1 ★

(1)　$\angle x$ は $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角であるから　$\angle x=\angle \mathrm{ACD}=68^\circ$
$\triangle$ABE の内角と外角について　$\angle y=110^\circ-68^\circ=42^\circ$

(2)　$\angle x$ は $\overset{\frown}{\mathrm{BAD}}$ に対する中心角であるから　$\angle x=2\angle \mathrm{BCD}=2\times 104^\circ=208^\circ$
このとき　$\angle \mathrm{BOD}=360^\circ-208^\circ=152^\circ$
$\angle y$ は $\overset{\frown}{\mathrm{BCD}}$ に対する円周角であるから　$\angle y=\frac{1}{2}\angle \mathrm{BOD}=\frac{1}{2}\times 152^\circ=76^\circ$

(3)　$\angle$BOC は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する中心角であるから　$\angle x=2\angle \mathrm{BAC}=2\times 58^\circ=116^\circ$
OB＝OC であるから　$\angle y=(180^\circ-116^\circ)\div 2=32^\circ$

(4)　$\angle x$ は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角であるから　$\angle x=\frac{1}{2}\angle \mathrm{BOC}=\frac{1}{2}\times 70^\circ=35^\circ$
$\triangle$DCO の内角と外角について　$\angle \mathrm{BDC}=70^\circ+23^\circ=93^\circ$
$\triangle$DAB の内角と外角について　$\angle y=93^\circ-35^\circ=58^\circ$

(5)　$\angle$ABC は半円の弧に対する円周角であるから　$\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$
$\triangle$ABC において　$\angle \mathrm{BCA}=180^\circ-(90^\circ+53^\circ)=37^\circ$
$\angle x$ は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角であるから　$\angle x=\angle \mathrm{BCA}=37^\circ$
AC と BD の交点を E とすると，$\triangle$ABE の内角と外角について
$\angle \mathrm{ABD}=118^\circ-53^\circ=65^\circ$
$\angle y$ は $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角であるから　$\angle y=\angle \mathrm{ABD}=65^\circ$

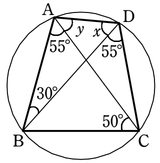
(6)　F と C を結ぶ。
$\angle$BFC は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角であるから　$\angle \mathrm{BFC}=\angle \mathrm{BAC}=41^\circ$
よって　$\angle \mathrm{CFD}=74^\circ-41^\circ=33^\circ$
$\angle x$ は $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角であるから　$\angle x=\angle \mathrm{CFD}=33^\circ$

2 ★★

(1)　1 つの円の弧の長さは，円周角の大きさに比例するから
$36^\circ : \angle x=2:3$
$2\angle x=108^\circ$
よって　$\angle x=54^\circ$

(2)　長さの等しい弧に対する円周角は等しいから　$\angle x=\angle \mathrm{ACD}=48^\circ$
また，$\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{ADB}$ であるから　$\angle \mathrm{BAD}=180^\circ-48^\circ\times 2=84^\circ$
よって　$\angle y=84^\circ-28^\circ=56^\circ$

3 ★★



2 点 A，D は直線 BC について同じ側にあり，
$\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BDC}$ であるから，円周角の定理の逆に
より，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角について
$\angle x=\angle \mathrm{ACB}=50^\circ$
$\triangle$ABD の内角について
$\angle y=180^\circ-(55^\circ+30^\circ+50^\circ)=45^\circ$

4 ★

$\triangle$ABC と $\triangle$AED において
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角より　$\angle \mathrm{ACB}=\angle \mathrm{ADE}$
$\angle$ABC は半円の弧に対する円周角であるから
$\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$
仮定より，$\angle \mathrm{AED}=90^\circ$ であるから
$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{AED}$
よって，2 組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle \mathrm{ABC}\backsim\triangle \mathrm{AED}$

5 ★★

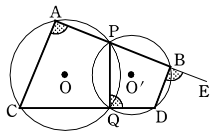
線分 AB は直径で，半円の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{ADB}}$ に対する円周角から　$\angle \mathrm{ACB}=90^\circ$
よって　$\angle \mathrm{ECF}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$
同様に，$\angle \mathrm{ADB}=90^\circ$ より　$\angle \mathrm{EDF}=90^\circ$
2 点 C，D は直線 EF の同じ側にあり，$\angle \mathrm{ECF}=\angle \mathrm{EDF}$ であるから，円周角の定理の
逆により，4 点 C，D，E，F は 1 つの円周上にある。
また，$\angle \mathrm{ECF}=\angle \mathrm{EDF}=90^\circ$ であるから，
その円は，線分 EF を直径とする円である。　終

6 ★

(1)　四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle x=71^\circ$
$\triangle$ABE において　$\angle y=180^\circ-(71^\circ+68^\circ)=41^\circ$

(2)　$\triangle$BEC の内角と外角について　$\angle \mathrm{ECB}=93^\circ-31^\circ=62^\circ$　よって　$\angle x=62^\circ$
四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle \mathrm{CDF}=93^\circ$
よって，$\triangle$DCF において　$\angle y=180^\circ-(93^\circ+62^\circ)=25^\circ$

7 ★★

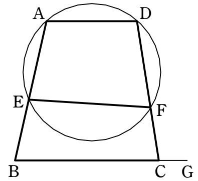


右の図のように，P と Q を結び，半直線 ABE を引く。
四角形 ACQP は円 O に内接しているから
$\angle \mathrm{PAC}=\angle \mathrm{PQD}$　…… ①
四角形 PQDB は円 O′ に内接しているから
$\angle \mathrm{PQD}=\angle \mathrm{EBD}$　…… ②
①，② から　$\angle \mathrm{PAC}=\angle \mathrm{EBD}$
したがって，同位角が等しいから　AC∥BD　終

8 ★★

①　$\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{BCD}=95^\circ+75^\circ=170^\circ$
よって，対角の和が 180° ではないから，円に内接しない。
②　$\triangle$BCD において
$\angle \mathrm{BCD}=180^\circ-(59^\circ+49^\circ)=72^\circ$
であるから
$\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{BCD}=108^\circ+72^\circ=180^\circ$
よって，対角の和が 180° であるから，円に内接する。
③　AD∥BC から　$\angle \mathrm{ABC}=62^\circ$
よって，頂点 D の外角はそれと隣り合う内角の対角に等しくないから，円に内接し
ない。
したがって，円に内接するのは　②

9 ★★



右の図のように，辺 BC の延長を BG とする。
AD∥BC であるから　$\angle \mathrm{ADF}=\angle \mathrm{GCF}$
四角形 AEFD は円に内接するから
$\angle \mathrm{ADF}=\angle \mathrm{BEF}$
よって　$\angle \mathrm{BEF}=\angle \mathrm{GCF}$
したがって，四角形 EBCF は，頂点 C の外角がそれと
隣り合う内角の対角に等しいから，円に内接する。

10 ★

AP$=x$ とおくと　BP$=10-x$
よって　BQ$=10-x$
また，AR＝AP$=x$ であるから　CR$=8-x$
よって　CQ$=8-x$
したがって，辺 BC の長さについて
$(10-x)+(8-x)=12$
$x=3$
すなわち　AP＝3

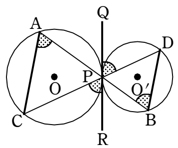
11 ★★

円外の点からその円に引いた 2 本の接線の長さは等しいから
円 O について　AM＝PM，　円 O′ について　BM＝PM
よって　AM＝BM
したがって，点 M は線分 AB の中点である。　終

12 ★

(1)　接線と弦のつくる角の定理により　$\angle x=47^\circ$，$\angle y=65^\circ$
(2)　$\angle x=50^\circ$
また，$\angle \mathrm{CAB}=90^\circ$ であるから，$\triangle$ABC において
$\angle y=180^\circ-(50^\circ+90^\circ)=40^\circ$
(3)　$\angle x=107^\circ$
また，$\triangle$BDA において　$\angle y=107^\circ-72^\circ=35^\circ$

13 ★★



点 P を通る共通接線を QR とする。
接線と弦のつくる角の定理により
$\angle \mathrm{CPR}=\angle \mathrm{CAP}$
$\angle \mathrm{DPQ}=\angle \mathrm{DBP}$
また，対頂角は等しいから
$\angle \mathrm{CPR}=\angle \mathrm{DPQ}$
よって　$\angle \mathrm{CAP}=\angle \mathrm{DBP}$
したがって，錯角が等しいから　AC∥DB　終

14 ★★★

$\triangle$ABP と $\triangle$ACQ において
四角形 APCQ は円に内接するから
$\angle \mathrm{APB}=\angle \mathrm{AQC}$　…… ①
接線と弦のつくる角の定理により
$\angle \mathrm{ABP}=\angle \mathrm{APQ}$　…… ②
$\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}$ に対する円周角より　$\angle \mathrm{APQ}=\angle \mathrm{ACQ}$　…… ③
②，③ より　$\angle \mathrm{ABP}=\angle \mathrm{ACQ}$　…… ④
①，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle \mathrm{ABP}\backsim\triangle \mathrm{ACQ}$

15 ★

(1)　方べきの定理により
PA×PB＝PC×PD
$5\times 4=6\times x$
よって　$x=\frac{10}{3}$

(2)　方べきの定理により
PA×PB＝PC×PD
$6\times(6+x)=5\times(5+7)$
$6\times(6+x)=60$
$6+x=10$
よって　$x=4$

(3)　方べきの定理により
PA×PB＝PT^2
$4\times(4+x)=6^2$
$4x=20$
よって　$x=5$

16 ★★

直線 AB と CD の交点を P とする。

① $PA \times PB = 4 \times 6 = 24$，　$PC \times PD = 3 \times 8 = 24$

よって　$PA \times PB = PC \times PD$

② $PA \times PB = 4 \times 8 = 32$，　$PC \times PD = 3 \times 9 = 27$

③ $PA \times PB = 3 \times (3+9) = 36$，　$PC \times PD = 4 \times (4+5) = 36$

よって　$PA \times PB = PC \times PD$

したがって，方べきの定理の逆により，4 点 A，B，C，D が 1 つの円周上にあるものは

①と③

17 ★★

円 O において，方べきの定理により　$PA \times PB = PT^2$　…… ①

円 O′ において，方べきの定理により　$PA \times PB = PT'^2$　…… ②

①，② から　$PT^2 = PT'^2$

$PT > 0$，$PT' > 0$ であるから　$PT = PT'$　終

18 ★★★

円 O において，方べきの定理により

$PT^2 = PA \times PB$

円 O′ において，方べきの定理により

$PT^2 = PC \times PD$

よって　$PA \times PB = PC \times PD$

したがって，方べきの定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

19 ★★

2 つの円の中心間の距離を d とおく。

(1)　$15 > 10 + 4$

よって，$d > r + r'$ となるから，2 つの円は一方が他方の外部にある。

(2)　$15 = 20 - 5$

よって，$d = r - r'$ となるから，2 つの円は内接する。

(3)　$12 - 5 < 15 < 12 + 5$

よって，$r - r' < d < r + r'$ となるから，2 つの円は 2 点で交わる。

(4)　$15 = 9 + 6$

よって，$d = r + r'$ となるから，2 つの円は外接する。

1

(1)　点 A を含まない $\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角は

$\angle BOC = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$

$\angle BAC$ は，点 A を含まない $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角であるから

