sqrt{(8+3)+2\sqrt{8 \cdot 3}}$
 $= \sqrt{8} + \sqrt{3} = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{12}}} = \frac{1}{\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4 \cdot 3}}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$

(3) $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{(5+1)+2\sqrt{5 \cdot 1}}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$

同様に $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

よって $\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{10}$

(4) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(3+1)+2\sqrt{3 \cdot 1}} = \sqrt{3} + 1$

よって (与式) $= \sqrt{9+4(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{13+2\sqrt{12}}$
 $= \sqrt{(12+1)+2\sqrt{12 \cdot 1}} = \sqrt{12} + 1 = 2\sqrt{3} + 1$

3

【解答】 (1) $x-2$ (2) $-x+2$

【解説】

$\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

(1) $x \geq 2$ のとき, $x-2 \geq 0$ であるから
(与式) $= x-2$

(2) $x < 2$ のとき, $x-2 < 0$ であるから
(与式) $= -(x-2) = -x+2$

4

【解答】 (1) $A \cup B = \{a, b, c, d, f, h\}$, $\overline{A \cup C} = \{g, h, i\}$,

$\overline{A \cap B} = \{a, c, e, f, g, h, i\}$

(2) $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, h\}$, $(A \cup C) \cap B = \{b, d, f\}$,

$\overline{(A \cap B) \cup C} = \{a, g, h, i\}$

【解説】

(1) $A \cap B \cap C = \{d\}$, $A \cap B = \{b, d\}$

$B \cap C = \{d, f\}$, $C \cap A = \{c, d\}$

よって, 図のようになり,

$A \cup B = \{a, b, c, d, f, h\}$

$\overline{A \cup C} = \{g, h, i\}$

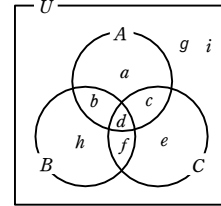
$\overline{A \cap B} = \{a, c, e, f, g, h, i\}$

(2) 図から

$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, h\}$

$(A \cup C) \cap B = \{b, d, f\}$

$\overline{(A \cap B) \cup C} = \{a, g, h, i\}$



5

【解答】 (1) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

(2) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

【解説】

(1) 要素を書き並べて表すと

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $P = \{3, 6, 9\}$

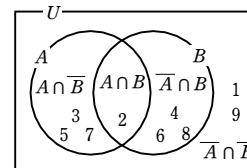
よって $\overline{P} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

(2) $\overline{A \cap B}$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, U の要素を, 図に順
に書き込んでいくと, 右のようになる。

よって

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$



6

【解答】 $a=3$

【解説】

$A \cap B = \{0, 4\}$ より $0 \in A$ であるから

$a-1=0$ または $a^2-5a+6=0$

[1] $a-1=0$ すなわち $a=1$ のとき

$A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{-3, 1, 4, 6\}$

よって, $0 \notin B$ となるから, 条件に適さない。

[2] $a^2-5a+6=0$ のとき $(a-2)(a-3)=0$

したがって $a=2, 3$

(i) $a=2$ の場合 $A = \{0, 1, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 4\}$

よって, $A \cap B = \{0, 1, 4\}$ となるから, 条件に適さない。

(ii) $a=3$ の場合 $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{0, 1, 4, 5\}$

よって, $A \cap B = \{0, 4\}$ となるから, 条件に適する。

以上から, 求める a の値は $a=3$

7

【解答】 (1) (ア) $\{x \mid x \leq -4, 4 \leq x\}$ (イ) $\{x \mid x \leq -4, -3 \leq x\}$

(ウ) $\{x \mid 4 \leq x \leq 5\}$

(2) $2 < k \leq 4$

【解説】

(1) $|x| < 4$ から $-4 < x < 4$

よって, 右の図が得られる。

したがって

(ア) $\overline{B} = \{x \mid x \leq -4, 4 \leq x\}$

($\overline{B} = \{x \mid |x| \geq 4\}$ でもよい)

(イ) $A \cup \overline{B} = \{x \mid x \leq -4, -3 \leq x\}$

(ウ) $A \cap \overline{B} = \{x \mid 4 \leq x \leq 5\}$

(2) $A \subset C$ となるための条件は

$k-7 \leq -3$ ①

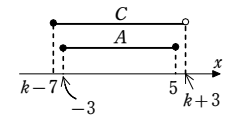
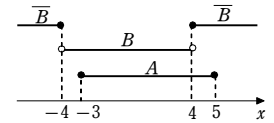
$k+3 > 5$ ②

が同時に成り立つことである。

① から $k \leq 4$

② から $k > 2$

共通範囲を求めて $2 < k \leq 4$



1

解答 393

解説

$$\frac{x^{10}-1}{x^5} = x^5 - \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \text{ から } \frac{1}{x} = \frac{2}{3+\sqrt{13}} = \frac{2(\sqrt{13}-3)}{(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}-3)} = \frac{\sqrt{13}-3}{2}$$

ゆえに $x - \frac{1}{x} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{13}-3}{2} = 3$

よって $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 3 \cdot (11+1) = 36$$

したがって $\frac{x^{10}-1}{x^5} = 11 \cdot 36 - 3 = 393$

2

解答 (1) $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{10}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{5}$

解説

$$x = \sqrt{12+2\sqrt{35}} = \sqrt{(7+5)+2\sqrt{7 \cdot 5}} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$$

$$y = \sqrt{12-2\sqrt{35}} = \sqrt{(7+5)-2\sqrt{7 \cdot 5}} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$$

$$(1) \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{7-5}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{10}}{2}$$

$$(2) \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2} = \frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$$

$$= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})+2\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})-(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2\sqrt{7}+2\sqrt{7-5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{5}$$

3

解答 $x < -2$ のとき $-2x+3$
 $-2 \leq x < 5$ のとき 7
 $5 \leq x$ のとき $2x-3$

解説

$$\sqrt{x^2-10x+25} = \sqrt{(x-5)^2} = |x-5|, \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$$

[1] $x < -2$ のとき $|x-5| = -(x-5), |x+2| = -(x+2)$ であるから
 与式 $= -(x-5) - (x+2) = -2x+3$

[2] $-2 \leq x < 5$ のとき $|x-5| = -(x-5), |x+2| = x+2$ であるから
 与式 $= -(x-5) + x+2 = 7$

[3] $5 \leq x$ のとき $|x-5| = x-5, |x+2| = x+2$ であるから

与式 $= x-5 + x+2 = 2x-3$

4

解答 9組

解説

$X = \{1, 2, 3\}$ のすべての部分集合は

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

このうち、条件(ii)を満たす B は $\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

$B = \{1\}$ のとき、条件(i)を満たす A は $A = \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 2\}$ のとき、条件(i)を満たす A は $A = \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 3\}$ のとき、条件(i)を満たす A は $A = \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 2, 3\}$ のとき、条件(i)を満たす A は $A = \{1, 2, 3\}$

したがって、条件を満たす A, B の組は 9組

5

解答 (1) $\{2, 3, 5\}$ (2) $A \cap (\overline{B \cup C}) = \{2, 5\}, A = \{2, 4, 5, 7, 9\}$

解説

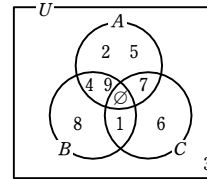
与えられた条件から、集合 A, B, C の要素を調べて図に書き込むと、右のようになる。

よって、図から

(1) $\overline{B \cap C} = \overline{B \cup C} = \{2, 3, 5\}$

(2) $A \cap (\overline{B \cup C}) = \{2, 5\},$

$A = \{2, 4, 5, 7, 9\}$



1

解答 (1) 真 (2) 偽 (3) 偽 (4) 真

解説

(1) 真

(証明) n が8の倍数のとき、 $n = 8k$ (k は自然数) と表される。

このとき、 $n = 4 \cdot 2k$ で、 $2k$ は自然数であるから、 n は4の倍数である。

(2) 偽

(反例) $m = 1, n = 1$ のとき、 $m+n = 2$ (偶数) であるが、 m, n は奇数である。

(3) 偽

(反例) $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ のとき、 $xy = 2$ (有理数) であるが、 x, y は無理数である。

(4) 真

(証明) x, y が有理数のとき、 $x = \frac{p}{q}, y = \frac{r}{s}$ と表される (p, q, r, s は整数で、 $q \neq 0, s \neq 0$)。

このとき、 $xy = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$ となり、 pr, qs は整数で $qs \neq 0$ であるから、 xy は有理数である。

2

解答 (1) $x = 1$ または $y \neq 4$ (2) $x > 3$ かつ $y \leq 7$ (3) $x < -1$ または $x \geq 2$
 (4) m は奇数かつ3の倍数でない。
 (5) x, y の少なくとも一方は有理数である。

解説

(1) $x = 1$ または $y \neq 4$

(2) $x > 3$ かつ $y \leq 7$

(3) $-1 \leq x < 2$ を言い換えると $x \geq -1$ かつ $x < 2$

よって、 $-1 \leq x < 2$ の否定は $x < -1$ または $x \geq 2$

(4) m は奇数かつ3の倍数でない。

(5) x, y の少なくとも一方は有理数である。

3

解答 (1) 十分条件であるが必要条件ではない

(2) 必要条件であるが十分条件ではない (3) 必要十分条件である

(4) 必要条件でも十分条件でもない

解説

(1) $x = 2$ のとき $x^2 + x - 6 = 2^2 + 2 - 6 = 0$

よって、「 $x = 2 \implies x^2 + x - 6 = 0$ 」は真である。

$x^2 + x - 6 = 0$ を解くと $x = -3, 2$

よって、「 $x^2 + x - 6 = 0 \implies x = 2$ 」は偽である。

したがって、十分条件であるが必要条件ではない。

(2) 「 $\triangle ABC \sim \triangle PQR \implies \triangle ABC \equiv \triangle PQR$ 」は偽であり、