$\angle x = \frac{1}{2} \times 220^\circ = 110^\circ$

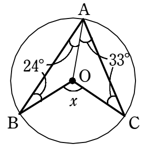
(2)　$\angle ACB$ は $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であるから

$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$

△DBC において　$\angle x = 180^\circ - (\angle DBC + \angle DCB)$

$= 180^\circ - (62^\circ + 40^\circ) = 78^\circ$

(3)　2 点 A，O を結ぶ。



$\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC$

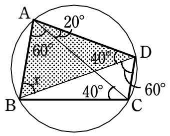
$= \angle OBA + \angle OCA$

$= 24^\circ + 33^\circ = 57^\circ$

$\angle x$ は $\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角であるから

$\angle x = 2\angle BAC = 2 \times 57^\circ = 114^\circ$

(4)　$\angle BAC$ は $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角であるから



$\angle BAC = \angle BDC = 60^\circ$

$\angle ADB$ は $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であるから

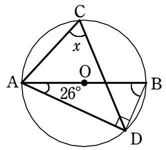
$\angle ADB = \angle ACB = 40^\circ$

よって，△ABD において

$\angle x = 180^\circ - (\angle BAC + \angle DAC + \angle ADB)$

$= 180^\circ - (60^\circ + 20^\circ + 40^\circ) = 60^\circ$

(5)　2 点 B，D を結ぶ。



$\angle ADB$ は半円の弧に対する円周角であるから

$\angle ADB = 90^\circ$

△ABD において

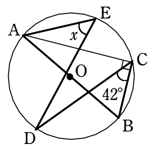
$\angle ABD = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ADB)$

$= 180^\circ - (26^\circ + 90^\circ) = 64^\circ$

$\angle ACD$ は $\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角であるから

$\angle x = \angle ABD = 64^\circ$

(6)　2 点 A，C を結ぶ。



$\angle ACB$ は半円の弧に対する円周角であるから

$\angle ACB = 90^\circ$

よって　$\angle ACD = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$

$\angle AED$ は $\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角であるから

$\angle x = \angle ACD = 48^\circ$

2

(1)　1 つの円の弧の長さは，円周角の大きさに比例するから

$34^\circ : \angle x = 2 : 3$

$2\angle x = 34^\circ \times 3$

$\angle x = 51^\circ$

(2)　等しい弧に対する円周角は等しいから

$\angle x = \angle ACB = 50^\circ$

また　$\angle ADB = \angle ACB = 50^\circ$

△ABD において，三角形の内角の和は 180° であるから

$\angle x + 46^\circ + \angle y + 50^\circ = 180^\circ$

$50^\circ + 46^\circ + \angle y + 50^\circ = 180^\circ$

$\angle y = 34^\circ$

3

(1)　2 点 A，D は直線 BC について同じ側にあり，$\angle BAC = \angle BDC$ であるから，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

このとき，$\angle x$ は $\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角であるから　$\angle x = \angle CBD = 24^\circ$

(2)　△ABD において　$\angle BDA = 180^\circ - (90^\circ + 32^\circ) = 58^\circ$

よって，2 点 C，D は直線 AB について同じ側にあり，$\angle BCA = \angle BDA$ であるから，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

このとき，$\angle ACD$ は $\overset{\frown}{DA}$ に対する円周角であるから　$\angle ACD = \angle ABD = 32^\circ$

よって，△ECD の内角と外角について　$\angle x = 78^\circ - 32^\circ = 46^\circ$

4

△ABQ と △APB において

共通な角であるから

$\angle BAQ = \angle PAB$　…… ①

AB＝AC であるから

$\angle ABQ = \angle ACB$

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角について

$\angle APB = \angle ACB$

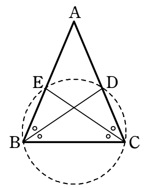
よって　$\angle ABQ = \angle APB$　…… ②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABQ \backsim \triangle APB$

5

△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形であるから



$\angle ABC = \angle ACB$

また，仮定より

$\angle EBD = \frac{1}{2}\angle ABC$

$\angle DCE = \frac{1}{2}\angle ACB$

よって　$\angle EBD = \angle DCE$

2 点 B，C は直線 ED について同じ側にあり，

$\angle EBD = \angle DCE$ であるから，円周角の定理の逆により，4 点 B，C，D，E は 1 つの円周上にある。

6

(1)　△ABE の内角について　$\angle BAE = 180^\circ - (65^\circ + 30^\circ) = 85^\circ$

四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle x = \angle BAD = 85^\circ$

(2)　△ABF の内角と外角の関係から　$\angle EAD = \angle x + 56^\circ$

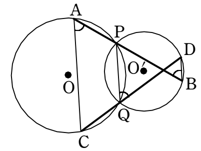
四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle ADE = \angle x$

△ADE の内角について　$32^\circ + (\angle x + 56^\circ) + \angle x = 180^\circ$

よって　$\angle x = 46^\circ$

7

四角形 ACQP は円 O に内接しているから



$\angle PAC = \angle PQD$　…… ①

円 O′ において，円周角の定理により

$\angle PQD = \angle PBD$　…… ②

①，② から　$\angle PAC = \angle PBD$

したがって，錯角が等しいから　$AC \parallel DB$

$\boxed{8}$

① $\angle DAB + \angle BCD = 120° + 70° = 190°$

よって，対角の和が 180° ではないから，円に内接しない。

② △ACD の内角について

$\angle CDA = 180° - (20° + 30°) = 130°$

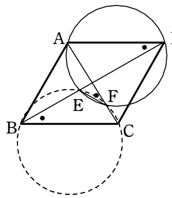
よって　$\angle ABC + \angle CDA = 50° + 130° = 180°$

したがって，対角の和が 180° であるから，円に内接する。

③ $\angle DAB = 180° - 65° = 115°$

よって，頂点 C の外角がそれと隣り合う内角の対角 ∠DAB に等しいから，円に内接する。

$\boxed{9}$



証明　AD∥BC であるから

$\angle EBC = \angle ADE$

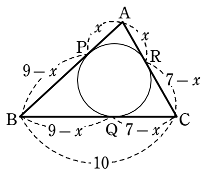
$\overset{\frown}{AE}$ に対する円周角より

$\angle AFE = \angle ADE$

よって　$\angle EBC = \angle AFE$

したがって，四角形 EBCF は円に内接する。　終

$\boxed{10}$



AP $= x$ cm とおく。

点 A から引いた接線の長さは等しいから

$AR = AP = x$

よって　$BP = 9 - x$，　$CR = 7 - x$

点 B から引いた接線の長さは等しいから

$BQ = BP = 9 - x$

点 C から引いた接線の長さは等しいから

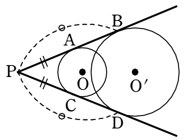
$CQ = CR = 7 - x$

したがって，辺 BC の長さについて　$(9 - x) + (7 - x) = 10$

これを解くと　$x = 3$

よって　AP = 3 cm　答

$\boxed{11}$



円の外部の点からその円に引いた 2 つの接線の長さは等しいから

$PB = PD$　…… ①

$PA = PC$　…… ②

①，② から　$PB - PA = PD - PC$

すなわち　$AB = CD$

$\boxed{12}$

(1) $\angle x = \angle ACB = 74°$

$\angle y = \angle ABC = 56°$

(2) $\angle x = 70°$

△ABC は，BA = BC の二等辺三角形であるから　$\angle BAC = \angle BCA = 70°$

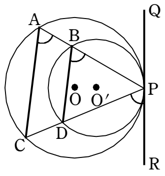
よって，△ABC の内角について　$\angle y = 180° - 70° \times 2 = 40°$

(3) $\angle x = 108°$

△ABD の内角と外角について　$\angle BAD = 108° - 70° = 38°$

よって　$\angle y = 180° - (108° + 38°) = 34°$

$\boxed{13}$



点 P を通る共通接線を QR とする。

接線と弦のつくる角の定理により

$\angle CPR = \angle CAP$

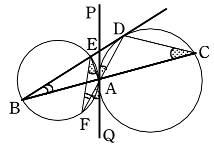
$\angle DPR = \angle DBP$

$\angle CPR = \angle DPR$　であるから

$\angle CAP = \angle DBP$

よって，同位角が等しいから　AC∥BD

$\boxed{14}$



証明　△BCD と △FEA において

$\overset{\frown}{AE}$ に対する円周角より　$\angle ABE = \angle AFE$

すなわち　$\angle DBC = \angle AFE$　…… ①

右側の円において，接弦定理により

$\angle ACD = \angle DAP$

すなわち　$\angle BCD = \angle DAP$　…… ②

対頂角は等しいから　$\angle DAP = \angle FAQ$　…… ③

左側の円において，接弦定理により

$\angle FAQ = \angle FEA$　…… ④

②，③，④ から　$\angle BCD = \angle FEA$　…… ⑤

①，⑤ より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△BCD∽△FEA　終

$\boxed{15}$

(1) $PA \times PB = PC \times PD$

$2 \times 6 = x \times 4$

よって　$x = 3$

(2) $PB = 8 + 8 - 4 = 12$

$PA \times PB = PC \times PD$

$4 \times 12 = 6 \times x$

よって　$x = 8$

(3) $PD = x - 9$

$PA \times PB = PC \times PD$

$6 \times 12 = 9 \times (x - 9)$

よって　$x = 17$

(4) $PA \times PB = PC \times PD$

$8 \times 15 = x \times 12$

よって　$x = 10$

(5) $PA \times PB = PC \times PD$

$4 \times (4 + x) = 6 \times (6 + 10)$

よって　$x = 20$

(6) $PA \times PB = PT^2$

$3 \times (3 + x) = 6^2$

よって　$x = 9$

(7) $PA \times PB = PT^2$

$9 \times (9 + 7) = x^2$

よって　$x = 12$

$\boxed{16}$

$PA = 5$，$PD = 5 + 3 = 8$，

$PB = 4$，$PC = 4 + 6 = 10$ であるから

$PA \times PD = PB \times PC\ (= 40)$

よって，方べきの定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

すなわち，四角形 ABCD は円に内接する。

$\boxed{17}$

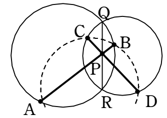
円 O において，方べきの定理により　$EA \times EB = EC^2$　…… ①

円 O′ において，方べきの定理により　$EA \times EB = ED^2$　…… ②

①，② から　$EC^2 = ED^2$

$EC > 0$，$ED > 0$ であるから　$EC = ED$

$\boxed{18}$



2 つの円の交点を Q，R とする。

A，R，B，Q を通る円において，方べきの定理により

$PA \times PB = PQ \times PR$

また，C，R，D，Q を通る円において，方べきの定理により

$PC \times PD = PQ \times PR$

よって　$PA \times PB = PC \times PD$

したがって，方べきの定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

$\boxed{19}$

2 つの円の中心間の距離を d cm とおくと　$d = 12$

(1) $r = 10$，$r' = 4$ であるから

$r - r' = 10 - 4 = 6$，$r + r' = 10 + 4 = 14$

$r - r' < d < r + r'$ となっているから，2 つの円は 2 点で交わる。

(2) $r = 20$，$r' = 8$ であるから

$r - r' = 20 - 8 = 12$，$r + r' = 20 + 8 = 28$

$d = r - r'$ となっているから，2 つの円は内接する。

(3) $r = 5$，$r' = 7$ であるから

$r' - r = 7 - 5 = 2$，$r' + r = 7 + 5 = 12$

$d = r + r'$ となっているから，2 つの円は外接する。

(4) $r = 5$，$r' = 3$ であるから

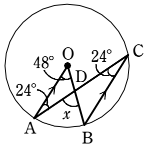
$r - r' = 5 - 3 = 2$，$r + r' = 5 + 3 = 8$

$d > r + r'$ となっているから，2 つの円のうち一方が他方の外部にある。

1

(1)　OA∥CB であるから

$\angle OAC = \angle ACB = 24^\circ$



$\angle AOB$ は $\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角であるから

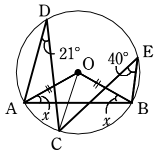
$\angle AOB = 2\angle ACB = 2\times 24^\circ = 48^\circ$

△OAD の内角と外角の性質により

$\angle x = \angle OAD + \angle AOD$

$= 24^\circ + 48^\circ = 72^\circ$

(2)　2点O，Cを結ぶ。



$\angle AOC$ は $\overset{\frown}{AC}$ に対する中心角であるから

$\angle AOC = 2\angle ADC$

$= 2\times 21^\circ = 42^\circ$

$\angle BOC$ は $\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角であるから

$\angle BOC = 2\angle BEC$

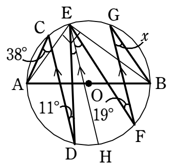
$= 2\times 40^\circ = 80^\circ$

△OAB において

$2\angle x = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - (42^\circ + 80^\circ) = 58^\circ$

よって　$\angle x = 29^\circ$

(3)　円周上に点Hを，CD∥EH となるようにとる。



CD∥EH であるから

$\angle DEH = \angle CDE = 11^\circ$

GF∥EH であるから

$\angle FEH = \angle GFE = 19^\circ$

よって　$\angle DEF = 11^\circ + 19^\circ = 30^\circ$

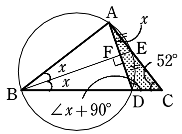
また，$\overset{\frown}{AB}$ は半円の弧であるから　$\angle AEB = 90^\circ$

よって　$\angle ACD + \angle DEF + \angle FGB = 90^\circ$

すなわち　$38^\circ + 30^\circ + \angle x = 90^\circ$

したがって　$\angle x = 22^\circ$

(4)　$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ED}$ であるから



$\angle CBE = \angle ABE = \angle x$

よって，△FBD の内角と外角の性質により

$\angle ADC = \angle x + 90^\circ$

ここで，$\angle EAD$ は，$\overset{\frown}{ED}$ に対する円周角であるから

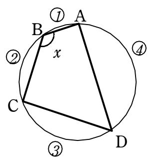
$\angle EAD = \angle EBD = \angle x$

よって，△ADC において

$\angle x + (\angle x + 90^\circ) + 52^\circ = 180^\circ$

これを解いて　$\angle x = 19^\circ$

(5)　$\angle ABC$ は $\overset{\frown}{ADC}$ に対する円周角であるから

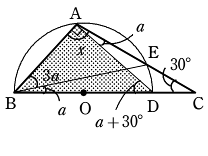


$\angle x = 180^\circ \times \dfrac{3+4}{1+2+3+4}$

$= 180^\circ \times \dfrac{7}{10}$

$= 126^\circ$

(6)　線分AD，BEを引く。



$\overset{\frown}{AE} : \overset{\frown}{ED} = 3:1$ であるから

$\angle ABE = 3\angle EBD$

よって，$\angle EBD = a$ とおくと

$\angle ABE = 3a$

$\angle EAD$ は $\overset{\frown}{ED}$ に対する円周角であるから

$\angle EAD = \angle EBD = a$

△ADC の内角と外角の性質により　$\angle ADB = a + 30^\circ$

また，$\angle BAD = 90^\circ$ であるから，△ABD において

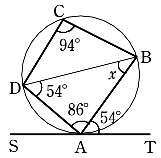
$(3a + a) + (a + 30^\circ) + 90^\circ = 180^\circ$

これを解いて　$a = 12^\circ$

したがって　$\angle x = 90^\circ + 12^\circ = 102^\circ$

2

(1)　接弦定理により



$\angle ADB = \angle BAT = 54^\circ$

四角形ABCD は円に内接するから

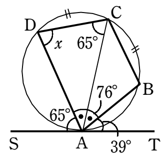
$\angle DAB = 180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$

△ABD において

$\angle x = 180^\circ - (86^\circ + 54^\circ)$

$= 40^\circ$

(2)　2点A，Cを結ぶ。



接弦定理により

$\angle ACD = \angle DAS = 65^\circ$

$\angle ACB = \angle BAT = 39^\circ$

よって　$\angle DAB = 180^\circ - (65^\circ + 39^\circ) = 76^\circ$

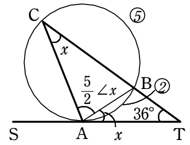
$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{CB}$ から　$\angle DAC = \angle CAB$

よって　$\angle DAC = \dfrac{1}{2}\angle DAB = 38^\circ$

△ACD において

$\angle x = 180^\circ - (38^\circ + 65^\circ) = 77^\circ$

(3)　2点A，Bを結ぶ。



$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} = 2:5$ から

$\angle CAB = \dfrac{5}{2}\angle ACB = \dfrac{5}{2}\angle x$

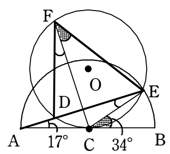
接弦定理により

$\angle BAT = \angle ACB = \angle x$

△ATC において　$\left(\dfrac{5}{2}\angle x + \angle x\right) + 36^\circ + \angle x = 180^\circ$

これを解いて　$\angle x = 32^\circ$

(4)　2点EとC，FとCをそれぞれ結ぶ。



$\angle ECB$ は $\overset{\frown}{EB}$ の中心角であるから

$\angle ECB = 2\angle EAB = 2\times 17^\circ = 34^\circ$

よって，接弦定理により

$\angle CFE = \angle ECB = 34^\circ$

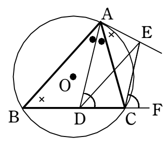
また，△CEA において，CE＝CA であるから

$\angle CEA = \angle CAE = 17^\circ$

$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角により　$\angle DFC = \angle DEC = 17^\circ$

よって　$\angle x = 17^\circ + 34^\circ = 51^\circ$

(5)　AD は ∠A の二等分線であるから



$\angle BAD = \angle CAD = \dfrac{1}{2}\angle A = 29^\circ$

接弦定理により　$\angle CAE = \angle B = 48^\circ$

よって　$\angle DAE = 29^\circ + 48^\circ = 77^\circ$

また，△ABD において，内角と外角の性質から

$\angle ADC = \angle ABD + \angle BAD$

$= 48^\circ + 29^\circ = 77^\circ$

よって　$\angle ADC = \angle DAE$　……①

図のように点Fをとると，AD∥EC であるから

$\angle ADC = \angle ECF$　……②

①，②から　$\angle DAE = \angle ECF$

よって，四角形ADCE は円に内接するから，$\overset{\frown}{CE}$に対する円周角より

$\angle x = \angle CDE = \angle CAE = 48^\circ$

3

(1)　△ABC において　　$\angle ABC = 180^\circ - (50^\circ + 48^\circ) = 82^\circ$

$\overset{\frown}{BQ} = \overset{\frown}{CQ}$ であるから　　$\angle QAC = \dfrac{1}{2}\angle BAC = \dfrac{1}{2}\times 50^\circ = 25^\circ$

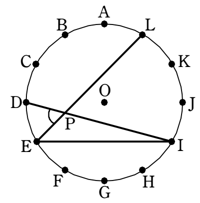
$\overset{\frown}{CR} = \overset{\frown}{AR}$ であるから　　$\angle CBR = \dfrac{1}{2}\angle CBA = \dfrac{1}{2}\times 82^\circ = 41^\circ$

$\overset{\frown}{QC}$ に対する円周角より　$\angle QPC = \angle QAC = 25^\circ$

$\overset{\frown}{CR}$ に対する円周角より　$\angle CPR = \angle CBR = 41^\circ$

よって　　$\angle RPQ = 25^\circ + 41^\circ = 66^\circ$

(2)　円の中心を O とする。



$\angle DIE = \dfrac{1}{2}\angle DOE = \dfrac{1}{2}\times 360^\circ \times \dfrac{1}{12} = 15^\circ$

$\angle IEL = \dfrac{1}{2}\angle IOL = \dfrac{1}{2}\times 360^\circ \times \dfrac{3}{12} = 45^\circ$