「 $\triangle ABC \equiv \triangle PQR \implies \triangle ABC \sim \triangle PQR$ 」は真である。

したがって、必要条件であるが十分条件ではない。

(3) $a = b$ のとき、この両辺に c を加えると $a + c = b + c$

よって、「 $a = b \implies a + c = b + c$ 」は真である。

$a + c = b + c$ のとき、この両辺から c を引くと $a = b$

よって、「 $a + c = b + c \implies a = b$ 」は真である。

したがって、必要十分条件である。

- (4) $a=1, b=-2$ のとき, $a>b$ であるが, $a^2>b^2$ でない。
 よって, 「 $a>b \implies a^2>b^2$ 」は偽である。
 $a=-2, b=1$ のとき, $a^2>b^2$ であるが, $a>b$ でない。
 よって, 「 $a^2>b^2 \implies a>b$ 」は偽である。
 したがって, 必要条件でも十分条件でもない。

4

【解答】 逆: 「 $x=1$ かつ $y=2 \implies x+y=3$ 」, 真
 対偶: 「 $x \neq 1$ または $y \neq 2 \implies x+y \neq 3$ 」, 偽
 裏: 「 $x+y \neq 3 \implies x \neq 1$ または $y \neq 2$ 」

【解説】 逆: 「 $x=1$ かつ $y=2 \implies x+y=3$ 」 これは 真
 対偶: 「 $x \neq 1$ または $y \neq 2 \implies x+y \neq 3$ 」
 ここで, 与えられた命題は 偽 (反例: $x=0, y=3$)
 したがって, 対偶も 偽
 裏: 「 $x+y \neq 3 \implies x \neq 1$ または $y \neq 2$ 」

5

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】 (1) 与えられた命題の対偶は「 n が奇数ならば, n^2+1 は偶数」である。
 奇数 n は, 整数 m を用いて $n=2m+1$ と表され

$$\begin{aligned} n^2+1 &= (2m+1)^2+1 \\ &= 4m^2+4m+1+1 \\ &= 2(2m^2+2m+1) \end{aligned}$$

よって, n^2+1 は偶数である。
 したがって, 対偶が真であるから, 与えられた命題も真である。
 (2) 与えられた命題の対偶は「 n が3の倍数でないならば, n^2 は3の倍数でない」である。
 n が3の倍数でないとき, k を整数として, $n=3k+1$ または $n=3k+2$ と表される。
 $n=3k+1$ のとき $n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$
 $n=3k+2$ のとき $n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$
 ここで, $3k^2+2k, 3k^2+4k+1$ は整数であるから, n^2 は3の倍数ではない。
 したがって, 対偶が真であるから, 与えられた命題も真である。

6

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】 (1) $1+\sqrt{6}$ は無理数でないとは仮定すると, $1+\sqrt{6}$ は有理数である。
 $1+\sqrt{6}=r$ (r は有理数) とすると $\sqrt{6}=r-1$
 r は有理数であるから $r-1$ も有理数であり, この等式は $\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する。
 したがって, $1+\sqrt{6}$ は無理数である。
 (2) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ は無理数でないとは仮定すると, $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ は有理数である。
 $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=r$ (r は有理数) とし, この両辺を2乗すると

$$\begin{aligned} r^2 &= 18-12\sqrt{6}+12 \\ \text{よって } \sqrt{6} &= \frac{30-r^2}{12} \end{aligned}$$

r は有理数であるから $\frac{30-r^2}{12}$ も有理数であり, この等式は $\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する。
 したがって, $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ は無理数である。

1

【解答】 (1) 偽 (2) 真 (3) 偽 (4) 偽

【解説】 (1) $x=1, y=-1$ とすると, $|x|=1, |y|=1$ であるから
 $|x|=|y|$ を満たすが $x \neq y$
 よって, 命題「 $|x|=|y|$ ならば $x=y$ である」は偽である。
 (2) $x=2$ のとき $2^2-5 \cdot 2+6=0$
 よって, 命題「 $x=2$ ならば $x^2-5x+6=0$ である」は真である。
 (3) $m=2, n=3$ とすると, m, n はともに素数であるが $m+n=5$ (奇数)
 よって, 命題「 m, n がともに素数ならば $m+n$ は偶数である」は偽である。
 (4) $n=3$ とすると, n は3の倍数であるが, 9の倍数でない。
 よって, 命題「 n が3の倍数ならば n は9の倍数である」は偽である。

2

【解答】 (1) $x \geq -1$ または $y \leq 0$ (2) n は奇数かつ3の倍数でない
 (3) $3 > x$ または $x \geq 7$ (4) $y > -1$ かつ $y \neq 2$
 (5) m, n の少なくとも一方は5の倍数でない (6) m, n はともに奇数

【解説】

(1) $x \geq -1$ または $y \leq 0$
 (2) n は奇数かつ3の倍数でない
 (3) $3 \leq x < 7 \iff 3 \leq x$ かつ $x < 7$
 であるから, その否定は $3 > x$ または $x \geq 7$
 (4) $y > -1$ かつ $y \neq 2$
 (5) m, n の少なくとも一方は5の倍数でない
 (6) m, n はともに奇数

3

【解答】 (1) 十分 (2) 十分 (3) \times (4) 必要 (5) 必要十分

【解説】 (1) 「 $x=5$ かつ $y=7 \implies x+y=12$ 」は真。
 「 $x+y=12 \implies x=5$ かつ $y=7$ 」は $x=7, y=5$ のとき成り立たない。
 したがって 十分
 (2) 「 $x=2 \implies x^2-4=0$ 」は真。
 「 $x^2-4=0 \implies x=2$ 」は $x=-2$ のとき成り立たない。
 したがって 十分
 (3) 「 $x(x-2)=0 \implies x(x+3)=0$ 」は $x=2$ のとき成り立たない。
 「 $x(x+3)=0 \implies x(x-2)=0$ 」は, $x=-3$ のとき成り立たない。
 したがって \times
 (4) 「 $x > 0 \implies x > 1$ 」は $x=0.5$ のとき成り立たない。
 「 $x > 1 \implies x > 0$ 」は真。
 したがって 必要
 (5) 「 $x=y \implies x+z=y+z$ 」は真。「 $x+z=y+z \implies x=y$ 」は真。
 したがって 必要十分

4

【解答】 (1) 逆: 「 $x=2$ かつ $y=3 \implies x+y=5$ 」, 真;
 対偶: 「 $x \neq 2$ または $y \neq 3 \implies x+y \neq 5$ 」, 偽;
 裏: 「 $x+y \neq 5 \implies x \neq 2$ または $y \neq 3$ 」, 真

- (2) 逆: 「 x, y の少なくとも一方が無理数ならば, xy は無理数である」, 偽;
 対偶: 「 x, y がともに有理数ならば, xy は有理数である」, 真;
 裏: 「 xy が有理数ならば, x, y はともに有理数である」, 偽

【解説】

- (1) 逆: 「 $x=2$ かつ $y=3 \implies x+y=5$ 」
 これは明らかに成り立つから 真。
 対偶: 「 $x \neq 2$ または $y \neq 3 \implies x+y \neq 5$ 」
 これは 偽。(反例) $x=1, y=4$
 裏: 「 $x+y \neq 5 \implies x \neq 2$ または $y \neq 3$ 」
 裏の対偶, すなわち逆が真であるから 真。
 (2) 逆: 「 x, y の少なくとも一方が無理数ならば, xy は無理数である」
 これは 偽。(反例) $x=\sqrt{2}, y=0$
 対偶: 「 x, y がともに有理数ならば, xy は有理数である」
 これは 真。
 (証明) $x=\frac{p}{q}, y=\frac{r}{s}$ (p, q, r, s は整数; $qs \neq 0$)とおくと $xy=\frac{pr}{qs}$
 ここで, pr, qs はいずれも整数で, $qs \neq 0$ である。
 よって, xy は有理数である。
 裏: 「 xy が有理数ならば, x, y はともに有理数である」
 これは 偽。(反例) $x=\sqrt{2}, y=\sqrt{2}$

【5】

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

- (1) 与えられた命題の対偶は 「 n が5の倍数でないならば, n^2 は5の倍数でない」
 n が5の倍数でないとき, n はある整数 k を用いて
 $5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$
 のいずれかで表される。
 [1] $n=5k+1$ のとき
 $n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$
 [2] $n=5k+2$ のとき
 $n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$
 [3] $n=5k+3$ のとき
 $n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$
 [4] $n=5k+4$ のとき
 $n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$
 よって, [1]~[4]のいずれの場合も, n^2 は5の倍数でない。
 したがって, 対偶が真であるから, もとの命題は真である。
 (2) 与えられた命題の対偶は
 「 m, n がともに3の倍数でないならば, mn は3の倍数でない」
 k, l を整数とする。
 m, n がともに3の倍数でないのは, 次の[1]~[4]のいずれかの場合である。
 [1] $m=3k+1, n=3l+1$ のとき
 $mn=(3k+1)(3l+1)=3(3kl+k+l)+1$
 [2] $m=3k+1, n=3l+2$ のとき
 $mn=(3k+1)(3l+2)=3(3kl+2k+l)+2$
 [3] $m=3k+2, n=3l+1$ のとき

$$mn=(3k+2)(3l+1)=3(3kl+k+2l)+2$$

[4] $m=3k+2, n=3l+2$ のとき

$$mn=(3k+2)(3l+2)=3(3kl+2k+2l+1)+1$$

よって, [1]~[4]のいずれの場合も mn は3の倍数でない。
 したがって, 対偶が真であるから, もとの命題は真である。

【6】

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 略

【解説】

(1) $4\sqrt{3}$ は無理数でないとは仮定すると, $4\sqrt{3}$ は有理数である。

$$4\sqrt{3}=r \text{ (} r \text{は有理数) とすると } \sqrt{3}=\frac{r}{4}$$

r は有理数であるから $\frac{r}{4}$ も有理数であり, この等式は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって, $4\sqrt{3}$ は無理数である。

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ は無理数でないとは仮定すると, $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ は有理数である。

$$\sqrt{2}+\sqrt{6}=r \text{ (} r \text{は有理数) とし, この両辺を2乗すると } r^2=2+4\sqrt{3}+6$$

$$\text{よって } \sqrt{3}=\frac{r^2-8}{4}$$

r は有理数であるから $\frac{r^2-8}{4}$ も有理数であり, この等式は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって, $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ は無理数である。

(3) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ は無理数でないとは仮定すると, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ は有理数である。

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}=r \text{ (} r \text{は有理数) とすると } r-\sqrt{3}=\sqrt{5}$$

$$\text{この両辺を2乗すると } r^2-2\sqrt{3}r+3=5 \quad \text{よって } 2\sqrt{3}r=r^2-2$$

$$r \neq 0 \text{ であるから } \sqrt{3}=\frac{r^2-2}{2r}$$

r は有理数であるから $\frac{r^2-2}{2r}$ も有理数であり, この等式は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ は無理数である。

【1】

【解答】 (1) 真 (2) 偽 (3) 偽

【解説】

(1) $a=3$ のとき $a^2+4a-21=3^2+4\cdot 3-21=0$

よって, この命題は真である。

(2) $a=1, b=2, c=0$ のとき, $ac=bc$ であるが, $a=b$ でない。

よって, この命題は偽である。

(3) $a=1+\sqrt{2}, b=1-\sqrt{2}$ のとき, $a+b=2, ab=-1$ (ともに整数)であるが, a, b は整数でない。

よって, この命題は偽である。

【2】

【解答】 (1) 必要条件であるが十分条件ではない

(2) 十分条件であるが必要条件ではない (3) 必要十分条件である

(4) 必要条件であるが十分条件ではない (5) 必要条件でも十分条件でもない

【解説】

(1) 「 $(x-y)(y-z)=0 \implies x=y=z$ 」は偽。(反例: $x=y=1, z=0$)

「 $x=y=z \implies (x-y)(y-z)=0$ 」は真。

したがって, 必要条件であるが十分条件ではない。

(2) 「 $xy=0$ かつ $x \neq 0 \implies y=0$ 」は真。

「 $y=0 \implies xy=0$ かつ $x \neq 0$ 」は偽。(反例: $x=0, y=0$)

したがって, 十分条件であるが必要条件ではない。

(3) 「 $x=y=0 \implies xy=0$ かつ $x+y=0$ 」は真。

$xy=0$ かつ $x+y=0$ とする。

$x+y=0$ から $y=-x$

これを $xy=0$ に代入すると $-x^2=0$ よって $x=0$

$x+y=0$ に代入して $0+y=0$ ゆえに $y=0$

よって, 「 $xy=0$ かつ $x+y=0 \implies x=y=0$ 」は真。

したがって, 必要十分条件である。

(4) 「 $\angle A < 90^\circ \implies \triangle ABC$ は鋭角三角形」は偽。

(反例: $\angle A=60^\circ, \angle B=100^\circ, \angle C=20^\circ$ の三角形)

「 $\triangle ABC$ は鋭角三角形 $\implies \angle A < 90^\circ$ 」は真。

したがって, 必要条件であるが十分条件ではない。

(5) 「 $(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0 \implies \triangle ABC$ は直角二等辺三角形」は偽。

(反例: $a=1, b=1, c=1$ の正三角形)

「 $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形 $\implies (a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$ 」は偽。

(反例: $a=\sqrt{2}, b=1, c=1$ の直角二等辺三角形)

したがって, 必要条件でも十分条件でもない。

【3】

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) 与えられた命題の対偶は

「 a, b がともに3の倍数でないならば, ab は3の倍数でない」である。

k, l を整数とする

[1] $a=3k+1, b=3l+1$ のとき $ab=(3k+1)(3l+1)=3(3kl+k+l)+1$
 $3kl+k+l$ は整数であるから, ab は3の倍数でない。

- [2] $a=3k+1, b=3l+2$ のとき $ab=(3k+1)(3l+2)=3(3kl+2k+l)+2$
 $3kl+2k+l$ は整数であるから、 ab は3の倍数でない。
 [3] $a=3k+2, b=3l+1$ のとき $ab=(3k+2)(3l+1)=3(3kl+k+2l)+2$
 $3kl+k+2l$ は整数であるから、 ab は3の倍数でない。
 [4] $a=3k+2, b=3l+2$ のとき $ab=(3k+2)(3l+2)=3(3kl+2k+2l+1)+1$
 $3kl+2k+2l+1$ は整数であるから、 ab は3の倍数でない。

[1]~[4]により、対偶は真である。
 したがって、与えられた命題は真である。

(2) 与えられた命題の対偶は

「整数 m, n について、 mn が奇数ならば m^2+n^2 は偶数である。」
 mn が奇数ならば、 m, n はともに奇数であり

$$m=2k+1, n=2l+1 \quad (k, l \text{ は整数})$$

とおける。このとき

$$\begin{aligned} m^2+n^2 &= (2k+1)^2+(2l+1)^2 \\ &= (4k^2+4k+1)+(4l^2+4l+1) \\ &= 2(2k^2+2l^2+2k+2l+1) \end{aligned}$$

$2k^2+2l^2+2k+2l+1$ は整数であるから、 m^2+n^2 は偶数である。

よって、対偶は真である。

したがって、与えられた命題は真である。

[4]

【解答】 (1) 略 (2) [1] $p=3, q=-2$ [2] $p=0, q=0$

【解説】

(1) $b \neq 0$ と仮定すると、 $a+bu=0$ であるから $u=-\frac{a}{b}$

a, b が有理数ならば $-\frac{a}{b}$ も有理数であるから、この等式は u が無理数であることに矛盾する。

よって $b=0$ $b=0$ を $a+bu=0$ に代入すると $a=0$

したがって、 $a+bu=0$ であるならば、 $a=0$ かつ $b=0$ である。

(2) [1] p, q が有理数であるから $p-3, q+2$ も有理数である。

また、 $\sqrt{5}$ は無理数である。

よって、(1) から $p-3=0, q+2=0$ ゆえに $p=3, q=-2$

[2] 等式から $(p+3q)+(p-2q)\sqrt{5}=0$

p, q が有理数であるから、 $p+3q, p-2q$ も有理数である。

また、 $\sqrt{5}$ は無理数である。

よって、(1) から $p+3q=0, p-2q=0$ これを解いて $p=0, q=0$

[1]

【解答】 (ア) ① (イ), (ウ) ①, ④ または ④, ① (エ) ②

【解説】

(1) 「 $r \Rightarrow (p \text{ または } q)$ 」の対偶は 「 $(\bar{p} \text{ かつ } \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}$ 」
 すなわち 「 $(\bar{p} \text{ かつ } \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}$ 」

(2) ①~④について、条件 $p, q, (p \text{ または } q), r$ を満たすかどうかを調べると、右の表ようになる。ただし、○は満たすこと、×は満たさないことを表す。

	p	q	$p \text{ または } q$	r
①	×	×	×	×
②	○	○	○	×
③	×	○	○	○
④	○	×	○	○
⑤	×	○	○	×

「 $(p \text{ または } q) \Rightarrow r$ 」の反例は、
 $(p \text{ または } q)$ を満たし、 r を満たさないものであるから ① と ④

(3) 「 $r \Rightarrow (p \text{ または } q)$ 」の対偶 「 $(\bar{p} \text{ かつ } \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}$ 」は真。

【証明】 \bar{p} : 3つの内角のうち、少なくとも2つは等しい

\bar{q} : 直角三角形である

\bar{r} : 45° の内角が少なくとも1つある

\bar{p} を満たす三角形は、二等辺三角形であるから、 $(\bar{p} \text{ かつ } \bar{q})$ を満たす三角形は、直角二等辺三角形である。

直角二等辺三角形は、 \bar{r} を満たす。

したがって、「 $(\bar{p} \text{ かつ } \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}$ 」は真。 (証明終)

ゆえに、「 $r \Rightarrow (p \text{ または } q)$ 」も真。

一方、(2) より 「 $(p \text{ または } q) \Rightarrow r$ 」は反例があるから偽。

よって、 r は $(p \text{ または } q)$ であるための十分条件であるが、必要条件ではない。(②)

[2]

【解答】 (1) 真, 証明略 (2) 偽, 反例: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(3) 偽, 反例: $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$