よって，△PEI の内角と外角について

$\angle DPE = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$

4

(1) 四角形 $ABFE$ は円 O' に内接しているから

$\angle DAB=69°$

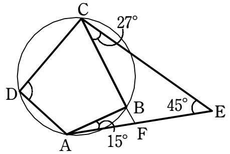
よって，$\triangle ADB$ において

$\angle DBA=180°-(69°+56°)=55°$

四角形 $ACDB$ は円 O に内接しているから

$\angle ACD=180°-55°=125°$

(2) 直線 CB と AE の交点を F とする。



$\triangle CFE$ の内角と外角について

$\angle AFC=27°+45°=72°$

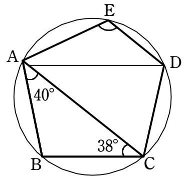
よって，$\triangle AFB$ において

$\angle ABF=180°-(15°+72°)=93°$

四角形 $ABCD$ は円に内接しているから

$\angle CDA=\angle ABF=93°$

(3) A と D を結ぶ。



$AB=CD$ であるから，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ より

$\angle CAD=\angle BCA=38°$

よって　$\angle BAD=40°+38°=78°$

四角形 $ABCD$ は円に内接しているから

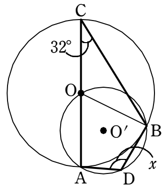
$\angle BCD=180°-78°=102°$

よって　$\angle ACD=102°-38°=64°$

四角形 $ACDE$ は円に内接しているから

$\angle AED=180°-64°=116°$

(4) 円 O の半径 OB を引く。



$\angle AOB$ は，円 O の $\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角であるから

$\angle AOB=2\angle ACB=2\times 32°=64°$

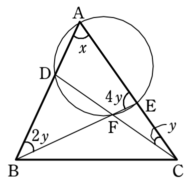
$\angle x$ の頂点を D とすると，四角形 $OADB$ は円 O' に内接しているから

$\angle AOB+\angle ADB=180°$

$64°+\angle x=180°$

よって　$\angle x=116°$

(5) $\angle BAC=x$，$\angle ACD=y$ とおくと，仮定から



$\angle ABE=2\angle ACD=2y$

$\angle AEB=4\angle ACD=4y$

点 A，D，E，F は1つの円周上にあるから

$\angle ADC+\angle AEB=180°$

すなわち　$\angle ADC+4y=180°$

よって　$\angle ADC=180°-4y$

$\triangle ABE$ の内角の和が $180°$ であるから

$x+2y+4y=180°$

すなわち　$x+6y=180°$　……①

$\triangle ADC$ の内角の和が $180°$ であるから

$x+y+(180°-4y)=180°$

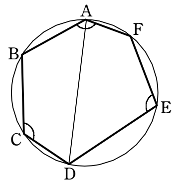
すなわち　$x-3y=0°$　……②

①，②を解くと　$x=60°$，$y=20°$

したがって　$\angle BAC=60°$

5

(1) A と D を結ぶ。



四角形 $ABCD$ は円に内接しているから

$\angle C+\angle BAD=180°$

四角形 $ADEF$ も円に内接しているから

$\angle E+\angle FAD=180°$

このとき

$\angle A+\angle C+\angle E=(\angle BAD+\angle FAD)+\angle C+\angle E$

$=(\angle C+\angle BAD)+(\angle E+\angle FAD)$

$=180°+180°=360°$

(2) A と D，A と F をそれぞれ結ぶ。

四角形 $ABCD$ は円に内接しているから

$\angle BAD+\angle c=180°$　……①

四角形 $ADEF$ は円に内接しているから

$\angle DAF+\angle e=180°$　……②

四角形 $AFGH$ は円に内接しているから

$\angle FAH+\angle g=180°$　……③

$\angle a=\angle BAD+\angle DAF+\angle FAH$ であるから，①，②，③ より

$\angle a+\angle c+\angle e+\angle g=(\angle BAD+\angle c)+(\angle DAF+\angle e)+(\angle FAH+\angle g)$

$=180°+180°+180°=540°$

6

(1) $\triangle ABD$ において　$\angle ABD=180°-(90°+56°)=34°$

$\angle BEC=\angle BDC=90°$ で，$BM=MC$ であるから，4点 B，C，D，E は，BC を直径，M を中心とする円周上にある。

よって，$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角と中心角の関係から

$\angle EMD=2\angle EBD=2\times 34°=68°$

(2) $\angle ADB$，$\angle ACB$ は半円の弧に対する円周角であるから

$\angle ADB=90°$，$\angle ACB=90°$

$\triangle ACP$ の内角と外角について

$\angle PAC+\angle APC=\angle ACB$

$\angle PAC+66°=90°$

$\angle PAC=24°$

よって，$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角より　$\angle CBD=\angle CAD=24°$

$\angle ADE=\angle EQA=90°$ であるから，四角形 $ADEQ$ は円に内接する。

その円の $\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角より　$\angle DQE=\angle DAE=24°$

また，$\angle BCE=\angle EQB=90°$ であるから，四角形 $BCEQ$ は円に内接する。

その円の $\overset{\frown}{CE}$ に対する円周角より　$\angle CQE=\angle CBE=24°$

したがって

$\angle CQD=\angle CQE+\angle DQE$

$=24°+24°=48°$

(3) AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$$\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 56°=28°$$

接線と弦のつくる角の定理により

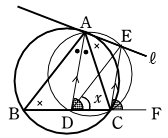
$\angle CAE=\angle ABC=52°$

よって　$\angle DAE=28°+52°=80°$

また，$\triangle ABD$ において，内角と外角の関係により

$\angle ADC=\angle ABD+\angle BAD=52°+28°=80°$

ゆえに　$\angle ADC=\angle DAE$　……①



図のように BC の延長に点 F をとると，$AD /\!/ EC$ より

$\angle ADC=\angle ECF$　……②

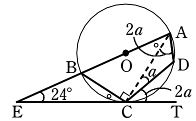
①，② より　$\angle DAE=\angle ECF$

よって，四角形 $ADCE$ は，頂点 C の外角がそれと隣り合う内角の対角に等しいから，円に内接する。

したがって　$\angle x=\angle CDE=\angle CAE=52°$

7

(1) $\angle BCE=x$ とおく。



接線と弦のつくる角の定理により

$\angle EAC=\angle BCE=x$

AB は円の直径であるから　$\angle ACB=90°$

よって，$\triangle AEC$ の内角について

$24°+x+(90°+x)=180°$

$x=33°$

したがって　$\angle BCE=33°$

(2) $\angle ACD=a$ とおく。

$\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{CD}=1:2$ より　$\angle CAD=2\angle ACD=2a$

また，接線と弦のつくる角の定理により　$\angle DCT=\angle CAD=2a$

よって，点 C における角について

$33°+90°+a+2a=180°$

$a=19°$

したがって　$\angle DCT=2\times 19°=38°$

8

$\angle ACB=180°-(52°+63°)=65°$

(1) $\angle APB=\angle ACB$ であるから，点 P は，円 O の周上にある。

(2) $\angle APB>\angle ACB$ であるから，点 P は，円 O の内部にある。

(3) $\angle APB<\angle ACB$ であるから，点 P は，円 O の外部にある。

9

$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$ であるから　$\angle BAD=\angle CAD$

よって，AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$BE:EC=AB:AC=5:4$

したがって　$BE=6\times\dfrac{5}{5+4}=\dfrac{10}{3}$ (cm)

10

$\triangle OAP$ と $\triangle OCQ$ において

四角形 $APOQ$ は円に内接しているから

$\angle APO=\angle CQO$　……①

$\triangle ABO$ と $\triangle ACO$ は3組の辺がそれぞれ等しいから

$\triangle ABO\equiv\triangle ACO$

よって，$\triangle ABO$ と $\triangle ACO$ はともに直角二等辺三角形で

$AO=CO$　……②

$\angle OAP=\angle OCQ\ (=45°)$　……③

①，③ より，残りの角も等しいから

$\angle AOP=\angle COQ$　……④

②，③，④ より，1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OAP\equiv\triangle OCQ$

$\boxed{11}$

△ECB と △FDB において

円 O′ の $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角より

∠CEB＝∠DFB ……①

円 O の $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角より

∠ACB＝∠ADB

よって　∠ECB＝∠FDB ……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ECB∽△FDB

$\boxed{12}$

(1) △DAE と △DCF において

対頂角は等しいから

∠ADE＝∠CDF ……①

3 点 A，C，E を通る円の $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ に対する円周角より

∠DEA＝∠DFC ……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△DAE∽△DCF

(2) △BCE と △DCF において

四角形 ABCD は円に内接しているから

∠EBC＝∠FDC ……③

② より　∠BEC＝∠DFC ……④

③，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△BCE∽△DCF

$\boxed{13}$

(1) 証明　△ACE と △BCD において

△ABC，△DCE は正三角形であるから

AC＝BC ……①

CE＝CD ……②

∠ACB＝∠DCE＝60°

また　∠ACE＝∠DCE＋∠ACD

＝60°＋∠ACD

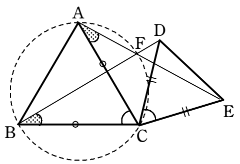
∠BCD＝∠ACB＋∠ACD

＝60°＋∠ACD

よって　∠ACE＝∠BCD ……③

①，②，③ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ACE≡△BCD　終



(2) 証明　△ACE≡△BCD であるから　∠EAC＝∠DBC

したがって，2 点 A，B は直線 FC の同じ側にあり，∠FAC＝∠FBC である。

よって，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，F は 1 つの円周上にある。　終

$\boxed{14}$

P と D を結ぶ。

四角形 BDPF は円に内接しているから

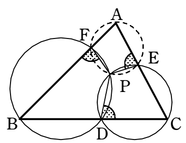
∠BFP＝∠CDP …… ①

四角形 DCEP は円に内接しているから

∠AEP＝∠CDP …… ②

①，② から　∠BFP＝∠AEP

よって，四角形 AFPE は円に内接する。　終



$\boxed{15}$

四角形 ABCD は円に内接しているから

∠BCD＝∠EAD

△ADE の外接円において，$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$ に対する円周角より

∠EAD＝∠EGD

したがって　∠EGD＝∠FCD

よって，四角形 DGFC は，頂点 G の外角がそれと隣り合う内角の対角に等しいから，円に内接する。

$\boxed{16}$

△EBD は二等辺三角形であるから

∠EBD＝∠EDB＝a

とおける。

四角形 BDQP は円に内接しているから

∠APQ＝∠BDQ＝a

四角形 APQC は円に内接しているから

∠ACE＝∠APQ＝a

よって　∠ABD＝∠ACE＝a

したがって，四角形 ABDC において，1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しいから，円に内接する。

$\boxed{17}$

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$$

内接円の中心を I とし，半径を r とする。

△ABC の面積について

△ABC＝△IAB＋△IBC＋△ICA

$$6=\frac{1}{2}\times5\times r+\frac{1}{2}\times4\times r+\frac{1}{2}\times3\times r$$