【解説】

(1) 真

【証明】 $x+y+z=0$ から $z=-(x+y)$

$x^3+y^3+z^3=0$ に代入して $x^3+y^3-(x+y)^3=0$

ゆえに $(x+y)^3-3xy(x+y)-(x+y)^3=0$

よって $-3xy(x+y)=0$ すなわち $xyz=0$

したがって、 x, y, z のうち少なくとも1つは0である。

【別解】 $[x^3+y^3+z^3-3xyz]$ の因数分解を利用

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ に $x^3+y^3+z^3=0,$

$x+y+z=0$ を代入すると $-3xyz=0$

よって、 x, y, z のうち少なくとも1つは0である。

(2) 偽

【反例】 $x^2+x=1$ とすると $x^2+x-1=0$

これを解いて $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{5}$ は無理数であるから、 x は無理数である。

(3) 偽

【反例】 $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ のとき x, y はともに無理数であるが、 $x+y=0,$

$x^2+y^2=4$ であるから、 $x+y, x^2+y^2$ はどちらも無理数でない。

[3]

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) 命題「 n^2 が5の倍数ならば、 n は5の倍数である。」の対偶は、次の命題である。

「 n が5の倍数でないならば、 n^2 は5の倍数でない。」……①

n が5の倍数でないとき、 n は $5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ (k は整数) のいずれかで表される。

[1] $n=5k+1$ のとき

$$n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$$

[2] $n=5k+2$ のとき

$$n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$$

[3] $n=5k+3$ のとき

$$n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$$

[4] $n=5k+4$ のとき

$$n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$$

[1]~[4]のいずれの場合も、 n^2 は5の倍数でない。

よって、命題①は真である。

したがって、 n^2 が5の倍数ならば、 n は5の倍数である。

(2) $\sqrt{5}$ が無理数でない、すなわち有理数であると仮定すると、1以外に正の公約数をも

たない2つの自然数 a, b を用いて $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ と表される。

このとき $a = \sqrt{5}b$

両辺を2乗すると $a^2 = 5b^2$ ……②

よって、 a^2 は5の倍数である。

ゆえに、(1) より a も5の倍数であるから、ある自然数 c を用いて

$$a = 5c \quad \dots\dots ③$$

と表される。

③を②に代入すると $25c^2 = 5b^2$

よって $b^2 = 5c^2$

ゆえに、 b^2 は5の倍数であるから、(1) より b も5の倍数である。

よって、 a と b は公約数5をもつ。

このことは、 a と b が1以外に公約数をもたないことに矛盾する。

したがって、 $\sqrt{5}$ は無理数である。

章末問題A

1

- 【解答】 (1) x^4-16 (2) $1-a^9$ (3) $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$
 (4) $a^8-2a^4b^4+b^8$ (5) x^6-1

【解説】

- (1) $(x+2)(x-2)(x^2+4)=(x+2)(x-2)\times(x^2+4)$
 $= (x^2-4)(x^2+4) = x^4-16$
 (2) $(1-a)(1+a+a^2)(1+a^3+a^6) = (1-a^3)(1+a^3+(a^3)^2) = 1-(a^3)^3$
 $= 1-a^9$
 (3) $(a+b)^3(a-b)^3 = \{(a+b)(a-b)\}^3 = (a^2-b^2)^3$
 $= (a^2)^3 - 3(a^2)^2b^2 + 3a^2(b^2)^2 - (b^2)^3$
 $= a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6$
 (4) $(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2 = \{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)\}^2$
 $= \{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^2$
 $= (a^4-b^4)^2 = a^8 - 2a^4b^4 + b^8$
 (5) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x+1)(x^2-x+1)\times(x-1)(x^2+x+1)$
 $= (x^3+1)(x^3-1) = x^6-1$

2

- 【解答】 (1) $(x+y+1)(x+y-2)$ (2) $(3x-2y-4)(4x+3y-5)$
 (3) $(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

【解説】

- (1) 与式 $= (x+y)^2 - (x+y) - 6 + 4 = (x+y)^2 - (x+y) - 2$
 $= (x+y+1)(x+y-2)$
 (2) 与式 $= 12x^2 + (y-31)x - 2(3y^2+y-10)$
 $= 12x^2 + (y-31)x - 2(y+2)(3y-5)$
 $= \{3x-2(y+2)\}\{4x+(3y-5)\}$
 $= (3x-2y-4)(4x+3y-5)$
 (3) 与式 $= (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3+y^3)(x^3-y^3)$
 $= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
 $= (x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

【参考】 $x^6-y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3$ に着目して、次のように因数分解してもよい。

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4) \\ &= (x+y)(x-y)\{x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2\} \\ &= (x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)^2-(xy)^2\} \\ &= (x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\} \\ &= (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

3

- 【解答】 (1) $(x-y)(x-y-1)$ (2) $(3x+y)(3x-y)(9x^2+y^2)$
 (3) $(x+3y)(x-3y)(2x+y)(2x-y)$ (4) $(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

【解説】

- (1) $x^2-2xy+y^2-x+y = (x^2-2xy+y^2)-(x-y)$

$$\begin{aligned} &= (x-y)^2 - (x-y) \\ &= (x-y)(x-y-1) \end{aligned}$$

【別解】 (与式) $= x^2 - (2y+1)x + y(y+1)$
 $= (x-y)(x-y-1)$

(2) $81x^4 - y^4 = (9x^2)^2 - (y^2)^2$
 $= (9x^2+y^2)(9x^2-y^2)$
 $= (3x+y)(3x-y)(9x^2+y^2)$

(3) $4x^4 - 37x^2y^2 + 9y^4 = 4(x^2)^2 - 37y^2 \cdot x^2 + 9y^4$
 $= (x^2-9y^2)(4x^2-y^2)$
 $= (x+3y)(x-3y)(2x+y)(2x-y)$

$$\begin{array}{r} 1 \times -9y^2 \rightarrow -36y^2 \\ 4 \times -y^2 \rightarrow -y^2 \\ \hline 4 \quad 9y^4 \quad -37y^2 \end{array}$$

(4) $x^2-x=X$ とおくと、 $-8x^2+8x = -8X$ であるから
 $(x^2-x)^2 - 8x^2 + 8x + 12 = X^2 - 8X + 12$
 $= (X-2)(X-6)$
 $= (x^2-x-2)(x^2-x-6)$
 $= (x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

4

- 【解答】 (1) $x=4, -1$ (2) $x=1$ (3) $x=-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}$

【解説】

- (1) $|2x-3|=5$ から $2x-3=\pm 5$
 すなわち $2x=3+5$ または $2x=3-5$
 よって $x=4, -1$
 (2) $x-3\geq 0$ すなわち $x\geq 3$ のとき $x-3=2x$
 これを解いて $x=-3$ これは $x\geq 3$ を満たさない。
 $x-3<0$ すなわち $x<3$ のとき $-(x-3)=2x$
 これを解いて $x=1$ これは $x<3$ を満たす。
 よって、方程式の解は $x=1$
 (3) $x\geq 1$ のとき $x+2(x-1)=x+3$
 これを解いて $x=\frac{5}{2}$ これは $x\geq 1$ を満たす。
 $0\leq x<1$ のとき $x-2(x-1)=x+3$
 これを解いて $x=-\frac{1}{2}$ これは $0\leq x<1$ を満たさない。
 $x<0$ のとき $-x-2(x-1)=x+3$
 これを解いて $x=-\frac{1}{4}$ これは $x<0$ を満たす。
 よって、方程式の解は $x=-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}$

5 [西南学院大]

- 【解答】 (1) $x\leq -5, \frac{1}{5}\leq x$ (2) $-\frac{4}{3}\leq x\leq 6$

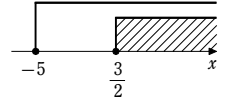
【解説】

- (1) [1] $2x-3\geq 0, 3x+2\geq 0$ すなわち $x\geq \frac{3}{2}$ のとき

$$2x-3\leq 3x+2$$

これを解いて $x\geq -5$

これと $x\geq \frac{3}{2}$ の共通範囲は $x\geq \frac{3}{2}$ ……①

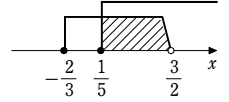


- [2] $2x-3<0, 3x+2\geq 0$ すなわち $-\frac{2}{3}\leq x<\frac{3}{2}$

のとき $-(2x-3)\leq 3x+2$

すなわち $5x\geq 1$ これを解いて $x\geq \frac{1}{5}$

これと $-\frac{2}{3}\leq x<\frac{3}{2}$ の共通範囲は $\frac{1}{5}\leq x<\frac{3}{2}$ ……②

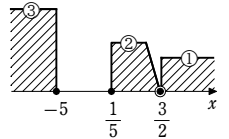


- [3] $2x-3<0, 3x+2<0$ すなわち $x<-\frac{2}{3}$ のとき

$$-(2x-3)\leq -(3x+2)$$

これを解いて $x\leq -5$

これと $x<-\frac{2}{3}$ の共通範囲は $x\leq -5$ ……③



不等式の解は①, ②, ③を合わせた範囲であるから

$$x\leq -5, \frac{1}{5}\leq x$$

- (2) [1] $x-1\geq 0, x-3\geq 0$ すなわち $x\geq 3$ のとき $x-1+2(x-3)\leq 11$

すなわち $3x\leq 18$ これを解いて $x\leq 6$

これと $x\geq 3$ の共通範囲は $3\leq x\leq 6$ ……①

- [2] $x-1\geq 0, x-3<0$ すなわち $1\leq x<3$ のとき $x-1-2(x-3)\leq 11$

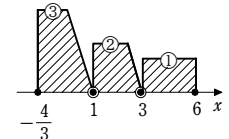
これを解いて $x\geq -6$

これと $1\leq x<3$ の共通範囲は $1\leq x<3$ ……②

- [3] $x-1<0, x-3<0$ すなわち $x<1$ のとき $-(x-1)-2(x-3)\leq 11$

すなわち $-3x\leq 4$ これを解いて $x\geq -\frac{4}{3}$

これと $x<1$ の共通範囲は $-\frac{4}{3}\leq x<1$ ……③



不等式の解は①, ②, ③を合わせた範囲であるから

$$-\frac{4}{3}\leq x\leq 6$$

6

- 【解答】 (1) 28 (2) 144 (3) 3936 (4) $-\sqrt{2}$

【解説】

$$x = \frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = 3-\sqrt{5}$$

$$y = \frac{4}{3-\sqrt{5}} = \frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = 3+\sqrt{5}$$