これを解いて　$r=1$

よって，内接円の半径は　1

別解　内接円の中心を I とし，内接円と辺 AB，BC，CA との接点をそれぞれ P，Q，R とする。

∠QCR＝∠IQC＝∠IRC＝90° であるから

∠QIR＝360°－(90°＋90°＋90°)＝90°

よって，四角形 IQCR は長方形である。

また，CQ＝CR であるから，四角形 IQCR は正方形である。

したがって，内接円の半径を r とすると

CQ＝CR＝r

AP＝AR＝$3-r$

BP＝BQ＝$4-r$

AB＝5 から　AP＋BP＝5

$(3-r)+(4-r)=5$

$r=1$

よって，内接円の半径は　1

$\boxed{18}$

右の図のように，ℓ 上に E をとる。

△ABC と △DBA において

∠ABC＝∠DBA（共通）……①

接線と弦のつくる角の定理により

∠BAC＝∠CBE

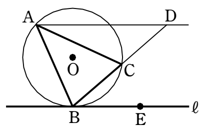
AD∥BE であるから

∠BDA＝∠CBE

よって　∠BAC＝∠BDA ……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△DBA



$\boxed{19}$

接線と弦のつくる角の定理により

∠BAP＝∠BCA

仮定から　∠APQ＝∠CPR

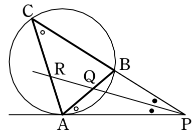
△APQ の内角と外角について

∠AQR＝∠BAP＋∠APQ

△CPR の内角と外角について

∠ARQ＝∠BCA＋∠CPR

よって　∠AQR＝∠ARQ



したがって，△AQR は ∠AQR＝∠ARQ の二等辺三角形で，AQ＝AR である。

$\boxed{20}$

(1) 2 つの円が外接するとき　$13=r+5$　よって　$r=8$

(2) 2 つの円が異なる 2 点で交わるとき　$r-5<13<r+5$

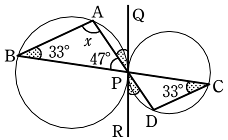
$r-5<13$ を解いて　$r<18$

$13<r+5$ を解いて　$8<r$

よって　$8<r<18$

1

(1) 点Pを通る共通接線QRを引く。



接弦定理により

$\angle DCP=\angle DPR$

対頂角は等しいから

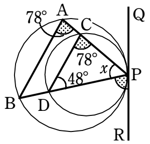
$\angle DPR=\angle APQ$

接弦定理により　$\angle APQ=\angle ABP$

よって　$\angle ABP=\angle DCP=33°$

△ABPにおいて　$\angle x=180°-(33°+47°)=100°$

(2) 点Pを通る共通接線QRを引く。



大きい方の円において，接弦定理により

$\angle BPR=\angle BAP$

小さい方の円において，接弦定理により

$\angle DPR=\angle DCP$

よって　$\angle DCP=\angle BAP=78°$

△PCDにおいて　$\angle x=180°-(78°+48°)=54°$

2

(1) △ABEと△DCEにおいて

対頂角は等しいから　$\angle AEB=\angle DEC$

$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角より　$\angle BAE=\angle CDE$

よって，2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABE \backsim \triangle DCE$

したがって　$BE:CE=AB:DC=3:2$　……①

同様に，$\triangle AED \backsim \triangle BEC$から　$DE:CE=AD:BC=1:2$　……②

①，②から　$BE:ED=3:1$

(2) $\triangle ABE \backsim \triangle DCE$から　$\triangle ABE:\triangle DCE=3^2:2^2=9:4$

また，$BD:ED=4:1$であるから　$\triangle BCD:\triangle DCE=4:1=16:4$

したがって　$\triangle ABE:\triangle BCD=9:16$

(3) △ABEと△DBCにおいて

$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角より　$\angle BAE=\angle BDC$

$DA=CD$より，$\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{CD}$であるから

$\angle ABE=\angle DBC$

よって，2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABE \backsim \triangle DBC$

(2)より，$\triangle ABE:\triangle DBC=9:16$であるから，相似比は3：4で

$AB:DB=3:4$

$9:DB=3:4$

$DB=12$ cm

したがって　$DE=12\times\dfrac{1}{3+1}=3$(cm)

3

$\angle DAB=\angle DAC$，$\angle DAB=\angle DBE$から　$\angle DAC=\angle DBE$

よって，2点A，Bは直線ECについて同じ側にあり，$\angle EAC=\angle EBC$であるから，4点A，B，E，Cは1つの円周上にある。

このとき，$\overset{\frown}{BE}$に対する円周角より　$\angle BCE=\angle BAE$

よって，$\angle CBE=\angle BCE$となるから　$BE=CE$

また，$BE=EF$であるから　$BE=CE=EF$

したがって，点Cは線分BFを直径，点Eを中心とする円周上にある。

よって　$\angle BCF=90°$

4

(1) 円周角の定理により　$\angle PAB=\dfrac{1}{2}\angle POB$

すなわち　$\angle QAC=\dfrac{1}{2}\angle POC$

CQは∠ACPの二等分線であるから

$\angle QCA=\dfrac{1}{2}\angle PCO$

したがって　$\angle QAC+\angle QCA=\dfrac{1}{2}(\angle POC+\angle PCO)$

△POCにおいて，$\angle CPO=90°$であるから

$\angle POC+\angle PCO=180°-90°=90°$

よって　$\angle QAC+\angle QCA=\dfrac{1}{2}\times 90°=45°$

(2) △PQCと△BRCにおいて

CQは∠ACPの二等分線であるから

$\angle QCP=\angle RCB$　……①

△QACにおいて，(1)の結果により

$\angle PQC=45°$　……②

また，△PQRにおいて，∠APBは半円の弧に対する円周角であるから

$\angle QPR=90°$

よって　$\angle PRQ=180°-(90°+45°)=45°$

対頂角は等しいから　$\angle BRC=45°$　……③

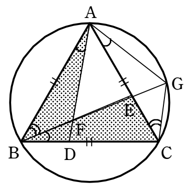
②，③から　$\angle PQC=\angle BRC$　……④

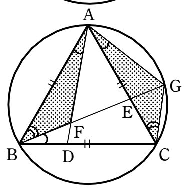
①，④より，2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle PQC \backsim \triangle BRC$

5

証明　△ABDと△BCEにおいて





仮定から　$AB=BC$　……①

$BD=CE$　……②

$\angle ABD=\angle BCE$　……③

①，②，③より，2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \equiv \triangle BCE$　……④

△ABFと△ACGにおいて

仮定から　$AB=AC$　……⑤

④から　$\angle BAF=\angle CBG$

$\overset{\frown}{CG}$に対する円周角より

$\angle CBG=\angle CAG$

よって　$\angle BAF=\angle CAG$　……⑥

$\overset{\frown}{AG}$に対する円周角より

$\angle ABF=\angle ACG$　……⑦

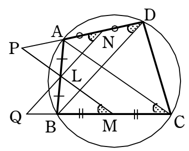
⑤，⑥，⑦より，1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF \equiv \triangle ACG$

したがって　$BF=CG$　終

6

証明　△ABDにおいて，点L，Nはそれぞれ辺AB，ADの中点であるから，中点連結定理により



$LN /\!/ BD$

よって　$\angle ANL=\angle ADB$　……①

また，△BCAにおいて，点M，Lはそれぞれ辺BC，BAの中点であるから，中点連結定理により

$ML /\!/ CA$

よって　$\angle BML=\angle BCA$　……②

また，∠ADBと∠BCAは$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角であるから

$\angle ADB=\angle BCA$　……③

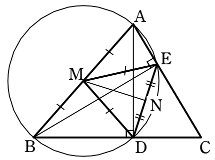
①，②，③から　$\angle ANL=\angle BML$

したがって，2点N，Mは直線PQの同じ側にあり，$\angle PNQ=\angle PMQ$である。

よって，円周角の定理の逆により，4点M，N，P，Qは1つの円周上にある。　終

7

証明　∠ADBは直角であるから，3点A，D，BはABを直径とする円周上にある。



また，∠AEBは直角であるから，3点A，E，BはABを直径とする円周上にある。

よって，4点A，B，D，EはABを直径とする円周上にある。

その円において，MD，MEは半径であるから，

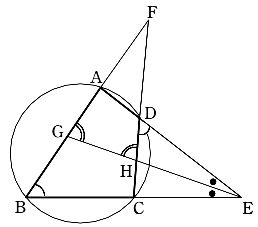
△MDEは$MD=ME$の二等辺三角形である。

ゆえに，点Nは辺DEの中点であるから，線分MNは，頂点Mから底辺DEへ引いた二等辺三角形MDEの中線である。

したがって，$MN \perp DE$である。　終

8

証明　△BEGにおいて，内角と外角の性質から



$\angle FGH=\angle GBE+\angle BEG$

△HEDにおいて，内角と外角の性質から

$\angle FHG=\angle EDH+\angle DEH$

四角形ABCDは円に内接するから

$\angle GBE=\angle EDH$

また，GEは∠Eの二等分線であるから

$\angle BEG=\angle DEH$

したがって　$\angle FGH=\angle FHG$　終

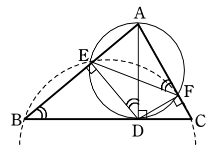
9

(1) 証明　$\angle AED=90°$，$\angle DFA=90°$であるから

$\angle AED+\angle DFA=90°+90°=180°$

よって，4点A，E，D，Fは1つの円周上にある。　終

(2) 証明　(1)から，右の図のような4点A，E，D，Fを通る円がかける。



その円において，$\overset{\frown}{AE}$に対する円周角より

$\angle AFE=\angle ADE$　……①

△ABDにおいて

$\angle ABD=180°-(90°+\angle BAD)$

$=90°-\angle BAD$

△ADEにおいて

$\angle ADE=180°-(90°+\angle EAD)=90°-\angle BAD$

よって　$\angle ABD=\angle ADE$　……②

①，②から　$\angle AFE=\angle ABD$

したがって，4点B，C，F，Eは1つの円周上にある。　終

10

証明　線分 BE，CD を引く。

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AE}$ であるから　　$\angle ACD=\angle FBE$