よって $x+y = (3-\sqrt{5}) + (3+\sqrt{5}) = 6$

$$xy = (3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$$

(1) $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 6^2 - 2\cdot 4 = 36 - 8 = 28$

(2) $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 6^3 - 3\cdot 4\cdot 6 = 216 - 72 = 144$

(3) $x^5+y^5 = (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^3 - x^3y^2$

章末問題A

$$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(x+y)(xy)^2$$

(1), (2)の結果から $x^5+y^5=28 \cdot 144-6 \cdot 4^2=3936$

(4) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}=6-2\sqrt{4}=6-4=2$

ここで、 $0 < 3-\sqrt{5} < 3+\sqrt{5}$ であるから $0 < x < y$

よって $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ すなわち $\sqrt{x}-\sqrt{y} < 0$

したがって $\sqrt{x}-\sqrt{y}=-\sqrt{2}$

7

【解答】 $a^3+b^3=35$

【解説】

$a^2+b^2=13$ ……①, $a^4+b^4=97$ ……② とする。

②から $(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=97$

①を代入して $13^2-2a^2b^2=97$ よって $a^2b^2=36$

$ab > 0$ であるから $ab=6$

①から $(a+b)^2-2ab=13$

$(a+b)^2-2 \times 6=13$ よって $(a+b)^2=25$

$a+b > 0$ であるから $a+b=5$

したがって $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=5(13-6)=35$

8

【解答】 $x^2+y^2+z^2=18, x^3+y^3+z^3=24\sqrt{3}$

【解説】

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$= (2\sqrt{3})^2-2(-3)=18$

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx))+3xyz$

$= 2\sqrt{3}\{18-(-3)\}+3(-6\sqrt{3})=24\sqrt{3}$

9

【解答】 $a=2$

【解説】

$A \cap \bar{B} = \{2, 5\}$ であるから $5 \in A$

よって $a^2+1=5$ ゆえに $a=\pm 2$

[1] $a=2$ のとき $a+7=9, a^2-4a+5=1$

よって $A=\{2, 4, 5\}, B=\{4, 9, 1\}$

このとき、 $A \cap \bar{B} = \{2, 5\}$ となり、条件に適する。

[2] $a=-2$ のとき $a+7=5, a^2-4a+5=17$

よって $A=\{2, 4, 5\}, B=\{4, 5, 17\}$

このとき、 $A \cap \bar{B} = \{2\}$ となり、条件に適さない。

以上から $a=2$

10

【解答】 (1) $A \cap C = \{x \mid 4 < x < 5\}, A \cup \bar{C} = \{x \mid -1 \leq x < 5\}$

(2) $A \cap B = \{1, 2, 4\}, A \cap B \cap C = \{1, 2\},$

$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30\},$

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12\}$

【解説】

(1) $\bar{A} = \{x \mid x < -1, 5 \leq x\},$

$\bar{B} = \{x \mid x \leq -3, 4 < x\}$

であるから

$C = \bar{A} \cup \bar{B} = \{x \mid x < -1, 4 < x\}$

よって $A \cap C = \{x \mid 4 < x < 5\}$

また、 $\bar{C} = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ であるから

$A \cup \bar{C} = \{x \mid -1 \leq x < 5\}$

【別解】 ド・モルガンの法則により

$C = \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} = \overline{\{x \mid -1 \leq x \leq 4\}}$

$= \{x \mid x < -1, 4 < x\}$ (以下同じ)

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$

$B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\},$

$C = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

であるから

$A \cap B = \{1, 2, 4\},$

$A \cap B \cap C = \{1, 2\},$

$A \cup B \cup C$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30\}$

また、 $B \cap C = \{1, 2, 5, 10\}$ であり

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12\}$

11

【解答】 (1) 十分条件であるが必要条件ではない (2) 必要十分条件である

(3) 十分条件であるが必要条件ではない

(4) 必要条件であるが十分条件ではない

(5) 必要条件でも十分条件でもない

(6) 必要条件であるが十分条件ではない

【解説】

(1) $a=3$ かつ $b=2$ のとき $a+b=3+2=5$

よって、「 $a=3$ かつ $b=2 \implies a+b=5$ 」は真である。

$a=1, b=4$ のとき、 $a+b=5$ であるが、 $a=3$ かつ $b=2$ でない。

よって、「 $a+b=5 \implies a=3$ かつ $b=2$ 」は偽である。

したがって、十分条件であるが必要条件ではない。

(2) $x=3$ のとき $x^2-6x+9=3^2-6 \cdot 3+9=0$

よって、「 $x=3 \implies x^2-6x+9=0$ 」は真である。

$x^2-6x+9=0$ を解くと $(x-3)^2=0$ ゆえに $x=3$

よって、「 $x^2-6x+9=0 \implies x=3$ 」は真である。

したがって、必要十分条件である。

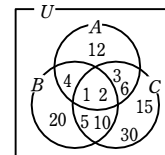
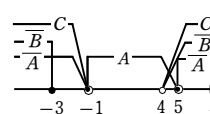
(3) $P = \{x \mid x > 2\}, Q = \{x \mid x > 1\}$ とする。

P, Q は右の図のようになり $P \subset Q$

よって、「 $x > 2 \implies x > 1$ 」は真であり、

「 $x > 1 \implies x > 2$ 」は偽である。

したがって、十分条件であるが必要条件ではない。



(4) 右の図のような $AD \parallel BC, AB=DC$ の等脚台形において、2本の対角線の長さは等しいが、長方形でない。よって、「2本の対角線の長さが等しい \implies 長方形である」は偽である。

また、「長方形である \implies 2本の対角線の長さは等しい」は真である。

したがって、必要条件であるが十分条件ではない。

(5) $a=1, b=2, c=-1$ のとき、 $a < b$ であるが、 $ac < bc$ でない。

よって、「 $a < b \implies ac < bc$ 」は偽である。

$a=-1, b=-2, c=-1$ のとき、 $ac < bc$ であるが、 $a < b$ でない。

よって、「 $ac < bc \implies a < b$ 」は偽である。

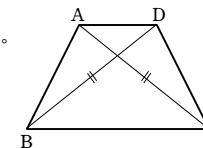
したがって、必要条件でも十分条件でもない。

(6) 12は4かつ6の倍数であるが、24の倍数でない。

よって、「4かつ6の倍数 \implies 24の倍数」は偽である。

また、「24の倍数 \implies 4かつ6の倍数」は真である。

したがって、必要条件であるが十分条件ではない。



章末問題B

1

【解答】 (1) $4a^2 + 4b^2 + 4c^2$ (2) $-x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2$

【解説】

(1) $(a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2$
 $= [a+(b+c)]^2 + [-a+(b+c)]^2 + [a-(b-c)]^2 + [a+(b-c)]^2$
 $= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 + a^2 - 2a(b+c) + (b+c)^2$
 $+ a^2 - 2a(b-c) + (b-c)^2 + a^2 + 2a(b-c) + (b-c)^2$
 $= 4a^2 + 2(b+c)^2 + 2(b-c)^2$
 $= 4a^2 + 2(b^2 + 2bc + c^2) + 2(b^2 - 2bc + c^2)$
 $= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$

【別解】 $(a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$
 $+ a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$
 $= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$

(2) $(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$
 $= [(y+z)+x][(y+z)-x] \times [x-(y-z)][x+(y-z)]$
 $= [(y+z)^2 - x^2][x^2 - (y-z)^2]$
 $= -x^4 + [(y+z)^2 + (y-z)^2]x^2 - (y+z)^2(y-z)^2$
 $= -x^4 + 2(y^2 + z^2)x^2 - (y^2 - z^2)^2$
 $= -x^4 + 2x^2y^2 + 2z^2x^2 - y^4 + 2y^2z^2 - z^4$
 $= -x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2$

2

【解答】 (1) $(a+b-1)(ab+1)$ (2) $(x-y)(x-1)(y-1)$ (3) $-(a-b)(b-c)(c-a)$
 (4) $(a+b)(b+c)(c+a)$

【解説】

(1) $a^2b + ab^2 + a + b - ab - 1$
 $= ba^2 + (b^2 - b + 1)a + (b - 1)$
 $= [a + (b-1)](ba + 1)$
 $= (a+b-1)(ab+1)$