$\overset{\frown}{BD}$ に対する円周角より　$\angle BCD=\angle BEF$

よって　　$\angle GCB=\angle ACD+\angle BCD$

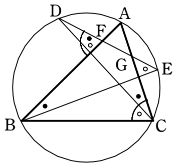
$=\angle FBE+\angle BEF$

△FBE の内角と外角の性質から

$\angle FBE+\angle BEF=\angle BFD$

したがって　　$\angle GCB=\angle BFD$

よって，四角形 FBCG は円に内接する。 終



11

(1)　証明　点 Q は △CDA の重心であるから，線分 CD の中点を F とすると

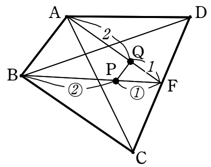
FQ : QA＝1 : 2

また，点 P は △BCD の重心であるから

FP : PB＝1 : 2

よって　　FQ : QA＝FP : PB

したがって　　AB∥QP　終



(2)　証明　(1) と同じようにして，BC∥RQ，CD∥SR，DA∥PS が成り立つ。

よって，AB∥QP，DA∥PS であるから

$\angle DAB=\angle SPQ$　　…… ①

また，BC∥RQ，CD∥SR であるから

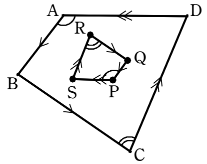
$\angle BCD=\angle QRS$　　…… ②

四角形 ABCD が円に内接しているから

$\angle DAB+\angle BCD=180°$

よって，①，②から　$\angle SPQ+\angle QRS=180°$

したがって，4 点 P，Q，R，S は 1 つの円周上にある。　終



12

(1)　△OAP は底角が 60° の二等辺三角形であるから，正三角形であり

OA＝PA　　　　…… ①

∠APB は半円の弧に対する円周角であるから

$\angle APB=90°$

PA＝PQ より，△PAQ は直角二等辺三角形である。

① より，△OAD と △PAQ は合同な直角二等辺三角形である。

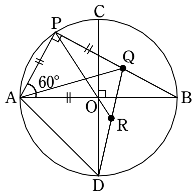
したがって　　AD＝AQ　　　　…… ②

∠PAQ＝45° であるから

$\angle QAB=60°-45°=15°$

よって　$\angle QAD=15°+45°=60°$　…… ③

②，③ より，△ADQ は頂角が 60° の二等辺三角形であるから，正三角形である。



(2)　△OAP，△ADQ がともに正三角形であるから

$\angle APR=\angle AQR\ (=60°)$

このことと，2 点 P，Q が直線 AR について同じ側にあることから，4 点 A，P，Q，R は 1 つの円周上にある。

すなわち，四角形 APQR は円に内接する。

(3)　(2) より　$\angle ARQ=180°-\angle APQ=180°-90°=90°$

△ADQ は正三角形であり，正三角形において，頂点から底辺に引いた垂線は底辺を 2 等分するから，R は線分 QD の中点である。

13

∠A 内の傍接円をかく。辺 AB，AC の延長との接点をそれぞれ D，E とし，辺 BC との接点を F とする。

AD，AE は円 I_1 の接線であるから

$\angle AI_1D=\angle AI_1E$

よって　　$\angle AI_1D=\dfrac{1}{2}\angle DI_1E$　　…… ①

BD，BF，CE，CF は円 I_1 の接線であるから

$\angle BI_1D=\angle BI_1F$，　$\angle CI_1E=\angle CI_1F$

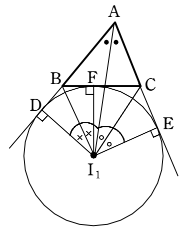
よって　　$\angle BI_1C=\dfrac{1}{2}\angle DI_1E$　　…… ②

①，② から　$\angle BI_1C=\angle AI_1D$

$\triangle AI_1D$ において

$\angle AI_1D=180°-\left(\dfrac{1}{2}\angle A+90°\right)=90°-\dfrac{1}{2}\angle A$

したがって　$\angle BI_1C=90°-\dfrac{1}{2}\angle A$　　答



14

$\angle BAC=2a$，$\angle ABC=2b$ とおくと

$\angle BAI=\angle CAI=a$，$\angle ABI=\angle CBI=b$

(1)　△ABI の内角と外角について

$\angle BID=\angle BAI+\angle ABI=a+b$

$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角より

$\angle CBD=\angle CAI=a$

よって　　$\angle DBI=a+b$

したがって，∠BID＝∠DBI より，△DBI は DB＝DI の二等辺三角形である。

(2)　$\angle CBE=2k$ とおくと

$\angle CBI_1=\angle EBI_1=k$

このとき　$\angle DBI_1=\angle CBI_1-\angle CBD=k-a$

$\triangle ABI_1$ の内角と外角について

$\angle BI_1A=\angle EBI_1-\angle BAI_1=k-a$

すなわち　$\angle BI_1D=k-a$

したがって，$\angle DBI_1=\angle BI_1D$ より，$\triangle BI_1D$ は $DB=DI_1$ の二等辺三角形である。

(1) より，DB＝DI であるから　　$DI=DI_1$

15

(1)　△ABC と △BDE において

仮定から　　AB＝BD

接線と弦のつくる角の定理により

$\angle BAC=\angle DBE$

AB∥DE であるから

$\angle ABC=\angle BDE$

よって，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

△ABC≡△BDE

(2)　DE と FC の交点を G とする。

BD＝AB＝8 cm，BC＝5 cm から

DC＝3 cm

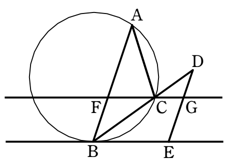
また，(1) の結果により

DE＝BC＝5 cm

CG∥BE であるから

DG : GE＝DC : CB＝3 : 5

$GE=5\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{25}{8}$ (cm)



四角形 FBEG は 2 組の対辺がそれぞれ平行であるから，平行四辺形である。

よって　　$FB=GE=\dfrac{25}{8}$ cm

したがって　$AF=8-\dfrac{25}{8}=\dfrac{39}{8}$ (cm)

16

点 B と点 P，A，Q をそれぞれ結ぶ。

CP は △PBA の外接円の接線であるから

$\angle CPA=\angle ABP$

CQ は △QBA の外接円の接線であるから

$\angle CQA=\angle ABQ$

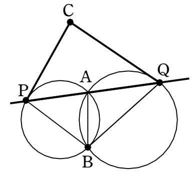
したがって

$\angle PCQ+\angle PBQ=\angle PCQ+\angle CPA+\angle CQA$

$=180°$

よって，四角形 CPBQ は 1 組の対角の和が 180° であるから，円に内接する。

すなわち，4 点 B，C，P，Q は 1 つの円周上にある。



17

直線 CA と円 O との交点を D とする。

直線 BC は円 O の接線であるから，接弦定理により

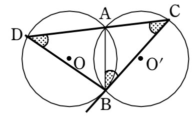
$\angle ABC=\angle ADB$　…… ①

円 O と円 O′ の半径は等しいから，

$\angle ACB=\angle ADB$　…… ②

①，② から　$\angle ABC=\angle ACB$

ゆえに，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形である。終



18

△DAC と △DCB において　　　　$\angle ADC=\angle CDB$ （共通）　…… ①

接線と弦のつくる角の定理により　　$\angle CAD=\angle BCD$　　　　…… ②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから　　△DAC∽△DCB

また，方べきの定理により

$DB\times DA=DC^2$

$4\times(4+6\times2)=DC^2$

DC＞0 であるから　　DC＝8

△DAC∽△DCB より

AC : CB＝DC : DB＝8 : 4＝2 : 1

19

点 P を通る円 O の直径の両端を，それぞれ C，D とすると，方べきの定理により

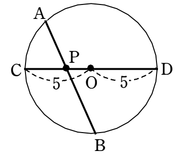
$PC\times PD=PA\times PB$

すなわち　　　$(5-OP)\times(5+OP)=21$

よって　　　$25-OP^2=21$

したがって　　$OP^2=4$

OP＞0 であるから　OP＝2 cm



20

右の図のように，PO と円 O との交点を C，D とする。

このとき，方べきの定理により

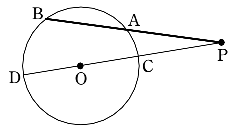
$PA\times PB=PC\times PD$

ここで，PC＝PO－OC，PD＝PO＋OD から

$PA\times PB=(PO-OC)\times(PO+OD)$

$=(PO-r)(PO+r)$

$=PO^2-r^2$

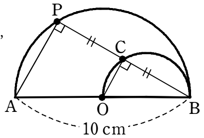


1

(1)　線分 AB の中点を O とすると　$OB=5\,\text{cm}$

中点連結定理により $\angle OCB=\angle APB=90^\circ$ であるから，円周角の定理の逆により，点 C は線分 OB を直径とする円周上を動く。

点 P が A と一致するとき C は O と重なり，点 P が B と一致するとき C は B と重なる。



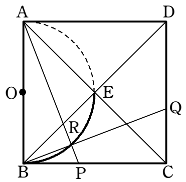
よって，点 C の軌跡は，線分 OB を直径とする円の $\overset{\frown}{OB}$ である。

したがって，求める長さは　$\pi\times5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}\pi\,(\text{cm})$

(2)　辺 AB は一定で，$\angle ARB=90^\circ$ であるから，円周角の定理の逆により，点 R は辺 AB を直径とする円周上を動く。

辺 AB の中点を O，正方形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を E とする。

点 P が B と一致するとき R は B と重なり，点 P が C と一致するとき R は E と重なる。



よって，点 R の軌跡は，円 O の $\overset{\frown}{BE}$ である。

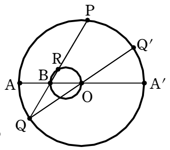
$\angle BOE=90^\circ$ であるから，求める長さは　$\pi\times5\times\dfrac{90}{360}=\dfrac{5}{4}\pi$

(3)　直線 OQ と円 O との交点で，Q とは異なる点を Q′ とする。

中点連結定理により　$\angle QRO=\angle QPQ'=90^\circ$

線分 OB は一定で，$\angle BRO=90^\circ$ であるから，円周角の定理の逆により，点 R は線分 OB を直径とする円周上を動く。

点 P が A と一致するとき R は O と重なり，点 P が $PQ\perp OA$ となる位置にいるとき R は B と重なり，点 P が A′ と一致するとき R は O と重なる。



よって，点 P が $\overset{\frown}{AA'}$ 上を動いたとき，点 R の軌跡の長さは，OB を直径とする円の 1 周分である。

したがって，求める長さは　2π

2

半直線 AI_1 は，△ABC の ∠A の二等分線であり，半直線 AI_2 は，△ABC の ∠A の外角の二等分線である。

内角と外角の和は 180° であるから　$\angle I_1AC+\angle I_2AC=\dfrac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$　…… ①

同様に　$\angle I_1AB+\angle I_3AB=90^\circ$ もわかる。

よって，3 点 I_2，A，I_3 は一直線上にある。

ゆえに，① より　$I_1A\perp I_2I_3$　…… ②

同様に　$I_2B\perp I_3I_1$　…… ③

$I_3C\perp I_1I_2$　…… ④

したがって，②，③，④ より，I は $\triangle I_1I_2I_3$ の垂心となる。

3

△ABC において，AI，BI，CI はそれぞれ，∠A，∠B，∠C の二等分線であるから

$\angle IAB=\dfrac{1}{2}\angle A,\quad \angle IBA=\dfrac{1}{2}\angle B,\quad \angle ICB=\dfrac{1}{2}\angle C$

よって　$\angle IAB+\angle IBA+\angle ICB=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=90^\circ$

このとき，△IAB において

$\angle IAB+\angle IBA=\angle AIB'$

また，$\overset{\frown}{C'B}$ に対する円周角より

$\angle ICB=\angle IB'C'$

したがって，AI と B′C′ の交点を A″ とすると，

△IA″B′ において

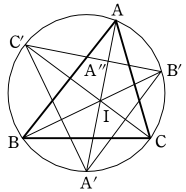
$\angle A''IB'+\angle A''B'I$

$=\angle IAB+\angle IBA+\angle ICB=90^\circ$

よって，$\angle IA''B'=90^\circ$ から　$IA\perp B'C'$

同様にして　$IB\perp C'A'$，$IC\perp A'B'$

したがって，I は △A′B′C′ の垂心である。



4

直線 AD と BC の交点を E とする。

このとき，OC∥AE で，BO : OA＝1 : 1 であるから

BC : CE＝1 : 1

よって　$CE=3\,\text{cm}$

△OBC と △CDE において

四角形 ABCD は円に内接しているから

∠OBC＝∠CDE

OC∥AE であるから　∠OCB＝∠CED

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

△OBC∽△CDE

したがって　OC : CE＝BC : DE

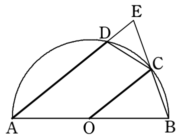
OC は半円の半径であるから

$\dfrac{9}{2}:3=3:DE$

$DE=2\,\text{cm}$

OC : AE＝1 : 2 であるから　$AE=9\,\text{cm}$

よって　$AD=9-2=7\,(\text{cm})$



5

(1)　線分 CD 上に点 E を，BC＝CE …… ① となるようにとる。

△BCE は BC＝BE の二等辺三角形であるから

$\angle BEC=\angle BCE=50^\circ+30^\circ=80^\circ$

$\angle CBE=180^\circ-2\times80^\circ=20^\circ$

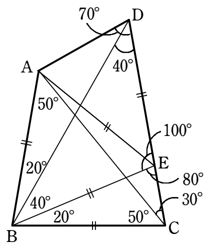
よって　$\angle DBE=60^\circ-20^\circ=40^\circ$

ここで，△ABC において

$\angle BAC=180^\circ-\{(20^\circ+60^\circ)+50^\circ\}$

$=50^\circ$

よって，△ABC において ∠BAC＝∠BCA であるから　BA＝BC …… ②



①，② より，BA＝BE となるから，△BAE は二等辺三角形である。

また，$\angle ABE=20^\circ+40^\circ=60^\circ$ であるから，△BAE は正三角形である。

よって　EA＝EB　…… ③

ここで，△CBD において

$\angle BDC=180^\circ-\{60^\circ+(50^\circ+30^\circ)\}=40^\circ$

よって，△EBD において ∠EDB＝∠EBD であるから　ED＝EB …… ④

③，④ より，ED＝EA であるから，△EDA は二等辺三角形である。

よって　$2\angle ADE=180^\circ-\angle AED$　…… ⑤

ここで　$\angle BED=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

また，△BAE は正三角形であるから　$\angle AEB=60^\circ$

よって　$\angle AED=100^\circ-60^\circ=40^\circ$

したがって，⑤ から　$\angle ADE=\dfrac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ$

よって　$\angle x=\angle ADE-\angle BDC=70^\circ-40^\circ=30^\circ$

(2)　線分 BD 上に点 O を，BO＝CO となるようにとり，点 O を中心，OB を半径とする円 O をかく。

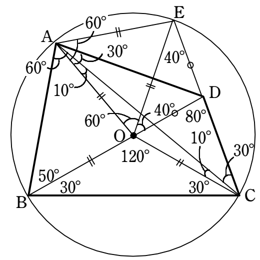
△OBC は OB＝OC の二等辺三角形であるから　∠OCB＝∠OBC＝30°

$\angle BOC=180^\circ-2\times30^\circ=120^\circ$　…… ①

ここで，△ABC において

$\angle BAC=180^\circ-\{(50^\circ+30^\circ)+40^\circ\}$

$=60^\circ$　…… ②



①，② より，$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$ であるから，∠BAC は円 O の $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角に等しい。

よって，点 A は円 O 上の点である。

ここで，線分 CD の延長と円 O の交点を E とすると　OA＝OE

また，∠AOE は円 O の $\overset{\frown}{AE}$ に対する中心角であるから

$\angle AOE=2\angle ACE=2\times30^\circ=60^\circ$

よって，△OAE は正三角形であるから　AE＝AO　…… ③

また，△OCE は OC＝OE の二等辺三角形であるから

$\angle OED=\angle OCD=\angle OCA+\angle DCA$

$=(40^\circ-30^\circ)+30^\circ=40^\circ$　…… ④

△DBC において　$\angle BDC=180^\circ-\{30^\circ+(30^\circ+40^\circ)\}=80^\circ$

また，△DEO の内角と外角の性質により　$\angle DOE=80^\circ-40^\circ=40^\circ$　…… ⑤

④，⑤ より，△DEO において ∠OED＝∠DOE であるから　DE＝DO …… ⑥

また　AD＝AD （共通） …… ⑦

③，⑥，⑦ から，△AED と △AOD において，3 組の辺がそれぞれ等しいから

△AED≡△AOD

よって　$\angle EAD=\angle OAD=\dfrac{1}{2}\angle OAE=\dfrac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$

また，△OAC において OA＝OC であるから　∠OAC＝∠OCA＝10°

したがって　$\angle x=\angle OAD-\angle OAC=30^\circ-10^\circ=20^\circ$

$\boxed{6}$

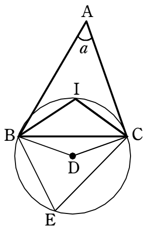
$\angle BAC=a$ とおく。

BI，CI はそれぞれ，∠ABC，∠BCA の二等分線であるから

$$\angle IBC+\angle ICB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCA)=\frac{1}{2}(180^\circ-a)=90^\circ-\frac{a}{2}$$

よって，△IBC において

$$\angle BIC=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)=90^\circ+\frac{a}{2}$$



△IBC の外接円 D において，I を含まない方の $\overset{\frown}{BC}$ 上に E をとる。

四角形 BECI は円に内接するから

$$\angle BEC=180^\circ-\left(90^\circ+\frac{a}{2}\right)=90^\circ-\frac{a}{2}$$

$\overset{\frown}{BIC}$ に対する円周角と中心角の関係から

$$\angle BDC=2\times\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)=180^\circ-a$$

ゆえに　$\angle BAC+\angle BDC=180^\circ$

したがって，四角形 ABDC は，1 組の対角の和が 180° であるから，円に内接する。

よって，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

$\boxed{7}$

(1)　$\angle PEC=\angle PFC=90^\circ$

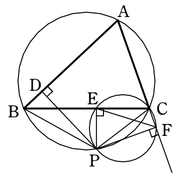
であるから，四角形 CEPF は円に内接する。

したがって　$\angle PEF=\angle PCF$

また，四角形 ABPC は円に内接しているから

$\angle PBD=\angle PCF$

よって　$\angle PBD=\angle PEF$



(2)　$\angle BDP=\angle BEP=90^\circ$ であるから，四角形 DBPE は円に内接する。

よって　$\angle PBD+\angle PED=180^\circ$

これと (1) の結果から

$\angle PEF+\angle PED=180^\circ$

したがって，3 点 D，E，F は一直線上にある。

$\boxed{8}$

(1)　証明　△ABH において，点 F，L はそれぞれ辺 AB，AH の中点であるから，中点連結定理により

FL∥BH

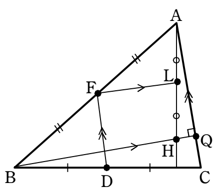
また，△ABC において，点 F，D はそれぞれ辺 BA，BC の中点であるから，中点連結定理により

FD∥AC

点 H は △ABC の垂心であるから

BH⊥AC

よって　FL⊥FD　……①　終



(2)　証明　△ACH において，点 L，E はそれぞれ辺 AH，AC の中点であるから，中点連結定理により

EL∥CH

また，△ABC において，点 E，D はそれぞれ辺 CA，CB の中点であるから，中点連結定理により

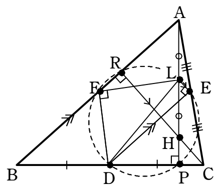
ED∥AB

点 H は △ABC の垂心であるから

CH⊥AB

よって　EL⊥ED　……②

また　$\angle DPL=90^\circ$　……③



①，②，③ から，点 F，E，P は，DL を直径とする円周上にある。

したがって，5 つの点 L，F，D，P，E は 1 つの円周上にある。　終

(3)　証明　(1)，(2) と同じように考えると

[1]　FM⊥FE，　DM⊥DE，　$\angle EQM=90^\circ$

よって，点 F，D，Q は EM を直径とする円周上にある。

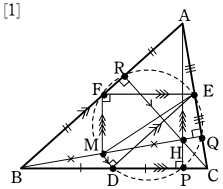
したがって，5 つの点 M，D，Q，E，F は 1 つの円周上にある。

[2]　DN⊥DF，　EN⊥EF，　$\angle FRN=90^\circ$

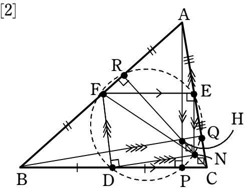
よって，点 D，E，R は FN を直径とする円周上にある。

したがって，5 つの点 N，E，R，F，D は 1 つの円周上にある。

[1]



[2]



(2) の直径 DL の円，[1] の直径 EM の円，[2] の直径 FN の円はすべて 3 点 D，E，F を通る。

3 点 D，E，F を通る円は 1 つしかないから，3 つの円は一致する。

したがって，9 つの点 P，Q，R，D，E，F，L，M，N は 1 つの円周上にある。　終

$\boxed{9}$

右の図のように，AC と円 O′ の交点を F とする。

また，2 つの円の共通接線を GH とする。

このとき，△AFB と △ABD において

接線と弦のつくる角の定理により

$\angle AFB=\angle ABD$　……①

また，$\angle GAF=\angle ABF$，$\angle GAC=\angle ADB$ から

$\angle ABF=\angle ADB$　……②

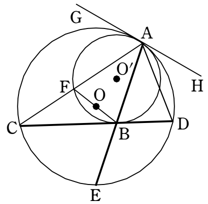
①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△AFB∽△ABD