1	\times	$b-1$	\rightarrow	$b^2 - b$
b	\times	1	\rightarrow	1
b	\times	$b-1$	\rightarrow	$b^2 - b + 1$

【別解】 $a^2b + ab^2 + a + b - ab - 1 = ab(a+b) + (a+b) - (ab+1)$
 $= (a+b)(ab+1) - (ab+1)$
 $= (ab+1)(a+b-1)$

(2) $x^2(y-1) + y^2(1-x) + x - y = (y-1)x^2 + y^2 - y^2x + x - y$
 $= (y-1)x^2 - (y^2-1)x + y^2 - y$
 $= (y-1)x^2 - (y+1)(y-1)x + y(y-1)$
 $= (y-1)\{x^2 - (y+1)x + y\}$
 $= (y-1)(x-1)(x-y)$
 $= (x-y)(x-1)(y-1)$

【別解】 $x^2(y-1) + y^2(1-x) + x - y = x^2y - x^2 + y^2 - xy^2 + x - y$
 $= (x^2y - xy^2) - (x^2 - y^2) + (x - y)$
 $= xy(x-y) - (x+y)(x-y) + (x-y)$
 $= (x-y)(xy - x - y + 1)$
 $= (x-y)\{(y-1)x - (y-1)\}$
 $= (x-y)(x-1)(y-1)$

(3) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (b-c)a^2 + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$
 $= (b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + b^2c - bc^2$
 $= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c)$
 $= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}$
 $= (b-c)(a-b)(a-c)$
 $= -(a-b)(b-c)(c-a)$

(4) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$
 $= (b+c)a^2 + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 2abc$
 $= (b+c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a + b^2c + bc^2$
 $= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c)$
 $= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$
 $= (b+c)(a+b)(a+c)$
 $= (a+b)(b+c)(c+a)$

3

【解答】 (1) $(a+b)(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
 (2) $(xy+x+1)(xy+y+1)$ (3) $(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

【解説】

(1) (与式) $= (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$
 $= (a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

【別解】 (与式) $= (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$
 $= (a+b)(a-b)\{(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2\}$
 $= (a+b)(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

(2) (与式) $= (x+1)\{xy^2 + (x+1)y + 1\} + xy$
 $= x(x+1)y^2 + \{(x+1)^2 + x\}y + x + 1$
 $= \{x \cdot y + (x+1)\}\{(x+1) \cdot y + 1\}$
 $= (xy+x+1)(xy+y+1)$

x	\times	$x+1$	\rightarrow	$(x+1)^2$
$x+1$	\times	1	\rightarrow	x
$x(x+1)$	\times	$x+1$	\rightarrow	$(x+1)^2 + x$

【別解】 $(x+1)(y+1)(xy+1) + xy = (xy+x+y+1)(xy+1) + xy$
 $= \{(xy+1) + x + y\}(xy+1) + xy$
 $= (xy+1)^2 + (x+y)(xy+1) + xy$
 $= \{(xy+1) + x\}\{(xy+1) + y\}$
 $= (xy+x+1)(xy+y+1)$

(3) (与式) $= a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4$
 $= a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2$
 $= a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + \{(b+c)(b-c)\}^2$
 $= a^4 - \{(b+c)^2 + (b-c)^2\}a^2 + (b+c)^2(b-c)^2$
 $= \{a^2 - (b+c)^2\}a^2 - (b-c)^2$
 $= \{a + (b+c)\}\{a - (b+c)\}\{a + (b-c)\}\{a - (b-c)\}$
 $= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

【別解】 $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$
 $= \{(a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2\} - 4a^2b^2$
 $= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2$
 $= \{(a^2 + b^2 - c^2) + 2ab\}\{(a^2 + b^2 - c^2) - 2ab\}$
 $= \{(a^2 + 2ab + b^2) - c^2\}\{(a^2 - 2ab + b^2) - c^2\}$
 $= \{(a+b)^2 - c^2\}\{(a-b)^2 - c^2\}$

$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

4

【解答】 $(x+1)(x-1)(x+y)(y+1)$

【解説】

(与式) $= (x^2-1)y^2 + (x^3+x^2-x-1)y + x^3-x$
 $= (x+1)(x-1)y^2 + (x+1)^2(x-1)y + x(x+1)(x-1)$
 $= (x+1)(x-1)\{y^2 + (x+1)y + x\} = (x+1)(x-1)(x+y)(y+1)$

5

【解答】 $(a-b)(a+b+c)(a+b-c)$

【解説】

$a^3 + a^2b - a(c^2 + b^2) + bc^2 - b^3 = a^3 + a^2b - ac^2 - ab^2 + bc^2 - b^3$
 $= -(a-b)c^2 + a^3 - b^3 + a^2b - ab^2$
 $= -(a-b)c^2 + (a-b)(a^2 + ab + b^2) + ab(a-b)$
 $= (a-b)\{-c^2 + (a^2 + ab + b^2) + ab\}$
 $= (a-b)\{a^2 + 2ab + b^2 - c^2\} = (a-b)\{(a+b)^2 - c^2\}$
 $= (a-b)\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$
 $= (a-b)(a+b+c)(a+b-c)$

6

【解答】 $a+b+c$

【解説】

(与式) $= \frac{-a^3(b-c) - b^3(c-a) - c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
 (分子) $= -a^3(b-c) + a(b^3 - c^3) - bc(b^2 - c^2) = -(b-c)\{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\}$
 $= -(b-c)\{b^2c - a + b(c^2 - ca) + (a^3 - c^2a)\}$
 $= -(b-c)\{b^2c - a + bc(c-a) - a(c^2 - a^2)\} = -(b-c)(c-a)\{b^2 + bc - a(c+a)\}$
 $= -(b-c)(c-a)\{-c(a-b) - (a^2 - b^2)\} = -(b-c)(c-a)(a-b)\{-c - (a+b)\}$
 $= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

よって (与式) $= a+b+c$

7

【解答】 (1) $a \neq 0$ のとき $x=1, \frac{1}{a}$; $a=0$ のとき $x=1$
 (2) $a \neq \pm 1$ のとき $x = \frac{1}{a+1}, y = \frac{1}{a-1}$
 $a=1$ のとき $x=1-t, y=t$ (t は実数)
 $a=-1$ のとき 解はない

【解説】

(1) 方程式の左辺を因数分解して $(x-1)(ax-1)=0$
 ゆえに $x-1=0$ または $ax-1=0$
 よって $a \neq 0$ のとき $x=1, \frac{1}{a}$; $a=0$ のとき $x=1$

(2) ① \times ② から $(a^2-1)x = a-1$
 すなわち $(a+1)(a-1)x = a-1 \dots \dots$ ③
 $a \neq \pm 1$ のとき $x = \frac{1}{a+1}$ ① から $y = 1 - a \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1}$
 $a=1$ のとき ①, ② はともに $x+y=1$ となる。

章末問題B

$y=t$ (t は実数) とすると $x=1-y=1-t$
 $a=-1$ のとき ③は $0 \cdot x = -2$ これを満たす x の値はない。
 したがって $a \neq \pm 1$ のとき $x = \frac{1}{a+1}, y = \frac{1}{a+1}$
 $a=1$ のとき $x=1-t, y=t$ (t は実数)
 $a=-1$ のとき 解はない

8

【解答】 (1) $6 \leq x \leq 12$ (2) $k \geq 2$ (3) $k \geq 8$

【解説】

(1) ①から $-2 \leq |x-9| - 1 \leq 2$
 よって $-1 \leq |x-9| \leq 3$
 $|x-9| \geq -1$ は常に成り立つ。
 $|x-9| \leq 3$ から $-3 \leq x-9 \leq 3$ よって $6 \leq x \leq 12$

(2) $k > 0$ であるから、②より $-k \leq x-4 \leq k$

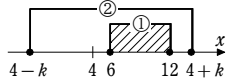
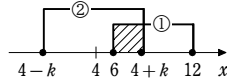
よって $4-k \leq x \leq 4+k$
 $k > 0$ から $4-k < 4$

①、②をともに満たす実数 x が存在するための条件は

$6 \leq 4+k$
 よって $k \geq 2$

(3) (2)により、①の解が②の解に含まれるための条件は

よって $12 \leq 4+k$
 よって $k \geq 8$



9

【解答】 (1) (ア) -1 (イ) 2 (ウ) 1 (エ) 4

(2) (オ) 3 (カ) 3 (キ) 2

(3) (ク) 1 (ケ) 7 (コ) 10 (サ) 4 (シ) 7

【解説】

(1) $a=1$ のとき、方程式①は $|x-1|=3|x|$

(i) $x < 0$ のとき、方程式は $-(x-1) = -3x$

これを解くと $x = -\frac{1}{2}$ これは、 $x < 0$ を満たす。

(ii) $0 \leq x < 1$ のとき、方程式は $-(x-1) = 3x$

これを解くと $x = \frac{1}{4}$ これは、 $0 \leq x < 1$ を満たす。

(iii) $x \geq 1$ のとき、方程式は $x-1 = 3x$

これを解くと $x = -\frac{1}{2}$ これは、 $x \geq 1$ を満たさない。

(i), (ii), (iii)より、 $a=1$ のとき、①の解は $x = \frac{7-1}{12}, \frac{7}{12}$

(2) (i) $x < 0$ のとき、方程式は $-a(x-a) = -3x$

これを解くと、 $a \neq 3$ のとき $x = \frac{a^2}{a-3}$

$a < 3$ のとき、これは、 $x < 0$ を満たす。

(ii) $0 \leq x < a$ のとき、方程式は $-a(x-a) = 3x$

これを解くと $x = \frac{a^2}{a+3}$ これは、 $0 \leq x < a$ を満たす。

(iii) $x \geq a$ のとき、方程式は $a(x-a) = 3x$

これを解くと、 $a \neq 3$ のとき $x = \frac{a^2}{a-3}$

$a > 3$ のとき、これは、 $x \geq a$ を満たす。

(i), (ii), (iii)より、①の解の個数は、 $a \neq 3$ のとき 2個、 $a=3$ のとき 1個となる。

したがって、①の解の個数が1個のとき、 $a = 3$ であり、その解は

$$x = \frac{a^2}{a+3} = \frac{3^2}{3+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

(3) $x=2$ が①の解であるとき $a|2-a|=6 \dots\dots ②$

[1] $0 < a < 2$ のとき、方程式②は

$$a(2-a) = 6 \quad \text{すなわち} \quad a^2 - 2a + 6 = 0$$

2次方程式 $a^2 - 2a + 6 = 0$ の判別式を D とすると $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -20 < 0$ であるから、方程式②は実数解をもたない。

[2] $a \geq 2$ のとき、方程式②は

$$-a(2-a) = 6 \quad \text{すなわち} \quad a^2 - 2a - 6 = 0$$

これを解くと $a = 1 \pm \sqrt{7}$

$a \geq 2$ を満たすのは $a = 1 + \sqrt{7}$

[1], [2]より、 $x=2$ が①の解であるとき $a = 1 + \sqrt{7}$

$a = 1 + \sqrt{7}$ とする。

$1 + \sqrt{7} > 3$ であるから、(2)より①の解は $x = \frac{a^2}{a-3}, \frac{a^2}{a+3}$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad \frac{a^2}{a-3} &= \frac{(1+\sqrt{7})^2}{(1+\sqrt{7})-3} = \frac{(2\sqrt{7}+8)(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} \\ &= \frac{14+4\sqrt{7}+8\sqrt{7}+16}{(\sqrt{7})^2-2^2} = 10+4\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+3} &= \frac{(1+\sqrt{7})^2}{(1+\sqrt{7})+3} = \frac{(2\sqrt{7}+8)(4-\sqrt{7})}{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})} \\ &= \frac{8\sqrt{7}-14+32-8\sqrt{7}}{4^2-(\sqrt{7})^2} = 2 \end{aligned}$$

したがって、①の解は $x=2, 10+4\sqrt{7}$

10

【解答】 (1) 順に 52, 194 (2) $4 + \sqrt{2}$ (3) $\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{6}$ (4) $\frac{\sqrt{30}}{3}$

【解説】

(1) $x=2+\sqrt{3}, y=2-\sqrt{3}$ とおくと

$$x+y = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4,$$

$$xy = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3=1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad (2+\sqrt{3})^3 + (2-\sqrt{3})^3 &= x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 52 \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4^2 - 2 \cdot 1 = 14$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad (2+\sqrt{3})^4 + (2-\sqrt{3})^4 &= x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 \\ &= 14^2 - 2 \cdot 1^2 = 194 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}} = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{3+2\sqrt{2}-3} = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2} \\ &= (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2 - \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\sqrt{10+4\sqrt{6}} = \sqrt{10+2\sqrt{24}} = \sqrt{(6+4)+2\sqrt{6 \cdot 4}} = \sqrt{6} + \sqrt{4} = \sqrt{6} + 2$$

$$\text{よって} \quad \frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{10+4\sqrt{6}} = (\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}) + (\sqrt{6} + 2) = 4 + \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}} &= \frac{1}{(\sqrt{2}+2)+(\sqrt{3}+\sqrt{6})} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}(1+\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-2+\sqrt{6}}{(1-2)(2-3)} = \sqrt{2}-\sqrt{3}-2+\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \right) \\ = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}) - (\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})} + \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) - (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})} \\ = \frac{-2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} + \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{6}-5} + \frac{2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5} \\ = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{2\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{3} \end{aligned}$$

11

【解答】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解説】

$a+b=3, ab=1$ から

$$\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)^2 = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b+2\sqrt{ab}} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$$

$$a > b \text{ から} \quad \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} > 0 \quad \text{よって} \quad \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

12

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $x \in B$ ならば $x=6n+5$ (n は整数) と表される。

このとき $x=6(n+1)-1=3 \cdot 2(n+1)-1$

$2(n+1)$ は整数であるから $x \in A$

よって、 $x \in B$ ならば $x \in A$ であるから $A \supset B$

(2) [1] $x \in A$ ならば $x=2n-1$ (n は整数) と表される。

このとき $x=2(n-1)+1$

$n-1$ は整数であるから $x \in B$

章末問題B

よって、 $x \in A$ ならば $x \in B$ であるから $A \subset B$

[2] $x \in B$ ならば $x = 2n + 1$ (n は整数) と表される。

このとき $x = 2(n + 1) - 1$

$n + 1$ は整数であるから $x \in A$

よって、 $x \in B$ ならば $x \in A$ であるから $A \supset B$

[1], [2] から $A = B$

[13]

[解答] (1) $P = \{-3, a\}$, $Q = \{1, b\}$, $R = \{2a, 5b\}$

(2) 負の数 -3 ; $a = -\frac{3}{2}$, $b = -3$

[解説]

(1) ① から $(x + 3)(x - a) = 0$ よって $P = \{-3, a\}$

② から $(x - 1)(x - b) = 0$ よって $Q = \{1, b\}$

③ から $(x - 2a)(x - 5b) = 0$ よって $R = \{2a, 5b\}$

(2) $P \cap Q \cap R$ がただ 1 つの負の数からなることと、 $Q = \{1, b\}$ から $P \cap Q \cap R = \{b\}$

$b = 5b$ とすると、 $b = 0$ となり不適であるから $b = 2a \dots\dots$ ④

$b = a$ とすると、④ から $b = 0$ となり不適である。

したがって $b = -3$

このとき、④ から $a = -\frac{3}{2}$

以上から、求める負の数は -3 であり、そのときの a, b の値は

$$a = -\frac{3}{2}, b = -3$$

[14]

[解答] 5, 15, 25, 35, 45

[解説]

$U = \{1, 2, 3, \dots, 49\}$

$50 = 2 \cdot 5^2$ であるから $V = \{2, 4, \dots, 48, 5, 15, 25, 35, 45\}$

$W = \{2, 4, \dots, 48\}$

(i) から $A \cup \overline{B} = V$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, (ii) から $\overline{A \cup B} = W$

よって $A = (A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B) = V \cap \overline{W}$

したがって、 A の要素は V の要素から W の要素を除いたもので

5, 15, 25, 35, 45

[15]

[解答] (1) 略 (2) 略 (3) 略

[解説]

(1) 与えられた命題の対偶は

「 a, b がともに 3 の倍数でないならば、 ab は 3 の倍数でない」

a, b がともに 3 の倍数でないならば、 k, l を整数として $a = 3k \pm 1$, $b = 3l \pm 1$ (複号任意) と表される。

このとき $ab = \begin{cases} (3k+1)(3l+1) \\ (3k-1)(3l+1) \end{cases} = \begin{cases} 9kl \pm 3k + 3l \pm 1 \\ 9kl \pm 3k - 3l \mp 1 \end{cases} = \begin{cases} 3(3kl \pm k + l) \pm 1 \\ 3(3kl \pm k - l) \mp 1 \end{cases}$ (複号同順)

よって、 ab は 3 の倍数でない。

したがって、対偶が真であるから、もとの命題は真である。

(2) ab が 3 の倍数であるから、(1) より a または b は 3 の倍数である。

章末問題C

[1]

[解答] (1) 略 (2) 略 (3) 略

[解説]

(1) $x \in D(m) \cap D(n)$ ならば $x \in D(m+n)$ を示す。

$x \in D(m) \cap D(n)$ より、 $x \in D(m)$ かつ $x \in D(n)$ であるから、 x は m の約数かつ n の約数である。

すなわち $m = xm_1$ かつ $n = xn_1$ (m_1, n_1 は自然数)

このとき $m+n = xm_1 + xn_1 = x(m_1 + n_1)$

よって、 x は $m+n$ の約数であるから $x \in D(m+n)$

したがって $D(m) \cap D(n) \subset D(m+n)$

(2) $y \in D(m) \cup D(n)$ ならば $y \in D(mn)$ を示す。

$y \in D(m) \cup D(n)$ より、 $y \in D(m)$ または $y \in D(n)$ であるから、 y は m の約数または n の約数である。

すなわち $m = ym_2$ または $n = yn_2$ (m_2, n_2 は自然数)

$m = ym_2$ のとき $mn = (ym_2)n = y(m_2n)$

$n = yn_2$ のとき $mn = m(yn_2) = y(mn_2)$

よって、いずれの場合も y は mn の約数であるから $y \in D(mn)$

したがって $D(m) \cup D(n) \subset D(mn)$

(3) $m \in D(n)$ のとき、 $n = mn_3$ (n_3 は自然数) と表される。

このとき、 $D(m)$ の任意の要素 z について、 $m = zm_3$ (m_3 は自然数) と表される。

よって $n = mn_3 = (zm_3)n_3 = z(m_3n_3)$

ゆえに、 $z \in D(n)$ であるから $D(m) \subset D(n)$

逆に、 $D(m) \subset D(n)$ のとき、 m は明らかに $D(m)$ の要素である。

$D(m) \subset D(n)$ であるから $m \in D(n)$

[2]