したがって，$\angle FAB=\angle BAD$ から

$\angle COE=\angle EOD$

よって　$\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{ED}$



$\boxed{10}$

証明　小さい方の円と線分 AB，AC との交点をそれぞれ E，F とする。

また，点 A を通る共通接線を引き，共通接線上の右の図のような位置に点 G をとる。

小さい方の円において，接弦定理により

$\angle GAE=\angle AFE$

大きい方の円において，接弦定理により

$\angle GAE=\angle ACB$

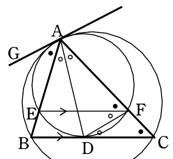
よって　$\angle AFE=\angle ACB$

同位角が等しいから　EF∥BC

よって　$\angle EFD=\angle CDF$　……①

また，小さい方の円において，接弦定理により

$\angle CDF=\angle DAF$　……②



$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角より　$\angle EFD=\angle EAD$　……③

①，②，③ から　$\angle DAF=\angle EAD$

すなわち，$\angle BAD=\angle CAD$ であるから，AD は ∠BAC の二等分線である。　終

$\boxed{11}$

FA$=x$ とおく。

円 O において，方べきの定理により

EP×EQ＝EA×EB

円 B において，方べきの定理により

EP×EQ＝EF×EG

よって　EA×EB＝EF×EG

$$(4+x)\times(4+x+2)=4\times\{4+(x+2)\times2\}$$

$$(x+4)(x+6)=4(2x+8)$$

$$x^2+2x-8=0$$

$$(x-2)(x+4)=0$$

$x>0$ より　$x=2$

よって，円 B の半径は　2＋2＝4

$\boxed{12}$

方べきの定理により

BE×BA＝BM×BD

よって　$BM=\dfrac{BE\times BA}{BD}$

CF×CA＝CD×CM

よって　$CM=\dfrac{CF\times CA}{CD}$

BM＝CM であるから

$$\frac{BE\times BA}{BD}=\frac{CF\times CA}{CD}\quad\cdots\cdots①$$

AD は∠BAC の二等分線であるから

AB : AC＝BD : DC

よって　AB×DC＝AC×BD

$$\frac{BA}{BD}=\frac{CA}{CD}\quad\cdots\cdots②$$

①，② から

$$\frac{BE\times BA}{BD}=\frac{CF\times BA}{BD}$$

したがって　BE＝CF

$\boxed{13}$

証明　左側の円について，方べきの定理により

CB×CO＝CA×CE　……①

右側の円について，方べきの定理により

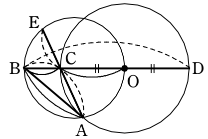
$AB^2=BC\times BD$

BD＝BO＋OD＝BO＋OC であるから

$AB^2=BC\times(BO+OC)$

$=BC\times BO+CB\times CO$

① を代入して　$AB^2=BC\times BO+CA\times CE$　終



$\boxed{14}$

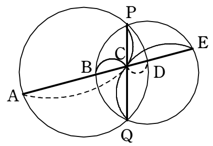
(1)　証明　左側の円について，方べきの定理により

CA×CD＝CP×CQ

右側の円について，方べきの定理により

CB×CE＝CP×CQ

よって　CA×CD＝CB×CE　終



(2)　証明　(1) を利用して

AB×CD＝(AC－BC)×CD

＝AC×CD－BC×CD

＝BC×CE－BC×CD

＝BC×(CE－CD)

＝BC×DE　終

15

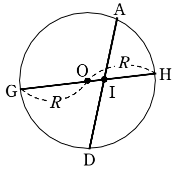
(1)　$\triangle ABC$ の外接円で，点 I を通る直径の両端を，それぞれ G，H とすると，方べきの定理により

$IA\times ID=IG\times IH$

よって

$IA\times ID=(R+OI)\times(R-OI)$

$=R^2-OI^2$



(2)　証明　$\triangle AIF$ と $\triangle EDB$ において

仮定から　　$\angle AFI=90°$

DE は $\triangle ABC$ の外接円の直径であるから

$\angle EBD=90°$

よって　　$\angle AFI=\angle EBD$　……①

AI は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$\angle BAD=\angle FAI$

$\overparen{BD}$ に対する円周角より　　$\angle BAD=\angle BED$

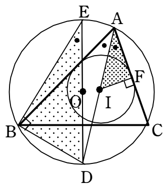
よって　　$\angle FAI=\angle BED$　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AIF\backsim\triangle EDB$

よって　　$AI:ED=IF:DB$

したがって　　$AI\times BD=ED\times IF$　終



(3)　証明　$\triangle ABI$ において，内角と外角の性質から

$\angle DIB=\angle IAB+\angle IBA$　……③

また　　$\angle DBI=\angle DBC+\angle IBC$

ここで　　$\angle DBC=\angle DAC$

$=\angle IAB$

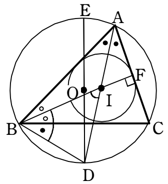
また　　$\angle IBC=\angle IBA$

よって　　$\angle DBI=\angle IAB+\angle IBA$　……④

③，④ から　　$\angle DIB=\angle DBI$

したがって，$\triangle DBI$ は二等辺三角形であり

$BD=DI$　終



(4)　(1) から　　$R^2-OI^2=IA\times ID$

これと (3) から　　$R^2-OI^2=IA\times BD$

これと (2) から　　$R^2-OI^2=ED\times IF$

$ED=2R$，$IF=r$ であるから　　$R^2-OI^2=2R\times r$

したがって　　$OI^2=R^2-2Rr$

16

(1)　証明　$AH\perp BC$ であるから，AH は円の直径である。

よって　　$\angle AEH=90°$

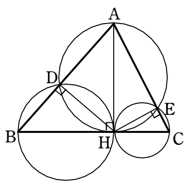
すなわち　　$\angle HEC=90°$

よって，線分 HC は，$\triangle EHC$ の外接円の直径である。

$AH\perp CH$ であるから，AH は $\triangle EHC$ の外接円の接線である。

したがって，この外接円において，方べきの定理により

$AH^2=AE\times AC$　終



(2)　証明　(1) と同様に考えると，直線 AH は $\triangle DBH$ の外接円に接するから

$AH^2=AD\times AB$

これと (1) から　　$AE\times AC=AD\times AB$

よって，方べきの定理の逆により，4 点 D，B，C，E は 1 つの円周上にある。　終

17

(1)　$\triangle PAO$ と $\triangle PRA$ において

$\angle APO=\angle RPA$（共通）……①

OP は円の直径であるから　$\angle PAO=90°$

また，$\angle PRA=90°$ であるから

$\angle PAO=\angle PRA$　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle PAO\backsim\triangle PRA$

よって　　$PA:PR=PO:PA$

$PA^2=PO\times PR$

$\angle PAO=90°$ より，PA は点 A において円 O に接するから，方べきの定理により

$PA^2=PQ\times PT$

したがって　$PO\times PR=PQ\times PT$

よって，方べきの定理の逆により，4 点 O，R，Q，T は 1 つの円周上にある。

すなわち，四角形 ORQT は円に内接する。

(2)　四角形 ORQT は円に内接するから

$\angle RQT=180°-90°=90°$

ST は円 O の直径であるから　$\angle SQT=90°$

よって，3 点 Q，R，S は一直線上にある。

18

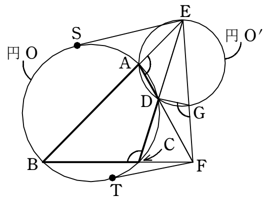
四角形 ABCD が内接している円を円 O とする。

また，$\triangle ADE$ の外接円を円 O′ とし，円 O′ と EF との交点を G とする。

円 O において，方べきの定理により

$ES^2=ED\times EC$　……①

$FT^2=FD\times FA$　……②



四角形 ABCD は円 O に内接するから

$\angle EAD=\angle BCD$

四角形 EADG は円 O′ に内接するから

$\angle FGD=\angle EAD$

よって，$\angle BCD=\angle FGD$ であるから，四角形 DCFG は円に内接する。

したがって，方べきの定理により

$ED\times EC=EG\times EF$　……③

①，③ より　$ES^2=EG\times EF$　……④

円 O′ において，方べきの定理により

$FD\times FA=FG\times FE$　……⑤

②，⑤ より　$FT^2=FG\times FE$　……⑥

④，⑥ より　$ES^2+FT^2=EG\times EF+FG\times FE$

$=(EG+FG)\times EF$

$=EF^2$

19

$\angle BEC=\angle BFC=90°$ であるから，4 点 B，C，E，F は 1 つの円周上にある。

よって，方べきの定理により

$BH\times HE=CH\times HF$　……①

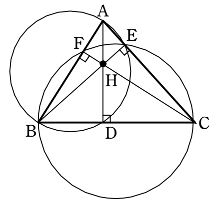
$\angle AEB=\angle ADB=90°$ であるから，4 点 A，B，D，E は 1 つの円周上にある。

よって，方べきの定理により

$AH\times HD=BH\times HE$　……②

①，② から

$AH\times HD=BH\times HE=CH\times HF$　終



20

4 点 A，D，B，E は同一円周上にあるから，方べきの定理により

$CA\times CB=CD\times CE$　……①

PA，PB は円の接線であるから

$\angle OAP=90°$，$\angle OBP=90°$

よって，四角形 APBO は円に内接するから，方べきの定理により

$CA\times CB=CP\times CO$　……②

①，② から　$CD\times CE=CP\times CO$

したがって，方べきの定理の逆により，4 点 P，O，D，E は 1 つの円周上にある。終

21

(1)　証明　$\triangle POS$ と $\triangle PSH$ において

$\angle OPS=\angle SPH$（共通）　……①

PS は円 O の接線であるから

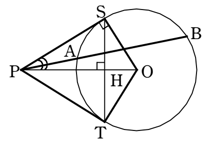
$\angle PSO=90°$

また　　$\angle PHS=90°$

よって　　$\angle PSO=\angle PHS$　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle POS\backsim\triangle PSH$　終



(2)　証明　(1) から　　$PO:PS=PS:PH$

よって　　$PH\times PO=PS^2$

また，方べきの定理により　　$PA\times PB=PS^2$

したがって　　$PH\times PO=PA\times PB$

よって，方べきの定理の逆により，4 点 A，B，H，O は 1 つの円周上にある。　終