[解答] (1) 略 (2) 略 (3) 略

[解説]

(1) $m \in (A \cap B)'$ ならば $m \in (A' \cap B')$ を示す。

$m \in (A \cap B)'$ であるとき、次の [1] または [2] の場合が考えられる。

[1] m は奇数で $m \in (A \cap B)$ [2] $2m \in (A \cap B)$

[1] のとき、 m が奇数で $m \in A$ かつ $m \in B$ であるから

$$m \in A' \text{ かつ } m \in B'$$

[2] のとき、 $2m \in A$ かつ $2m \in B$ で、 $2m$ は偶数であるから

$$m \in A' \text{ かつ } m \in B'$$

よって、[1], [2] のいずれの場合にも $m \in (A' \cap B')$ が成り立つ。

したがって $(A \cap B)' \subset (A' \cap B')$

(2) 仮定より、 $7 \in (A \cap B)$ かつ $14 \in (A \cap B)$ であるから $7 \in (A \cap B)'$

一方、 $7 \in A$, $14 \in B$ であるから $7 \in (A' \cap B')$

すなわち、 $A' \cap B'$ に含まれ、 $(A \cap B)'$ に含まれない要素 7 が存在する。

したがって $(A \cap B)' \not\subset (A' \cap B')$

(3) $A \neq \emptyset$ であるから、 A には最小の要素 n が存在し、 n は偶数である。

$$\text{よって } \frac{n}{2} \in A'$$

一方、 $\frac{n}{2} < n$ であり、 n が A の最小の要素であることから $\frac{n}{2} \notin A$

章末問題C

すなわち、 A' に含まれ、 A に含まれない要素 $\frac{n}{2}$ が存在する。

したがって $A' \neq A$

3

【解答】 略

【解説】

[1] $a \in A$ ならば $a = 2m + 3n$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$) と表される。

また $2m + 3n = 3(-m + n) + 5m$
 $-m + n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$ であるから $a \in B$
 よって $A \subset B$

[2] $b \in B$ ならば $b = 3m + 5n$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$) と表される。

また $3m + 5n = 2n + 3(m + n)$
 $n \in \mathbb{Z}, m + n \in \mathbb{Z}$ であるから $b \in A$
 よって $B \subset A$

[1], [2] より、 $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるから $A = B$

4

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) 方程式が有理数の解 $x = \alpha$ をもつとする。 $\alpha = 0$ のとき、 α は整数である。

$\alpha > 0$ のとき、 $\alpha = \frac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数) とおく。

$x = \alpha$ は方程式の解であるから $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

すなわち $\left(\frac{n}{m}\right)^3 + a\left(\frac{n}{m}\right)^2 + b \cdot \frac{n}{m} + c = 0$

ゆえに $n^3 + amn^2 + bm^2n + cm^3 = 0$

よって $n^3 = -m(an^2 + bmn + cm^2)$

a, b, c, m, n は整数であるから、 n^3 は m の倍数である。また、 m と n は互いに素であるから、 m と n^3 も互いに素である。

したがって、 $m = 1$ であり、 α は整数である。

$\alpha < 0$ のときは $\alpha = -\frac{n}{m}$ とおくと、同様に示される。

(2) 方程式 $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ が有理数の解 $x = \alpha$ をもつと仮定する。

(1) から、 α は整数である。

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2 = 0$ から $\alpha^2(\alpha + 2) = -2$

α, α^2 は整数で、 $\alpha^2 \geq 0$ であるから $(\alpha^2, \alpha + 2) = (1, -2), (2, -1)$

ところが、これを満たす整数 α は存在しないから、矛盾。

よって、 $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ は有理数の解をもたない。

5

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) p, q の少なくとも一方が偶数であると仮定する。

このとき、 $\frac{q}{p}$ は既約分数であるから、 p, q の一方が偶数で他方が奇数となる。

ここで、 $a\left(\frac{q}{p}\right)^2 + b \cdot \frac{q}{p} + c = 0$ であるから $aq^2 + b pq + cp^2 = 0$ ……①

a, b, c はすべて奇数であり、 p, q の一方だけが偶数で他方が奇数であるから、 $b pq$

は偶数である。

また、 aq^2 と cp^2 の一方が偶数で他方が奇数となる。

よって、 $aq^2 + b pq + cp^2$ は奇数となる。

これは①の右辺が0であることに矛盾する。

したがって、 p と q はともに奇数である。

(2) この方程式が有理数の解をもつと仮定すると、その解は $\frac{q'}{p'}$ (p', q' は互いに素である整数、 $p' \neq 0$) と表される。

(1) から、 p', q' はともに奇数である。

このとき、(1) と同様に $aq'^2 + b p'q' + cp'^2 = 0$ ……②

ここで、 a, b, c は奇数であるから、 $aq'^2, b p'q', cp'^2$ はすべて奇数となる。

よって、②の左辺は奇数となり、右辺が0であることに矛盾する。

したがって、この2次方程式は有理数の解をもたない。

6

【解答】 $a + b, a - b, c$ が偶数

【解説】

[1] 条件(A)で $x = 0, x = 1, x = -1$ とすると、

$$f(0) = c, f(1) = a + b + c, f(-1) = a - b + c$$

は偶数である。

ゆえに、 l, m, n を整数として

$$c = 2l, a + b + c = 2m, a - b + c = 2n$$

と表される。これを解いて

$$a = m + n - 2l, b = m - n, c = 2l \quad \dots\dots ①$$

[2] 逆に、①であるとき

$$f(x) = (m + n - 2l)x^2 + (m - n)x + 2l = m(x^2 + x) + n(x^2 - x) + 2l(1 - x^2) \\ = mx(x + 1) + nx(x - 1) + 2l(1 - x^2)$$

x が整数のとき、連続2整数の積 $x(x + 1), x(x - 1)$ は偶数であり、 $2l(1 - x^2)$ も偶数であるから、 $f(x)$ の値は偶数になる。

したがって、求める必要十分条件は①が成り立つことである。

①は、 $c = 2l, a + b = 2(m - l), a - b = 2(n - l)$ と同値であるから、求める必要十分条件は $a + b, a - b, c$ が偶数

7

【解答】 (命題 p) 正しくない、理由略 (命題 q) 正しい、証明略

【解説】

(命題 p) 正しくない。

(理由) ある n に対して、 \sqrt{n} と $\sqrt{n + 1}$ がともに有理数であると仮定すると、

$$\sqrt{n} = \frac{a}{b} \quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素な自然数}) \quad \text{と表される。}$$

$$\text{両辺を2乗すると} \quad n = \frac{a^2}{b^2}$$

a と b は互いに素であるから、 a^2 と b^2 も互いに素である。

よって、 n が自然数となるのは、 $b^2 = 1$ のときであるから

$$n = a^2 \quad \dots\dots ①$$

同様に $n + 1 = c^2$ ……② (c は自然数、 $c > a \geq 1$) とおける。

$$\text{②} - \text{①} \text{ から} \quad 1 = c^2 - a^2 \quad \text{変形すると} \quad (c + a)(c - a) = 1 \quad \dots\dots ③$$

$$c > a \geq 1 \text{ より} \quad c + a \geq 3, c - a \geq 1$$

これと③を同時に満たす自然数 a, c は存在しないから、矛盾する。

したがって、 \sqrt{n} と $\sqrt{n + 1}$ がともに有理数になることはない。

【別解】 (一般に、自然数 N に対して、 \sqrt{N} が有理数のとき、 \sqrt{N} は自然数となることを利用する。)

n が自然数となるのは、 $b^2 = 1$ すなわち $b = 1$ のときであるから $\sqrt{n} = a$

$$\text{ここで} \quad \sqrt{n + 1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}}$$

\sqrt{n} が有理数のとき、 \sqrt{n} は自然数であるから $\sqrt{n + 1} + \sqrt{n} > 1$

よって $0 < \sqrt{n + 1} - \sqrt{n} < 1$

2数 $\sqrt{n}, \sqrt{n + 1}$ の差の絶対値が1より小さいから、 \sqrt{n} が自然数のとき、 $\sqrt{n + 1}$ は自然数ではない。すなわち、 $\sqrt{n + 1}$ は有理数ではない。

同様に、 $\sqrt{n + 1}$ が自然数のときは、 \sqrt{n} は有理数ではない。

したがって、 \sqrt{n} と $\sqrt{n + 1}$ がともに有理数になることはない。

(命題 q) 正しい。

(証明) ある自然数 n に対して、 $\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$ が有理数であると仮定すると、

$$\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} = r \quad \dots\dots ④ \quad (r \text{ は正の有理数}) \quad \text{と表される。}$$

④の両辺に $\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}$ を掛けると $1 = r(\sqrt{n + 1} + \sqrt{n})$

$$r \neq 0 \text{ であるから} \quad \sqrt{n + 1} + \sqrt{n} = \frac{1}{r} \quad \dots\dots ⑤$$

$$\text{④, ⑤ から} \quad \sqrt{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right), \sqrt{n + 1} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$$

よって、 $\sqrt{n}, \sqrt{n + 1}$ がともに有理数となり、命題 p が正しくないことに矛盾する。したがって、すべての n に対して、 $\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$ は無理数である。